Vyšetřování průběhu funkce

- Určení, zda je funkce sudá nebo lichá nebo periodická
- Nalezení definičního oboru
- Nalezení průsečíků s osami
  - průsečíky s osou x: kořeny
  - průsečík s osou y: funkční hodnota v nule
- Limity v krajních bodech definičního oboru
- Asymptoty funkce
- Kritické body první derivace
  - intervaly monotonie
  - lokální extrémy a jejich funkční hodnoty
- Kritické body druhé derivace
  - intervaly konvexnosti a konkávnosti
  - inflexní body a jejich funkční hodnoty

U následujících funkcí nalezněte intervaly monotonie, extrémy, limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty a intervaly konvexity a konkávity. Ze zjištěných údajů se pokuste nakreslit graf.

7. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+2} + 3$

- funkce není ani sudá ani lichá ani periodická

- $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- průsečíky s osami:

• s Oy: $x = 0$

$f(0) = \dfrac{e^{2\cdot 0}}{0+2} + 3 = \dfrac{1}{2} + 3 = 3\dfrac{1}{2}$

$A[0; 3{,}5]$

• s Ox: $y = 0$

$\dfrac{e^{2x}}{x+2} + 3 = 0$

$\dfrac{e^{2x}}{x+2} = -3 \quad / \cdot (x+2)$

$e^{2x} = -3x - 6$

nejde vyřešit analyticky:(

- limity v krajních bodech def. oboru:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}+3\right) = \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(\frac{e^{2x}}{x+2}\right)}_{\text{L'H } \frac{\text{cokoliv}}{\infty}}+3 = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^{2x})'}{(x+2)'}+3 = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{1}+3 = 2\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{2x}}_{\infty}+3 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}+3\right) = \lim_{x\to-\infty}\underbrace{\left(\frac{e^{2x}}{x+2}\right)}_{\text{L'H } \frac{\text{cokoliv}}{\infty}}+3 = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}}{1}}_{0}+3 = 3$$

$$\lim_{x\to-2_+}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}+3\right) = \lim_{x\to-2_+}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}\right)+3 = +\infty \qquad e^{2x}\to e^{-4},\ x+2\to 0_+$$

x = -2 je svislá asymptota

$$\lim_{x\to-2_-}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}+3\right) = \lim_{x\to-2_-}\left(\frac{e^{2x}}{x+2}\right)+3 = -\infty \qquad e^{2x}\to e^{-4},\ x+2\to 0_-$$

asymptoty:
- svislé: x = -2
- šikmé:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^{2x}}{x+2}+3}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}+3x+6}{x^2+2x}\overset{L'H\ \frac{\text{něco}}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2x}+3}{2x+2}\overset{L'H\ \frac{\text{něco}}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=2\lim_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$$

šikmá asympota v +∞ není

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{2x}}{x+2}+3}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+3x+6}{\underbrace{x^2+2x}_{+\infty}}\overset{L'H\ \frac{\text{něco}}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{2x}+3}{\underbrace{2x+2}_{-\infty}}\overset{L'H\ \frac{\text{něco}}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4e^{2x}}{2}=2\lim_{x\to-\infty}\underbrace{e^{2x}}_{0}=0=k$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=3=b\ \longrightarrow\ y=kx+b\ \rightarrow\ y=3$$

už jsme to počítali
v limitách

šikmá asymptota v -∞

f' + monotonie + extrémy:

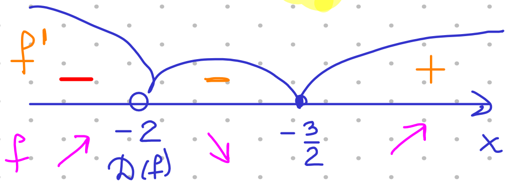
$$f'(x)=\left(\frac{e^{2x}}{x+2}+3\right)'=\frac{(e^{2x})'\cdot(x+2)-e^{2x}\cdot(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{2e^{2x}\cdot(x+2)-e^{2x}}{(x+2)^2}=\frac{e^{2x}\,(2(x+2)-1)}{(x+2)^2}=\frac{e^{2x}\cdot(2x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x)=0$$

$$e^{2x}\cdot(2x+3)=0\ \wedge\ (x+2)^2\neq0$$

$$e^{2x}=0\ \vee\ 2x+3=0$$

$x\in\emptyset$ $\qquad x=-\frac{3}{2}$ stacionární bod



$$f'(x)=\frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$$

bod minima: $x=-\frac{3}{2}$, $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{e^{2\cdot(-\frac{3}{2})}}{-\frac{3}{2}+2}+3=\frac{e^{-3}}{\frac{1}{2}}+3=\frac{2}{e^3}+3\longrightarrow B\left[-\frac{3}{2};\frac{2}{e^3}+3\right]$

