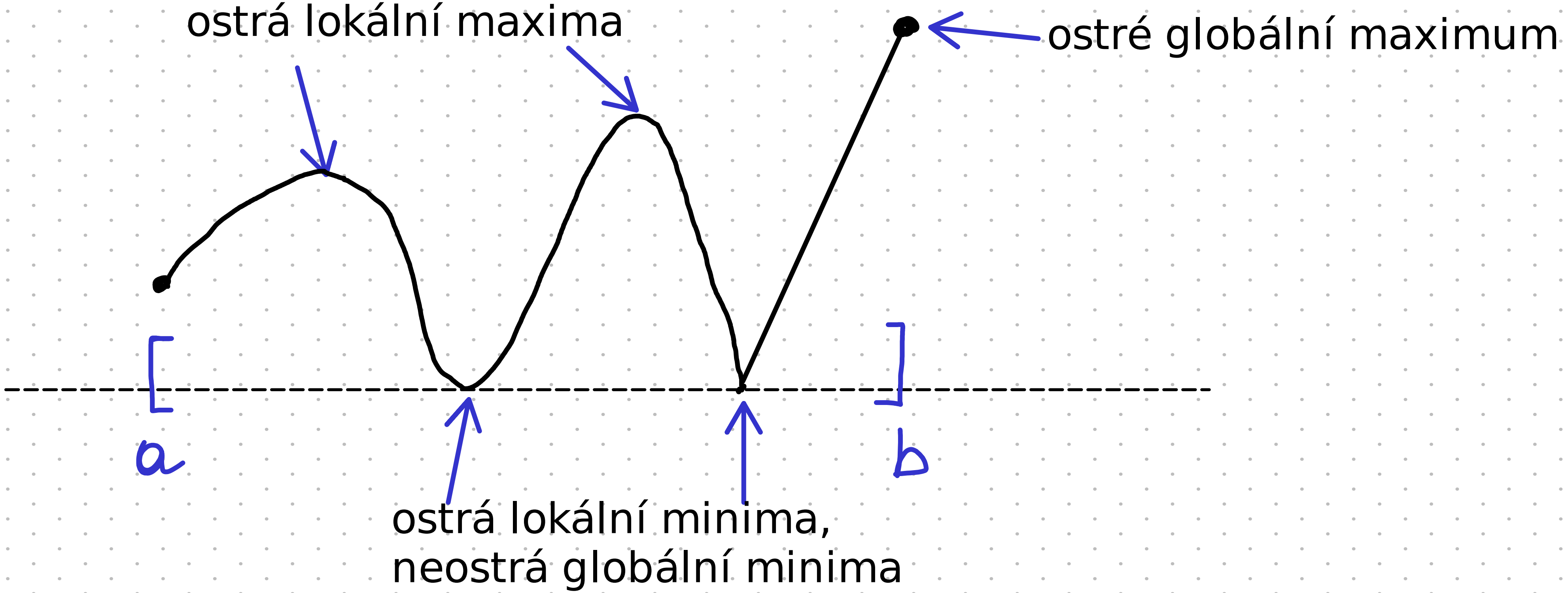
Extrémy funkce na uzavřeném intervalu



Postup hledání

1) lokální extrémy: pomocí první derivace, stejně jako intervaly monotonie

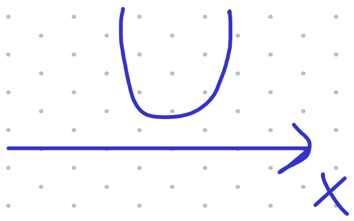
2) globální extrémy: pomocí lokálních extrémů + hodnot funkce na koncích intervalů

Nalezněte všechny extrémy funkce na daném intervalu a určete jejich kvalitu

12. $f(x) = \ln(4x^2 - 8x + 11) - \ln 2, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle$

