

Autor: Michał Kapiczyński

Automatyka wstęp

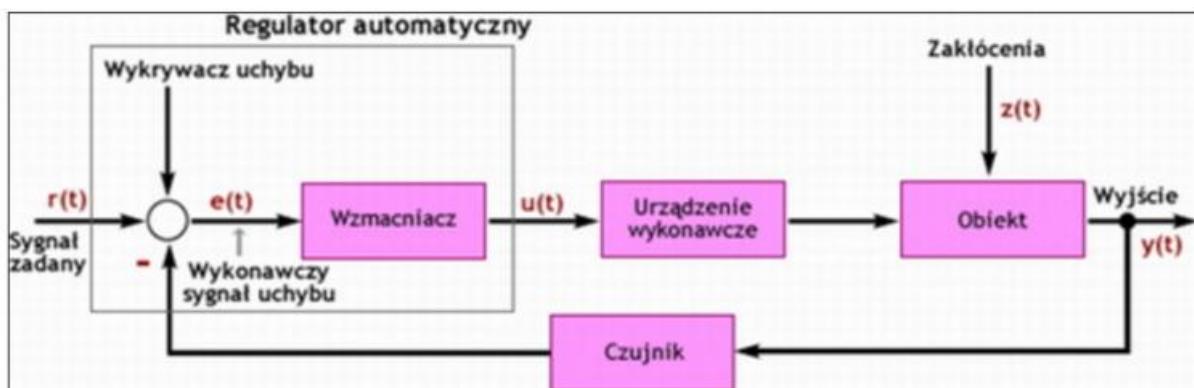
Regulatorem nazuwa się urządzenie występujące w układzie regulacji, którego zadaniem jest za pośrednictwem wytworzzonego przez siebie sygnału sterującego (sterowania) ozначенego zgodnie z terminologią techniczną symbolem CV (control value) oddziaływać na obiekt regulacji (konkretnie na jego zespół wykonawczy ZW), tak aby zapewnić pożądane zmiany wielkości regułowanej i skompensować wpływ działających na wielkość regułowaną zakłóceń.

Sygnal CV regulator wypracowuje na podstawie doprowadzonych do niego dwóch sygnałów. Sygnału PV (process value), nazywanego zmienną procesową, generowanego przez przetwornik pomiarowy PP oraz sygnału SP (set point), nazywanego wielkością zadaną, która reprezentuje pożądaną wartość wielkości regułowanej.

Sygnały te są w regulatorze porównywane, a różnica między ich wartościami nazywana jest **uchybem** lub **odchyłką regulacji** i służy do wpływu na przebieg wielkości regułowanej w celu zbliżenia jej wartości do wartości wielkości zadanej.

Układ regulacji - zamknięty układ automatyki, posiadający ujemne sprzężenie zwrotne, którego zadaniem jest sterowanie procesem

Regulacja - jest procesem celowego oddziaływania na wielkość regułowaną.



Schemat blokowy układu sterowania przemysłowego

Układ sterowania przemysłowego składa się z regulatora automatycznego, urządzenia wykonawczego, obiektu i czujnika (element pomiarowy). Sygnał wyjściowy z regulatora podawany jest na urządzenie wykonawcze, takie jak zawór, silnik elektryczny, siłownik hydrauliczny lub pneumatyczny. Urządzenie wykonawcze dokonuje przestawienia punktu pracy obiektu, stosownie do sygnału sterującego, po to aby sygnał wyjściowy pokrywał się z sygnałem zadanym. Czujnik lub element pomiarowy jest urządzeniem, które przetwarza zmienną wyjściową na inną odpowiednią zmienną, taką jak przesunięcie, ciśnienie lub napięcie, które może zostać użyte do porównania wyjścia z wejściowym sygnałem zadanym (sygnał z czujnika charakteryzuje się rzeczywistą, zmierzoną wartością danej wielkości). Element ten znajduje się w pętli sprzężenia zwrotnego układu regulacji. Sygnał zadanego również musi być przekształcony do tych samych jednostek w jakich jest sygnał sprzężenia z czujnika lub elementu pomiarowego.

Element porównujący oblicza różnicę między wartością sygnału zadanego $r(t)$ a wartością sygnału wyjściowego $y(t)$ otrzymaną z układu pomiarowego poprzez ujemne sprzężenie zwrotne. Na wyjściu elementu porównującego otrzymujemy **sygnał uchybu** $e(t)$. W dobrze zaprojektowanym układzie regulacji wartość uchybu w stanie nieustalonym (**przeregulowanie**) powinna być jak najmniejsza, natomiast w stanie ustalonym powinna być równa 0 (**uchyb ustalony**). Sygnał z elementu porównującego jest następnie przekazywany do elementu wykonawczego, który w odpowiedni sposób oddziałuje na obiekt. Dodatkowo na regułowany obiekt działać mogą **zakłócenia** $z(t)$.

W stanie ustalonym układu regulacji odchyłka regulacji jest bardzo mała lub równa zero. Pojawiające się zakłócenia lub zmiany wartości wielkości zadającej (zmiany wartości zadanej) są powodem powiększenia lub powstania odchyłki regulacji, która zostaje skompensowana przez zmiany wartości wielkości sterującej obiektem regulacji. Dla uniknięcia drgań w układzie należy nie dopuszczać do zbyt szybkich zmian wielkości sterującej obiektem.

Generalnie, układy regulacji można podzielić na:

- **układy regulacji ręcznej** - układy w których zadanie przynajmniej jednego elementu układu regulacji wykonywane jest przez człowieka

- **układy regulacji automatycznej** - układy działanie odbywa się bez ingerencji człowieka (pomijając ręczne wpisanie wartości zadanej).

Z kolei układy regulacji automatycznej dzielą się na:

- **układy regulacji stalowartościowej** - układy w których regulator ma za zadanie utrzymać wartość rzeczywistą wielkości regulowanej na poziomie wartości zadanej.

- **układy regulacji nadążającej** - układy w których regulator zapewnia nadążanie wartości wielkości regulowanej za zmianami wartości zadanej.

Transmitancja operatorowa (funkcja przejścia $G(s)$) - stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego układu przy zerowych warunkach początkowych.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Jest metodą alternatywną do równań stanu opisu układów dynamicznych.

Transmitancja określa ogólne własności stacjonarnego układu liniowego o jednym wejściu i jednym wyjściu, niezależne od rodzaju wymuszenia. Dla układu wielowymiarowego o m wejściach i n wyjściach można określić $m \times n$ transmitancji wiążących każde wyjście z każdym wejściem. Transmitancji używa się często dla uproszczenia obliczeń związanych z projektowaniem układu złożonego z wielu elementów, głównie w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów, elektronice i automatyce.

Obiekty statyczne i astatyczne

Obiekt statyczny to taki obiekt, którego odpowiedź na skok jednostkowy ma stałą wartość ustaloną, podczas gdy dla obiektu astatycznego odpowiedź skokowa w stanie ustalonym jest przebiegiem narastającym.

Przykładem obiektu statycznego może być układ termiczny, ponieważ temperatura nie może przekroczyć temperatury grzejnika, a przykładem obiektu astatycznego może być zbiornik bez odpływu, którego sygnałem wejściowym jest strumień objętościowy, a wyjściowym zapełnienie zbiornika.

Działanie proste i odwrotne regulatorów

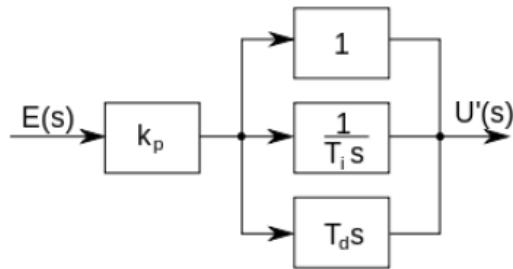
Działanie normalne:

Regulator na wzrost odchyłki regulacji reaguje wzrostem wartości sygnału sterującego, a wzrost wartości sygnału sterującego powoduje zmniejszenie wartości zmiennej procesowej.

Działanie odwrotne:

Regulator na wzrost odchyłki regulacji reaguje zmniejszeniem wartości sygnału sterującego. Wzrost wartości sygnału sterującego powoduje zwiększenie wartości zmiennej procesowej.

1. Algorytm regulacji PID, realizacja blokowa, ograniczenia.



Schemat blokowy idealnego regulatora PID

Regulator PID składa się z następujących bloków:

- blok proporcjonalny P o wzmacnieniu k_p ,
- blok całkujący I o czasie zdwojenia T_i ,
- blok różniczkujący D o czasie wyprzedzenia T_d .

Działanie poszczególnych bloków:

Blok proporcjonalny - człon proporcjonalny mnoży wielkość uchybu (różnicy między wartością zadaną sygnału, a wartością sygnału wyjściowego) przez stały współczynnik w wyniku czego otrzymujemy wartość wyjściową. Regulator proporcjonalny doprowadza do sytuacji, w której wartość zmiennej zbliża się do ustalonej wartości nastawy. Wartość zostanie ustalona na stałym poziomie, podczas gdy uchyb pozostanie niewielki, ale niezerowy.

Blok całkujący - umożliwia całkowitą eliminację uchybu, poprzez automatyczne ustawienie nastawy na sztucznie zawyżoną wartość. Polega to na zmuszeniu regulatora proporcjonalnego do próby osiągnięcia sztucznej wartości nastawy tak, aby rzeczywisty uchyb, gdy regulator zaprzestanie pracę, wynosił zero. Jest to osiągane przez stopniowe podnoszenie (lub obniżanie) sztucznej nastawy, dopóki rzeczywisty uchyb nie osiągnie wartości zerowej.

Z matematycznego punktu widzenia oznacza to całkowanie uchybu i dodawanie całki do wartości wyjściowej składnika proporcjonalnego regulatora. W rezultacie otrzymujemy regulator proporcjonalno-całkujący (Proportional-integral PI), który wciąż generuje zwiększącą się wartość wyjściową, dopóki uchyb nie zostanie wyeliminowany.

Jednak całkowanie nie zapewnia idealnej regulacji za pomocą sprzężenia zwrotnego. Jeżeli działanie całkujące jest zbyt silne regulator PI może powodować niestabilność układu. Zachodzi wtedy zjawisko niestabilności regulatora polegające na przesadnym zareagowaniu na uchyb co prowadzi do nowego, jeszcze większego uchybu z przeciwnym zwrotem. Gdy zachodzi taka sytuacja regulator w końcu zaczyna podawać na przemian maksymalne wartości dodatnie i ujemne.

Blok różniczkujący - pozwala na wyeliminowanie zjawiska niestabilności regulatora dzięki dodaniu działania różniczkującego. Składni różniczkujący w regulatorze PID działa jedynie wtedy, gdy ulega zmianie uchyb. W przypadku, gdy wartość zadana jest stała uchyb zmienia się jedynie wtedy, gdy poprzednie działania regulatora spowodowały, że zmienna osiąga wartość nastawy zbyt szybko. Spowolnienie wywołane przez akcję różniczkową zmniejsza prawdopodobieństwo przeregulowania i niestabilności regulatora. Gdy działanie różniczkujące jest zbyt silne może spowodować tak mocne wstrzymanie regulacji, że samo spowoduje przeregulowanie.

Regulator realizuje algorytm:

$$u(t) = k_r \left[\epsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \epsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right]$$

gdzie:

$\epsilon(t)$ - to uchyb regulacji

Transmitancja operatorowa idealnego regulatora PID:

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

Idealne różniczkowanie jest jednak nierealizowalne fizycznie.

Transmitancja operatorowa rzeczywistego regulatora PID:

$$G(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{K_d s + 1} \right)$$

gdzie:

k_p - wzmacnianie proporcjonalne,

T_i - czas zdwojenia (stała czasowa akcji całkującej),

T_d - czas wyprzedzenia (stała czasowa akcji różniczkującej)

Kd - stała różniczkowania

s - zmienna zespolona w przekształceniu Laplace'a

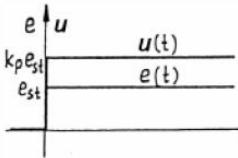
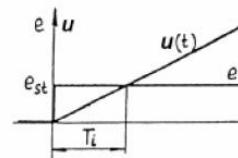
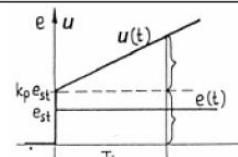
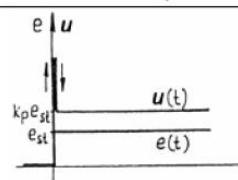
W niektórych zastosowania do odpowiedniej regulacji wystarcza działanie tylko jednego lub dwóch bloków. Przykładowo regulator PI spotyka się dość często ponieważ działanie różniczkujące jest wrażliwe na szum pomiarowy, a ewentualny brak członku całkującego może uniemożliwić osiągnięcie przez układ wartości zadanej.

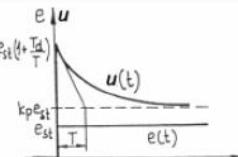
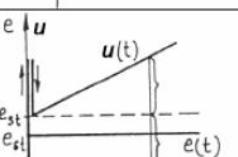
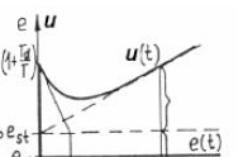
Aby regulator PID pracował jako regulator:

- P (proporcjonalny) należy ustawić $T_i = \infty$ i $T_d = 0$,
- PD (proporcjonalno-różniczkujący) należy ustawić $T_i = \infty$,
- PI (proporcjonalno-całkujący) należy ustawić $T_d = 0$

- akcja całkująca (np. w algorytmach PI, PID) jest niezbędna dla uzyskania odchyłek statycznych bliskich zeru (teoretycznie równych zeru)
- akcja różniczkująca jest zalecana w przypadku obiektów wyższych rzędów (np. procesy termiczne), gdyż pozwala na wytworzenie silnego oddziaływania korekcyjnego regulatora już przy małych odchyłkach regulacji
- regulator PI zapewnia dobrą jakość regulacji tylko przy zakłóceniami o małych częstotliwościach
- regulator PD zapewnia szersze pasmo regulacji niż regulator PI, jednak przy zakłóceniam wolnozmiennych wartości wskaźników jakości regulacji są gorsze
- regulator PID łączy zalety obu poprzednich regulatorów

Tablica odpowiedzi skokowych bloków regulatora PID wraz z ich transmitancjami i równaniami charakterystyki skokowej:

Rodzaj regulatora	Transmitancja i równanie charakterystyki skokowej	Charakterystyka skokowa
P	k_p $u(t) = k_p e_{st} l(t)$	
I	$\frac{1}{T_i s}$ $u(t) = \frac{e_{st}}{T_i} t$	
PI	$k_p(1 + \frac{1}{T_i s})$ $u(t) = k_p e_{st} (1 + \frac{1}{T_i} t)$	
PD	$k_p(1 + T_d s)$ $u(t) = k_p e_{st} [1 + T_d \delta(t)]$ gdzie: $\delta(t)$ jest funkcją Diraca	

Rodzaj regulatora	Transmitancja i równanie charakterystyki skokowej	Charakterystyka skokowa
PD rzeczywisty	$k_p(1 + \frac{T_d s}{T_s + 1})$ $u(t) = k_p e_{st} (1 + \frac{T_d}{T_s} e^{-\frac{t}{T_s}})$	
PID	$k_p(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$ $u(t) = k_p e_{st} [1 + \frac{1}{T_i} t + T_d \delta(t)]$ gdzie: $\delta(t)$ jest funkcją Diraca	
PID rzeczywisty	$k_p(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{T_s + 1})$ $u(t) = k_p e_{st} (1 + \frac{1}{T_i} t + \frac{T_d}{T_s} e^{-\frac{t}{T_s}})$	 $m = \frac{T_i T_d}{T_i^2 - T_d^2}$

Ograniczenia:

Regulatory oparte o działanie algorytmu PID cechuje prostota jednak zasadniczym problemem z nimi związany jest odpowiedni dobór nastaw regulatora, który jest ściśle powiązany z regulowanym procesem.

Dobierając nastawy zazwyczaj dąży się do jak najszybszego doprowadzenia procesu do pożądanego stanu oraz zapewnienia stabilności układu regulacji. Dodatkowo często pożądanymi skutkami regulacji są zerowa statyczna odchyłka regulacji i zerowe przeregulowanie.

Jeśli parametry regulatora PID (wzmocnienia bloków proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego) zostaną dobrane nieprawidłowo regulowany obiekt może stać się niestabilny, to znaczy jego wyjście może rozwijać się, oscylując lub bez oscylacji w sposób ograniczony jedynie przez nasycenie lub uszkodzenie mechaniczne. Oscylacje wywołują nadmierne wzmocnienie szczególnie w obecności znacznego opóźnienia.

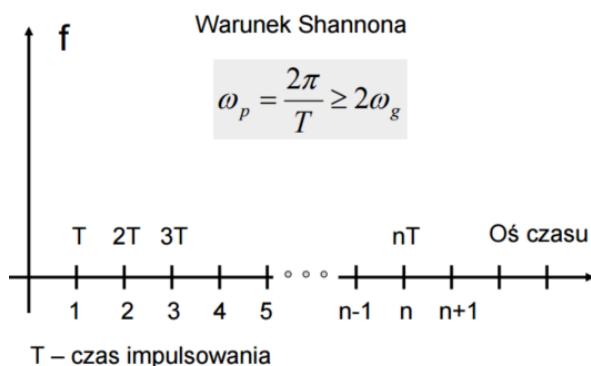
W ogólności oczekuje się, że odpowiedź układu będzie stabilna, a obiekt nie będzie oscylował dla żadnych kombinacji warunków procesu lub nastaw chociaż czasami akceptowalna (lub nawet pożądana) jest stabilność marginalna (oscylacje ograniczone).

Bywają przypadki, kiedy regulator PID nie jest w stanie sprostać oczekiwany rezultatom. Wówczas stosuje się inne rodzaje regulatorów np. regulatory rozmyte.

2. Realizacja dyskretna algorytmu PID, przełączania bezuderzeniowe akcji regulatora podczas zmian typu auto/manual.

Realizacja dyskretna algorytmu PID

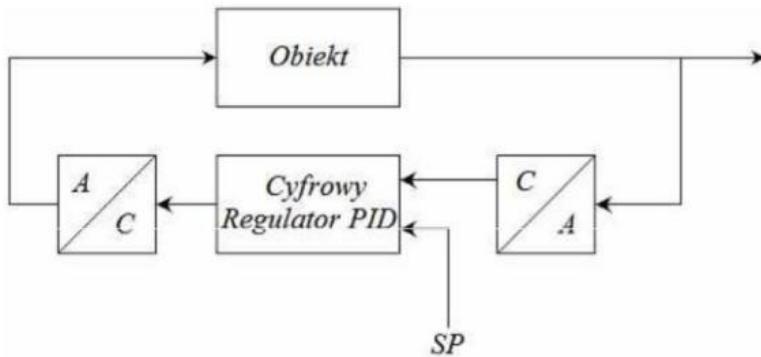
W przypadku regulacji ciągłej wielkości charakterystyczne mają postać funkcji ciągłych (niekoniecznie w całym zakresie zmienności, ale przynajmniej w określonych przedziałach). Założmy, że znamy wartości funkcji tylko w ścisłe określonych chwilach czasowych (najczęściej o stałej odległości) zwanych chwilami impulsowania.



W praktyce często mamy do czynienia z występowaniem obu rodzajów zależności: ciągłych i dyskretnych. Wówczas stosuje się rozwiązywanie będące pewnym kompromisem. Zwykle nie można uzyskać wartości funkcji dyskretnej między poszczególnymi chwilami impulsowania, zatem przyjmuje się rozwiązywanie odwrotne i dokonuje się dyskretyzacji funkcji ciągłej. Dyskretyzacja polega na odczytaniu wartości funkcji ciągłej w chwilach impulsowania. Proces ten jednak nie powinien powodować utraty informacji niesionej przez funkcję ciągłą. Podstawowy warunek prawidłowej dyskretyzacji funkcji podaje twierdzenie Shannona - Kotelnikowa, które mówi, że każdą funkcję ciągłą, która posiada transformatę Fouriera i której widmo jest ograniczone można przedstawić w dyskretnych chwilach odległych od siebie o czas T zachowując informację o wartości funkcji w dowolnej chwili, o ile $T < \frac{\pi}{\omega_g}$ ω_g - pulsacja graniczna

Taki sposób analizy sygnałów dyskretnych jest charakterystyczny dla systemów komputerowych (mikroprocesorowych) pracujących z określonym cyklem zegara. Wówczas czas impulsowania jest wielokrotnością czasu zegara podstawowego procesora.

Sprowadza się to do implementacji programów regulacyjnych dla mikrokomputera zaopatrzonego na wejściu i wyjściu odpowiednio w przetworniki A/C i C/A. Sygnałami wejściowymi i wyjściowymi są więc sygnały analogowe, a komputer wykonujący obliczenia tworzy z przetwornikami pewien układ dynamiczny, który może spełniać rolę regulatora.



Dyskretne wersje regulatorów:

Sygnał sterujący generowany przez regulator ciągły PID:

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$$

Równanie to można zapisać jako sumę oddziaływania proporcjonalnego u_p , działania całkującego u_i oraz działania różniczkującego u_D .

Składowa proporcjonalna - wyrażona jest przez iloczyn współczynnika wzmocnienia k_p i wartości uchybu $e(t)$. Odpowiednia zależność dyskretna będzie miała postać:

$$u_p(n) = k_p e(n)$$

Składowa całkująca - wyznaczana jest poprzez realizację dyskretnej operacji całkowania, czyli sumowanie poszczególnych składników funkcji dyskretnej $e(j)$ w granicach od 0 do aktualnej chwili n .

$$u_i(n) = k_p \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^n e(j)$$

Składowa różniczkująca = opisana jest wyrażeniem, które podobnie jak w przypadku całkowania ma swoje źródło w definicji pochodnej.

$$u_D(n) = k_p T_d \frac{e(n) - e(n-1)}{T}$$

Regulator PID - wersja pozycyjna

Końcową postać zależności uzyskanej przez prostą dyskretyzację zależności ciągłej na sygnał sterujący regulatora PID przedstawiający poniższy wzór:

$$u(n) = k_p \left[e(n) + \frac{T}{T_i} \sum_{j=0}^n e(j) + \frac{T_d}{T} [e(n) - e(n-1)] \right]$$

Zależność ta odnosi się do tzw. wersji pozycyjnej regulatora dyskretnego PID. W algorytmie pozycyjnym, sterowanie w k -tym okresie próbkowania wyznaczane jest w oparciu o sumę uchybów z próbkowań poprzedzających.

