Teorie 3 - 3.10.2024

Postup na výpočet limit **učebnice s. 99**

1. Zkusím dosadit limitní hodnotu za x nebo n. Pokud tu vyjde, tak jsem hotov (1i, 4j). Pokud vyjde nedefinovaný výraz, tak to znamená, že počítám špatně.

2. Pokud x nebo n jde do nekonečna, vytýkám:
- pokud mám zlomek, vytýkám největší mocninu/exponenciálu jmenovatele (1abg, 4f)
- pokud mám polynom, vytýkám největší mocninu/exponenciálu (1ko, 4k)

3. Pokud x jde k nějakému číslu a mám výraz ne0/0:
- pokud je to oboustranná limita, tak neexistuje, vypočítám jednostranné limit a ukážu, že jsou různé (4h)
- pokud je to jednostranná limita, tak rozložím na součin, dosadím do těch závorek, kde to není nula. Tam, kde je to nula, vypočítám znaménko (ve výsledku vyjde +/- nekonečno). (4de)

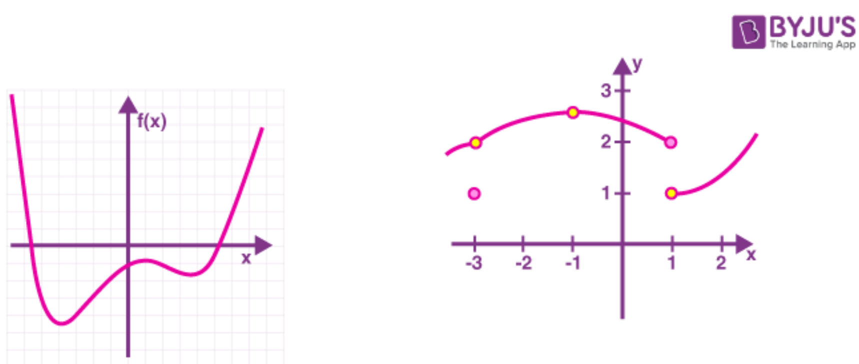
(učebnice s. 90-92)

Spojitost

Definice. *Nechť funkce f je definována v okolí bodu c. Říkáme, že funkce f je* **spojitá** *v bodě c, jestliže pro každou posloupnost (x_n) obsaženou v $\mathcal{D}(f)$ platí:*

$$\text{když } x_n \to c, \quad \text{pak } f(x_n) \to f(c).$$

Příklad:



Continuous Function Discontinuous Function

Funkce zleva je spojitá ve všech bodech. Funkce zprava není spojitá v bodech x=-3, x=-1 a x=1, všude jinde je spojitá.

Věta (o spojitosti elementárních funkcí). *Každá elementární funkce je spojitá v libovolném intervalu, na ktrerém je definována.*

(učebnice s. 103)

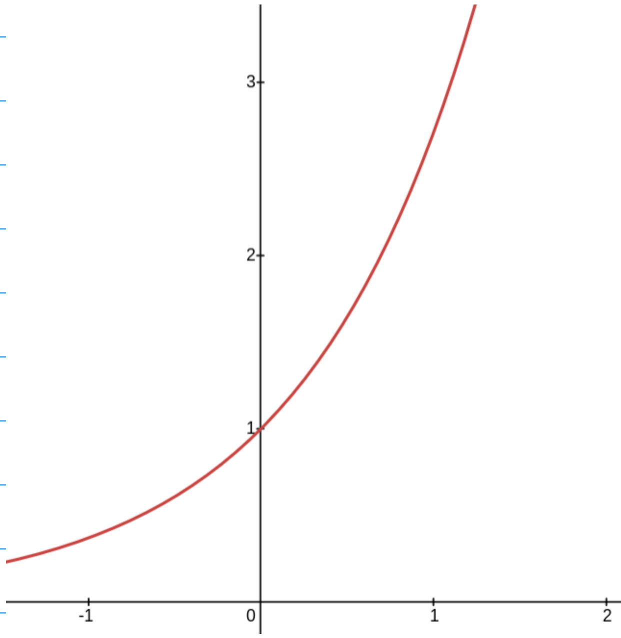
Derivace

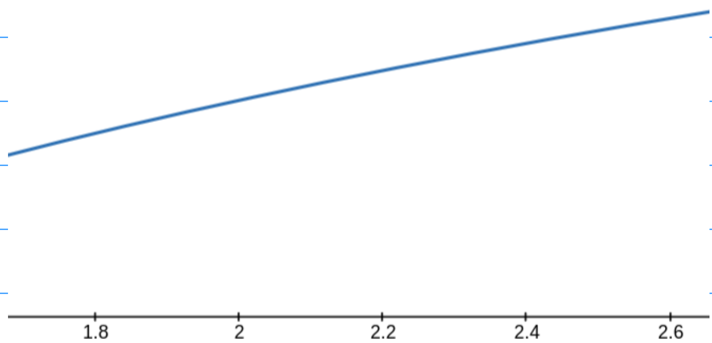
Definice. *Nechť funkce f je definována v okolí bodu c. Číslo $f'(c)$, definované vztahem*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

se nazývá **derivace funkce f v bodě c.**

Příklad:





Poznámka. **Geometrická interpretace $f'(c)$**
Derivace funkce f v bodě c je rovna *směrnici tečny* grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá tato tečna s kladnou poloosou x (nakreslete si obrázek: zlomek $f(c+h) - f(c)/h$ je směrnice sečny grafu funkce f, která prochází body $[c, f(c)]$ a $[c+h, f(c+h)]$, zbytek dostanete limitním přechodem).
Například když $f'(c) = 0$, je tečna grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$ rovnoběžná s osou x.

Věta (o derivaci základních funkcí). *Pro derivace základních funkcí platí:*

1.	$(k)' = 0$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(k \in \mathcal{R})$
2.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathcal{N})$
3.	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	*pro přípustná*	x $(\alpha \in \mathcal{R})$
4.	$(e^x)' = e^x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
5.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(a > 0)$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	*pro*	$x > 0$
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	*pro*	$x > 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
10.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	*pro*	$x \in \mathcal{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
11.	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	*pro*	$x \in \mathcal{R} - \{k\pi\}$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*pro*	$x \in (-1, 1)$
13.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*pro*	$x \in (-1, 1)$
14.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
15.	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$

Věta (o derivaci operací a superpozice). *Platí*

(a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(c) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

(d) $(f[g])' = f'[g] \cdot g'$

pokud existuje pravá strana vztahů.