1) lokální extrémy

$D(f)$: $4x^2 - 8x + 11 > 0$



$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 64 - 176 < 0$

$\downarrow$

rovnice nemá kořeny

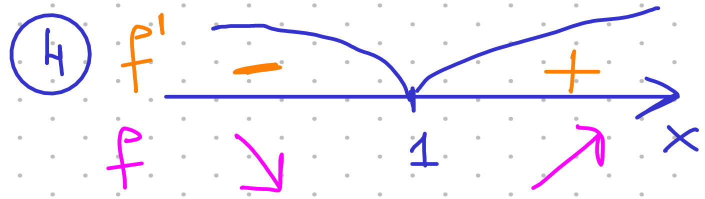
$\downarrow$

nerovnice je splněna pro všechna reálná čísla

1. $D(f) = \mathbb{R}$
2. $f'(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 8x + 11} \cdot (4x^2 - 8x + 11)' + 0 = \dfrac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 11} = \dfrac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 11}$
3. $f'(x) = 0$

$$\frac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 11} = 0 \rightarrow 8(x-1) = 0 \rightarrow x = 1$$ stacionární bod

4



$$f'(x) = \frac{8(x-1)}{4x^2-8x+11}$$

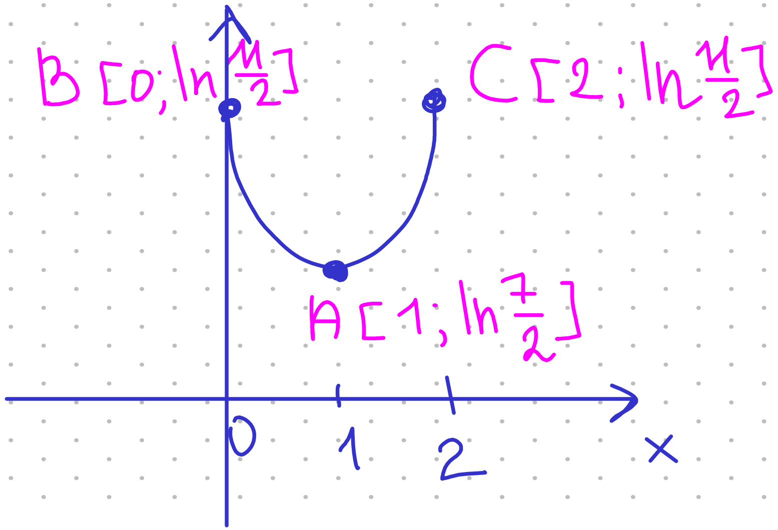
$x = 1$ - bod lokálního minima

$$f(1) = \ln(4\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + 11) - \ln 2 = \ln(7) - \ln(2) = \ln\frac{7}{2} \qquad A\left[1; \ln\frac{7}{2}\right]$$

2) hodnoty funkce na koncích intervalu

$x \in [0; 2]$

- $x = 0,\ f(0) = \ln(4\cdot 0^2 - 8\cdot 0 + 11) - \ln 2 = \ln(11) - \ln(2) = \ln\frac{11}{2} \qquad B\left[0; \ln\frac{11}{2}\right]$
- $x = 2,\ f(2) = \ln(4\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 11) - \ln 2 = \ln(11) - \ln(2) = \ln\frac{11}{2} \qquad C\left[2; \ln\frac{11}{2}\right]$



ostré globální a lokální minimum v bodě x=1
neostrá globální maxima v bodech
x=0 a x=2

Postup hledání intervalů konvexity/konkávity:

1. Vypočítám definiční obor $D(f)$

2. Vypočítám derivaci f'

3. Vypočítám druhou derivaci f''

4. Hledám nulové body druhé derivace, tedy reším rovnici $f'' = 0$.
Hledám pouze řešení, která patří do $D(f)$.

5. Na číselnou osu nanesu $D(f)$ a nulové body druhé derivace.
Nulové body mi rozdělí $D(f)$ na několik intervalů. Na každém z nich určím znaménko derivace:
- pokud $f'' > 0$, pak je f na intervalu konvexní $\cup$
- pokud $f'' < 0$, pak je f na intervalu konkávní $\cap$

Najděte maximální intervaly konvexity a konkávity funkcí:

1. $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$

① $D(f)$: $4-x^2 \neq 0$

$x^2 \neq 4$

$x \neq 2 \wedge x \neq -2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

② $f'(x) = \frac{(2x)'(4-x^2) - (2x)(4-x^2)'}{(4-x^2)^2} = \frac{2(4-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{2(x^2+4)}{(4-x^2)^2}$