Algorytm pozycyjny ma zastosowanie wszędzie tam, gdzie ważne jest wyznaczenie sterowania na nowo w każdej chwili impulsowania. Algorytm wyznaczania sygnału sterującego abstrahuje od „historii” sterowania w poprzednich chwilach impulsowania. Zaletą jest tu fakt, że wartość sygnału sterującego przechowywana w pamięci komputera jest niezbędna przy nieliniowych modyfikacjach algorytmu oraz przy dodatkowych sprzężeniach korekcyjnych.

Algorytm PID - wersja przyrostowa

Innym rozwiązaniem jest wersja przyrostowa, nazywana również prędkościową. W tym podejściu sterowanie w k -tym okresie próbkowania jest przyrostem sygnału sterowania w stosunku do sterowania w $k-1$ próbce.

$$\Delta u(n) = \Delta u_p(n) + \Delta u_i(n) + \Delta u_D(n)$$

$$\Delta u_p(n) = k_p [e(n) - e(n-1)] = k_p \Delta e(n)$$

$$\Delta u_I(n) = k_p \frac{T}{T_i} \left[\sum_{j=0}^n e(j) - \sum_{j=0}^{n-1} e(j) \right] = k_p \frac{T}{T_i} e(n)$$

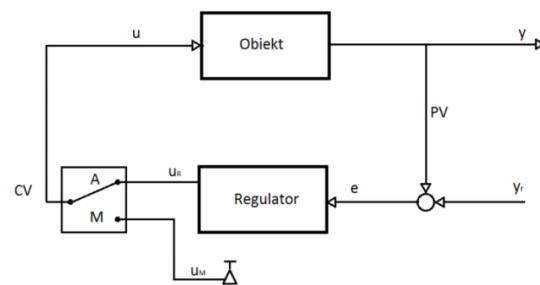
$$\begin{aligned}\Delta u_D(n) &= k_p \frac{T_D}{T} \{ [e(n) - e(n-1)] - [e(n-1) - e(n-2)] \} \\ &= k_D \frac{T_D}{T} [e(n) - 2e(n-1) + e(n-2)]\end{aligned}$$

Algorytm przyrostowy należy stosować w przypadku, gdy na wejściu sterowanego obiektu znajduje się człon całkujący. W takim przypadku realizacja całkowania poza regulatorem zwalnia pamięć komputera od uczestnictwa w procesie całkowania.

Sterowanie przy zastosowaniu algorytmu przyrostowego zapobiega przeregulowaniu całkowemu, które charakteryzuje się narastaniem wartości sumy uchybów przy nasyconym członie wykonawczym.

Przełączanie bezuderzeniowe akcji regulatora

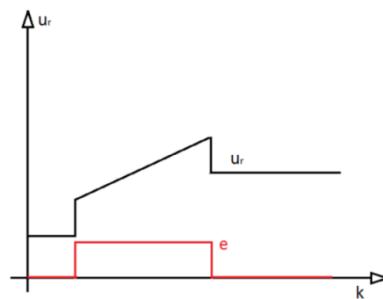
Instalacje przemysłowe wymagają by istniała możliwość regulacji w trybie ręcznym - przez operatora. Układy regulacji są zatem wyposażone w obwody pozwalające na przełączanie między trybem automatycznym (sygnał jest wyznaczany przez regulator) lub ręcznym (wprowadzany przez operatora).



Przełączanie między trybami auto i manual powinno następować w sposób bezuderzeniowy tzn. nie powinna występować żadna zmiana sygnału sterującego w momencie przełączania między trybem auto i manual. Jest to wymagane ponieważ skoki sygnału sterującego mogą prowadzić do błędów w sterowanym procesie, a nawet uszkodzeń i wypadków.

Przy przełączaniu na regulację ręczną należy ręcznie ustawić wartość sygnału sterującego $u_M = u_{reg.}$, tak aby nie nastąpił skok wartości. Przy przełączaniu z regulacji ręcznej na automatyczną wymagane jest najpierw wyrównanie przez regulator wartości sygnałów u_M i $u_{reg.}$.

Większość współczesnych regulatorów jest wyposażona w układy do przełączania bezuderzeniowego, które samodzielnie wyrównują wartość sygnału sterującego. Jednak w przypadku braku takich zabezpieczeń należy ręcznie dokonywać korekty sygnałów. Można to osiągnąć np. poprzez chwilową zmianę sygnału zadanego y_r na wejściu regulatora, a przełączenie dokonać dopiero po wyrównaniu sygnałów sterujących.

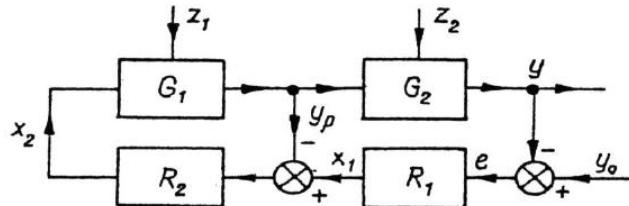


Algorytm przyrostowy jest niewrażliwy na zmianę nastaw regulatora tj. po zmianie nastaw nie wystąpi zmiana wartości wyjściowej regulatora (Δu), dlatego nie musimy go ponownie doprowadzać do punktu pracy.

$$\Delta u(k) = k_p \left(0 - 0 + \frac{T_p}{T_I} 0 + \frac{T_D}{T_p} [0 - 2 * 0 + 0] \right) = 0$$

3. Struktury i właściwości kaskadowych układów regulacji, podać przykład.

W regulacji kaskadowej dwa regulatory pracują tak że jeden z nich steruje nastawami drugiego tzn. sygnał wyjściowy jednego regulatora staje się wartością zadaną dla drugiego regulatora.



Schemat kaskadowego układu regulacji

G_1, G_2 - obiekty regulacji,

R_1 - regulator główny,

R_2 - regulator pomocniczy,

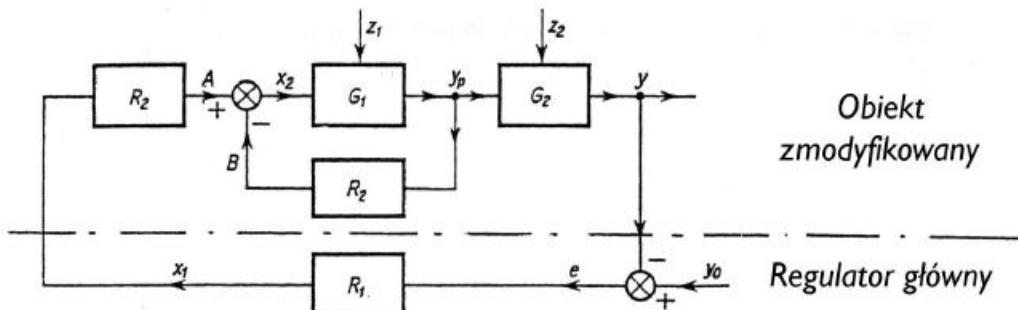
z_1, z_2 - zakłócenia.

Idea regulacji kaskadowej jest podział obiektu regulacji na dwie części „szybszą” G_1 i „wolniejszą” G_2 . Warunkiem koniecznym do spełnienia przy tworzeniu kaskadowego układu regulacji jest wyodrębnienie w obiekcie możliwe do zmierzenia wielkości pomocniczej (na schemacie oznaczonej jak y_p będącej wyjściem obiektu G_1), która szybciej reaguje na zakłócenia wejściowe niż główna wartość regułowana y .

Regulacja kaskadowa znajduje zastosowanie dla sterowania:

- obiektów wieloinercyjnych: $G(s) = \frac{k}{(Ts+1)^n}$
- obiektów o stałych rozłożonych (układy z dyfuzją, przepływem lub zjawiskami falowymi),
- obiektów z opóźnieniem transportowym w części G_2 (reakcja sygnału wyjściowego y na zmiany wartości wejściowej nie jest zauważalna przez dłuższy czas).

Zalety regulacji kaskadowej łatwo zauważać po przekształceniu ogólnego układu kaskadowego w równoważny układ jednoobwodowy z obiektem zmodyfikowanym:



Schemat równoważnego układu jednoobwodowego z obiektem zmodyfikowanym

Zalety:

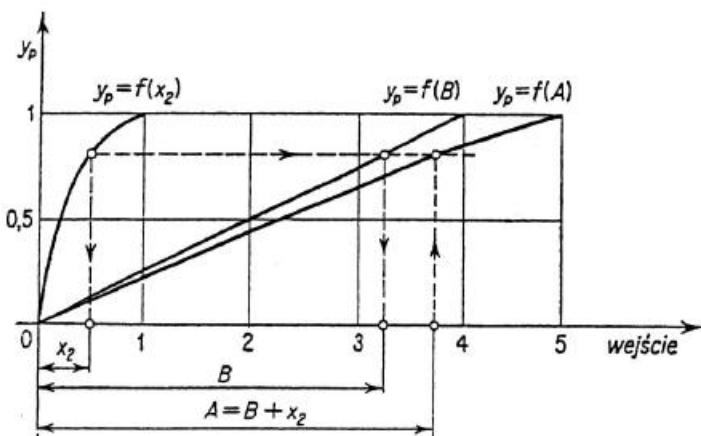
- Neutralizacja właściwości dynamicznych części G_1 obiektu:

- transmitancja obiektu pierwotnego: $G_{ob}(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$

transmitancja obiektu zmodyfikowanego: $G_{ob.zm}(s) = G_2(s) \cdot \frac{G_1(s)R_2(s)}{1+G_1(s)R_2(s)}$ zatem dla pasma częstotliwości, w którym

$|G_1(j\omega)R_2(j\omega)| \gg 1$ wynika $G_{ob.zm}(s) \approx G_2(s)$

- Linearyzacja charakterystyki statycznej części G_1 obiektu:



na rysunku przyjęto, że \mathbf{R}_2 jest regulatorem proporcjonalnym o wzmocnieniu $k_p = 4$ stąd $y_p = 0.25B$

$y_p = f(x_2)$ - pierwotna charakterystyka statyczna obiektu \mathbf{G}_1

$y_p = f(\mathbf{A})$ - zmodyfikowana charakterystyka statyczna

$y_p = f(\mathbf{B})$ - charakterystyka statyczna regulatora

$x_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, stąd $A = x_2 + B$

3. Skuteczniejsza kompensacja zakłóceń \mathbf{z}_1 wpływających na część \mathbf{G}_1 obiektu. Zakłócenie \mathbf{z}_1 kompensowanie jest $(1+|G_1(jw)|R_2(jw)|)$ razy silniej niż w układzie jednoobwodowym z regulatorem \mathbf{R}_1 .

Wady:

1. Brak poprawy jakości regulacji względem zakłócenia \mathbf{z}_2 wpływającego na część \mathbf{G}_2 obiektu.

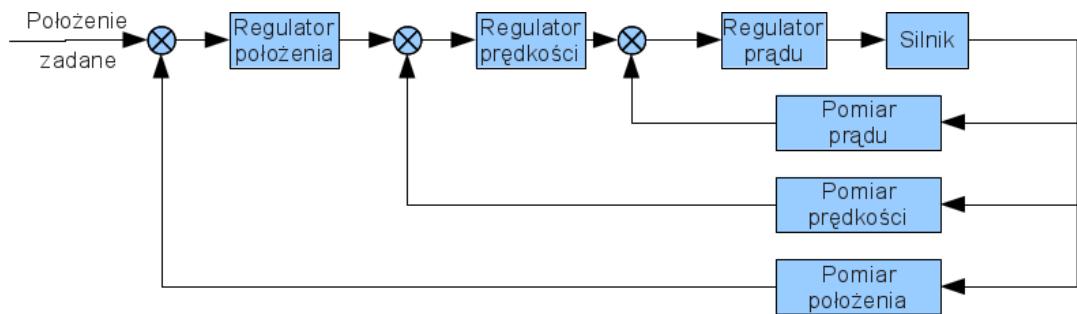
Stosowane regulatory:

Jako regulator główny zazwyczaj stosuje się regulator typu PI lub PID, z nastawami jak dla jednoobwodowego układu regulacji z obiektem zmodyfikowanym.

Jako regulator pomocniczy najlepiej sprawdza się regulator typu P lub PD, z nastawami jak dla jednoobwodowego układu z częścią \mathbf{G}_1 obiektu.

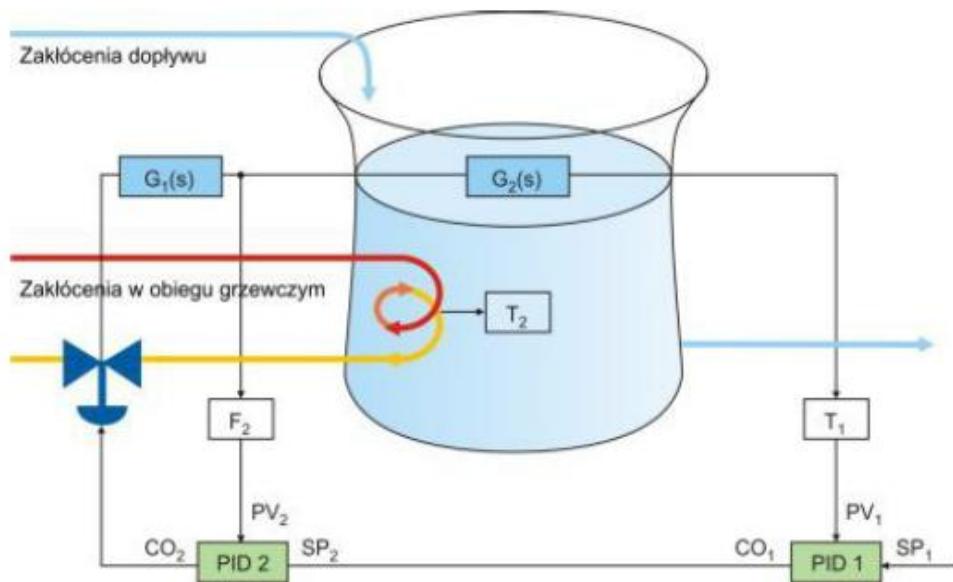
Przykłady zastosowań:

1. Regulacja położenia serwomechanizmu elektrycznego.



Regulator główny położenia wyznacza wartość zadaną dla regulatora prędkości, który następnie wyznacza wartość zadaną dla regulatora prądu.

2. Regulacja temperatury



W przedstawionym układzie wartością sterowaną jest temperatura cieczy w zbiorniku, która jest modyfikowana poprzez zawór sterujący dopływem pary wodnej do zbiornika.

Dzięki wyodrębnieniu z układu wielkości pomocniczej jaką jest przepływ pary można dla takiego zadania regulacji z powodzeniem zastosować strukturę kaskadową.

Regulator **PID2** służy do regulacji przepływu pary wodnej G_1 , natomiast **PID1** reguluje właściwą wartość wyjściową - temperaturę w zbiorniku i podaje regulatorowi **PID2** sygnał, na podstawie którego ustawiany jest przepływ pary.

5. Eksperymentalny dobór nastaw regulatora PID

Istnieje wiele metod doboru nastaw regulatorów PID, które można zasadniczo podzielić na metody oparte o znane parametry matematyczne obiektów i wymagane kryteria jakości regulacji oraz na metody eksperymentalne, które pozwalają na dobór nastaw bez dokładnej znajomości obiektu.

Do najpopularniejszych należą:

1. Metoda Zieglera-Nicholsa

- Wariant 1 - Dobór nastaw na podstawie parametrów zamkniętego układu regulacji, doprowadzonego do granicy stabilności.
- Wariant 2 - Dobór na podstawie parametrów charakterystyki skokowej obiektu regulacji (tylko dla układów ze statycznymi obiektami regulacji).

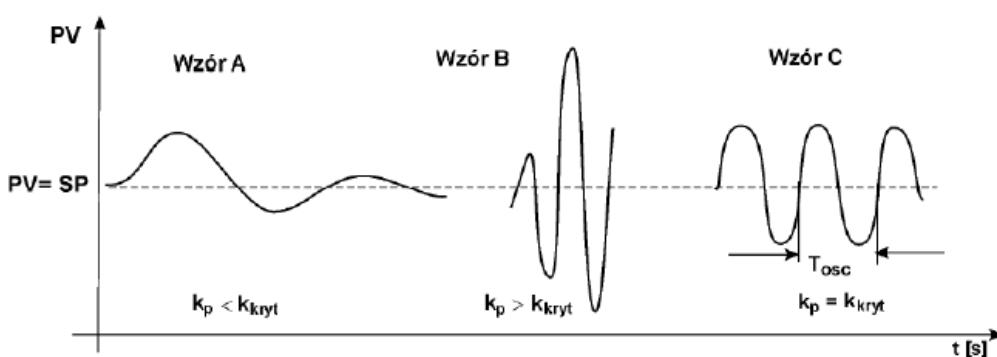
Wariant 1 - Metoda cyklu granicznego

Ważne jest, aby sygnał sterujący był jedynym sygnałem wpływającym na zmianę wielkości regułowanej.

Dobór nastaw przebiega wg kroków:

1. W trybie ręcznym, poprzez zmianę sygnału CV doprowadzić wielkość regułowaną PV do zrównania z wartością zadaną SP.
2. Ustawić regulator na działanie proporcjonalne, czyli wyłączyć ewentualne akcje I i D. Ustawić wzmacnienie $k_p > 0$.
3. Przełączyć na sterowanie automatyczne i jeżeli układ zachowuje stan równowagi przeprowadzić impulsową zmianę wartości zadanej SP. Wielkość i czas trwania impulsu należy dobrąć do dynamiki procesu. Zaleca się wartość ok. 10% zakresu zmiany PV i czas trwania również ok. 10% szacowanej stałej czasowej obiektu.
4. Należy tak manewrować wartością wzmacnienia k_p aby odpowiedź regulatora miała charakter stałych, niegasnących oscylacji jak na wykresie C.

Jeśli odpowiedź regulatora ma charakter gasących oscylacji jak na wzorze A, należy zwiększyć k_p i ponowić próbę, zaś jeśli odpowiedź ma charakter oscylacji niegaszących o zmiennej amplitudzie jak na wykresie B należy zmniejszyć wartość k_p . Jeśli w układzie wystąpią stałe, niegaszące oscylacje należy zapamiętać wartość $k_p = k_{p \text{ kryt}}$ oraz zmierzyć okres oscylacji T_{osc} .



Następnie należy obliczyć nastawy regulatora zgodnie z odpowiednim modelem tabularcznym

Algorytm regualtora	k_p	T_i	T_d
P	$0,5 \cdot k_{p \text{ kryt}}$	-	-
PI	$0,45 \cdot k_{p \text{ kryt}}$	$0,8 \cdot T_{osc}$	-
PID	$0,6 \cdot k_{p \text{ kryt}}$	$0,5 \cdot T_{osc}$	$0,12 \cdot T_{osc}$

Nastawy dobrane przy użyciu metody Zieglera-Nicholsa nie zapewniają określonego standardu jakości regulacji, pozwalają na uzyskanie przebiegów przejściowych z przeregulowaniem około 20-30% z zapasem modułu na poziomie 6dB. Dobrane nastawy są traktowane jako pierwsze przybliżenia nastaw optymalnych, które są następnie dobierane na podstawie wiedzy specjalistycznej personelu.

Wariant 2 - Metoda odpowiedzi skokowej

Ziegler i Nichols zaobserwowali, że wszystkie dane niezbędne, aby dobrać nastawy regulatora można obliczyć analizując parametry odpowiedzi skokowej.

Metodę opartą na pomiarze charakterystyk skokowych obiektu stosuje się do obiektów, których przybliżony model matematyczny można aproksymować modelem obiektu inercyjnego (wieloinercyjnego) z opóźnieniem.

Metoda polega na podaniu sygnału wymuszenia skokowego i rejestracji odpowiedzi przy otwartej linii sprzężenia zwrotnego:

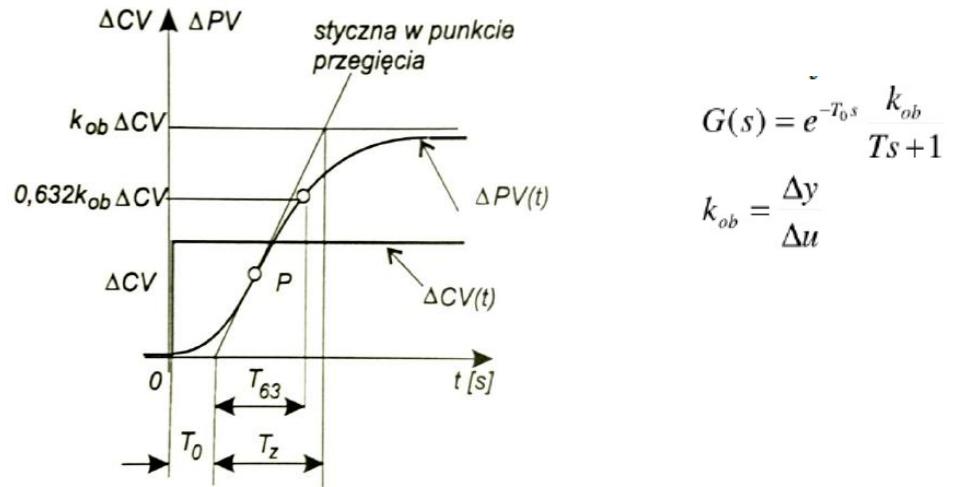
Sposób postępowania:

1. Ustawić regulator P a $k_p = 1$ lub go odłączyć.

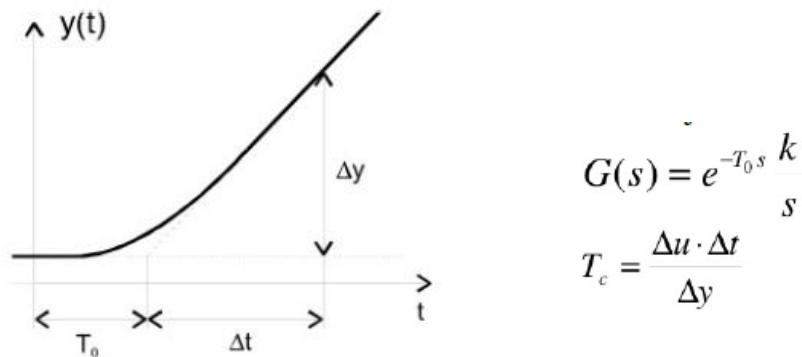
2. Przerwać pętlę sprzężenia zwrotnego.
3. Doprzedać wartość zadaną do takiej wielkości, aby na wyjściu obiektu otrzymać wartość zbliżoną do stałej,
4. Wykonac skok wartości zadanej o określonej wartości Δu
5. Zarejestrować odpowiedź obiektu $y(t)$
6. Wyznaczyć parametry charakterystyczne odpowiedzi skokowej i obliczyć nastawy

Następnie odczytuje się wzmacnianie obiektu k_{ob} i stałe czasowe T_0 i T_z po czym podstawić je do odpowiedniej tabeli.

