

## Vyšetřování průběhu funkce

- Určení, zda je funkce sudá nebo lichá nebo periodická
- Nalezení definičního oboru
- Nalezení průsečíků s osami
  - průsečíky s osou  $x$ : kořeny
  - průsečík s osou  $y$ : funkční hodnota v nule
- Limity v krajních bodech definičního oboru
- Asymptoty funkce
- Kritické body první derivace
  - intervaly monotonie
  - lokální extrémy a jejich funkční hodnoty
- Kritické body druhé derivace
  - intervaly konvexnosti a konkávnosti
  - inflexní body a jejich funkční hodnoty

U následujících funkcí nalezněte intervaly monotonie, extrémy, limity v krajních bodech definičního oboru, asymptoty a intervaly konvexity a konkávnosti. Ze zjištěných údajů se pokuste nakreslit graf.

7.  $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+2} + 3$

- funkce není ani sudá ani lichá ani periodická

-  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- průsečíky s osami:

• s O<sub>y</sub>:  $x=0$

$f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0}}{0+2} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$

$A[0; 3,5]$

• s O<sub>x</sub>:  $y=0$

$\frac{e^{2x}}{x+2} + 3 = 0$

$\frac{e^{2x}}{x+2} = -3 \quad | \cdot (x+2)$

$e^{2x} = -3x - 6$

nejde vyřešit analyticky:(

- limity v krajních bodech def. oboru:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} \right) + 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^{2x})'}{(x+2)'} + 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{1} + 3 = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{2x} + 3 = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} \right) + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x}}{1} + 3 = 3$

$\lim_{x \rightarrow -2+} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -2+} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} \right) + 3 = +\infty$

$x = -2$  je svislá asymptota

$\lim_{x \rightarrow -2-} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow -2-} \left( \frac{e^{2x}}{x+2} \right) + 3 = -\infty$

asymptoty:

- svislé:  $x = -2$

- šikmé:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{x+2} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 3x + 6}{x^2 + 2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x} + 3}{2x + 2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{2x}}{x+2} + 3}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} + 3x + 6}{x^2 + 2x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{2x} + 3}{2x + 2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^{2x}}{2} = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0 = k$$

šikmá asymptota v  $+\infty$  není

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 = b$$

už jsme to počítali  
v limitách

$$y = kx + b \rightarrow y = 3$$

šikmá asymptota v  $-\infty$

$f'$  + monotonie + extrémy:

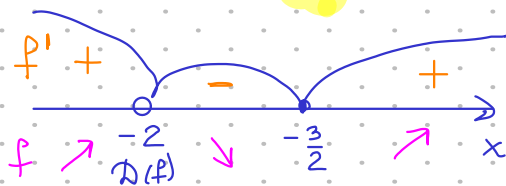
$$f'(x) = \left( \frac{e^{2x}}{x+2} + 3 \right)' = \frac{(e^{2x})' \cdot (x+2) - e^{2x} \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2e^{2x} \cdot (x+2) - e^{2x} \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^{2x} (2(x+2) - 1)}{(x+2)^2} = \frac{e^{2x} (2x+3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^{2x} \cdot (2x+3) = 0 \wedge (x+2)^2 \neq 0$$

$$e^{2x} = 0 \vee 2x+3 = 0$$

$$x \in \emptyset \quad x = -\frac{3}{2} \text{ stacionární bod}$$



$$f'(x) = \frac{e^{2x} (2x+3)}{x+2}$$

bod minima:  $x = -\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2}) = \frac{e^{2 \cdot (-\frac{3}{2})}}{-\frac{3}{2} + 2} + 3 = \frac{e^{-3}}{\frac{1}{2}} + 3 = \frac{2}{e^3} + 3 \rightarrow B \left[ -\frac{3}{2}, \frac{2}{e^3} + 3 \right]$

$f$  je rostoucí na  $(-\infty, -2); [-\frac{3}{2}, +\infty)$

$f$  je klesající na  $(-2, -\frac{3}{2}]$

$f''$  + konvexita/konkávita

$$f''(x) = \left( \frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2} \right)' = \frac{(e^{2x}(2x+3))' \cdot (x+2)^2 - e^{2x}(2x+3) \cdot ((x+2)^2)'}{(x+2)^4} = \frac{[e^{2x}]' \cdot (2x+3) + e^{2x} \cdot (2x+3)' \cdot (x+2)^2 - e^{2x} \cdot (2x+3) \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{[2e^{2x} \cdot (2x+3) + e^{2x} \cdot 2] \cdot (x+2)^2 - e^{2x} \cdot (2x+3) \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{2e^{2x}(x+2)[(2x+4)(x+2) - (2x+3)]}{(x+2)^4} =$$

$$= \frac{2e^{2x}(x+2)(2x^2+8x+8-2x-3)}{(x+2)^4} = \frac{2e^{2x}(2x^2+6x+5)}{(x+2)^3}$$