③ $f''(x) = \left(\frac{2(x^2+4)}{(4-x^2)^2}\right)' = 2\left(\frac{x^2+4}{(4-x^2)^2}\right)' = 2 \cdot \frac{(x^2+4)' \cdot (4-x^2)^2 - (x^2+4)((4-x^2)^2)'}{((4-x^2)^2)^2} =$

$= 2 \cdot \frac{2x \cdot (4-x^2)^2 - (x^2+4) \cdot 2 \cdot (4-x^2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^4} = 2 \cdot \frac{2x(4-x^2)^2 + 2 \cdot 2x(4-x^2)(x^2+4)}{(4-x^2)^4} =$

$= 2 \cdot \frac{2x\cancel{(4-x^2)} \cdot (4-x^2+2(x^2+4))}{(4-x^2)^{\cancel{4}}} = \frac{4x(4-x^2+2x^2+8)}{4-x^2} = \frac{4x(x^2+12)}{(2-x)(2+x)}$

④ $f''(x) = 0 \rightarrow \frac{4x(x^2+12)}{(2-x)(2+x)} = 0$

$$4x(x^2+12)=0 \quad \wedge \quad (2-x)(2+x)\neq 0$$

$$x=0 \vee x^2+12=0 \qquad x\neq 2 \wedge x\neq -2$$

$$x\in\emptyset$$

5

f'': $+$ -2 $-$ 0 $+$ 2 $-$

f: $\cup$ -2 $\cap$ 0 $\cup$ 2 $\cap$ x

$$f''(x)=\frac{4x(x^2+12)}{(2-x)(2+x)}$$

f je konvexní na (-∞; -2); [0; 2)
f je konkávní na (-2; 0]; (2; +∞)

Rozhodněte, kde je rostoucí, klesající, konvexní a konkávní funkce:

8. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

① $D(f) = (0; +\infty)$

② $f'(x) = x' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' =$

$\ln^2 x + \cancel{x} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \ln^2 x + 2\ln x = \ln x\,(\ln x + 2)$

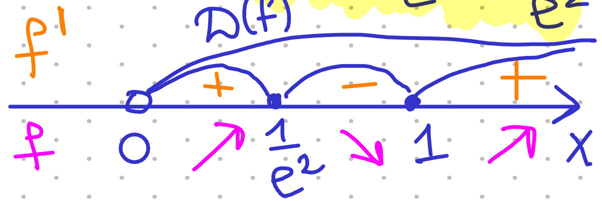
③ $f'(x) = 0$

$\ln x\,(\ln x + 2) = 0$

$\ln x = 0 \ \vee\ \ln x + 2 = 0$

$x = 1$ $\qquad \ln x = -2$

$x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

④ 

$f'(x) = \ln x\,(\ln x + 2)$

f je rostoucí na (0, 1/e²]; [1; +∞)

f je klesající na [1/e²; 1]

⑤ $f''(x) = (\ln x\,(\ln x + 2))' = (\ln^2 x + 2\ln x)' =$

$= 2\ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x}(\ln x + 1) =$

$= \frac{2(\ln x + 1)}{x}$

⑥ $f''(x) = 0$

$\frac{2(\ln x + 1)}{x} = 0$

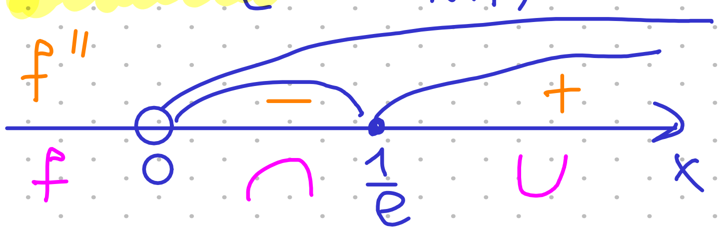
$2(\ln x + 1) = 0 \ /:2 \ \wedge\ x \neq 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$

⑦ 

f je konvexní na (0; 1/e]

f je konkávní na [1/e; +∞)