Obiekt statyczny:



Obiekt astatyczny:



Cechy:

- Nie trzeba doprowadzać układu do granicy stabilności,
- warunkiem powodzenia jest ustalenie wartości wyjściowej w warunkach sterowania bez pętli sprzężenia zwrotnego,
- długi czas pracy obiektu bez układu regulacji (z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego),
- dobre rezultaty metody - wskaźniki jakości regulacji dla dużego zakresu zmienności parametrów modeli obiektów są wyraźnie lepsze, niż przy metodzie cyklu granicznego.

2. Metoda Pessena

Analogiczna do metody Zieglera Nicholasa z granicą stabilności. Na podstawie tak samo dobranych wartości k_{kryt} i T_{osc} oblicza się nastawy zgodnie z innym modelem:

- $k_p = 0,2 k_{kryt}$
- $T_i = 0,33 T_{osc}$,
- $T_d = 0,5 T_{osc}$.

W porównaniu z metodą Z-N zwiększa się wpływ akcji D co zapewnia korzystniejszy przebieg przy uruchamianiu układu, a więc gdy wartość odchyłki regulacji jest bardzo duża.

3. Metoda przekaźnikowa - Astroma-Hagglunda

Modyfikacja metody Zieglera-Nicholsa wprowadzona przez Astroma i Haggunda.

Cele:

- nie doprowadzić układu automatycznej regulacji do granicy stabilności,
- nie rozłączać pętli sprzężenia zwrotnego,
- nie wprowadzać dużych zmian wartości regulowanej,
- wymuszenie oscylacji o ograniczonej amplitudzie,

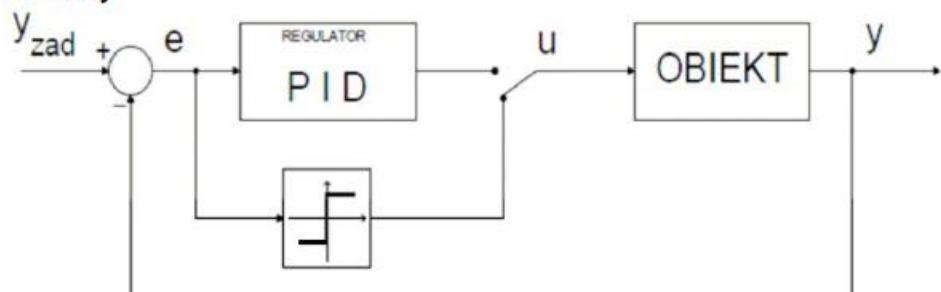
Sposób wymuszenia oscylacji:

- Zastąpienie regulatora PID regulatorem dwupołożeniowym (przekąźnikiem) o znanych właściwościach,
- pomiar parametrów wymuszonych oscylacji,
- wyznaczenie nastaw,

powrót do regulatora PID, Poza omówionymi występuje jeszcze wiele doświadczalnych metod doboru nastaw, z których warto wymienić:

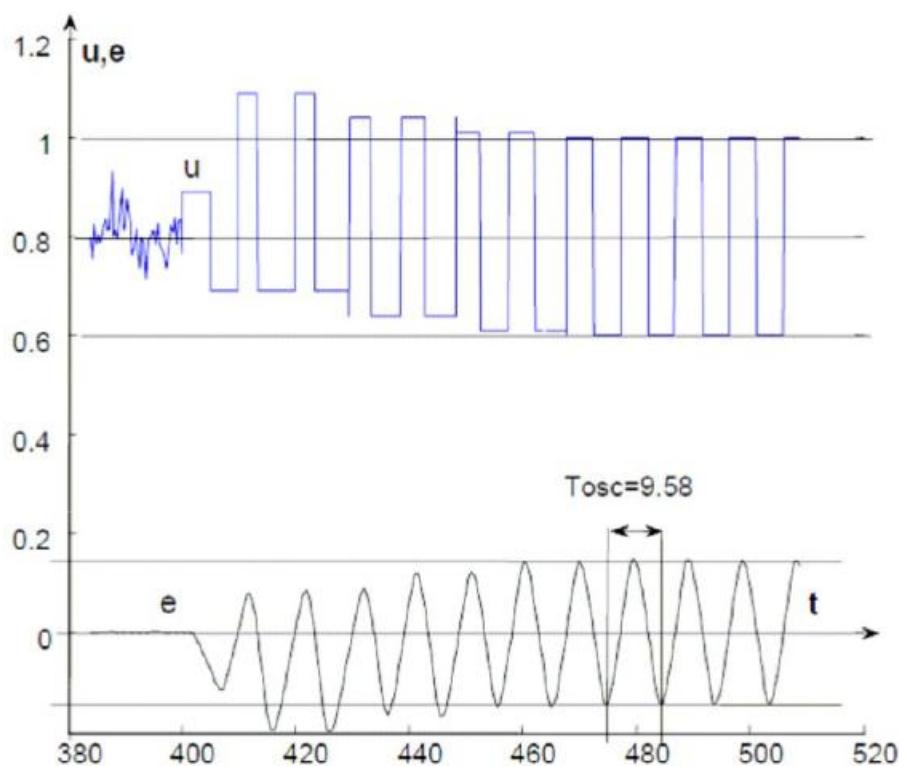
- Metodę Hassena i Offereissena oraz
- Metodę Cohena-Coona

Schemat blokowy



$$u(t) = u_{\text{sr}} \pm \text{sign}(e) \cdot B$$

Przykładowy przebieg



Metoda przekaźnikowa cechy:

- możliwość ograniczenia amplitudy oscylacji,
- duża szybkość uzyskania wyników,
- możliwość zautomatyzowania procesu doboru nastaw,
- konieczność wprowadzania układu w oscylacje,
- konieczność użycia dodatkowego regulatora dwupołożeniowego

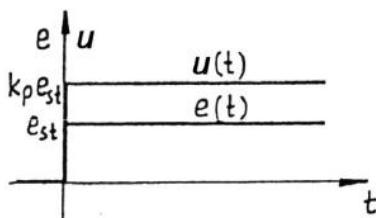
6. Odpowiedzi czasowe podstawowych regulatorów PID, czas zdwojenia i czas wyprzedzenia

Uwaga: Na obronie może paść pytanie o odpowiedź na dowolne wymuszenie, m.in. sinus, cosinus, delta diraca.

Regulator P:

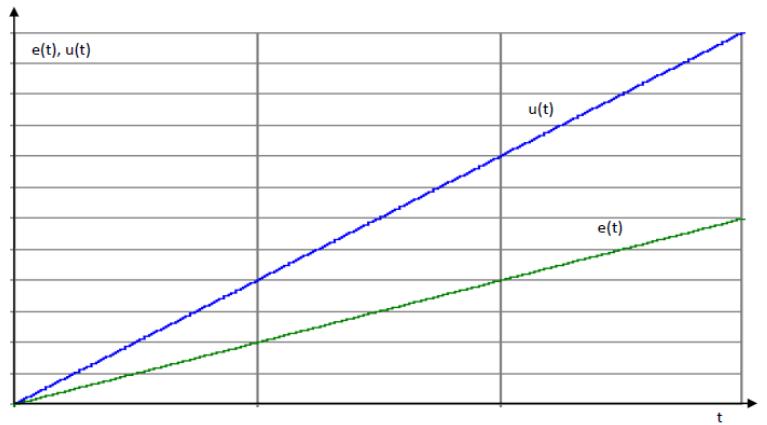
Odpowiedź regulatora na wymuszenie skokowe:

Równanie odchyłki skokowej:



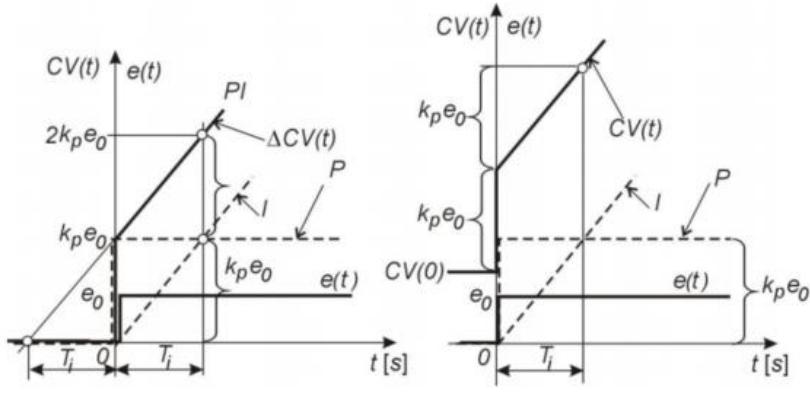
$$u(t) = k_p e_{st} \mathbf{1}(t)$$

Odpowiedź regulatora na wymuszenie liniowo narastające:



Regulator PI:

Odpowiedź regulatora PI na wymuszenie skokowe:



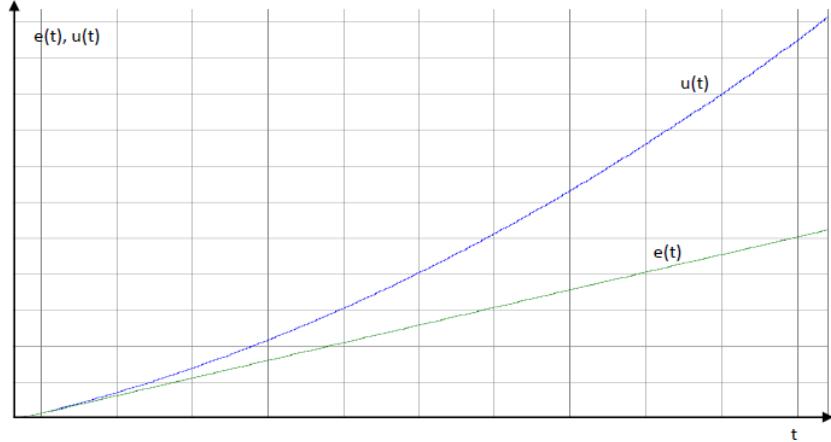
Równanie odchyłki:

$$u(t) = k_p e_{st} \left(1 + \frac{1}{T_i} t\right)$$

Czas zdwojenia T_i - wyraża intensywność działania całkującego i

definiowany jest jako czas jaki upływa od momentu wprowadzenia do regulatora wymuszenia skokowego do momentu kiedy składowa całkowa osiągnie wartość składowej proporcjonalnej, czyli sygnał wyjściowy regulatora osiągnie wartość równą podwojonej wartości sygnału wejściowego, wynikającego z działania proporcjonalnego, przy założeniu skokowego sygnału wejściowego.

Odpowiedź regulatora PI na wymuszenie liniowo narastające:

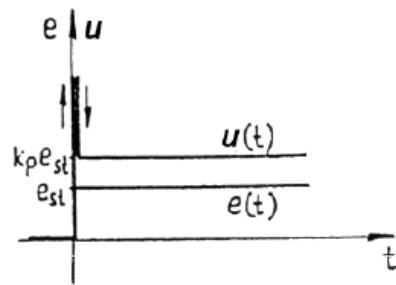


Działanie całkujące wprowadza przesunięcie fazowe -90° . (Przesunięcie sinusu w lewo).

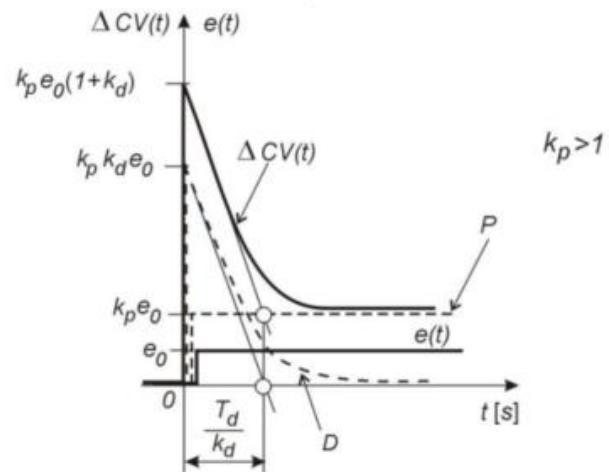
Regulator PD

Odpowiedź regulatora PD na wymuszenie skokowe:

Regulator idealny:

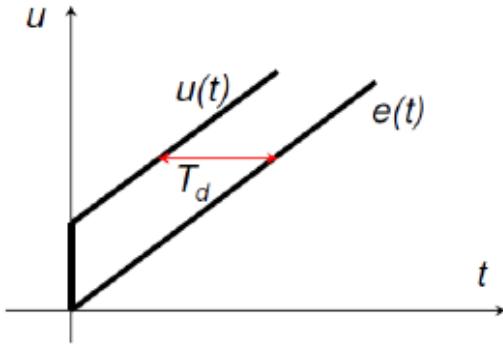


Regulator rzeczywisty:

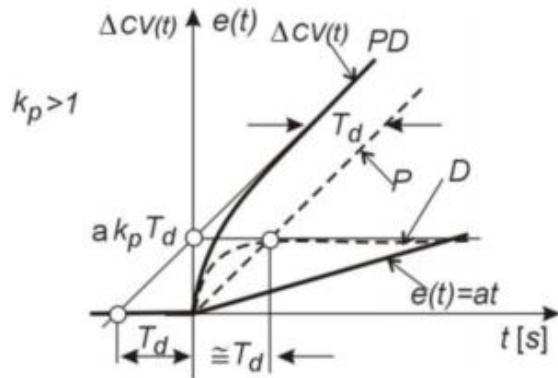


Odpowiedź regulatora PD na wymuszenie liniowo narastające:

Regulator idealny:



Regulator rzeczywisty:



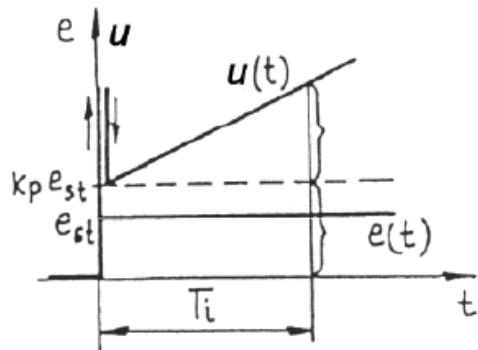
Czas wyprzedzenia - czas jaki upływa od momentu wprowadzenia na wejście regulatora wymuszenia liniowo narastającego do momentu kiedy wartość składowej P zrówna się z ustaloną wartością składowej D. Nazwa „czas wyprzedzenia” wynika z tego, że w przypadku wymuszenia liniowo narastającego wartość sygnału wyjściowego regulatora jako suma składowych P i D jest osiągana o czas T_d wcześniej w stosunku do składowej P.

Działanie różniczkujące wprowadza przesunięcie fazowe $+90^\circ$. (Przesunięcie sinusa w prawo)

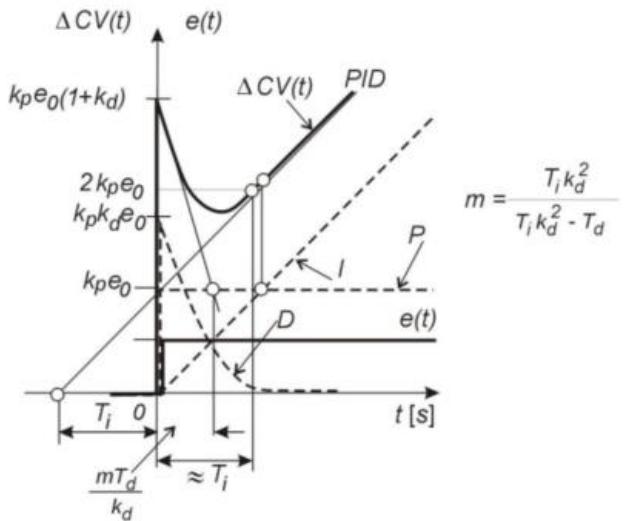
Regulator PID

Odpowiedź regulatora PID na wymuszenie skokowe:

Regulator idealny:



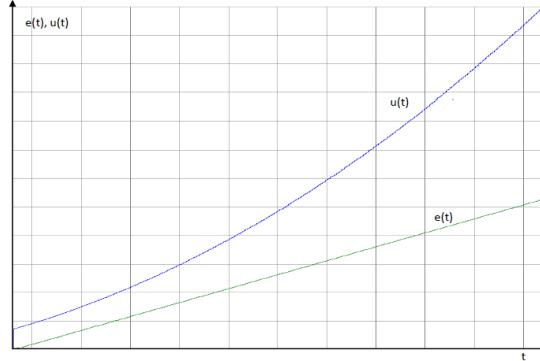
Regulator rzeczywisty:



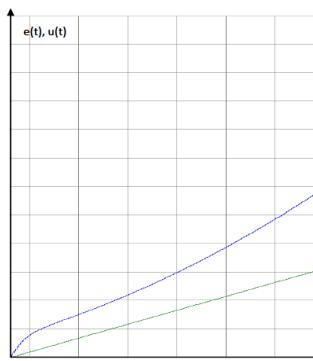
W chwili T_i składowa całkowa osiąga wartość składowej proporcjonalnej, a składowa różniczkowa praktycznie już tylko osiąga niewielką wartość bliską zero (zależnie od stałej inercyjnej T_d/k_d). Zatem w chwili $t=T_i$, przyrost ΔCV sygnału wyjściowego osiąga wartość tylko niewiele większą od $2k_p e_0$ - od podwojonej wartości przyrostu sygnału wyjściowego wynikającego z działania proporcjonalnego. Można więc w przybliżeniu przyjąć, że czas od pojawienia się odchyłki skokowej do chwili, w której przyrost sygnału wyjściowego regulatora osiągnie podwojoną wartość wynikającą z działania proporcjonalnego jest stałą czasową działania T_i). Teoretycznie, czas ten jest nieco mniejszy.

Odpowiedź regulatora PID na wymuszenie liniowo narastające:

Regulator idealny:



Regulator rzeczywisty:



Regulator PID nie będzie miał przesunięcia fazowego bo przesunięcia z działania całkującego i różniczkującego się wzajemnie likwidują.

7. Wskaźniki jakości regulacji

Zadaniem układu automatycznej regulacji jest działanie zmierzające do eliminacji lub zmniejszenia odchyłek regulacji wywołanych oddziaływaniami na układ zakłóceń lub powstających w wyniku zmian wartości zadanej. Ze względu na podstawowe zadanie układu automatycznej regulacji, jakim jest dążenie do osiągnięcia przez wielkość regulowaną wielkości zadanej, układ

regulacji musi być układem stabilnym asymptotycznie tzn. wracać po zniku wymuszenia do stanu równowagi przed wystąpieniem tego wymuszenia.

Wskaźniki jakości regulacji pozwalają ocenić efektywność układu regulacji pod kątem stawianych mu zadań. Mogą to być:

- minimalizacja odchyłki regulacji w stanach ustalonych,
- kompensacja zakłóceń,
- skrócenie do minimum czasu trwania stanów nieustalonych,
- zapewnienie określonego przebiegu procesu przejściowego.

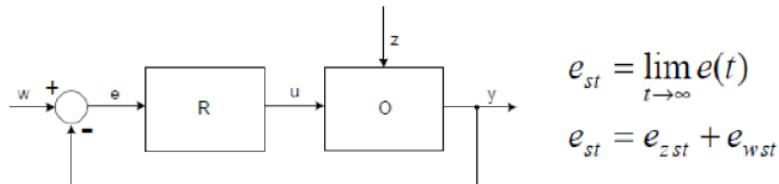
Wskaźniki jakości regulacji możemy podzielić na:

- dotyczące wymagań dokładności statycznej, czyli dopuszczalnych wartości odchyłek regulacji w stanach ustalonych (odchyłki zakłócienniowej i nadążania),
- wskaźniki dotyczące charakterystyk skokowych (przeregulowanie, czas regulacji, maksymalna odchyłka statyczna),
- częstotliwościowy wskaźnik jakości regulacji,
- całkowe wskaźniki jakości regulacji.

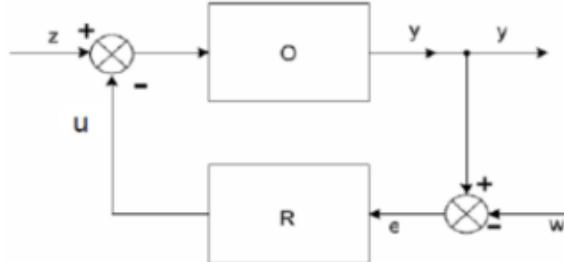
Dokładność statyczna

Ocenia wartość odchyłki statycznej, na którą składają się statyczna odchyłka zakłócienna $e_{z st}$ oraz statyczna odchyłka nadążania $e_{w st}$.

Statyczna odchyłka zakłócienna powstaje na skutek zakłóceń z na wejściu do obiektu, a odchyłka nadążania na skutek zmian wartości zadanej w na wejściu do regulatora.



Wyznaczanie wartości odchyłki:



Wartość odchyłki zakłócienniowej:

Założenia: $w_0 = const$, $w = 0 \leftrightarrow e = y$, $e_{z st} = e_{z st} = y_{st}$

$$e_{z st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_z(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e_z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\pm G_z(s) G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s) \cdot G_r(s)} \cdot z(s)$$

Wartość odchyłki nadążania:

Założenia: $z = 0$

$$e_{w st} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_w(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e_w(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_{ob}(s) \cdot G_r(s)} \cdot w(s)$$

Wartość odchyłki statycznej:

$$e(s) = \frac{\pm G_z(s) G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s) G_r(s)} z(s) + \frac{1}{1 + G_{ob}(s) G_r(s)} w(s)$$

Dla regulacji stałwartościowej określenie jakości statycznej zwykle ogranicza się do określenia dopuszczalnych bezwzględnych wartości odchyłek dla wymuszeń lub zakłóceń o stałej wartości. Formułowane są one w postaci wartości odchyłek statycznych wyrażonych w jednostkach wielkości regułowanej lub częściej w procentach:

- w przypadku odchyłki zakłócienniowej - stosunek maksymalnej bezwzględnej wartości odchyłki $e_{z st}$ do maksymalnej wartości wielkości regułowanej y_m

$$\frac{|e_{z st}|}{y_{m max}} \cdot 100\% \leq 2\% \text{ lub } 5\%$$

Analogicznie dla odchyłki nadążeniowej.

