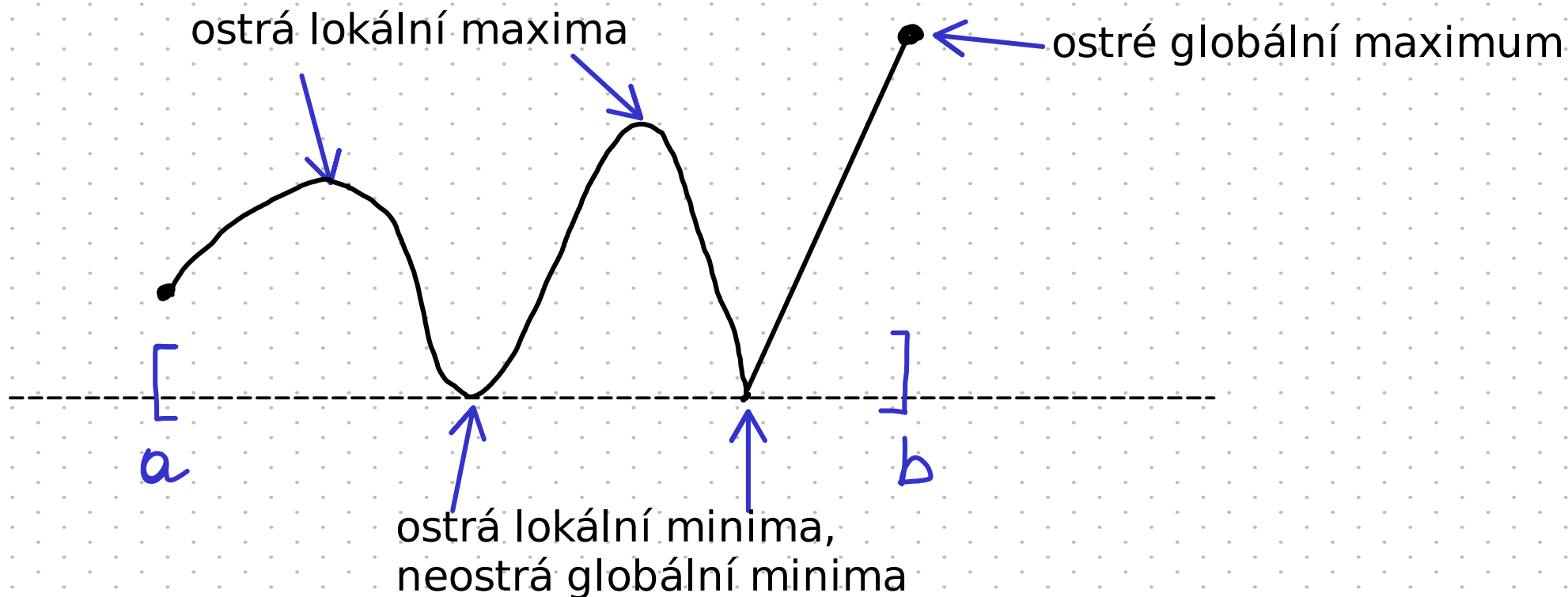


Extrémy funkce na uzavřeném intervalu



Postup hledání

- 1) lokální extrémy: pomocí první derivace, stejně jako intervaly monotonie
- 2) globální extrémy: pomocí lokálních extrémů + hodnot funkce na koncích intervalů

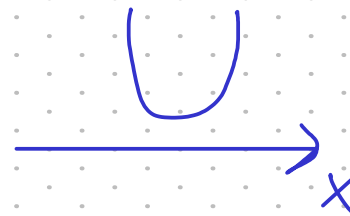
Nalezněte všechny extrémy funkce na daném intervalu a určete jejich kvalitu

12. $f(x) = \ln(4x^2 - 8x + 11) - \ln 2, \quad x \in \langle 0, 2 \rangle$

1) lokální extrémy

$$D(f): 4x^2 - 8x + 11 > 0$$

$$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 11 = 64 - 176 < 0$$



↓
rovnice nemá kořeny

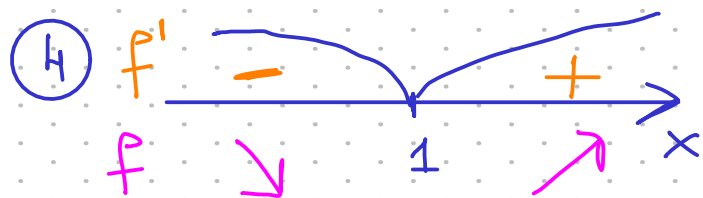
↓
nerovnice je splněna pro všechna reálná čísla

