## Postup hledání intervalů monotonie:

1. Vypočítám definiční obor D(f)

2. Vypočítám derivaci f'

3. Hledám nulové body derivace, tedy reším rovnici f' = 0.
Hledám pouze řešení, která patří do D(f).

4. Na číselnou osu nanesu D(f) a nulové body derivace.
Nulové body mi rozdělí D(f) na několik intervalů. Na každém z nich určím znaménko derivace:
- pokud f' > 0, pak f je na intervalu rostoucí
- pokud f' < 0, pak f je na intervalu klesající

Najděte maximální intervaly monotonie funkcí:

1. $f(x) = x \cdot \sqrt{18 - x^2}$

(1) **definiční obor:** $18 - x^2 \geq 0 \;/\cdot(-1)$

$x^2 - 18 \leq 0$

$(x - \sqrt{18})(x + \sqrt{18}) \leq 0$

$(x - 3\sqrt{2})(x + 3\sqrt{2}) \leq 0$


$D(f) = [-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}]$

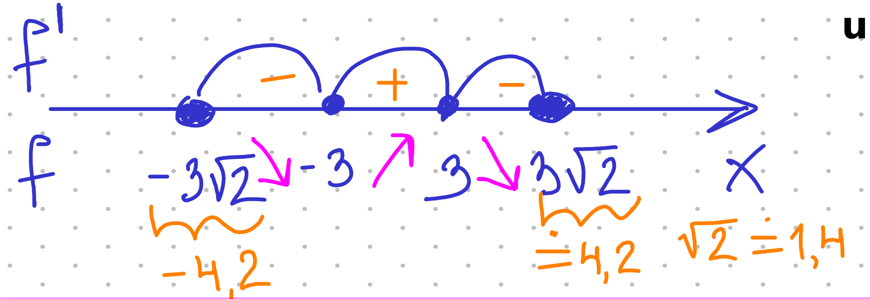
(2) $f'(x) = (x\sqrt{18-x^2})' = x'\sqrt{18-x^2} + x \cdot (\sqrt{18-x^2})' = \sqrt{18-x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{18-x^2}} \cdot (18-x^2)' =$

$= \sqrt{18-x^2} + \frac{x \cdot (-\cancel{2}x)}{\cancel{2}\sqrt{18-x^2}} = \frac{18-x^2}{\sqrt{18-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{18-x^2}} = \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}}$

(3) $f'(x) = 0$

$\frac{2(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}} = 0 \to \begin{cases} 9 - x^2 = 0 \\ 18 - x^2 > 0 \end{cases} \to$ $x = 3$ nebo $x = -3$

4




**určím znaménka derivace:**

$$f'(x) = \frac{2(9-x^2)}{\sqrt{18-x^2}} = \frac{2(3-x)(3+x)}{\sqrt{18-x^2}}$$

$\nearrow$ f je rostoucí na $[-3;3]$

$\searrow$ f je klesající na $[-3\sqrt{2};-3]$; $[3;3\sqrt{2}]$

**bod lokálního minima:** $x = -3$, $f(-3) = (-3)\cdot(18-(-3)^2) = (-3)\cdot 9 = -27$

**bod lokálního maxima:** $x = 3$, $f(3) = 3\cdot(18-3^2) = 3\cdot 9 = 27$

4. $f(x) = \arccos\sqrt{4x-1}$

① **definiční obor:** $-1 \le \sqrt{4x-1} \le 1 \quad \wedge \quad 4x-1 \ge 0$

toto platí vždy

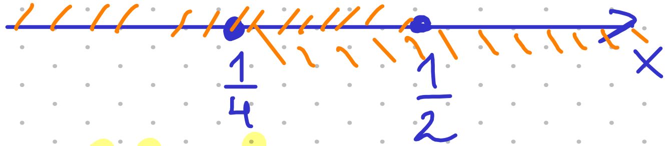
dál to neřeším, protože stejnou nerovnici už mám dole

$$\sqrt{4x-1} \le 1$$

$$4x-1 \le 1 \quad \wedge \quad 4x-1 \ge 0$$

$$4x \le 2 \qquad\qquad 4x \ge 1$$

$$x \le \frac{1}{2} \qquad\qquad x \ge \frac{1}{4}$$




$$D(f) = \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$$

② $f'(x) = \left(\arccos\sqrt{4x-1}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{4x-1}\right)^2}} \cdot \left(\sqrt{4x-1}\right)' =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(4x-1)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot (4x-1)' = -\frac{1}{\sqrt{2-4x}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{4x-1}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} = -\frac{2}{\sqrt{(2-4x)(4x-1)}}$$