Dla regulacji nadążeniowej wymagania dotyczące dokładności statycznej mogą obejmować także odchyłki statyczne występujące podczas oddziaływań liniowo narastających i innych.

Wnioski praktyczne:

- W układzie z obiektem statycznym i regulatorem o algorytmie P lub PD wystąpi niezerowa odchyłka statyczna proporcjonalna do wielkości zakłócenia lub zmiany wartości zadanej,
- Zwiększenie wzmocnienia proporcjonalnego regulatora P lub PD zmniejsza wartość odchyłek statycznych. Jest jednak ograniczone przez stabilność układu. Przy tym samym zapasie stabilności wartość odchyłek statycznych dla regulatora PD jest mniejsza niż dla regulatora P.
- Akcja całkująca regulatora zapewnia uzyskanie zerowej odchyłki statycznej przy stałych wartościach zakłócenia lub zmiany wartości zadanej,
- Regulator P najlepiej sprawdza się w szybkim osiągnięciu wartości ustalonej.

Wskaźniki przebiegu przejściowego

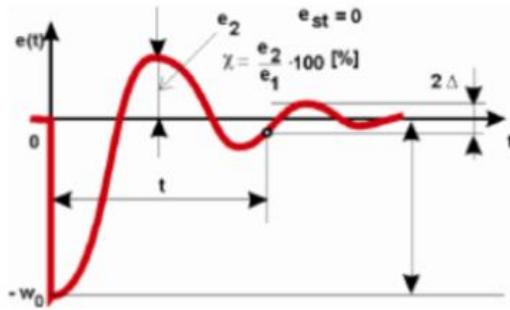
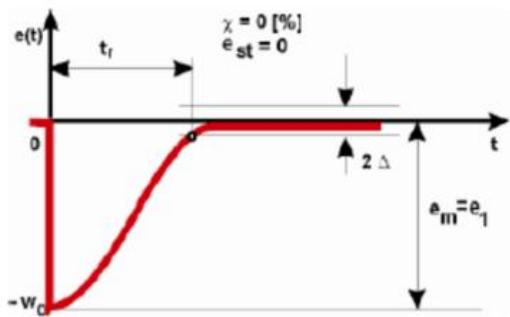
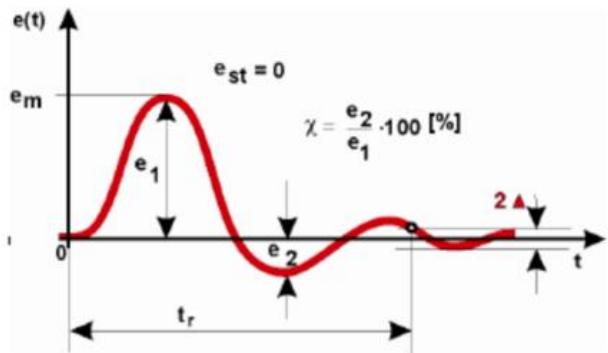
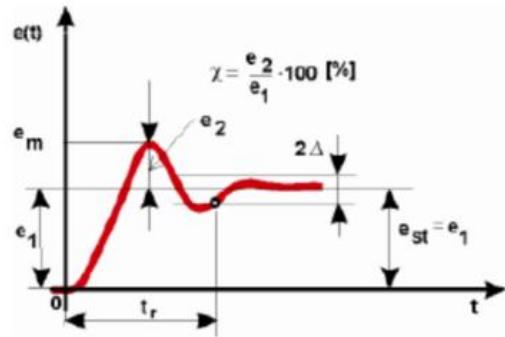
Podstawową formą oceny właściwości dynamicznych układów regulacji jest analiza przebiegów odchyłek regulacji, wywołanych przez zakłócenie skokowe lub skokową zmianę wartości zadanej.

Do wskaźników służących do oceny jakości dynamicznej należą:

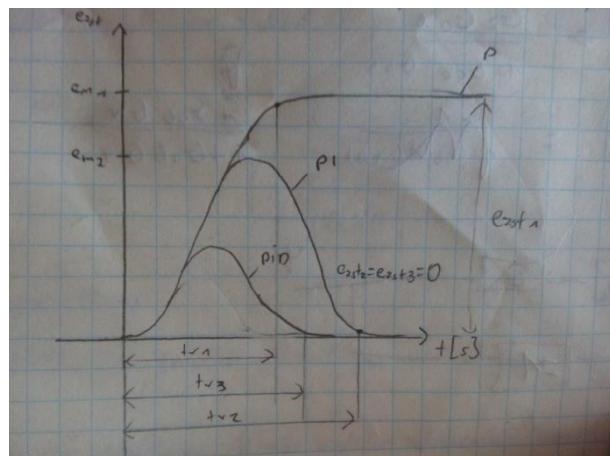
- **maksymalna odchyłka dynamiczna e_m** - maksymalna bezwzględna wartość odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego lub skokowej zmiany wartości zadanej,
- **czas regulacji t_r** - czas od chwili wprowadzenia skokowego zakłócenia lub wymuszenia do chwili, od której odchyłka regulacji nie wykracza poza przedział $\pm \Delta$ od wartości e_{zst} lub e_{wst} ($\Delta = 2 - 5\% e_m$)
- **przeregulowanie k** - wyrażony w % stosunek amplitudy drugiego odchylenia e_2 od wartości ustalonej do amplitudy pierwszego odchylenia e_1 .

$$\kappa = \left| \frac{e_2}{e_1} \right| \cdot 100 \%$$

Przykładowe przebiegi:

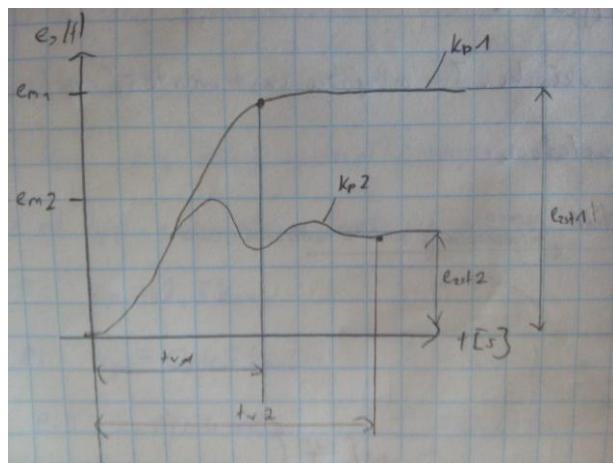


Wpływ rodzaju regulatora na przebieg (aperiodyczny) odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w = \text{const.}$



W układach z regulatorem o algorytmie P obserwuje się najkrótszy czas trwania stanu przejściowego (najkrótszy czas regulacji t_r), ale regulacja jest najmniej dokładna, gdyż odchyłka statyczna jest różna od zera oraz odchyłka dynamiczna e_m ma największą wartość. W układach z regulatorem o algorytmie PI lub PID odchyłki statyczne są zerowe, odchyłki dynamiczne są mniejsze od odchyłki w układzie P, przy czym odchylka dynamiczna jest najmniejsza w przypadku regulatora PID.

Wpływ nastaw regulatora P lub PD na kształtowanie się odchyłki regulacji po wprowadzeniu zakłócenia skokowego $z(t) = 1(t)$ przy $w = \text{const.}$



Zwiększenie wzmocnienia regulatora prowadzi do zmniejszenia odchyłki statycznej oraz do zmiany charakteru przebiegu odchyłki na przebieg oscylacyjny. Dalsze zwiększanie wzmocnienia regulatora mogłoby doprowadzić do oscylacji niegasnących i utraty stabilności.

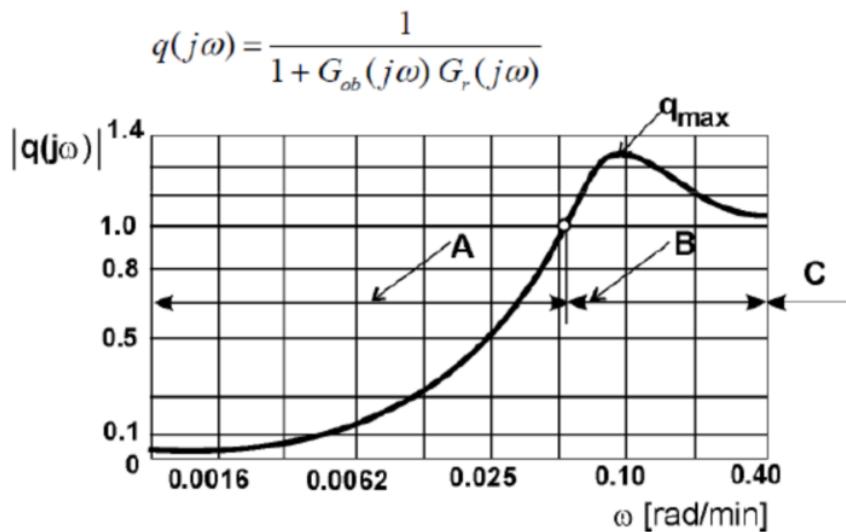
Przebiegi oscylacyjne charakteryzują się mniejszą odchyłką dynamiczną i statyczną, ale dłuższym czasem regulacji.

Częstotliwościowy wskaźnik jakości regulacji

Wskaźnik ten definiuje się jako stosunek transformaty Fouriera $e(j\omega)$ sygnału odchyłki regulacji wywołanej działaniem zakłócenia lub wymuszenia do transformaty Fouriera $e'(j\omega)$ odchyłki jaka powstała by pod wpływem takiego samego zakłócenia/wymuszenia w układzie bez toru sprzężenia zwrotnego z regulatorem.

$$q(j\omega) = \frac{e(j\omega) \text{ (z regulatorem)}}{e(j\omega) \text{ (bez regulatora)}}$$

Poprzednie wskaźniki opisują zachowania układu na wymuszenie/zakłócenie skokowe, a wrzeczywistości na układ działający niezdeterminowane zakłócenia, co powoduje że przebieg wielkości regułowanej ma charakter nieuporządkowanej fluktuacji wokół wartości zadanej. Przy projektowaniu określa się pożądane wartości modułu wskaźnika q zwykle tylko w odniesieniu do pasma pulsacji, w którym musi być odpowiednia mała jego wartość ($<<1$).



W paśmie A regulator kompensuje w różnym stopniu wpływ działających zakłóceń, w paśmie B wszystkie zakłócenia są przez regulator wzmacniane, a w paśmie C zakłócenia wywołują takie same skutki jak w układzie bez regulatora.

Całkowe wskaźniki jakości regulacji

Wskaźniki przebiegu przejściowego określają tylko wybrane cechy przebiegów odchyłek regulacji, wywołanych tylko skokowym zakłóceniem/wymuszeniem. Całkowe wskaźniki jakości w określonych sposób charakteryzują całość przebiegu przejściowego i można je stosować do oceny przebiegów przejściowych wywołanych innymi niż skokowe zakłóceniami i wymuszeniami.

Jako miarę jakości regulacji przyjmuje się wielkość tzw. pól regulacji i dąży się do ich minimalizacji. Im mniejsze pole tym lepsza jakość dynamiczna układu. Podejście to ma swoją interpretację ekonomiczną, ponieważ często straty energii lub materiału w procesach produkcyjnych są funkcją wielkości i czasu trwania odchyłki regulacji, a celem regulacji jest minimalizacja tych strat.

W zależności od struktury i spodziewanego charakteru przebiegu przejściowego wyznacza się wartości odpowiednich całek

$$\begin{array}{ll} I_1 = \int_0^{\infty} e(t) dt & I_5 = \int_0^{\infty} [e(t) - e_{st}]^2 dt \\ I_2 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt & I_6 = \int_0^{\infty} t e(t) dt \\ I_3 = \int_0^{\infty} |e(t) - e_{st}| dt & I_7 = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \\ I_4 = \left| \int_0^{\infty} [e(t) - e_{st}] dt \right| & I_8 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt \end{array}$$

4. Podstawowe właściwości sterowników PLC, sposoby programowania

PLC (ang. Programmable Logic Controller), czyli Programowalny Sterownik Logiczny. Jest to uniwersalne urządzenie mikroprocesorowe przeznaczone do sterowania pracą maszyny lub urządzenia technologicznego. Sterownik PLC musi zostać dopasowany do określonego obiektu sterowania poprzez wprowadzenie do jego pamięci żądanego algorytmu działania obiektu.

Cechą charakterystyczną sterowników PLC odróżniającą je od innych sterowników komputerowych jest cykliczny obieg pamięci programu. Algorytm jest zapisywany w dedykowanym sterownikowi języku programowania. Istnieje możliwość zmiany algorytmu przez zmianę zawartości pamięci programu. Sterownik wyposaża się w odpowiednia liczbę układów wejściowych zbierających informacje o stanie obiektu i żądaniach obsługi oraz odpowiednia liczba i rodzaj układów wyjściowych połączonych z elementami wykonawczymi, sygnalizacyjnymi lub transmisji danych.

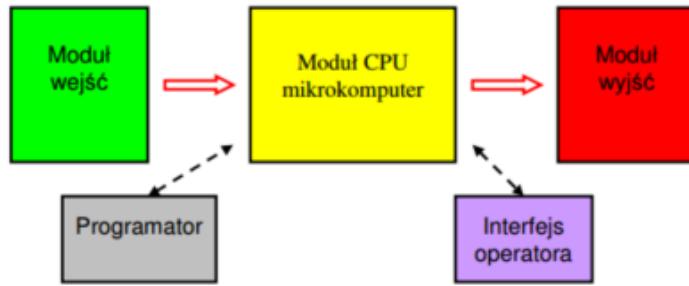
Właściwości sterowników PLC:

- **uniwersalność** - możliwość realizacji różnych algorytmów sterowania bez konieczności zmian struktury urządzeń, czy połączeń w układzie przy zmieniających się warunkach procesu sterowania,
- **programowalność** - realizacja algorytmu sterowania w postaci ciągu instrukcji wpisywanych do pamięci sterownika typu EPROM, EEPROM lub RAM. Z cechą tą związane jest opracowanie specjalnych zbiorów instrukcji uwzględniających warunki przemysłowe, w których przebiega proces.
- **funkcjonalność** - możliwość bezpośredniego połączenia z urządzeniami sterującymi, pomiarowymi i wykonawczymi
- **niezawodność** - wzajemna separacja galwaniczna układów wewnętrznych sterownika i odłączonych urządzeń zewnętrznych zapobiega przeniesieniu się zbyt dużego potencjału w stanach awaryjnych. Zwiększeniu niezawodności służy wprowadzenie programowej kontroli obwodów wejściowych i wyjściowych oraz diagnostyki systemowej i obiektywnej, zasilanie awaryjne z akumulatorów lub zasilacz awaryjnych.
- **zliczanie zdarzeń** - występują dwa rodzaje układów zliczających zdarzenia:
 - układy zliczające (liczniuki) - pracujące pod kontrolą jednostki centralnej i zmieniające swój stan po wykonaniu przez jednostkę centralną rozkazów zwiększenia lub zmniejszenia ich zawartości,
 - szybkie liczniuki - sterowane bezpośrednio przez sygnały procesowe z pominięciem jednostki centralnej,
- **rejestry** - występują w systemach PLC przetwarzających dane wielobitowe lub przystosowanych do wykonywania operacji arytmetycznych,

Ogólne zadania sterowników:

- zbieranie wyników pomiarów za pośrednictwem modułów wejściowych z analogowych i dyskretnych czujników oraz urządzeń pomiarowych,
- transmitowanie danych za pomocą modułów i łącz komunikacyjnych,
- wykonywanie programów aplikacyjnych na podstawie przyjętych parametrów i uzyskanych danych o sterowanym procesie lub maszynie,
- generowanie sygnałów sterujących, zgodnie z wynikami obliczeń tych programów i przekazywanie ich poprzez moduły wyjściowe do elementów i urządzeń wykonawczych,
- realizowanie funkcji diagnostyki programowej i sprzętowej.

Budowa sterownika:



Jednostka centralna CPU wraz z pamięcią - podejmuje decyzje i wykonuje funkcje sterowania bazując na instrukcjach programowych zawartych w pamięci.

Moduł wejść - wejścia występują w postaci cyfrowej i analogowej. Sygnały z wejść są przetwarzane do postaci sygnałów logicznych zrozumiałych dla CPU.

Moduł wyjść - wyjścia przetwarzają funkcje sterowania z CPU do takiej postaci sygnałów (cyfrowych lub analogowych), które mogą być użyte do sterowania rozmaitych urządzeń (elementów wykonawczych).

Programator - urządzenie do zaprogramowania sterownika

Interfejs operatorski - umożliwia wyświetlanie informacji procesowych i wprowadzanie nowych parametrów kontrolnych.

Szczegóły:

Procesor: sterowniki bazują na procesorach 16 lub 32 bitowych,

Pamięć operacyjna ROM - w której znajduje się system operacyjny, czyli zestaw programów sterujących i zarządzających działaniem sterownika (komunikacja z programistą, obsługa urządzeń zewnętrznych, zarządzanie danymi itp.).

Pamięć programu RAM - zapisywana pamięć podrzynająca baterijnie lub typu FLASH, w której znajdują się obszary:

- programu użytkownika (rzędu do kilkuset kB z podziałem na bloki),
- danych użytkownika, danych systemowych,
- danych o układach czasowych, licznikach i znacznikach,
- odwzorowania procesu, czyli obraz we/wy urządzeń zewnętrznych,

Moduły komunikacji - podłączanie sterownika do innych urządzeń sieci lokalnej z wykorzystaniem różnych standardów takich jak: Modbus, Profibus, ControlNet, Ethernet itd.

Moduły specjalne - np. szybkie liczniki, moduły pozycjonowania osi, moduły wejściowe dla czujników temperatury, moduły regulatora PID lub innych regulatorów itp.

Cykl pracy sterownika:

1. Inicjalizacja cyklu
2. Obsługa wejść
3. Wykonanie programu sterującego
4. Obsługa wyjść
5. Obsługa programatora
6. Obsługa innych podłączonych urządzeń
7. Diagnostyka

Realizacja regulatora PID:

Początkowo nie było możliwości realizacji regulatora o algorytmie PID, ale z biegiem czasu stało się to możliwe poprzez odpowiedni blok (zapewniony przez twórcę), poprzez własne programy realizujące algorytm PID, poprzez moduły rozszerzeń.

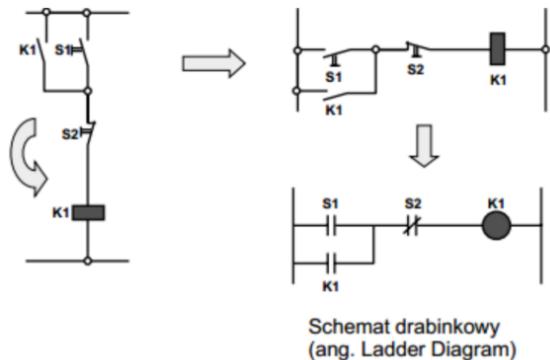
Sposoby programowania sterowników:

Ogólne informacje dotyczące języków programowania PLC stanowią norma IEC 61131-3. Ujednolica ona koncepcję programowania PLC (unormowała języki programowania, aby użytkownik mógł swobodnie przechodzić z jednego systemu PLC na inny). W normie określono dwie grupy języków: języki tekstowe i graficzne:

- **LD (Ladder Diagram)** - **logika drabinkowa** - schemat zbliżony do klasycznego rysunku technicznego, elektrycznego (język graficzny),
- **FBD (Function Block Diagram)** - **diagram bloków funkcyjnych** - sekwencja linii zawierających bloki funkcyjne (język graficzny),
- **ST (Structured Text)** - **tekst strukturalny** - język zbliżony do Pascal'a,
- **IL (Instruction List)** - **lista instrukcji** - rodzaj assemblera,
- **SFC (Sequential Function Chart)** - **sekuracyjny ciąg bloków** - sekwencja bloków programowych z warunkami przejścia,

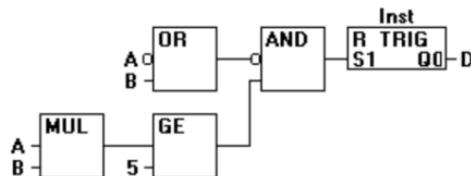
Programowanie drabinkowe

Schemat składa się z dwóch równoległych listw (masy i zasilania). Pomiędzy nie umieszczamy interesujące nas elementy takie jak: styki, cewki, timery, liczniki itp. Niemożliwe jest bezpośrednie połączenie obu listw.



Struktura graficzna tego języka ułatwia proste przenoszenie schematów przekaźnikowych na program sterowania PLC.

Programowanie FBD (Diagram bloków funkcyjnych)



Realizacja programu w tym języku jest oparta na przepływie sygnału. Wykorzystuje on gotowe bloki funkcyjne lub procedury przygotowane przez producenta w postaci bibliotek. Program tworzy się poprzez łączenie bloczków, które symbolizują funkcje logiczne (od lewej do prawej), poprzez wybór odpowiedniego bloku i umieszczenie w odpowiednim miejscu obwodu. Funkcje te są widziane w edytorze programu jako prostokąty z opisanyimi zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi.

Schemat bloków funkcyjnych SBD jest szczególnie chętnie stosowany w grupie najprostszych sterowników PLC, dla których jest to z reguły jedyny dostępny język programowania.

Programowanie poprzez tekst strukturalny

Tekst strukturalny stosowany jest w grupie najmocniejszych sterowników. Jest on podobny do języków wyższego poziomu typu Pascal. Podstawowymi elementami tego języka są operatory matematyczne (+, -, *, /) itp.) oraz pętle (IF, WHILE, DO, itd.). Jest bardziej przejrzysty od języka IL, ale skompilowany program jest dłuższy i wolniejszy.

```

if [upcontrol] then
    newvalue := value + upstep;
else
    if [downcontrol] then
        newvalue := value - downstep;
    else
        newvalue := value;
    end_if;
end_if;

if [newvalue > MAX_COUNTER] then
    newvalue := MAX_COUNTER;
end_if;
if [newvalue < MIN_COUNTER] then
    newvalue := MIN_COUNTER;
end_if;

a updown := newvalue;

```

Programowanie poprzez listę instrukcji

Język bardzo przypominający assempler. Język ten składa się z sekwencji instrukcji, z których każda jest zapisywana w oddzielnym wierszu. W instrukcji znajduje się zwykle nazwa operatora oraz ewentualnie modyfikatory i jeden lub kilka operandów. Operandami są stale lub zmienne. Wyniki bieżących operacji przechowywane są w akumulatorze, przez co język ten jest określany językiem zorientowanym akumulatorowo).