↗ f je rostoucí na $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$

↘ f je klesající na $(-\infty;-2)$; $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]$

f'' + konvexita/konkávita

$$f''(x) = \left(\frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}\right)' = \frac{\left(e^{2x}(2x+3)\right)' \cdot (x+2)^2 - e^{2x}(2x+3)\cdot\left((x+2)^2\right)'}{\left((x+2)^2\right)^2} = \frac{\left[(e^{2x})'\cdot(2x+3) + e^{2x}\cdot(2x+3)'\right]\cdot(x+2)^2 - e^{2x}\cdot(2x+3)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{\left[2e^{2x}(2x+3) + e^{2x}\cdot 2\right]\cdot(x+2)^2 - e^{2x}\cdot(2x+3)\cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2e^{2x}(x+2)\left(\left[2x+4\right](x+2) - (2x+3)\right)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{2e^{2x}\cancel{(x+2)}\left(2x^2+8x+8-2x-3\right)}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2e^{2x}(2x^2+6x+5)}{(x+2)^3}$$

$$f'' = 0$$

$$2e^{2x}(2x^2+6x+5) = 0 \quad \wedge \quad (x+2)^3 \neq 0$$

$$e^{2x} = 0 \quad \vee \quad 2x^2+6x+5 = 0$$

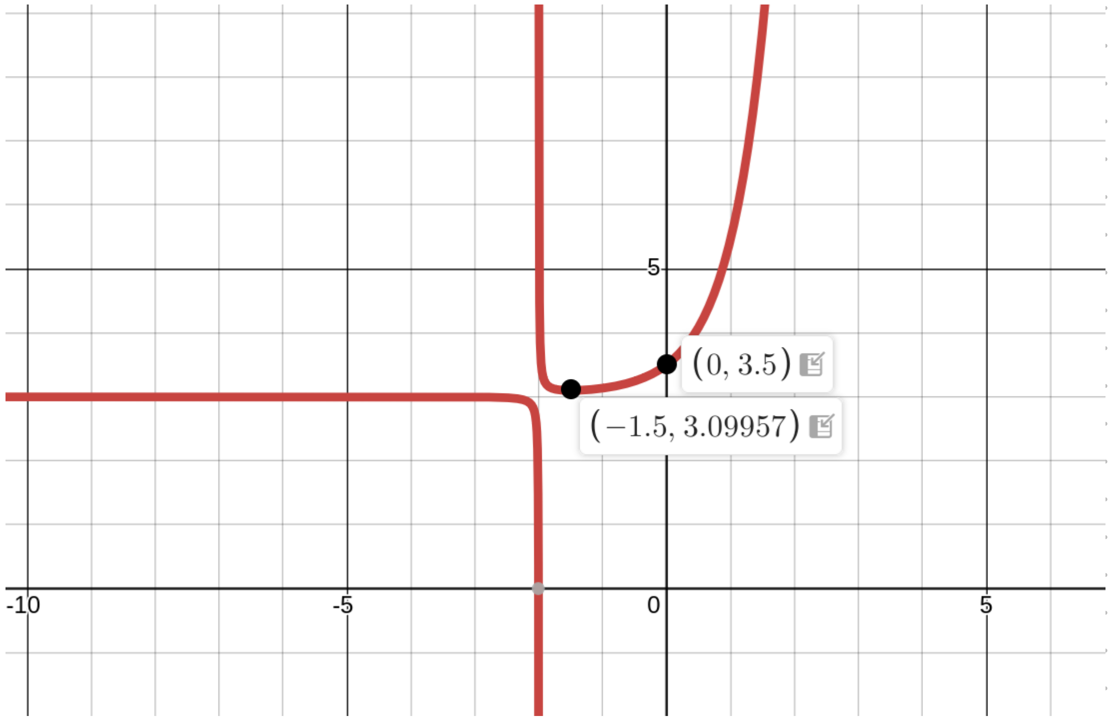
$$x \in \emptyset \qquad D = 36-40 = -4 < 0$$

$$x \in \emptyset$$

f''	$-$	-2	$+$	x
f	$\cap$		$\cup$	

$\cup$ f je konvexní na (-2; +∞)

$\cap$ f je konkávní na (-∞; -2)



https://www.desmos.com/calculator/iu55cm11sp

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^n$$

je *Taylorův polynom* stupně n v okolí bodu (v bodě)

Určete Taylorův polynom n-tého stupně k funkci f v bodě a

11. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ n = 3,\ a = \frac{\pi}{4}$

$$T_3(x) = f\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3$$

0, 1, 2, 3

vyznačené oranžově potřebujeme vypočítat

0 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

1 $f'(x) = (\operatorname{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{2} = 2$

2 $f''(x) = \left(\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)' = \left((\cos x)^{-2}\right)' = -2(\cos x)^{-3}\cdot(\cos x)' = - \quad s^3x\cdot(-\sin x) = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{2}}}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^3} = \dfrac{2^3\cdot\cancel{\sqrt2}}{(\sqrt2)^{\cancel{3}\,2}} = \dfrac{2^3}{2} = 4$

3 $f'''(x) = \left(\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2\,\dfrac{(\sin x)'\cdot\cos^3 x - \sin x\cdot(\cos^3 x)'}{(\cos^3 x)^2} = 2\cdot\dfrac{\cos x\cdot\cos^3 x - \sin x\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)}{\cos^6 x} = 2\,\dfrac{\cos^4 x + 3\cos^2 x\sin^2 x}{\cos^6 x} = 2\,\dfrac{\cancel{\cos^2 x}(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^{\cancel{6}\,4} x} =$

$= 2\,\dfrac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{2(1+2\sin^2 x)}{\cos^4 x}$

$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2\left(1+2\sin^2\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^4\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2\cdot\left(1+2\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^4} = \dfrac{2\cdot\left(1+\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\right)}{\frac{1}{4}} = 2\cdot 2\cdot 4 = 16$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{16}{3!}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3 = 1 + 2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\tfrac{\pi}{4}\right)^3$$