① $D(f) = \mathbb{R}$

② $f'(x) = \frac{1}{4x^2 - 8x + 11} \cdot (4x^2 - 8x + 11)' + 0 = \frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 11} = \frac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 11}$

③ $f'(x) = 0$

$$\frac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 11} = 0 \rightarrow 8(x-1) = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{stacionární bod}$$



$$f'(x) = \frac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 11}$$

$x = 1$ - bod lokálního minima

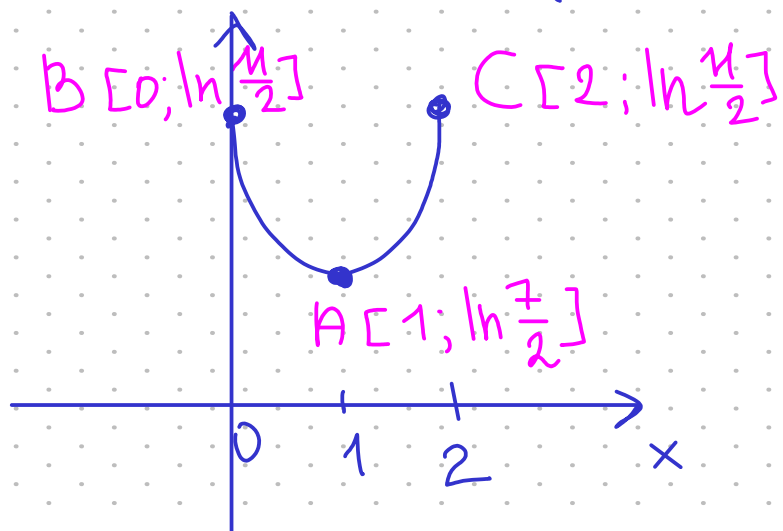
$$f(1) = \ln(4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 11) - \ln 2 = \ln(7) - \ln(2) = \ln \frac{7}{2} \quad A \left[1; \ln \frac{7}{2}\right]$$

2) hodnoty funkce na koncích intervalu

$$x \in [0; 2]$$

- $x = 0, f(0) = \ln(4 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 + 11) - \ln 2 = \ln(11) - \ln(2) = \ln \frac{11}{2} \quad B \left[0; \ln \frac{11}{2}\right]$

- $x = 2, f(2) = \ln(4 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 11) - \ln 2 = \ln(11) - \ln(2) = \ln \frac{11}{2} \quad C \left[2; \ln \frac{11}{2}\right]$



**ostré globální a lokální minimum v bodě $x=1$
neostrá globální maxima v bodech
 $x=0$ a $x=2$**

Postup hledání intervalů konvexity/konkávity:

1. Vypočítám definiční obor $D(f)$
2. Vypočítám derivaci f'
3. Vypočítám druhou derivaci f''
4. Hledám nulové body druhé derivace, tedy řeším rovnici $f'' = 0$.
Hledám pouze řešení, která patří do $D(f)$.
5. Na číselnou osu nanesu $D(f)$ a nulové body druhé derivace.
Nulové body mi rozdělí $D(f)$ na několik intervalů. Na každém z nich určím znaménko derivace:
 - pokud $f'' > 0$, pak je f na intervalu konvexní
 - pokud $f'' < 0$, pak je f na intervalu konkávní



Najděte maximální intervaly konvexity a konkávy funkcí:

1. $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$

① $D(f)$: $4-x^2 \neq 0$
 $x^2 \neq 4$

$x \neq 2 \wedge x \neq -2$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

② $f'(x) = \frac{(2x)'(4-x^2) - (2x)(4-x^2)'}{(4-x^2)^2} = \frac{2(4-x^2) - 2x \cdot (-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2} = \frac{2(x^2+4)}{(4-x^2)^2}$

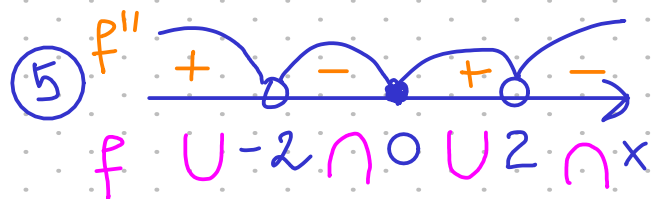
③ $f''(x) = \left(\frac{2(x^2+4)}{(4-x^2)^2} \right)' = 2 \cdot \left(\frac{x^2+4}{(4-x^2)^2} \right)' = 2 \cdot \frac{(x^2+4)' \cdot (4-x^2)^2 - (x^2+4)((4-x^2)^2)'}{((4-x^2)^2)^2} =$
 $= 2 \cdot \frac{2x \cdot (4-x^2)^2 - (x^2+4) \cdot 2 \cdot (4-x^2) \cdot (-2x)}{(4-x^2)^4} = 2 \cdot \frac{2x(4-x^2)^2 + 2 \cdot 2x(4-x^2)(x^2+4)}{(4-x^2)^4} =$
 $= 2 \cdot \frac{2x \cancel{(4-x^2)} \cdot (4-x^2 + 2(x^2+4))}{(4-x^2)^4} = \frac{4x(4-x^2+2x^2+8)}{(4-x^2)^3} = \frac{4x(x^2+12)}{(2-x)^3(2+x)^3}$