Lista instrukcji

0001	LD	Start
0002	AND	Process1
0003	OR	Manual_stir
0004	ANDN	stir_complete
0005	ST	Stir
0006		
0007	JMPCN	en_temp0
0008		
0009	LD	147
0010	MOVE	
0011	ST	Process_code
0012		
0013		en_temp0:
0014	LD	start
0015	AND	Process2
0016	OR	Manual_clean
0017	ST	CIP_P1
0018		
0019	JMPCN	en_temp1
0020		
0021	LD	247
0022	MOVE	
0023	ST	Process_code
0024		
0025		en_temp1:
0026	LD	start
0027	AND	Process3
0028	OR	Manual_drain
0029	ANDN	tank_empty
0030	ST	Drain
0031		
0032	JMPCN	en_temp2
0033		
0034	LD	347
0035	MOVE	
0036	ST	Process_code
0037		
0038		en_temp2:
0039		

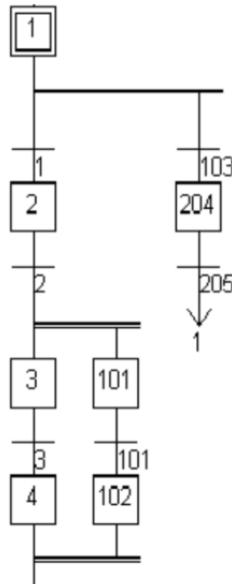
Źródło: Bosch Rexroth i Control Engineering

Programowanie poprzez sekwencyjny ciąg bloków

Język ten jest podstawowym językiem zdefiniowanym w normie IEC 1131-3. Opisuje on operacje, wykorzystując prostą reprezentację graficzną dla poszczególny kroków procesu i warunków nazywanych tranzycjami.

Program w SFC składa się z *kroków*, do których są przypisane akcje, oraz *przejścia*, łączących kroki. Do przejść są przypisane warunki logiczne. Przejście SFC może mieć jeden lub więcej kroków wejściowych oraz jeden lub więcej kroków wyjściowych. W trakcie wykonania programu każdy krok może być aktywny lub nieaktywny. Jeden lub więcej kroków (*kroki inicjujące*) są aktywowane przy rozpoczęciu wykonania programu. Kilka kroków może być aktywnych jednocześnie, dzięki czemu SFC pozwala opisywać algorytmy równolegle sterowania logicznego.

Akcje, przypisane do kroków, mogą być opisane jako proste operacje na zmiennych logicznych albo jako podprogramy, wyrażone w języku SFC, ST lub innych językach normy IEC 61131-3. Do akcji są przypisane *kwalifikatory działań*, które określają sposób, w jaki akcja będzie wykonywana - ona może być m.in. wykonana jednokrotnie przy aktywizacji kroku, cyklicznie dopóki odpowiedni krok jest aktywny, lub z opóźnieniem.



Sterowniki PAC - to urządzenia łączące elastyczność PC z funkcjonalnością i odpornością PLC. Sterownik PAC to połączenie architektur sprzętowych i programowych jednostek PC i PLC w jednej solidnej obudowie.

8. Metody opisu liniowych układów dynamicznych

Co to jest układ liniowy dynamiczny?

Układ liniowy - układ, w którym zachowana jest zasada superpozycji.

Zasada superpozycji - mówi, że odpowiedź układu przy działaniu sumy wymuszeń jest równa sumie odpowiedzi przy działaniu tych wymuszeń oddzielnie.

$$y(u_1 + u_2) = y(u_1) + y(u_2)$$

Układ dynamiczny - układ, którego wyjście nie zależy tylko od wejścia, ale też od charakteru procesu przejściowego i stanu układu w chwili początkowej

Uwaga Wnuka: Czy funkcja liniowa $y = x + 1$ jest układem liniowym?

Odp. Nie bo nie spełnia zasady superpozycji.

$$y(x_1) = x_1 + 1 \quad y(x_2) = x_2 + 1$$

$$y(x_1) + y(x_2) = x_1 + x_2 + 2 \quad y(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

$$y(x_1) + y(x_2) \neq y(x_1 + x_2)$$

Układami liniowymi są te równania liniowe, które przechodzą przez punkt $(0,0)$.

Układy rzeczywiste zazwyczaj są nieliniowe, ale dla uproszczenia opisu matematycznego przeprowadza się ich linearyzację, co pozwala na sformułowanie przybliżonego opisu liniowego, ważnego w otoczeniu wybranego punktu pracy charakterystyki statycznej.

Opis matematyczny układu dynamicznego sprowadza się do podania związku między wektorem sygnałów wejściowych i wyjściowych.

Metody opisu:

1. Opis różniczkowy

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

gdzie:

- y - wielkość wyjściowa
- u - wielkość wejściowa
- t - czas

a_i, b_j - stałe współczynniki Założenie $n \geq m$. Równanie różniczkowe opisuje model układu z czasem ciągłym.

2. Opis różnicowy

Równanie różnicowe to dyskretny odpowiednik równania różniczkowego

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

3. Opis transmitancyjny ciągły

Transformata Laplace'a jest jednym z narzędzi matematycznych służących do rozwiązywania liniowych równań różniczkowych zwyczajnych. W porównaniu z metodą klasyczną metoda transformaty operatorowej przekształca równanie różniczkowe zwyczajne w równanie algebraiczne, którego zmienna jest operator Laplace'a „ s ”. Wówczas w celu uzyskania rozwiązania w dziedzinie operatora s przekształca się równanie algebraiczne przy użyciu prostych reguł matematycznych, a ostateczne rozwiązanie równania różniczkowego uzyskiwane jest poprzez zastosowanie odwrotnej transformaty Laplace'a.

Funkcja musi spełniać warunek:

Wówczas transformatę Laplace'a się definiuje:

$$\int_0^{\infty} |f(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

stosunek

Transmitancja operatorowa $G(s)$ układu (obiektu) liniowego określa

transformaty wielkości wyjściowej $\mathbf{Y}(s)$ do transformaty wielkości wejściowej $\mathbf{U}(s)$, przy założeniu zerowych warunków początkowych.

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

$$L\left\{ \frac{d^n y}{dt^n} \right\} = s^n y(s) \quad \begin{array}{l} \text{przy zerowych warunkach} \\ \text{początkowych} \end{array}$$

Wykorzystując transformatę Laplace'a związek ten można zapisać w postaci równania operatorowego:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

lub w postaci transmitancji operatorowej:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Transmitancja operatorowa $G(s)$ jest funkcją wymierną zmiennej zespolonej s i ma tę właściwość, że w rezultacie pomnożenia transformaty sygnału wejściowego $U(s)$ przez transmitancję $G(s)$ otrzymuje się transformatę sygnału wyjściowego $Y(s)$ odpowiedzi układu.

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Znając postać transmitancji operatorowej układu można obliczyć przebieg odpowiedzi $y(t)$ układu na dowolne wymuszenie $u(t)$ przy wykorzystaniu odwrotnego przekształcenia Laplace'a.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\}$$

4. Opis transmitancyjny dyskretny

Transformata Z jest odpowiednikiem transformaty Laplace'a stosowanym do opisu i analizy układów dyskretnych.

Ponieważ w układach dyskretnych czas jest zmienną nieciągłą podstawowe równanie stanu układu ma postać równania różnicowego, a nie różniczkowego. Niech równanie różnicowe ma postać:

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \dots + a_1y(k+1) + a_0y(k) = b_m u(k+m) + \dots + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do układów impulsowych daje w efekcie nieskończone szeregi, co zwykle nie jest wygodne w obliczeniach dlatego transmitancja operatorowa układów dyskretnych opiera się o **przekształcenie Z**. Transmitancją impulsową układu dyskretnego nazywa się stosunek transformaty Z odpowiedzi układu do transformaty Z sygnału wejściowego, przy zerowych warunkach początkowych. Transmitancja impulsowa, ze zmienną zepsoloną z, odpowiadająca powyższemu równaniu różnicowemu ma więc postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

5. Opis ciągły we współrzędnych stanu

Stan obiektu można opisać pewną ilością zmiennych, charakteryzujących zachowanie się układu dynamicznego, zwanych **współrzędnymi stanu $x(t)$** . Liczba współrzędnych stanu jest równa rzędowi równania różniczkowego opisującego obiekt.

Wektor stanu układu dynamicznego to minimalny zbiór współrzędnych stanu wystarczający łącznie ze znajomością wielkości wejściowych do określenia zachowania się układu w dowolnym momencie.

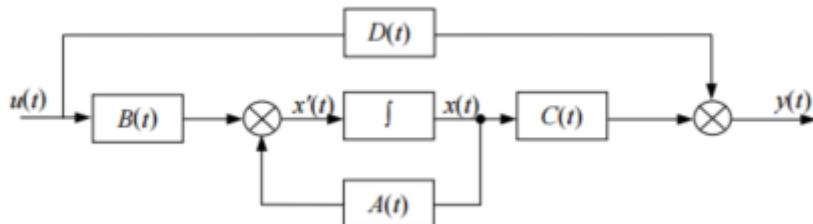
Zmiana stanu obiektu zależy od jego stanu w danej chwili i sterowania, a związek ten opisuje tzw. **równanie stanu**.

i uzupełnia go o równanie wyjścia:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) && \text{równanie stanu} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) && \text{równanie wyjścia} \end{aligned}$$

gdzie:

- A** - macierz układu (stanu), reprezentująca dynamikę systemu,
- B** - macierz sterowania, reprezentująca oddziaływanie sterowania na system,
- C** - macierz wyjścia, pokazująca w jaki sposób są transformowane zmienne stanu na zmienne wyjściowe,
- D** - macierz transmitancyjna układu,
- x(t)** - wektor zmiennych zależnych,
- u(t)** - wektor wymuszeń wejściowych,
- y(t)** - wektor wielkości wyjściowych.



Schemat blokowy układu

Metodę analizy obwodu opartą na sformułowaniu, a następnie rozwiązaniu układu równań różniczkowych pierwszego rzędu (równań stanu) nazywamy metodą zmiennych stanu.

Zmienne stanu, a transmitancja operatorowa:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

Wyznaczanie wektora transformat operatorach zmiennych stanu:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) = \frac{(sI - A)_{\text{adj}}B}{\det(sI - A)}U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})_{\text{adj}} \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}$$

adj - macierz dodatkowa

6. Opis dyskretny we współrzędnych stanu

Opis dyskretny można uzyskać stosując aproksymację na podstawie modelu we współrzędnych stanu z czasem ciągłym stosując metodę prostokątów lub trapezów:

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + BU(k) \\ Y(k) &= CX(k) + DU(k) \end{aligned}$$

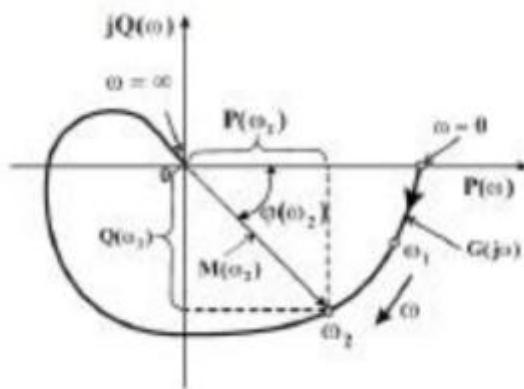
7. Opis częstotliwościowy ciągły

Jeżeli na wejście elementu lub układu liniowego stabilnego wprowadzone zostanie wymuszenie sinusoidalne o stałej częstotliwości, to na wyjściu po zaniknięciu przebiegu przejściowego ustali się odpowiedź sinusoidalna o tej samej częstotliwości, ale w ogólnym przypadku o innej amplitudzie i fazie niż wymuszenie. Charakterystyki częstotliwościowe określają zachowanie elementu lub układu przy wszystkich częstotliwościach wymuszenia, podając stosunek amplitud odpowiedzi do wymuszenia oraz przesunięcie fazowe między odpowiedzią, a wymuszeniem jako funkcję częstotliwości. Podstawę charakterystyk częstotliwościowych stanowi transmitancja widmowa:

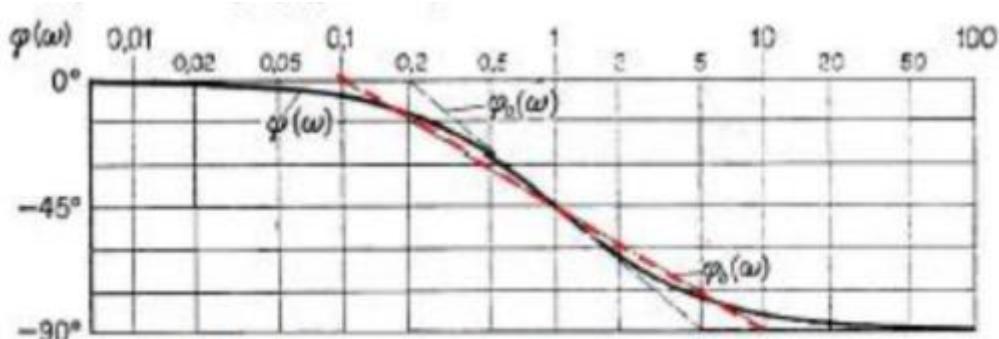
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G(s)_{s=j\omega} \\ G(j\omega) &= P(\omega) + jQ(\omega) \end{aligned}$$

Na podstawie transmitancji widmowej otrzymuje się:

- charakterystykę amplitudowo fazową:

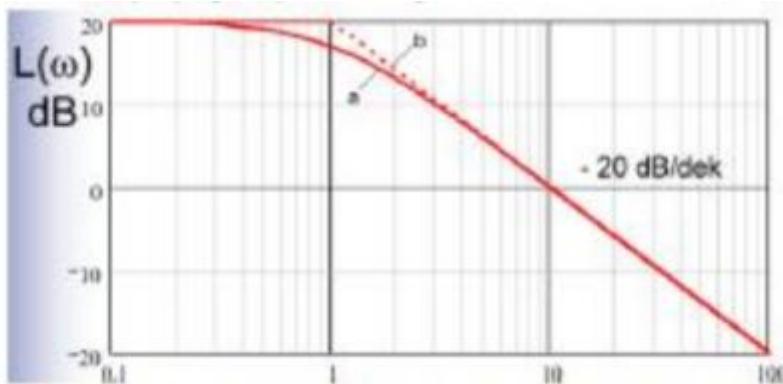


- logarytmiczną charakterystykę fazową:



Rysunek 2. Charakterystyka fazowa elementu inercyjnego I rzędu

- logarytmiczną charakterystykę amplitudową:



Rysunek 3. Charakterystyka amplitudowa elementu inercyjnego I rzędu

Uwaga Wnuka Dlaczego spadek wynosi 20db na dekadę?

Dla elementu inercyjnego I rzędu mamy:

Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{Tj\omega - 1}{Tj\omega - 1} = \frac{-k + jkT\omega}{-T^2\omega^2 - 1} = \frac{k - jkT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

Stąd:

$$Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log M(\omega) = 20 \log \sqrt{[P(\omega)]^2 + [Q(\omega)]^2} \\ L(\omega) &= 20 \log \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$L(\omega) = 20 \log k - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

Stosując przybliżenie mamy:

$$\begin{array}{ll} \text{Dla: } & \omega < 1/T \quad L(\omega) = 20 \log k \\ & \omega > 1/T \quad L(\omega) = 20 \log k - 20 \log T\omega \end{array}$$

Stąd spadek 20dB/dek.

Analogiczne wyprowadzenie można przeprowadzić dla elementu całkującego i różniczkowego.

M - moduł

8. Opis częstotliwościowy dyskretny

$$G(j\omega) = G(z)|_{z=e^{j\omega T_p}} \text{ dla } \omega < \frac{2\pi}{T_p}$$

Wyznaczone charakterystyki mają taki sam sens jak dla układów z czasem ciągłym: wyznaczają wzmacnianie amplitudy i przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem sygnału sinusoidalnego podanego na wejście układu.

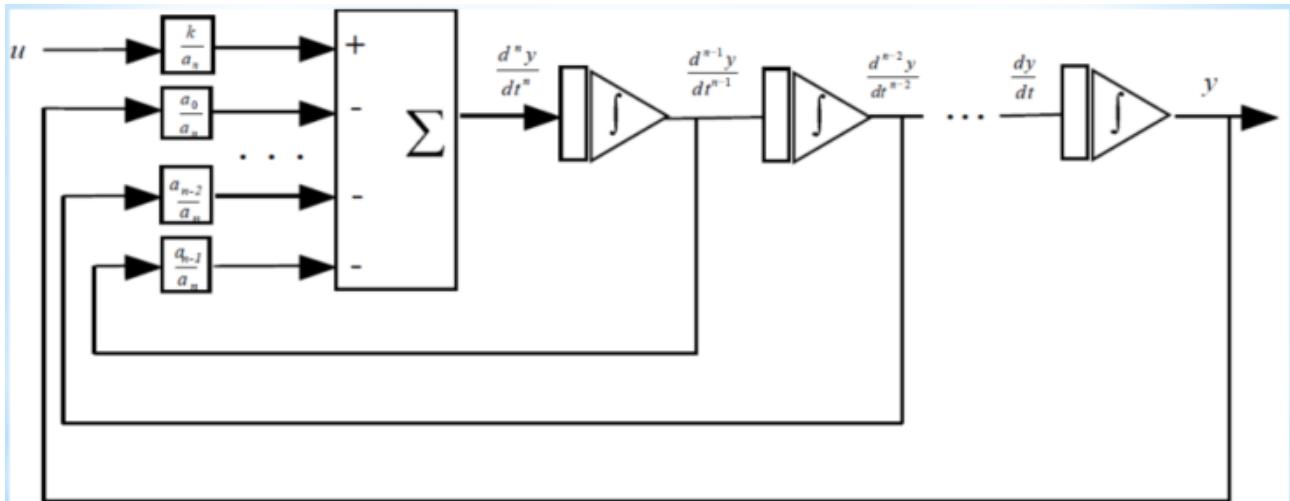
9. Opis metodą schematu operacyjnego

Metoda graficzna:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = ku$$

Krok 1

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \frac{k}{a_n} u - \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} - \dots - \frac{a_1}{a_n} \frac{dy}{dt} - \frac{a_0}{a_n} y$$



9. Wyznaczanie przybliżonego opisu dynamiki układów liniowych.

Co to jest układ liniowy dynamiczny?

Układ liniowy - układ, w którym zachowana jest zasada superpozycji.

Zasada superpozycji - mówi, że odpowiedź układu przy działaniu sumy wymuszeń jest równa sumie odpowiedzi przy działaniu tych wymuszeń oddzielnie.

$$y(u_1 + u_2) = y(u_1) + y(u_2)$$

Układ dynamiczny - układ, którego wyjście nie zależy tylko od wejścia, ale też od charakteru procesu przejściowego i stanu układu w chwili początkowej

Układy dynamiczne opisuje się równaniami różniczkowymi.

Podział modeli:

- Fizyczne,
- Analogowe,
- Matematyczne - matematyczny zapis wiążący wartości sygnału, który określamy jako wyjście z obiektu i znanych, sygnałów, które mają wpływ na wartości tego wyjścia,

Klasyfikacja modeli matematycznych:

- analityczne,
- empiryczne:
 - czynne,
 - bierne,

Układy rzeczywiste zazwyczaj są nieliniowe, ale dla uproszczenia opisu matematycznego przeprowadza się ich linearyzację, co pozwala na sformułowanie przybliżonego opisu liniowego, ważnego w otoczeniu wybranego punktu pracy charakterystyki statycznej.

Linearizację stosuje się ponieważ metody analizy obiektów dla układów liniowych są znacznie bardziej rozwinięte niż dla układów nieliniowych, a w wielu zastosowaniach opis liniowy jest opisem wystarczająco dokładnym.

Poza tym nie istnieją metody rozwiązywania dowolnych nieliniowych równań różniczkowych.

Sposoby opisu układów liniowych:

1. Opis równaniami różniczkowymi
2. Opis transmitancyjny - transmitancja operatorowa
3. Opis we współrzędnych stanu
4. Opis częstotliwościowy
5. Opis metodą schematu operacyjnego

Modele układów wyznacza się zazwyczaj na podstawie odpowiedzi układu na wymuszenie skokowe:

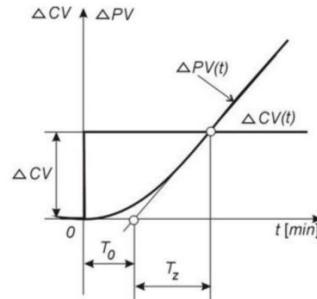
Obiekty astatyczne

Obiekty statyczcz

a) Metoda sty

$$G_{ob}(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{1}{T_z s} e^{-T_0 s}$$

$$G_{ob}(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)}$$



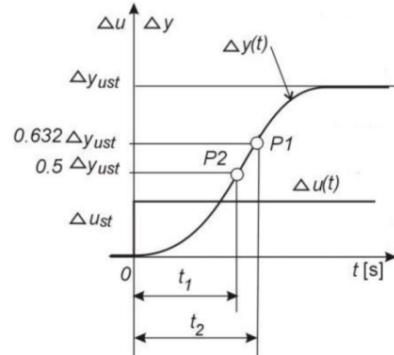
Obiekty statyczne

b) Metoda siecznej

$$G_{ob}(s) = \frac{\Delta y(s)}{\Delta u(s)} = \frac{k_{ob}}{T_z s + 1} e^{-T_0 s}$$

$$T_0 = \frac{t_1 - t_2 \ln 2}{1 - \ln 2} \quad k_{ob} = \frac{\Delta y_{st}}{\Delta u_{st}}$$

$$T_z = t_2 - T_0 = t_2 - \frac{t_1 - t_2 \ln 2}{1 - \ln 2}$$



Dokonuje się również wyznaczania modelu poprzez simulację polegającą na:

1. Wstępnym dobraniu modelu metodami analitycznymi
2. Doliczeniu na wejście symulatora tego samego sygnału, który jest na wejściu rzeczywistego obiektu,
3. Porównaniu wyjść,
4. Wprowadzeniu korekt do modelu analitycznego,
5. Powtarzaniu kroków 2-4, aż do otrzymania zadowalających wyników.

10. Kryteria stabilności układów liniowych

Jednym z podstawowych wymogów stawianych układom automatyki jest ich stabilność. Istnieje wiele definicji stabilności układów dynamicznych, opisanych przy pomocy równań różniczkowych. Przytoczę teraz jedną z nich:

Stabilność - O układzie możemy mówić, że jest stabilny, gdy układ ten wytrącony ze stanu równowagi (rozpatrywanego punktu pracy P) powraca do niego (do pewnego stanu K) po ustaniu działania czynników (zakłóceń z), które go z tego stanu wytrąciły.