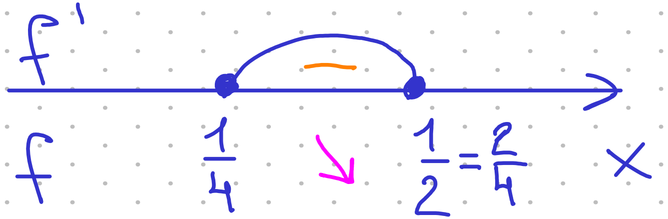
(3) $f'(x) = 0$

$$-\frac{2}{\sqrt{(2-4x)(4x-1)}} = 0$$

$$-2 = 0$$

**nemá řešení - derivace nemá nulové body**

(4)



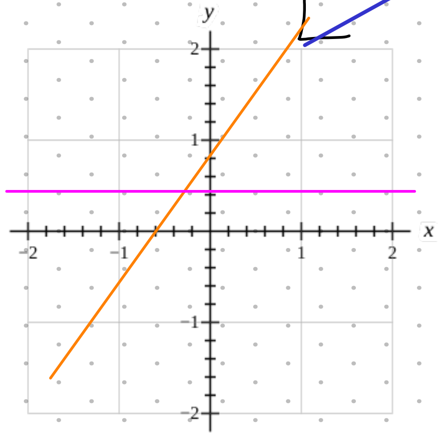

**určím znaménko derivace:**

$$f'(x) = -\frac{\overset{+}{2}}{\underset{+}{\sqrt{(2-4x)(4x-1)}}} \quad -$$

$$\boxed{\searrow f \text{ je klesající na } \left[\tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{2}\right]}$$

# Asymptoty

## šikmé



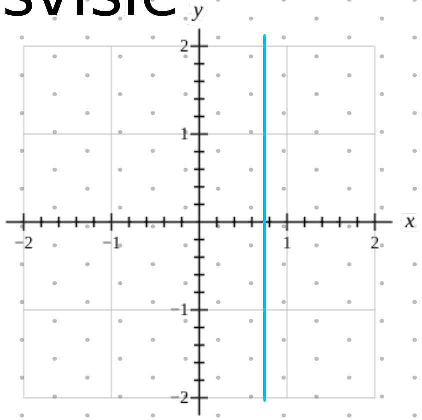

Rovnice: $y = kx+q$

① $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ pokud limita existuje, je to k

② $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$ pokud limita existuje, je to q

pokud pro +∞ nebo -∞ jde vypočítat jak k, tak q,
tak y = kx + q je asymptota

## svislé




Rovnice: $x = a$

počítám pro všechny 'díry' v definičním oboru

$\lim\limits_{x \to a_{+,-}} f(x)$ pokud limita je +∞ nebo -∞,
pak x = a je asymptota

Rozhodněte, zda existují asymptoty následujících grafů a nalezněte je

10. $y = \dfrac{2x^2 - 7x + 7}{x - 2}$

$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$

**šikmé asymptoty:**

1 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 7}{x^2 - 2x} \overset{L'H \; \frac{\text{něco}}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x - 7}{2x - 2} \overset{L'H \; \frac{\text{něco}}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{2} = \underbrace{2}_{k}$

2 $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x^2 - 7x + 7}{x - 2} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{2x^2 - 7x + 7 - 2x^2 + 4x}{x - 2} \right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{-3x + 7}{x - 2} \right) \overset{L'H \; \frac{\text{něco}}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \left( \dfrac{-3}{1} \right) = \underbrace{-3}_{b}$

$y = 2x - 3$ šikmá asymptota

správně ještě mám vypočítat ty samé limity pro -∞, ale tady výpočet bude úplně stejný a asymptota vyjde stejná

**svislé asymptoty:**

"díra" v definičním oboru je 2:

dosadím:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{2x^2 - 7x + 7}{x - 2} \overset{\frac{1}{0+}}{=} +\infty$$

$x = 2$ svislá asymptota