④ $f''(x) = 0 \rightarrow \frac{4x(x^2+12)}{(2-x)^3(2+x)^3} = 0$

$$4x(x^2+12)=0 \wedge (2-x)^3(2+x)^3 \neq 0$$

$$x=0 \vee x^2+12=0 \quad x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

$$x \in \emptyset$$



$$f''(x) = \frac{4x(x^2+12)}{(2-x)^3(2+x)^3}$$

f je konvexní na $(-\infty; -2)$; $[0; 2)$

f je konkávní na $(-2; 0]$; $(2; +\infty)$

Rozhodněte, kde je rostoucí, klesající, konvexní a konkávní funkce:

8. $f(x) = x \cdot \ln^2 x$

① $\mathcal{D}(f) = (0; +\infty)$

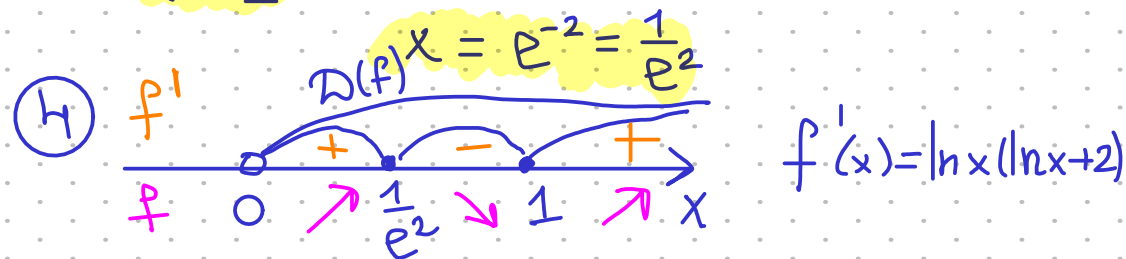
② $f'(x) = x' \cdot \ln^2 x + x \cdot (\ln^2 x)' =$
 $\ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2)$

③ $f'(x) = 0$

$\ln x (\ln x + 2) = 0$

$\ln x = 0 \vee \ln x + 2 = 0$

$x = 1 \quad \ln x = -2$



f je rostoucí na $(0, 1/e^2]$; $[1; +\infty)$

f je klesající na $[1/e^2; 1]$

⑤ $f''(x) = (\ln x (\ln x + 2))' = (\ln^2 x + 2 \ln x)' =$
 $= 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot \frac{1}{x} (\ln x + 1) =$
 $= \frac{2 (\ln x + 1)}{x}$

⑥ $f''(x) = 0$

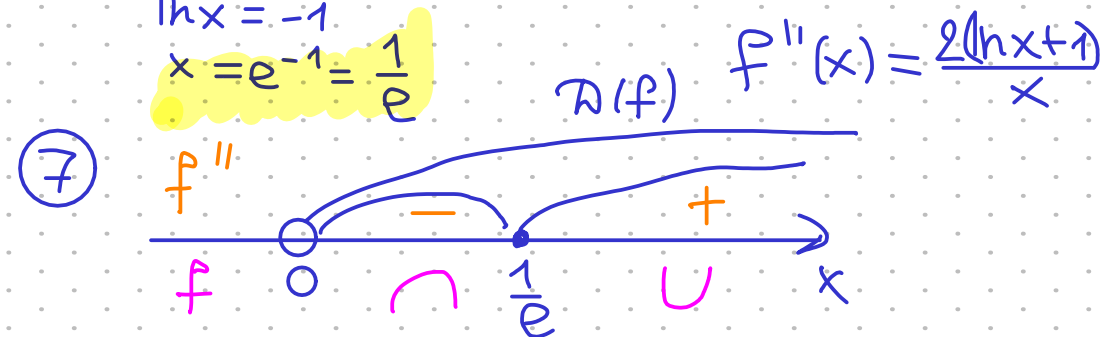
$\frac{2 (\ln x + 1)}{x} = 0$

$2 (\ln x + 1) = 0 \wedge x \neq 0$

$\ln x + 1 = 0$

$\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$



f je konvexní na $(0; 1/e]$

f je konkávní na $[1/e; +\infty)$