Układ jest **stabilny asymptotycznie** jeśli po zaniknięciu ograniczonego zakłócenia **z**, które spowodowało wytrącenie z rozpatrywanego punktu pracy P powraca do tego samego stanu równowagi P, który zajmował przed pojawiением się zakłócenia.

W dalszej części zostaną podane najczęściej stosowane kryteria stanowiące warunki konieczne i dostateczne stabilności układów liniowych. Zaczniemy od omówienia warunku podstawowego:

Rozważmy układ zamknięty opisany za pomocą następującego równania różniczkowego:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 u$$

lub odpowiadającej mu transmitancji:

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, n \geq m$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności asymptotycznej układu opisanego transmitancją jest, aby pierwiastki równania charakterystycznego (mianownika) miały ujemne części rzeczywiste.

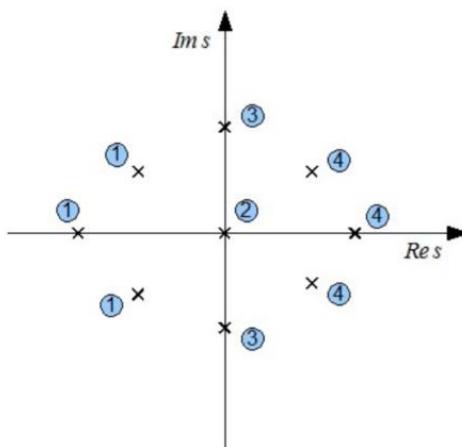
$$R(s_k) < 0$$

gdzie:

s_k - pierwiastki równania charakterystycznego układu

W przypadku, gdy chociaż jeden pierwiastek równania charakterystycznego ma część rzeczywistą dodatnią układ jest niestabilny.

Jeżeli równanie charakterystyczne ma pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie oraz jednokrotne na osi liczb urojonych, to w układzie będą występować drgania o stałej amplitudzie. Układ znajduje się wówczas na granicy stabilności czyli nie jest stabilny asymptotycznie.



Na powyższym rysunku przedstawione jest rozmieszczenie pierwiastków równania charakterystycznego (biegunów) na płaszczyźnie zespolonej s dla układów liniowych stabilnych asymptotycznie, niestabilnych oraz znajdujących się na granicy stabilności.

Kolejnymi numerami oznaczone są pierwiastki równań charakterystycznych pewnych układów liniowych:

- Układ liniowy, który posiada wyłącznie pierwiastki równania charakterystycznego oznaczone jako **1** jest stabilny asymptotycznie,
- Układ liniowy, który posiada pierwiastki równania charakterystycznego oznaczone jako **1** oraz **2** lub **3** znajduje się na granicy stabilności,

- Układ liniowy, który posiada pierwiastki równania charakterystycznego oznaczone jako 4 (może posiadać też pierwiastki 1,2,3) jest niestabilny.
- Układ liniowy, który posiada pierwiastek podwójny równania charakterystycznego w punkcie 2 jest niestabilny.

W przypadku badania stabilności układów liniowych opisanych przy pomocy równań różniczkowych wyższych rzędów wyznaczanie pierwiastków równania charakterystycznego może być kłopotliwe. Stosuje się wówczas jedno z kryteriów ułatwiających określenie stabilności. Przy czym należy pamiętać, że wszystkie kryteria wywodzą się z warunku podstawowego.

Dalej omówię najczęściej stosowane kryteria stabilności:

- kryterium Hurwitz'a,
- kryterium Nyquista,
- logarytmiczne kryterium Nyquista.

Kryterium Hurwitz'a

Kryterium to należy do grupy kryteriów algebraicznych i można je sformułować następująco:

Równanie charakterystyczne układu o transmitancji:

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

posiada wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1. Warunek I (warunek konieczny, ale niedostateczny) - wszystkie współczynniki równania charakterystycznego układu istnieją i mają jednakowy znak.

$$a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_0 > 0,$$

2. Warunek II - podwyznaczniki Δ_i od $i=2$ do $i=n-1$ wyznacznika głównego Δ_n są większe od zera.

Wyznacznik Δ_n utworzony jest ze współczynników równania charakterystycznego w następujący sposób:

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

podwyznaczniki Δ_i mają postać:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix}, \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix}, \dots$$

Przy pomocy tego kryterium można stwierdzić zarówno stabilność asymptotyczną jak i nieasymptotyczną. Stabilność nieasymptotyczna zachodzi wtedy, gdy w równaniu charakterystycznym współczynnik $a_0 = 0$.

$$G(s) = \frac{1}{3s^3 + 2s^2 + \beta s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3s^2 + 2s + \beta} \rightarrow \frac{1}{s^2} \text{ jest niestabilne}$$

Jeśli druga część iloczynu jest stabilna to powyższy układ będzie stabilny nieasymptotycznie.

Kryterium Nyquista

Kryterium Nyquista umożliwia badanie stabilności układu zamkniętego na podstawie przebiegu charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego.

Układ otwarty otrzymuje się przez "rozpięcie" sprężenia zwrotnego w miejscu węzła sumacyjnego. Transmitancje takiego układu następnie można policzyć jako iloczyn wszystkich transmitancji występujących w układzie zamkniętym.

Kryterium - Możemy rozróżnić dwa przypadki:

I przypadek: Układ otwarty jest stabilny

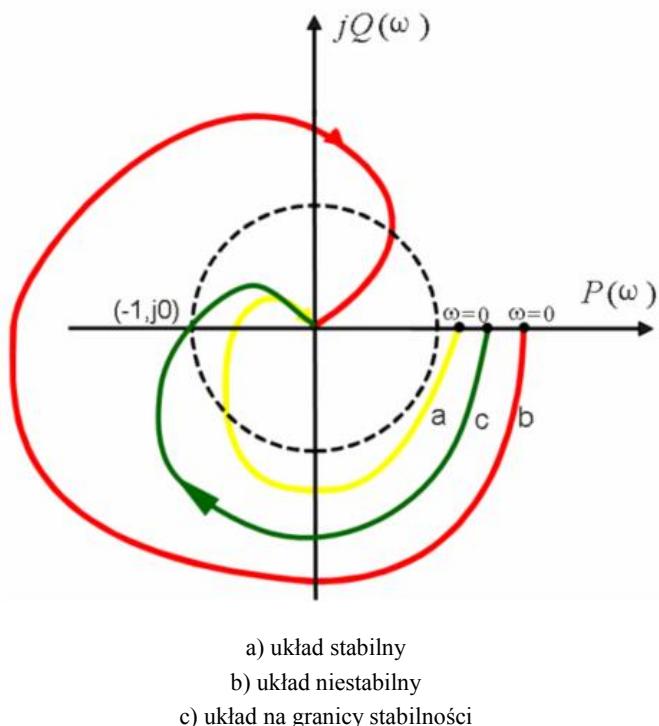
Jeżeli układ otwarty jest stabilny to układ zamknięty jest też stabilny jeżeli charakterystyka amplitudowo-fazowa odpowiadającej mu układu otwartego, dla pulsacji od 0 do $+\infty$ nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

II przypadek: Układ otwarty jest niestabilny

Jeżeli otwarty układ regulacji jest niestabilny i ma m pierwiastków swego równania charakterystycznego w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s, to po zamknięciu będzie on stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego dla pulsacji od 0 do $+\infty$ okrąża m/2 razy punkt $(-1, j0)$.

W pewnych przypadkach wygodniej jest posługiwać się tzw. regułą lewej strony, która mówi, że układ zamknięty jest stabilny jeżeli przy wzroście ω od 0 do $+\infty$ punkt $(-1, j0)$ znajduje się w obszarze po lewej stronie wykresu $G_o(j\omega)$.

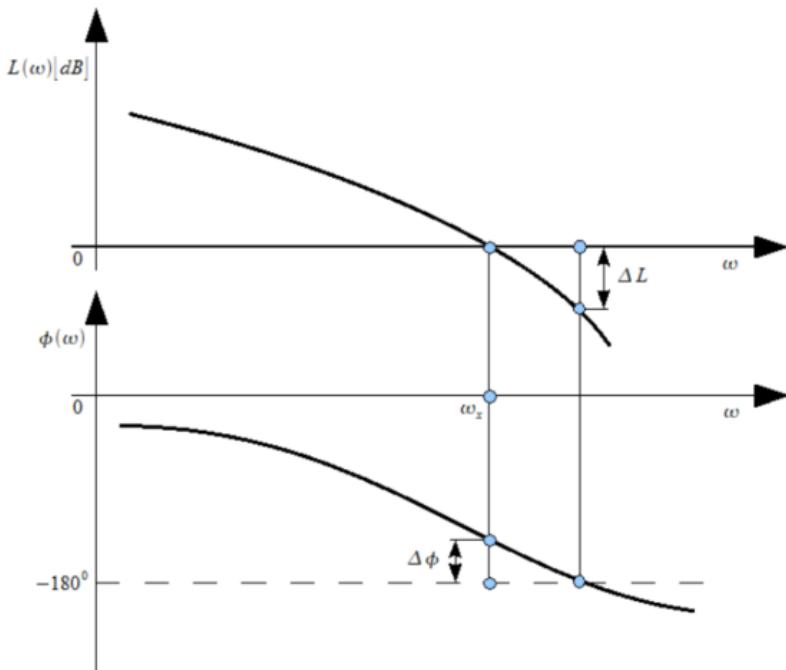
W praktycznych zastosowaniach kryterium Nyquista jest szczególnie przydatne w przypadku, gdy układ otwarty jest stabilny. Można wtedy korzystać z przebiegu charakterystyki $G_o(j\omega)$ układu otwartego zdjętej doświadczalnie, co pozwala na badanie stabilności także układu, którego opis matematycznie nie jest znany.



Logarytmiczne kryterium Nyquista

Z kryterium Nyquista wynika bezpośrednio następujący warunek stabilności:

Zamknięty układ regulacji automatycznej jest stabilny wtedy, gdy logarytmiczna charakterystyka amplitudowa układu otwartego ma wartość ujemną przy pulsacji odpowiadającej przesunięciu fazowemu -180° .



Rys. 1.17 Przykładowe charakterystyki amplitudowa oraz fazowa: ΔL - zapas modułu, $\Delta\phi$ - zapas fazy

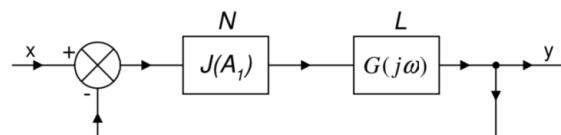
Reprezentacja graficzna pozwala na sprawdzenie stabilności układu oraz wyznaczenie liczbowych wartości zapasu modułu ΔL oraz zapasu fazy $\Delta\phi$. Wartości parametrów zależą od rodzaju układu oraz jego warunków pracy, ale zwykle przyjmuje się, że:

$$\Delta L = 6 - 12 \text{ dB}$$

$$\Delta\phi = 30^\circ - 60^\circ$$

11. Zastosowanie metody funkcji opisującej do badania stabilności układów zawierających ograniczenia elementu wykonawczego

Zamknięty układ z jednym elementem nieliniowym (np. elementem wykonawczym) można przedstawić następująco:



gdzie:

N - część nieliniowa (np. element wykonawczy),

L - część liniowa

Do badania stabilności wykorzystam kryterium Nyquista, zatem rozważę układ otwarty opisany poniższą transmitancją widmową:

$$G_0(A_1, j\omega) = J(A_1) \cdot G(j\omega),$$

gdzie:

A₁ - jest amplitudą sygnału sinusoidalnego na wejściu obiektu nieliniowego,

ω - jest pulsacją sygnału sinusoidalnego na wejściu obiektu nieliniowego,

J(A₁) - jest tzw. funkcją opisującą elementu nieliniowego

Funkcję opisującą definiujemy jako stosunek pierwszej harmonicznej wyjścia układu nieliniowego do amplitudy jego wejścia. Ponieważ układ jest nieliniowy to kształt sygnału na wyjściu nie musi być sinusoidalny (może to być np. sinusoida z obciętymi wierzchołkami). Dlatego stosujemy przybliżenie przy pomocy pierwszej harmonicznej. Warto zauważyć, że wartość amplitudy wyjścia jest zależna od amplitudy sygnału wejściowego (dla obiektów nieliniowych nie musi to być zależność nieliniowa). Aby określić funkcję opisującą dla konkretnego sygnału należy obliczyć pierwszą harmoniczną wyjścia układu w zależności od A_1 (amplitudy sygnału na wejściu), do czego wykorzystuje się szeregi Fouriera. W praktyce jednak dla najpopularniejszych obiektów nieliniowych możemy po prostu odczytać ją z odpowiednich tablic.

Ze względu na to, że część liniowa obiektu ma zwykle charakter inercyjny (czyli zachowuje się jak filtr dolnoprzepustowy) stosowanie przybliżenia za pomocą pierwszej harmonicznej jest dosyć dokładne.

Z kryterium Nyquista wiemy, że układ jest stabilny jeżeli układ otwarty mu odpowiadający jest stabilny oraz charakterystyka układu otwartego nie okrąża punktu $(-1,0)$. Wobec tego drgania krytyczne osiągnięte zostają przy spełnionym warunku:

$$G_0 + 1 = 0.$$

stąd:

$$G_0(A_1, j\omega) = -1$$

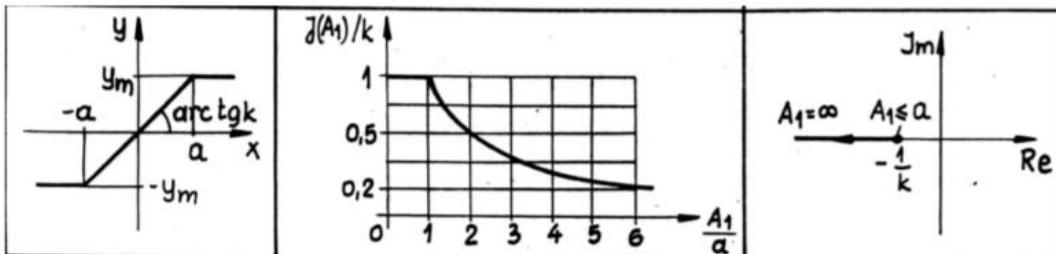
oraz po podstawieniu:

$$J(A_1) \cdot G(j\omega) = -1$$

ostatecznie otrzymujemy więc równanie:

$$G(j\omega) = \frac{-1}{J(A_1)} = K(A_1),$$

gdzie wielkość $K(A_1)$ nazywamy **wykresem krytycznym**. Spełnia on rolę punktu $(-1,0)$ dla układów nieliniowych.



Rysunek 2: Kolejno od lewej: charakterystyka statyczna, wykres funkcji opisującej oraz wykres krytyczny elementu z ograniczeniami.

Przedstawiony po prawej stronie rysunku **wykres krytyczny** elementu z ograniczeniami (np. zaworu) możemy interpretować tak:

- Dla $A_1 \leq a$ - nieliniowości nie występują i układ nieliniowy możemy traktować jako normalny układ liniowy o wzmacnieniu k ,
- Dla $A_1 > a$ - czyli dla dużych amplitud sygnałów na wejściu obiektu nieliniowego wierzchołki tego sygnału zostaną "obcięte", wobec tego sygnał po przejściu przez element z ograniczeniami będzie niósł mniejszą energię. W związku z tym możemy traktować to w ten sposób, że dla większych amplitud sygnału wejściowego wzmacnienie elementu nieliniowego będzie coraz mniejsze, a wobec tego układ będzie "bardziej stabilny". Widoczne to jest na wykresie - dla coraz większych A_1 zaznaczony na wykresie interesujący nas punkt przesuwa się w lewą stronę, zgodnie z kryterium Nyquista, jeżeli układ ma być stabilny to jego charakterystyka nie może objąć tego punktu.

Wobec tego kryterium mówiące o stabilności układu zamkniętego zawierającego element nieliniowy możemy zdefiniować następującą:

Jeżeli układ otwarty jest stabilny i charakterystyka amplitudowo-fazowa liniowej części układu nie okrąża wykresu krytycznego elementu nieliniowego, ani nie ma z nim punktów wspólnych to układ zamknięty jest stabilny globalnie.

12. Podstawy algebry Boole'a

Algebra Boole'a służy do wykonywania działań na zdaniach logicznych - tzn. zdaniach, którym możemy przyporządkować jedną z wartości logicznych. W przypadku logiki dwuwartościowej są nimi prawda lub fałsz.

Podstawowe działania algebry Boole'a, tworzące system funkcjonalnie pełny to:

- alternatywa (OR),
- koniunkcja (AND),
- negacja (NOT).

Zbiór funkcji boolowskich nazywa się **systemem funkcjonalnie pełnym** (bazą), jeśli dowolna funkcja boolowska może być przedstawiona za pomocą funkcji należących do tego zbioru i argumentów funkcji.

Często wykorzystuje się także:

- alternatywę wykluczającą (XOR),
- dysjunkcję (NAND),
- binegację (NOR).

Oznaczenia:

Alternatywa	Koniunkcja	Negacja	Alternatywa Wykluczająca	Dysjunkcja	Binegacja
\cup	\cap	\sim	\vee	$/$	∇
$+$	\cdot	\bar{a}	$\dot{\vee}$		
\vee	\wedge	\neg			
$ $	$\&$	$!$			
OR	AND	NOT	XOR	NAND	NOR

Tablice prawdy:

a	b	a AND b	a OR b	NOT a	a NAND b	a NOR b	a XOR b
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

W algebrze Boole'a spełnione są następujące warunki działań lda wszystkich: $a, b, c \in B$

- łączność $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$ $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$

Łączność działania oznacza, że kolejność wykonywania obliczeń nie ma wpływu na wynik, a rezygnacja z nawiasów nie zmienia znaczenia napisu.

- przemienność $a \cup b = b \cup a$ $a \cap b = b \cap a$
- absorpcja $a \cup (a \cap b) = a$ $a \cap (a \cup b) = a$
- rozdzielność $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$
- pochłanianie $a \cup \sim a = 1$ $a \cap \sim a = 0$

Ponadto dla dowolnych a, b zachodzi:

$$\begin{aligned}a \cup a &= a \\a \cap a &= a \\a \cup 0 &= a \\a \cap 1 &= a \\a \cup 1 &= 1 \\a \cap 0 &= 0 \\\sim 0 &= 1 \\\sim 1 &= 0\end{aligned}$$

Prawa De Morgana:

I Prawo De Morgana:

Prawo zaprzeczenia koniunkcji: Negacja koniunkcji jest równoważna alternatywie negacji:

$$\sim(a \cup b) = (\sim a) \cap (\sim b)$$

II Prawo De Morgana

Prawo zaprzeczenia alternatywy: Negacja alternatywy jest równoważna koniunkcji negacji:

$$\sim(a \cap b) = (\sim a) \cup (\sim b)$$

Podwójne zaprzeczenie:

$$\sim(\sim a) = a$$

13. Metody syntezy funkcji logicznych

Syntezą układów logicznych polega na zaprojektowaniu struktury sieci logicznej realizującej określoną funkcję.

Funkcja, którą należy zrealizować może być zadana:

- ekstensjonalnie - w postaci tabeli wejścia-wyjścia,
- intensjonalnie - w postaci wyrażenia logicznego,

Etapy projektowania obejmują:

- specyfikację funkcji (np. werbalną w postaci zestawu warunków),
- budowę tablicy opisującej relacje wejścia-wyjścia,
- generację funkcji,
- minimalizację i ew. faktoryzację funkcji,
- implementację z wykorzystaniem zadanych bramek logicznych.

Tablica definiująca funkcję budowana jest w oparciu o werbalną specyfikację funkcji np.:

Zaprojektować układ do głosowania o trzech wejściach, który daje na wyjściu 1 o ile przynajmniej na dwóch wejściach pojawią się jedynki.

p	q	r	$f(p, q, r)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Dla tabeli specyfikującej działanie funkcji można łatwo zbudować postać kanoniczną funkcji w postaci kanonicznej funkcji koniunkcji lub alternatywy.

Postacie kanoniczne są algebraiczną formą zapisu dowolnie złożonych funkcji logicznych. Są one tworzone z wykorzystaniem trzech operacji logicznych: alternatywy, koniunkcji i negacji.

Zestaw (zbiór) funkcji logicznych umożliwiających tworzenie algebraicznych zapisów dowolnych funkcji logicznych nazywa się **systemem funkcjonalnie pełnym**. Zestaw funkcji: alternatywa, koniunkcja i negacja nazywany jest podstawowym systemem funkcjonalnie pełnym.

Systemami funkcjonalnie pełnymi są też: alternatywa i negacja, koniunkcja i negacja, funkcja NOR, funkcja NAND i inne.

Kanoniczna funkcja alternatywy:

- Należy uwzględnić jedynie te wiersze tabeli, w których na wyjściu układu jest 1,
- Dla każdego takiego wiersza zbudować iloczyn minimalny zawierający wszystkie zmienne wejściowe,
- Wygenerowane iloczyny minimalne połączyć symbolem alternatywy.

$$f(p, q, r) = (\bar{p} \cdot q \cdot r) + (p \cdot \bar{q} \cdot r) + (p \cdot q \cdot \bar{r}) + (p \cdot q \cdot r)$$

Kanoniczna postać koniunkcji:

- Należy uwzględnić jedynie te wiersze tabeli, w których na wyjściu układu jest 0,
- Dla każdego takiego wiersza zbudować minimalną sumę zawierającą wszystkie zmienne wejściowe,
- Wygenerowane sumy minimalne połączyć symbolem koniunkcji

$$f(p, q, r) = (p + q + r)(p + q + \bar{r})(p + \bar{q} + r)(\bar{p} + q + r)$$

Postać kanoniczna jest zwykle zbyt rozbudowana, aby wykorzystać ją bezpośrednio do syntezy układu. Należy zatem dokonać odpowiedniej minimalizacji funkcji korzystając z praw algebry Boole'a.

Jeśli do budowy układu mają być wykorzystane bramki **NOR** lub **AND** to należy korzystać z **postaci koniunkcji** (0).

Jeśli do budowy układu mają być wykorzystane bramki **NAND** lub **OR** to należy korzystać z **postaci alternatywnej** (1).

14. Metody minimalizacji funkcji logicznych

Postacie kanoniczne funkcji logicznych nie są optymalne w sensie zastosowania minimalnych ilości zmiennych i operatorów działań logicznych. W technice zazwyczaj dąży się do tego, aby implementacje układowe realizujące funkcje logiczne były tańsze, szybsze i bardziej niezawodne. Z ww. powodów przeprowadza się upraszczanie wyrażeń logicznych powszechnie znane pod terminem minimalizacji funkcji logicznych. Funkcja logiczna po minimalizacji jest tą samą funkcją, a różnica polega jedynie na innej formie jej zapisu.

