# Cvičení 5 - 17.10.2024

červené - spolu

modré - samostatně

## L'Hospitalovo pravidlo

**4.** Vypočtěte limitu funkce

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\cos x - 1}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + \sin 5x}{\sin x - \sin 3x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 + x - 14}{x^3 - 2x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^x}{4x}$

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} x\, e^x$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} (3x^2 - e^{5x})$

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

(j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

(k) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4}$

(l) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

(m) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{6+x} - \sqrt{2-x}}{x+2}$

(n) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{5}{x^2 - x - 6}\right)$

(o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{\cos x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

(q) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(r) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 . \sin \dfrac{1}{x}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(t) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

(u) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 4^x}{x}$

(v) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

(w) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\cos x - 1}$

(x) $\lim\limits_{x\to \infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{\ln x}{x^2 + 1}$

(y) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty} (\ln x - 3^x)$

# První derivace & průběh funkce

**6.** Najděte intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, resp. klesající a lokální extrémy funkce $f$, dané předpisem

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ | $f(x) = x \cdot \ln x$ | $(b)$ | $f(x) = \ln^2 x$ |
| $(c)$ | $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ | $(d)$ | $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$ |
| $(e)$ | $f(x) = 5^{-x^2}$ | $(f)$ | $f(x) = 4\,\mathrm{arctg}\, x - \ln(1+x^2)$ |
| $(g)$ | $f(x) = \ln(1 - e^x)$ | $(h)$ | $f(x) = \dfrac{3e^x}{x}$ |
| $(i)$ | $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$ | $(j)$ | $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ |
| $(k)$ | $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ | $(l)$ | $f(x) = e^{2x} + 2\,e^{3-x}$ |
| $(m)$ | $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ | $(n)$ | $f(x) = \mathrm{arctg}\, x^2$ |

# Výsledky

**4.** (a) $0$, (b) $0$, (c) $\frac{3}{4}$, (d) $-4$, (e) $\frac{13}{4}$, (f) $\frac{1}{2}$, (g) $0$, (h) $-\infty$, (i) $\frac{1}{2}$, (j) $\frac{1}{2}$, (k) $-\frac{1}{16}$, (l) $-\frac{1}{56}$, (m) $\frac{1}{2}$, (n) $\frac{1}{5}$, (o) $0$, (p) $-\frac{1}{3}$, (q) $-1$, (r) $\infty$, (s) $0$, (t) $1$, (u) $\ln\frac{3}{4}$, (v) $1$, (w) $0$, (x) $\frac{\pi}{2}$, (y) $1$, (z) $-\infty$.

**6.** (a) $f$ je klesající v $(0, e^{-1}\rangle$, rostoucí v $\langle e^{-1}, \infty)$, v bodě $x = e^{-1}$ má lokální (i absolutní) minimum,

(b) $f$ je klesající v $(0, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,

(c) $f$ je rostoucí v $(0, e\rangle$, klesající v $\langle e, \infty)$, v bodě $x = e$ má lokální (i absolutní) maximum,

(d) $f$ je rostoucí v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 6, \infty)$, klesající v $\langle -1, 6\rangle$, v bodě $x = -1$ má lokální maximum, v bodě $x = 6$ má lokální minimum,

(e) $f$ je rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$, klesající v $\langle 0, \infty)$, v bodě $x = 0$ má lokální (i absolutní) maximum,

(f) $f$ je rostoucí v $(-\infty, 2\rangle$, klesající v $\langle 2, \infty)$, v bodě $x = 2$ má lokální (i absolutní) maximum,

(g) $f$ je klesající v $(-\infty, 0)$,

(h) $f$ je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, v bodě $x = 1$ má lokální minimum,

(i) $f$ je klesající v $(-\infty, -4\rangle$ a v $\langle 0, \infty)$, rostoucí v $\langle -4, 0\rangle$, v bodě $x = -4$ má lokální minimum,

(j) $f$ je klesající v $(-\infty, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,

(k) $f$ je rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$ a v $\langle 2, \infty)$, klesající v $\langle 0, 2\rangle$, v bodě $x = 0$ má lokální maximum, v bodě $x = 2$ má lokální minimum,

(l) $f$ je klesající v $(-\infty, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, \infty)$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,

(m) $f$ je klesající v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 1, \infty)$, rostoucí v $\langle -1, 1\rangle$, v bodě $x = -1$ má lokální minimum, v bodě $x = 1$ má lokální maximum,

(n) $f$ je klesající v $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí v $\langle 0, \infty)$, v bodě $x = 0$ má lokální (i absolutní) minimum.