Cvičení 7 - 31.10.2024

červené - spolu

modré - samostatně

učebnice s. 165

Definiční obor funkce dvou proměnných

1. Graficky znázorněte definiční obor funkce dvou proměnných f a rozhodněte, zda je kompaktní podmnožinou roviny

(a) $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 - y + 3) + \arcsin x}{\sqrt{y - x + 1}}$

(b) $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x + y} - \dfrac{x - y}{5^x}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y - x} - \arccos y}{\operatorname{arccotg}(x + y)}$

(d) $f(x,y) = \arccos(x^2 + y^2 - 5) + \sqrt{y} + 3$

(e) $f(x,y) = \sqrt{xy} - 5\sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(f) $f(x,y) = \ln y \sqrt{\operatorname{arctg} x - y} + 2^{x-y} - 7$

(g) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2 - y^2} + 5}{3x}$

(h) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{3 - y - x^2} + \sqrt{-x + \ln y}}{x^2 + y^2}$

Parciální derivace

2. Vypočtěte parciální derivace funkce f podle obou proměnných

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 - xy + 3) + x$

(b) $f(x,y) = x\sqrt{y - x^2 + 1}$

(c) $f(x,y) = y \cdot 2^{xy} + 3x^2y - \sqrt{2}$

(d) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{2x} + 7y$

(e) $f(x,y) = x \cdot \operatorname{tg}^5 xy$

(f) $f(x,y) = \left(y - \frac{1}{x}\right)^5$

(g) $f(x,y) = e^{x^2 + y^2 + 3xy - 5}$

(h) $f(x,y) = 2\sqrt{xy} - \ln \dfrac{y}{x} - 15$

(i) $f(x,y) = x^y + x^2 + 2^y - 3$

(j) $f(x,y) = 3 \operatorname{arctg} x \sqrt{y} - y \ln 2$

4. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce f dané předpisem

(a) $f(x,y) = e^{x^2+y+3} + 2y^2 - 9$

(b) $f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

(c) $f(x,y) = \sqrt{y^2 + 4xy}$

(d) $f(x,y) = xy - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3$

(e) $f(x,y) = x^3y^5 + 3x - 5y - 1$

(f) $f(x,y) = \frac{\ln xy}{x} - 6y$

(g) $f(x,y) = \frac{(5x-y)^4}{6}$

(h) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 11x + 5y$

Lokální extrémy

5. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných f dané předpisem

(a) $f(x,y) = 18xy - x^3 - y^3$

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$

(c) $f(x,y) = x^3 + 3y^2 - 6xy$

(d) $f(x,y) = 2x - x^2 - y^2 - 3$

(e) $f(x,y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y - \ln xy$

(f) $f(x,y) = 5 + xy - 2x - 3y$

(g) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3 - 7$

(h) $f(x,y) = \ln(x^2 - y) + y - 2$

(i) $f(x,y) = e^{x^2+y^2+4x-2y}$

(j) $f(x,y) = 4x + 2xy - 4y - x^2 - 3y^2$

Výsledky

1. (a) Viz obr. 6.1, $\mathcal{D}(f)$ není kompaktní množina (není uzavřená),
(b) viz obr. 6.6, $\mathcal{D}(f)$ je kompaktní množina,
(c) viz obr. 6.4, $\mathcal{D}(f)$ není kompaktní množina (není omezená),
(d) viz obr. 6.7, $\mathcal{D}(f)$ je kompaktní množina,
(e) viz obr. 6.8, $\mathcal{D}(f)$ je kompaktní množina,
(f) viz obr. 6.9, $\mathcal{D}(f)$ není kompaktní množina (není uzavřená ani omezená),
(g) viz obr. 6.10, $\mathcal{D}(f)$ není kompaktní množina (není uzavřená),
(h) viz obr. 6.11, $\mathcal{D}(f)$ je kompaktní množina.

2. (a) $\partial_x f(x,y) = \dfrac{2x-y}{x^2-xy+3} + 1, \quad \partial_y f(x,y) = \dfrac{-x}{x^2-xy+3}$

(b) $\partial_x f(x,y) = \sqrt{y-x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{y-x^2+1}}, \quad \partial_y f(x,y) = \dfrac{x}{2\sqrt{y-x^2+1}}$

(c) $\partial_x f(x,y) = y^2 \cdot 2^{xy} \ln 2 + 6xy, \quad \partial_y f(x,y) = 2^{xy} + xy \cdot 2^{xy} \ln 2 + 3x^2$

(d) $\partial_x f(x,y) = \dfrac{xy \cos xy - \sin xy}{2x^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{1}{2} \cos xy + 7$

(e) $\partial_x f(x,y) = \operatorname{tg}^5 xy + 5x \cdot \operatorname{tg}^4 xy \cdot \dfrac{y}{\cos^2 xy}, \quad \partial_y f(x,y) = 5x \cdot \operatorname{tg}^4 xy \cdot \dfrac{x}{\cos^2 xy}$

4. (a) $\partial_{xx} f(x,y) = 2\, e^{x^2+y+3}(2x^2+1), \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 2x\, e^{x^2+y+3},$
$\partial_{yy} f(x,y) = e^{x^2+y+3} + 4$

(b) $\partial_{xx} f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$
$\partial_{yy} f(x,y) = 1 - \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(c) $\partial_{xx} f(x,y) = \dfrac{-4y^2}{\sqrt{(y^2+4xy)^3}}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = \dfrac{4xy}{\sqrt{(y^2+4xy)^3}},$
$\partial_{yy} f(x,y) = \dfrac{-4x^2}{\sqrt{(y^2+4xy)^3}}$

(d) $\partial_{xx} f(x,y) = -2x, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 1, \quad \partial_{yy} f(x,y) = -2y$

(e) $\partial_{xx} f(x,y) = 6xy^5, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 15x^2y^4, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 20x^3y^3$

(f) $\partial_{xx} f(x,y) = \dfrac{2 \ln xy - 3}{x^3}, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -\dfrac{1}{x^2 y},$
$\partial_{yy} f(x,y) = -\dfrac{1}{xy^2}$

(g) $\partial_{xx} f(x,y) = 50(5x-y)^2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = -10(5x-y)^2,$
$\partial_{yy} f(x,y) = 2(5x-y)^2$

(h) $\partial_{xx} f(x,y) = 2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y) = 0, \quad \partial_{yy} f(x,y) = 6$

5. (a) f má v bodě $A = [6, 6]$ lokální maximum (v bodě $B = [0, 0]$ nemá extrém),

(b) f má v bodě $A = [3, 2]$ lokální minimum,

(c) f má v bodě $A = [2, 2]$ lokální minimum (v bodě $B = [0, 0]$ nemá extrém),

(d) f má v bodě $A = [1, 0]$ lokální maximum,

(e) f má v bodě $A = [1, 2]$ lokální minimum,

(f) f nemá lokální extrémy,

(g) f má v bodě $A = [1, 1]$ lokální maximum (v bodě $B = [0, 0]$ nemá extrém),

(h) f nemá lokální extrémy,

(i) f má v bodě $A = [-2, 1]$ lokální minimum,

(j) f má v bodě $A = [2, 0]$ lokální maximum.