Należy mieć na uwadze, że zazwyczaj istnieje kilka równoważnych minimalnych postaci danej funkcji boolowskiej.

Zostaną teraz omówione trzy podstawowe metody minimalizacji:

- algebraiczne upraszczanie wyrażeń algebraicznych,
- graficzna metoda siatek Karnaugha,
- algorytm Quine'a McCluskeya

Algebraiczne upraszczanie wyrażeń algebraicznych

W minimalizacji algebraicznej wykorzystuje się podstawowe tożsamości i prawa algebry Boolea. Sposób postępowania zależy od konkretnego wyrażenia logicznego. Zazwyczaj najlepszą metodę wybiera się intuicyjnie, a poszukiwanie postaci minimalnej sprowadza się do umiejętności stosowania reguł sklejania, pochłaniania i tożsamości logicznych.

Reguła sklejania:

dla sumy iloczynów

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$$

dla iloczynu sum

$$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A \cdot A + A \cdot \bar{B} + A \cdot B + B \cdot \bar{B} = A + A(B + \bar{B}) = A + A = A$$

Reguła pochłaniania inaczej absorpcji:

$$\begin{aligned} A + A \cdot B &= A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A \\ A \cdot (A + B) &= A \end{aligned}$$

Drugie prawo pochłaniania:

$$A + \bar{A} \cdot B = A \cdot (1 + B) + \bar{A} \cdot B = A + A \cdot B + \bar{A} \cdot B = A + (A + \bar{A}) \cdot B = A + B$$

Reguła sklejania pozwala dla dwóch iloczynowych członów różniących się negacją zmiennej lub negacją wyrażenia logicznego wyrugować tą zmienną (wyrażenie) jako nieistotną. Wyrażenia podlegające sklejaniu nazywane są wyrażeniami sąsiednimi. Jeżeli w uzyskanych postaciach kanonicznych funkcji takie wyrażenie sąsiednie występują to postać kanoniczną można uprościć. Zasadniczą trudnością w procesie sklejania jest wyszukiwanie sąsiednich członów.

Przykład:

$$f(w, x, y, z) = \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xyz + wx\bar{y}z + wxyz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z}$$

Dla zaznaczonych par stosujemy reguły sklejenia:

$$f(w, x, y, z) = \bar{w}x\bar{y}z + (\bar{w} + w)xyz + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} = \bar{w}x\bar{y}z + xyz + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z}$$

Kolejne dwa uproszczenia:

$$f(w, x, y, z) = \bar{w}x\bar{y}z + xyz + wx\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} = xyz + w\bar{x}y + w\bar{x}y$$

Trzecie dwa uproszczenia:

$$f(w, x, y, z) = \textcolor{red}{x\bar{y}z} + \textcolor{red}{xyz} + w\bar{x}\bar{y} + w\bar{x}y = xz + w\bar{x}$$

Jak widać metoda algorytmiczna jest czasochłonna i łatwo się w niej pomylić.

Graficzna metoda siatek Karnaugha

Tablice Karnaugh stanowią wizualne narzędzie wspomagające minimalizację funkcji logicznych. Istota tablic Karnaugha polega na uwidocznieniu wyrażeń, które mogą podlegać sklejeniu w postaci sąsiednich pól odpowiednio skonstruowanej tablicy.

Konstrukcja tablic Karnaugha jest taka, że każde dwie sąsiednie kratki specyfikują iloczyny logiczne różniące się dokładnie na jednej pozycji. Pola takie można zatem skleić analogicznie jak iloczyny zmiennych.

Algorytm minimalizacji:

- Funkcję logiczną zapisuje się w tabeli Karnaughm
- Grupuje się pola o wybranej wartości (zero lub jeden), przy czym pola muszą mieć kształt prostokątów o bokach długości potęgi liczby 2,
- Do zapisu danego pola wykorzystuje się jedynie argumenty nie zmieniające się w obrębie prostokąta,
- Jeśli grupowano jedynki to wyrażenie ma postać iloczynu zmiennych (zanegowanych jeśli mają wartość zero), czyli **minimalnej postaci alternatywy**,
- Jeśli grupowano zera wyrażenie ma postać sumy zmiennych (zanegowanych jeśli mają wartość jeden),czyli **minimalnej postaci koniunkcji**.

Przykład:

$$f(w, x, y, z) = \sum(5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

Odpowiednia tablica Karnaugha:

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Jedynki są wpisywane w te miejsca siatki, w których dla odpowiednich sygnałów wejściowych ma występować jedynka na wyjściu.

Następnie należy pogrupować implikanty.

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	1	1	1

Dla tak zakreślonych implikantów określamy minimalną postać funkcji (pogrupowane są jedynki więc minimalną postać alternatywy). Wykonujemy to patrząc na współrzędne zakreślonej grupy. Na ich podstawie do wyrażenia iloczynowego (każda zakreślona grupa jedynkowa jest jednym iloczynem w postaci kanonicznej) wchodzą tylko te zmienne, które w obrębie grupy nie zmieniają swojej wartości.

$$f(w, x, y, z) = xz + w\bar{x}$$

Otrzymujemy ten sam wynik co w przypadku metody algebraicznej.

Metoda ta dla n zmiennych w funkcji wymaga utworzenia tablicy o 2^n pól, co dla wielu zmiennych może być uciążliwe i pracochłonne.

Metoda Quine'a-McCluskeya

$$f(w, x, y, z) = \sum (5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15)$$

W pierwszym kroku tej metody wypisujemy numery iloczynów pełnych w czterech (bo 4 zmienne) grupach, które różnią się między sobą ilością jedynek.

- 8:** 1000 - jedna jedyńka
- 5:** 0101 - dwie jedynki
- 9:** 1001 - dwie jedynki
- 10:** 1010 - dwie jedynki
- 7:** 0111 - trzy jedynki
- 11:** 1011 - trzy jedynki
- 13:** 1101 - trzy jedynki
- 15:** 1111 - cztery jedynki

Kolejnym krokiem jest iteracyjne porównanie między sobą każdej z grup. Jeśli elementy grup różnią się tylko na jednej pozycji, należy je skleić ze sobą i w miejscu gdzie się różniły postawić kreseczkę. Jest to wykorzystanie jednego z podstawowych praw logicznych:

$$xy + x^{\sim}y = x.$$

Dalej przepisujemy tabelę tak, by elementy w poszczególnych grupach znów różniły się tylko o jedną jedynkę.

W naszym przykładzie będzie to wyglądało tak:

- 8-9:** 100-
- 8-10:** 10-0
- 5-7:** 01-1
- 5-13:** -101
- 9-11:** 10-1
- 9-13:** 1-01
- 10-11:** 101-
- 7-15:** -111
- 11-15:** 1-11
- 13-15:** 11-1

Powtarzamy poprzedni krok, aż uzyskamy kombinację, której nie da się już uprościć. W naszym wypadku dzieje się tak już w trzecim kroku. Inne kombinacje dają te same wyniki:

- 8-9-10-11:** 10--
- 5-7-13-15:** -1-1
- 9-11-13-15:** 1--1

Po dojściu do takiego rezultatu musimy odczytać wynik. W tym celu należy stworzyć tak zwaną siatkę Quine'a-McCluskeya

	5	7	8	9	10	11	13	15	Rozw.
8-9-10-11		x	x	x	x				10-- w→x
5-7-13-15	x	x				x	x	-1-1	xz
9-11-13-15			x		x	x	x	1--1	wz

A następnie należy wybrać takie elementy, aby "pokryć" wszystkie iloczyny pełne. Optymalnym wyborem będzie u nas:

	5	7	8	9	10	11	13	15	Rozw.
8-9-10-11			xx	xx	xx	xx			10-- w~x
5-7-13-15	xx	xx					xx	xx	-1-1 xz
9-11-13-15			x		x	x	x	1--1	wz

Zatem nasza zminimalizowana funkcja będzie miała postać:

$$f(w, x, y, z) = w\bar{x} + xz$$

Rozwiążanie takie samo jak w poprzednich przykładach.

Metoda ta daje się w łatwiejszy sposób zaimplementować komputerowo.

15. Automaty Mealy i Moore, różnice przykłady

Automaty Mealy'ego i Moore'a to **układy sekwencyjne**, czyli takie, w których stan wyjścia zależy nie tylko od aktualnego ale również od poprzedniego stanu wejścia.

Informacja o poprzednich stanach wejścia pamiętana jest jako **stan wewnętrzny Q^t** .

Przejścia pomiędzy kolejnymi stanami wewnętrznymi odbywają się na podstawie **funkcji przejść**:

$$Q^{t+1} = \delta(Q^t, X^t)$$

(Q^{t+1} - kolejny stan wewnętrzny, δ - funkcja przejść, Q^t - aktualny stan wewnętrzny, X^t - aktualny stan wejścia)

Stan wyjścia dla układu Moore'a ustalany jest wyłącznie na podstawie stanu wewnętrznego, a dla układu Mealy'ego na podstawie stanu wewnętrznego i stanu wejścia.

Funkcja wyjścia układu Moore'a ma postać:

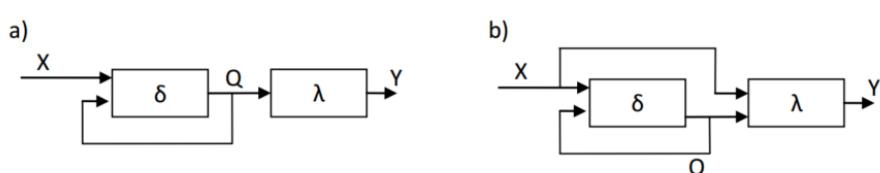
$$Y^t = \lambda(Q^t)$$

(Y^t - stan wyjścia, λ - funkcja wyjścia, Q^t - aktualny stan wewnętrzny)

, a funkcja wyjścia układu Mealy'ego:

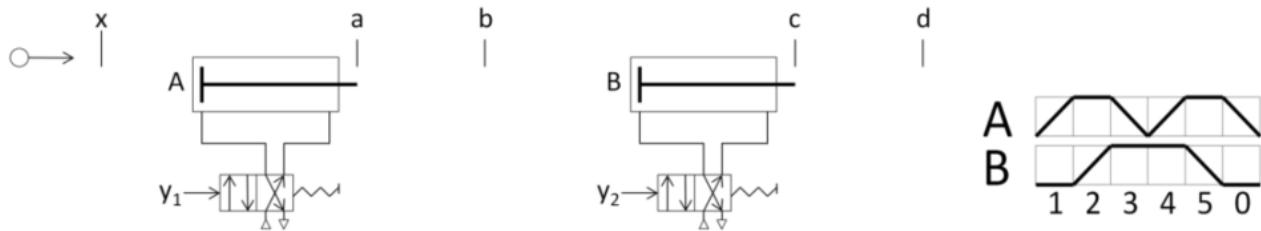
$$Y^t = \lambda(Q^t, X^t)$$

(X^t - aktualny stan wejścia)



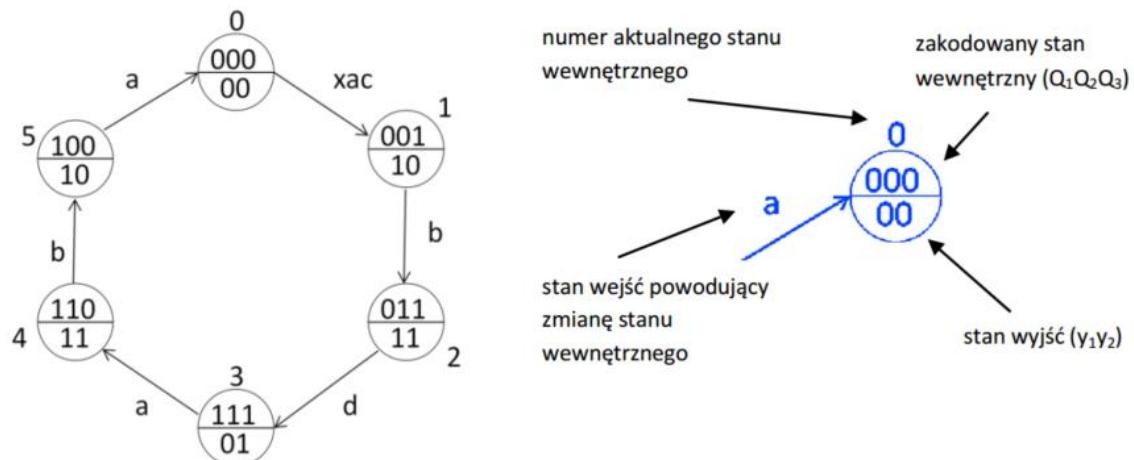
Rys. 1. Schematy układów sekwencyjnych: a) układ Moore'a, b) układ Mealy'ego

Przykład: Zaprojektować układ sterowania silownikami A i B z zaworami monostabilnymi zapewniający realizację cyklu: 1 - wysunięcie A, 2 - wysunięcie B, 3 - wycofanie A, 4 - wysunięcie A, 5 - wycofanie B, 6 - wycofanie A. Uruchomienie cyklu następuje po podaniu sygnału X. Sygnały a, b, c, d pochodzą z przełączników krańcowych.



a) układ Moore'a

Należy przygotować uproszczony graf układu sterującego:



, a na jego podstawie utworzyć tablicę przejść i wyjść układu:

$Q_1 \backslash Q_2 Q_3$	00	01	11	10
0	001	011	111	---
1	000	---	110	100

Tablica przejścia $Q'_1 Q'_2 Q'_3$

$Q_1 \backslash Q_2 Q_3$	00	01	11	10
0	00	10	11	--
1	10	--	01	11

Tablica wyjścia

Na podstawie tablic należy wyznaczyć funkcje przejść i wyjścia:

Funkcje przejść

$$\begin{array}{ll} w_1 = Q_2 d & z_1 = \bar{Q}_2 a \\ w_2 = Q_3 b & z_2 = \bar{Q}_3 b \\ w_3 = \bar{Q}_1 x_{ac} & z_3 = Q_1 a \end{array}$$

(w, z – sygnały sterujące przerzutników)

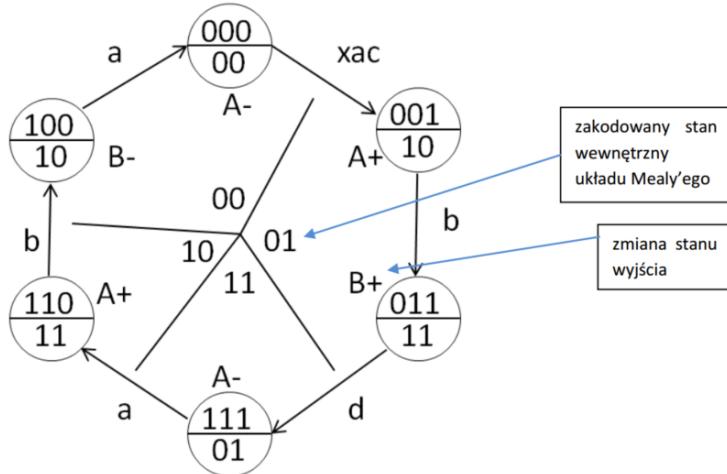
Funkcje wyjścia

$$y_1 = \bar{Q}_1 Q_3 + Q_1 \bar{Q}_3$$

b) układ Mealy'ego

Układ Mealy'ego można utworzyć na podstawie układu Moore'a łącząc kilka stanów wewnętrznych ze sobą, przy czym w jednym stanie wewnętrzny każde z wyjść może zmienić swój stan nie więcej niż raz.

Przykładowy graf układu Mealy'ego:



Stany 001, 011 oraz 100, 000 zostały połączone zgodnie ze wspomnianą zasadą. Istnieje wiele równoważnych możliwości połączenia stanów wewnętrznych.

Po przydzieleniu stanów wewnętrznych postępuje się analogicznie jak przy układzie Moore'a, przy czym należy pamiętać, że funkcje wyjść zależą od stanu wejścia i stanu wewnętrznego.

$Q_1 \setminus Q_2$	0	1
0	01	11
1	00	10
Tablica przejść $Q_1' Q_2'$		

$a \setminus Q_1 Q_2$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
Tablica wyjścia y_1				

$b \setminus Q_1 Q_2$	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0
Tablica wyjścia y_2				

Funkcje przejść

$$\begin{aligned} w_1 &= Q_2 d & z_1 &= \bar{Q}_2 a \\ w_2 &= \bar{Q}_1 xac & z_2 &= Q_1 b \end{aligned}$$

Funkcje wyjść

$$\begin{aligned} y_1 &= a \bar{Q}_1 + \bar{Q}_1 Q_2 + Q_1 \bar{Q}_2 \\ y_2 &= Q_1 + b Q_2 \end{aligned}$$

Różnice:

Układ Moore'a	Układ Mealy'ego
Funkcja wyjść zależy tylko od aktualnego stanu wewnętrznego	Funkcja wyjść zależy od stanu wewnętrznego i stanu wejść
Funkcja wyjść ma prostszą postać	Funkcja wyjść jest bardziej skomplikowana
Posiada więcej stanówewnętrznych	Posiada mniej stanówewnętrznych
Wymaga mniejszej liczby przerzutników	Wymaga większej liczby przerzutników

16. Stosowane metody orientacji i opisu stanu robota

Do ustawienia efektora maszyny manipulacyjnej w trójwymiarowej przestrzeni roboczej niezbędne jest zapewnienie 6 stopni swobody ruchu, w tym:

- 3 stopni swobody ruchu liniowego (położenie wybranego punktu efektora) oraz
- 3 stopni swobody ruchu obrotowego (orientacja efektora).

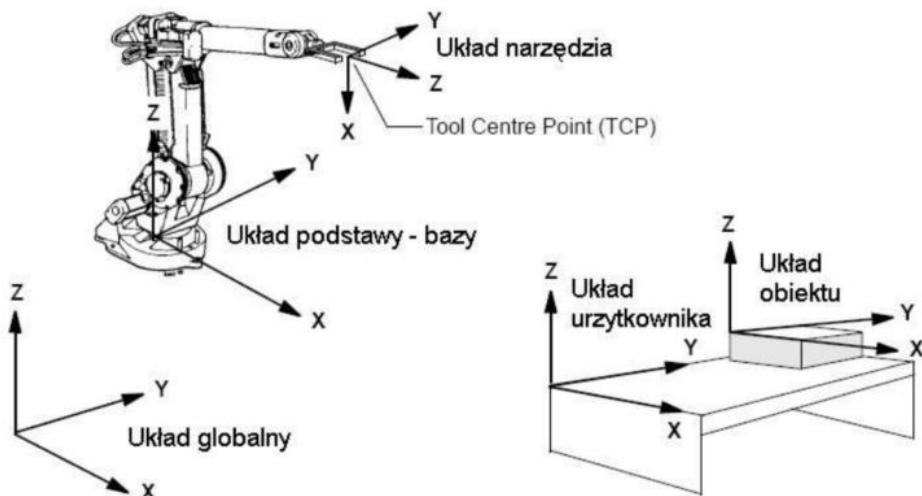
Żądane ustawienie efektora maszyny manipulacyjnej (z nadmiarem lub niedomiarem stopni swobody) zapewnia mechanizm kinematyczny (ruchu) maszyny manipulacyjnej.

Zachowania kinematyczne i kinetyczne mechanizmów mogą być w pełni opisane w następujących układach współrzędnych:

- układzie bazowym,
- r układach maszynowych,
- układzie interfejsu maszynowego,
- układzie wektora podejścia,
- układzie obiektu manipulacji lub obróbki.

Ogólnie ($r + 4$) układach współrzędnych (r - liczba ruchliwości mechanizmu).

Konfiguracja układu współrzędnych narzędzi:



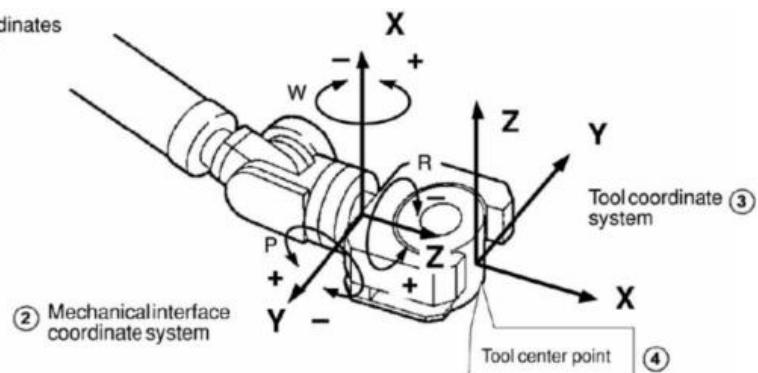
Centralny punkt narzędzia TCP (Tool Center Point) - inaczej nazywany punktem pracy narzędzia. Jest to istotny punkt dla narzędzia z punktu widzenia jego wykorzystania w stanowisku (np. koniec drutu spawalniczego). Z punktem tym związany jest układ współrzędnych narzędzia, którego osie mogą pokrywać się charakterystycznymi elementami narzędzia np. os z dla palinka spawalniczego pokrywa się wychodzącym z niego drutem.

Układ współrzędnych obiektu - układ współrzędnych, związany z obrabianym detalem lub miejscem gdzie ten detal się znajduje.

Przy braku zadeklarowanego układu współrzędnych narzędzia użytkownika robot ma wprowadzony tzw. układ współrzędnych interfejsu mechanicznego, którego TCP znajduje się na środku tarczy kończącej ramie robota, do której możemy zamocować nasze narzędzie. Po lewej stronie poniższego rysunku widzimy kierunki osi interfejsu mechanicznego.