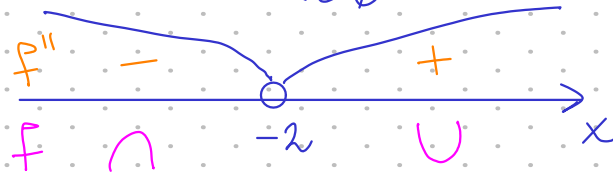
$$f'' = 0$$

$$2e^{2x}(2x^2+6x+5) = 0 \wedge (x+2)^3 \neq 0$$

$$e^{2x} \neq 0 \quad \vee \quad 2x^2+6x+5=0$$

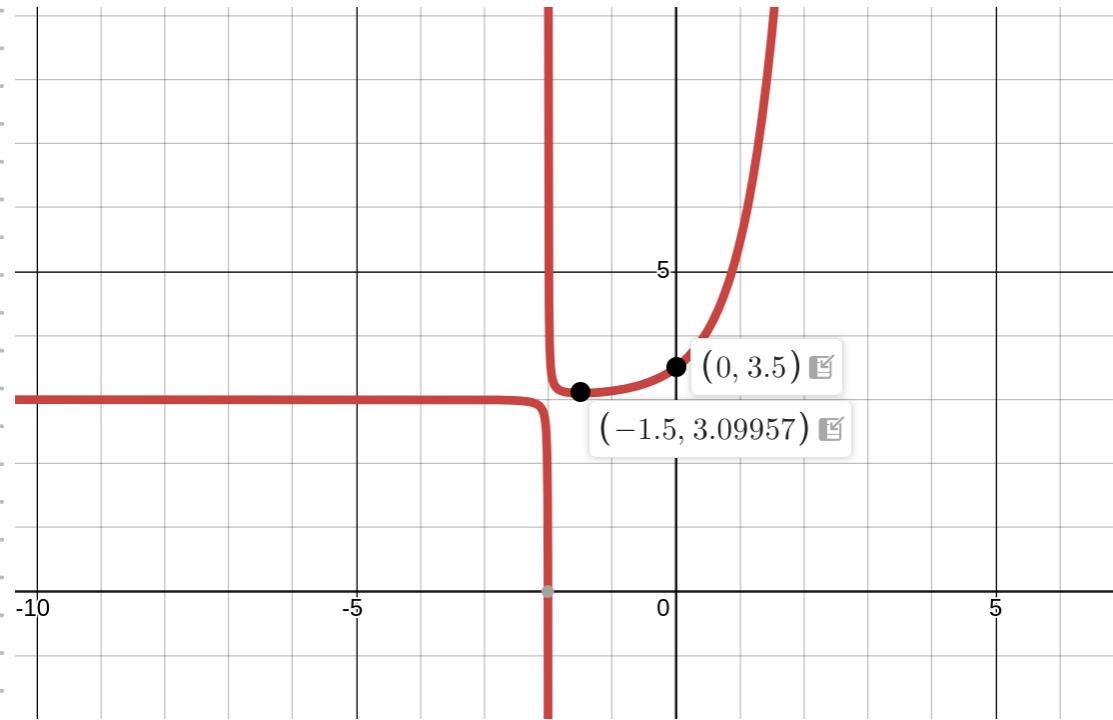
$$x \in \emptyset \quad \Delta = 36 - 40 = -4 < 0$$

$$x \in \emptyset$$



U f je konvexní na  $(-2; +\infty)$

∩ f je konkávní na  $(-\infty; -2)$



<https://www.desmos.com/calculator/iu55cm11sp>

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

je Taylorův polynom stupně  $n$  v okolí bodu (v bodě)

Určete Taylorův polynom  $n$ -tého stupně k funkci  $f$  v bodě  $a$

11.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $n = 3$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$

$$T_3(x) = \underset{\textcircled{0}}{f\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \underset{\textcircled{1}}{\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \underset{\textcircled{2}}{\frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \underset{\textcircled{3}}{\frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

vyznačené oranžově potřebujeme vypočítat

①  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

①  $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

②  $f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = ((\cos x)^{-2})' = -2(\cos x)^{-3} \cdot (\cos x)' = -\frac{2 \sin x}{\cos^3 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 \sin \frac{\pi}{4}}{\cos^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

③  $f'''(x) = \left(\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}\right)' = 2 \cdot \frac{(\sin x)' \cos^3 x - \sin x \cdot (\cos^3 x)'}{(\cos^3 x)^2} = 2 \cdot \frac{\cos x \cdot \cos^3 x - \sin x \cdot 3 \cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} = 2 \cdot \frac{\cos^4 x + 3 \cos^2 x \sin^2 x}{\cos^6 x} = 2 \cdot \frac{\cos^2 x (\cos^2 x + 3 \sin^2 x)}{\cos^4 x} = 2 \cdot \frac{\cos^2 x + 3 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cdot \frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos^2 x}$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2(1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4})}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{2(1 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{2(1 + 2 \cdot \frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 2}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 = 1 + 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{4}{3} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$