- ① In the figure on the right, the coordinates of the tool coordinate system are:

x	50.0 mm
y	0.0 mm
z	300.0 mm
w	180.0 deg
p	90.0 deg
r	0.0 deg

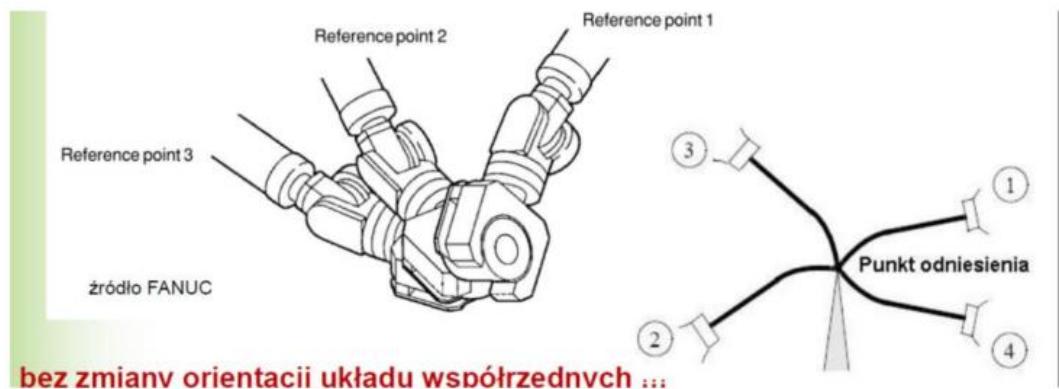


W celu skonfigurowania nowego układu współrzędnych narzędzia należy podać wartości (x , y , z), które określają przesunięcia TCP oraz kąty obrotu poszczególnych osi (w , p , r). Na powyższym rysunku poszczególne wartości nowego układu współrzędnych narzędzia, którego TCP oznaczone jest jako 4, są zestawione pod numerem 1.

Konfiguracja jest możliwa trzema metodami:

1. metodą trzech punktów (automatyczne określanie TCP),
2. metodą sześciu punktów (określamy TCP oraz orientację narzędzia),
3. metodą listy kierunków (metoda bezpośrednia, wprowadzamy poszczególne dane ręcznie).

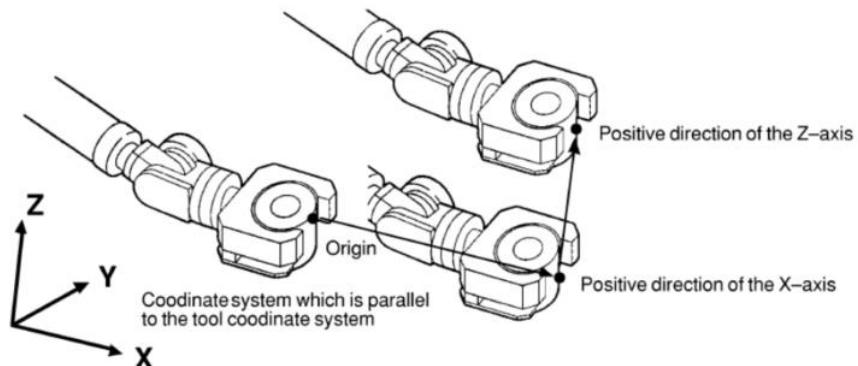
Metoda trzech punktów - automatyczne określanie TCP na podstawie trzech punktów bez zmiany orientacji układu.



Metoda sześciu punktów:

Składa się z dwóch etapów:

- określenia TCP jak w metodzie trzech punktów,
- określenia orientacji układu współrzędnych narzędzia poprzez wskazanie dodatkowych trzech punktów (ważne, aby podczas wskazywania nie zmieniać orientacji narzędzia).



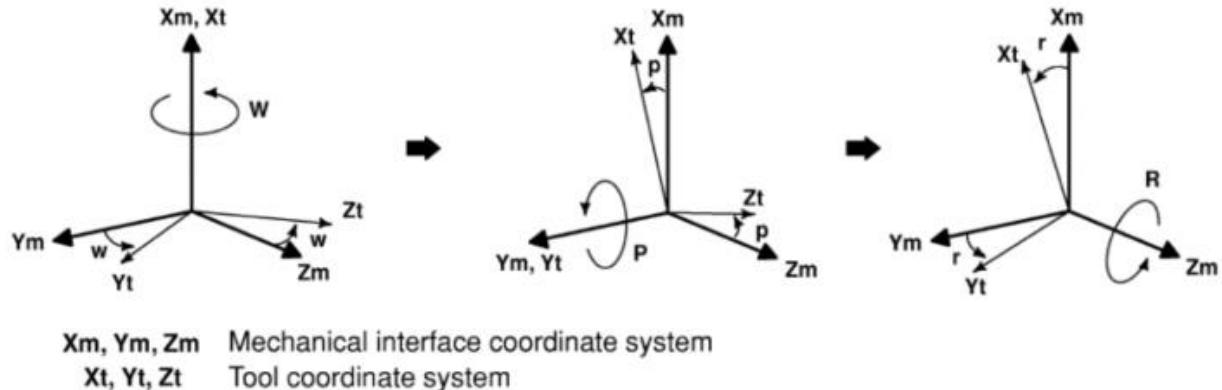
Metoda bezpośrednia (listy kierunków)

Polega na bezpośrednim wpisaniu wartości TCP oraz wartości orientacji układu współrzędnych narzędzi:

W - kąt obrotu układu współrzędnych narzędzi wokół osi X układu współrzędnych interfejsu mechanicznego ("tarczy" na końcu drugiego ramienia),

P - kąt obrotu układu współrzędnych narzędzi wokół osi Y układu współrzędnych interfejsu mechanicznego ("tarczy" na końcu drugiego ramienia),

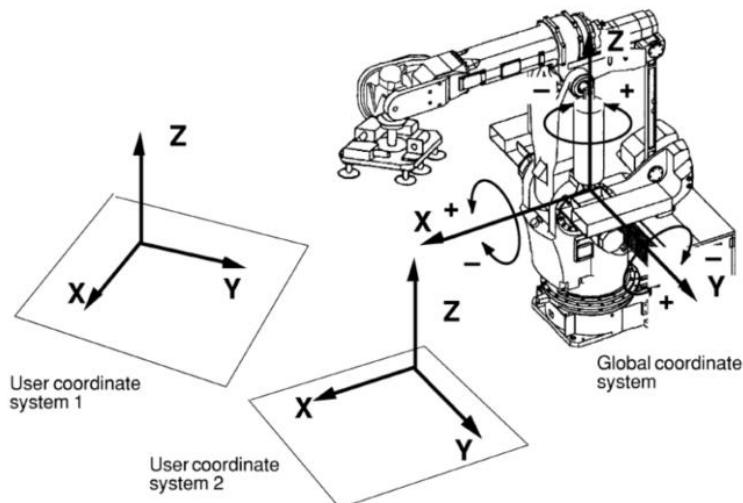
R - kąt obrotu układu współrzędnych narzędzi wokół osi Z układu współrzędnych interfejsu mechanicznego ("tarczy" na końcu drugiego ramienia),



Konfiguracja układu współrzędnych użytkownika

Układ współrzędnych użytkownika jest układem kartezjańskim zdefiniowanym dla każdej przestrzeni roboczej przez użytkownika.

Jeśli układ współrzędnych nie jest zdefiniowany to zastępuje go globalny układ współrzędnych.



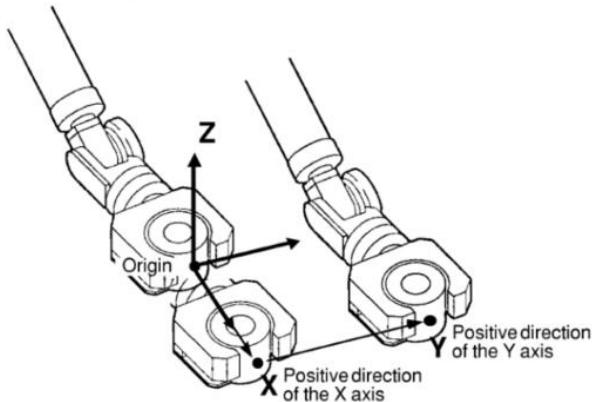
Konfiguracja jest możliwa trzema metodami:

1. metodą trzech punktów,
2. metodą czterech punktów,
3. metodą listy kierunków.

Metoda trzech punktów:

Przy definiowaniu układu współrzędnych należy zapamiętać następujące trzy punkty:

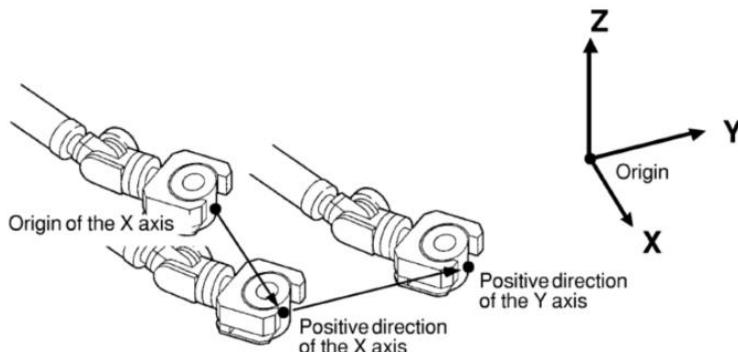
- punkt początkowy osi x,
- punkt określający dodatni kierunek osi x,
- punkt na płaszczyźnie x-y.



Metoda czterech punktów:

Przy definiowaniu układu współrzędnych tą metodą należy skonfigurować następujące punkty:

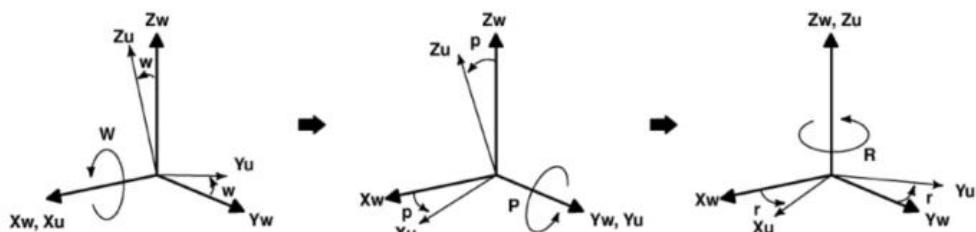
- początkowy punkt osi x równoległy do układu współrzędnych,
- punkt określający dodatni kierunek osi x,
- punkt znajdujący się na płaszczyźnie x-y,
- punkt początkowy układu użytkownika.



Metoda bezpośrednia (listy kierunków)

Aby zdefiniować układ współrzędnych użytkownika tą metodą należy wykonać następujące czynności:

- wprowadzić wartości kierunków x, y, z określające punkt początkowy układu współrzędnych użytkownika,
- wprowadzić kąty obrotu (w, p, r) wokół osi x, y, z.



Xw, Yw, Zw World coordinate system

Xu, Yu, Zu User coordinate system

Wektor podejścia (orientacji, ułożenia) opisuje trajektorię ruchu efektora w stosunku do obiektu manipulacji lub obróbki w trakcie ruchu centralnego punktu efektora TCP po zaprogramowanej trajektorii.

Oprócz układu bazowego i układów maszynowych w robotyce wykorzystywane są dla opisu orientacji oraz zachowań kinematycznych chwytaków, narzędzi i obiektów obróbki dodatkowe trzy układy współrzędnych:

- **układ interfejsu mechanicznego** (narzędziowego) dla opisu orientacji (posadowienia, sterowania pozycją) efektora (chwytaka lub głowicy narzędziowej) względem sprzągu części regionalnej lub lokalnej,
- **układ wektora "podejścia"** szczepek chwytaka lub narzędzia do obiektu manipulacji lub obróbki - ułożenia (sterowania) części roboczej efektora (chwytaka lub narzędzia) względem mechanizmu chwytaka lub głowicy narzędziowej.
- **układ obiektu manipulacji lub obróbki** dla zaprogramowania czynności roboczych na podstawie opisu geometrii obiektu - układ ten powinien być określony w układzie bazowym mechanizmu.

Wektor podejście (orientacji, ułożenia) efektora (chwytaka, narzędzia) ma wpływ na dokładność wyznaczania współrzędnych maszynowych w zadaniu odwrotnym.

Wektor podejścia należy określić dla każdego z (wielu) położen efektora zgodnie z wymaganiami technologicznymi. Następnie przyjmując zadaną orientację wektora względem TCP, obliczyć współrzędne maszynowe tzn. zadać takie położenia członów mechanizmu, która zagwarantują wspomniane wymagania techniczne.

17. Proste i odwrotne zagadnienie kinematyki

17.1 Zagadnienie proste kinematyki

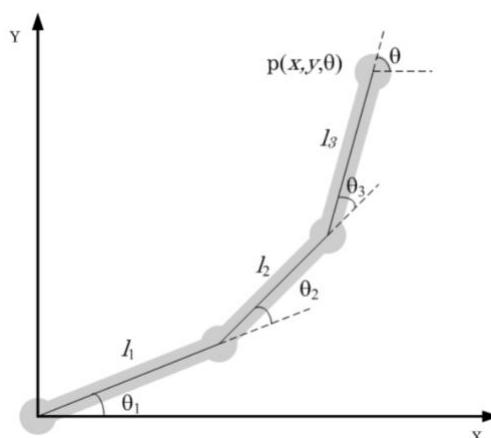
Proste zadanie kinematyki jest zadaniem statyczno-geometrycznym polegającym na obliczeniu pozycji i orientacji członu roboczego manipulatora.

Do opisu kinematyki prostej niezbędne jest podanie równań kinematyki robota. Zadanie kinematyki prostej można określić następująco:

Znając geometrię i strukturę robota oraz znając kąty między poszczególnymi członami (współrzędne konfiguracyjne robota) należy wyznaczyć pozycję oraz orientację końcówki ramienia w globalnym układzie współrzędnych.

Równania kinematyki mogą być wyznaczone wykorzystując metody stosowane w mechanice klasycznej lub wykorzystując notację Denavita-Hartenbera.

Zostało to zobrazowane na poniższym rysunku. Znając $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ możemy wyznaczyć pozycję punktu "P".

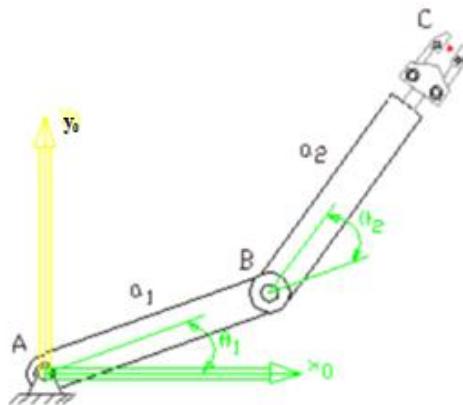


1 Schemat prostego manipulatora

Stosowane metody:

a) Metoda geometryczna

Metoda ta polega na wykorzystaniu zależności geometrycznych podczas wyznaczania pozycji końcówki robota.



Dla powyższego schematu mamy taki układ równań:

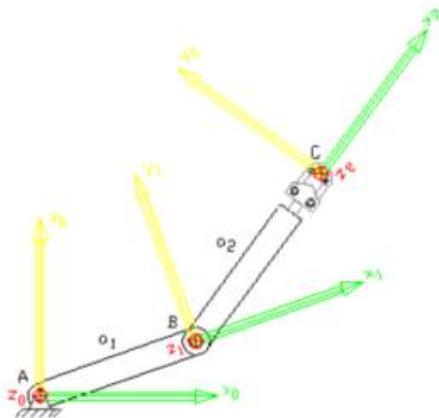
$$x_0 = a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y_0 = a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Jak widać przedstawione zadanie można rozwiązać tą metodą szybko dla podanego przykładu. Jednak dla złożonej struktury robota rozwiązanie zadania metodą geometryczną może być czasochłonne i podatne na błędy.

b) Metoda analityczna

Najpopularniejszą metodą rozwiązywania zadania kinematyki prostej jest **metoda Denavit-Hartenberga**. Metoda ta może być jednak zastosowana tylko dla otwartych łańcuchów kinematycznych.

W tym celu należy przyjąć bazowy układ współrzędnych x_0, y_0, z_0 oraz układy lokalne związane z każdym członem manipulatora. Przy czym należy zachować zasadę, iż obrót poszczególnych członów odbywa się względem osi z , a przemieszczenie względem osi z i x . Sposób przyjęcia tych układów przedstawiono na poniższym rysunku:



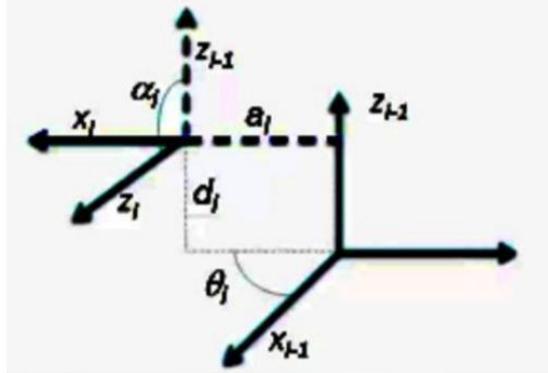
Rysunek 5.24 Manipulator 2-członowy z przyjętym układem współrzędnych

Mając oznaczone lokalne układy współrzędnych możemy znaleźć przekształcenia pomiędzy kolejnymi układami. Przekształcenia zapisywane są w postaci macierzy, a składając kolejne przekształcenia możemy wyznaczyć przekształcenie z układu końcowego w układ bazowy.

Przykładowo, punkt którego pozycja nas interesuje (końcówka chwytaka) ma w ostatnim lokalnym układzie współrzędnych pozycję (0,0,0). Znając macierze przekształceń możliwe jest wyznaczenie jego pozycji dla każdego z kolejnych układów lokalnych, a w konsekwencji dla układu bazowego (współrzędne globalne).

Macierze przekształceń pomiędzy kolejnymi układami uzależnione są od struktury robota (długość ramion, konfiguracja robota) oraz od tego w jaki sposób ramiona są ustawione w danej chwili.

Parametry opisujące przekształcenie:



2 Parametry opisujące przekształcenie

(a_i - długość członu, α_i - skręcenie członu, d_i - odsunięcie przegubu, θ_i - kąt przegubu)

Dane przekształcenie może zostać opisane za pomocą tych czterech parametrów, przy czym trzy z nich są zależne od geometrii robota, a jedynie jeden zmienia się przy ruchu robota.

Należy przygotować tabelę z parametrami kinematycznymi jak na przykładzie:

układ	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1, var	0	a_1	0
2	θ_2, var	0	a_2	0

Analizowany płaski manipulator posiada 2 stopnie swobody. Należy następnie zapisać macierz przekształcenia jednorodnego dla poszczególnych członów na podstawie równania:

dla układu I:

$$A_1 = \text{Rot}_{x,a_1} \cdot \text{Trans}_{x,d_1}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & a_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & a_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dla układu II:

$$A_2 = \text{Rot}_{x,\theta_2} \cdot \text{Trans}_{x,a_2}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Końcowym etapem rozwiązania tego typu zadania jest podanie macierzy transformacji układu ostatniego układu do układu bazowego, którą zapisano następująco:

$$T_{2,0} = A_1 \cdot A_2$$

$$T_{2,0} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17.2 Zagadnienie odwrotne kinematyki

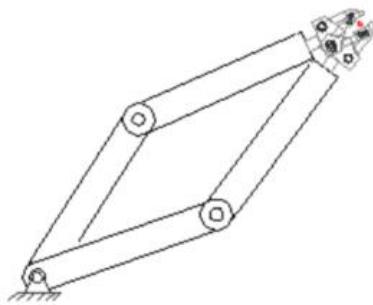
W kinematyce odwrotnej zadaniem jest obliczenie współrzędnych konfiguracyjnych robota przy znajomości położenia jego końcówki (najczęściej chwytaka) w globalnym układzie współrzędnych.

Zadanie to jest trudniejsze od zadania kinematyki prostej ponieważ czasami nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie wynikające z nieliniowości równań kinematyki. Niekiedy istnieje nieskończoność wielu rozwiązań (robot może na wiele sposobów osiągnąć dany punkt), lub może nie istnieć żadne rozwiązanie (punkt poza zasięgiem robota).

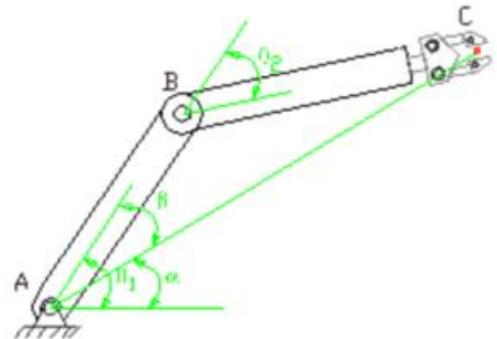
Stosowane metody:

a) Metoda geometryczna

Korzystając z metody geometrycznej tworzony jest układ równań opisujący zależności występujące w analizowanym przykładzie.



Rys. 10. Niejednoznaczność rozwiązania⁴



Rys. 11. Przyjęte oznaczenia⁴

Wykorzystując prawo sinusów możemy zapisać pierwsze z równań:

$$\frac{\sin(\beta)}{a_2} = \frac{\sin(180^\circ - \theta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Wykorzystując prawo cosinusów możemy zapisać drugie z równań:

$$(x^2 + y^2) = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(180^\circ - \theta_2)$$

Wykonując szereg przekształceń możemy wyznaczyć rozwiązanie zadania:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{a_2 \sin(\theta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right)$$

b) Metody analityczne

Mając macierz przekształcenia, wyznaczoną za pomocą metody Denavita-Hartenberga, opisującą przejście ze współrzędnych konfiguracyjnych robota na współrzędne globalne jesteśmy w stanie rozwiązać odwrotne zadanie kinematyki.

macierz przekształcenia dana jest wzorem:

$$H = \begin{bmatrix} R & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie \mathbf{H} to macierz 4x4, \mathbf{R} to macierz 3x3 (reprezentująca orientację chwytaka) i wektor \mathbf{d} to wektor 3x1 (reprezentujący pozycję chwytaka).

Znając pozycję robota w przestrzeni znamy wszystkie elementy macierzy \mathbf{H} . W wyznaczonej dla danego robota macierzy przekształcenia zapisane są równania, które posłużą do obliczenia współrzędnych konfiguracyjnych.

Przykład macierzy:

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Następnie znając pozycję i orientacje końcówki efektora w przestrzeni należy porównać odpowiednie komórki w macierzy. W analizowanym przykładzie znana jest pozycja efektora $C(x,y)$ oraz widać, z macierzy, że układ posiada 2 stopnie swobody, tak więc wystarczy wykorzystać 2 równania, aby wyznaczyć współrzędne złączowe:

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) = x$$

$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = y$$

Po rozwiązaniu tak przygotowanego układu równań otrzymamy listę wyników, które następnie należy poddać interpretacji graficznej.

$$\text{wynik_1} = \{\theta_1 = 0, d_3 = -2.5\}$$

$$\text{wynik_2} = \{\theta_1 = 0, d_3 = 0.5\}$$

Np. Wynik drugi jest osiągalny przez analizowaną strukturę i jest to prawdziwe rozwiązanie przykładu, natomiast wynik 1 jest rozwiązaniem osobliwym, czyli niemożliwym do osiągnięcia z punktu widzenia geometrycznego.