

2.2. Nerešené varianty závěrečných testů 4MM101

Tyto varianty lze použít i pro předmět 4MM106. Nepokrývají však všechna témata, je potřebné doplnit zejména Taylorův polynom a některé integrály řešené pomocí rozkladu na parciální zlomky.

Varianta Z01

4MM101

1. Rozhodněte o lineární závislosti či nezávislosti vektorů

$$(-1, -3, 1, 2), \quad (2, 1, -2, -3), \quad (-1, 2, 1, 1).$$

2. Určete všechny hodnoty parametru a tak, aby matice byla regulární

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Cramerovým pravidlem (pomocí determinantů) vypočítejte x_2 ze soustavy

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$

$$3x_1 + 2x_3 = 1,$$

$$4x_1 + 2x_2 = 2.$$

4. Vypočítejte limity dané funkce v krajních bodech definičního oboru

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$$

5. Vypočítejte druhou derivaci funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg} x^3.$$

6. Najděte extrémy funkce

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad \text{na kruhu zadaném nerovnicí} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

7. Vypočítejte integrál

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' = (x + 1)e^x.$$

Varianta Z02

4MM101

1. Stanovte všechny hodnoty parametru x tak, aby vektory byly lineárně nezávislé

$$(3, 1, 0), \quad (2, -2, 4), \quad (x, -1, 1).$$

2. Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2. \end{aligned}$$

3. Určete charakteristická čísla matice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 8^{\frac{x}{3x+1}}.$$

5. Najděte intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, resp. konkávní

$$f(x) = x \ln x + 1.$$

6. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 6x + 2xy - x^2 - 2y^2.$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - 4y = 8.$$

1. Určete všechny hodnoty parametru p tak, aby daná soustava měla netriviální řešení a stanovte všechna její řešení

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + x_3 &= 0, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + px_3 &= 0. \end{aligned}$$

2. Stanovte hodnotu matice

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n}{2^n + 7 \cdot 3^n}.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{1 - e^{3x}}.$$

5. Určete maximum a minimum funkce

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} \quad \text{na intervalu } \langle -2, 0 \rangle.$$

6. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2y + \ln(xy^2).$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 9y = 9.$$

1. Rozhodněte, zda je matice regulární nebo singulární

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Řešte maticovou rovnici

$$XA - B = X + J, \quad \text{kde } A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

3. Stanovte hodnotu determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

4. Určete všechny hodnoty reálného parametru a tak, aby platilo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + an^2}{n} - 3n - 2 \right) = \infty.$$

5. Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x) = 1 - e^{x^4 + 4x^3}.$$

6. Vypočtete derivaci funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = y \ln x + x e^{2-y} \quad \text{v bodě } C = [1, 2].$$

7. Vypočtete integrál

$$\int 2x \cos x^2 \, dx.$$

8. Najděte partikulární řešení vyhovující daným počátečním podmínkám

$$y'' + 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$$

Varianta Z05

4MM101

1. Vyjádřete vektor u jako lineární kombinaci vektorů u_1, u_2

$$u = (2, 2, 1), \quad u_1 = (2, -2, 3), \quad u_2 = (1, -2, 2).$$

2. Cramerovým pravidlem (pomocí determinantů) vypočtěte x_1 ze soustavy

$$-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1,$$

$$x_1 + 2x_3 = 0,$$

$$x_2 + 2x_3 = 1.$$

3. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \ln(x^2 - 4) + \sqrt{5 - x}.$$

4. Určete všechny hodnoty reálného parametru a tak, aby platilo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a + 3)^n = 0.$$

5. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí, resp. klesající

$$f(x) = 2 - e^{-x} x^2.$$

6. Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 3x^2 - x^3 - y^2 - 2y.$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int \cos(3x - 5) \, dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y' - y = 2x.$$

Varianta Z06

4MM101

1. Stanovte všechny hodnoty parametru a tak, aby vektory byly lineárně závislé

$$(-1, 1, 4), \quad (1, -1, a), \quad (-1, a, 3).$$

2. Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic

$$-2x_1 + 7x_2 = 4,$$

$$x_1 - 3x_2 = -1.$$

3. Pomocí Bolzanovy věty řešte nerovnici

$$\frac{\arcsin \frac{x}{3}}{1-x} \leq 0.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin 5x - e^{3x}}.$$

5. Najděte inflexní body funkce

$$f(x) = \frac{x^6}{5} - \frac{x^7}{7}.$$

6. Najděte lokální vázané extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x^3 - 3y^2 - 6x \quad \text{při vazební podmínce} \quad y - x + 1 = 0.$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' = -\frac{1}{4} \cos \frac{x}{2}.$$

1. Stanovte hodnotu matice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Prostřednictvím výpočtu determinantu rozhodněte, pro které hodnoty parametru a je matice A regulární

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Řešte maticovou rovnici

$$XA + J = 2X + B, \quad \text{kde } A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2 \cdot 3^n}{2^n - 3 \cdot 5^n}.$$

5. Určete maximum a minimum funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{x-2} \quad \text{na intervalu } \langle 3, 8 \rangle.$$

6. Najděte vázané extrémů funkce

$$f(x, y) = e^{2x-y} \quad \text{při vazební podmínce } 2x^2 + y^2 = 12.$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

8. Najděte partikulární řešení vyhovující daným počátečním podmínkám

$$y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

Varianta Z08

4MM101

1. Rozhodněte, zda je matice regulární nebo singulární

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -9 \end{bmatrix}.$$

2. V závislosti na reálném parametru a proveďte diskusi počtu řešení (včetně počtu volitelných neznámých)

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1,$$

$$5x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 2,$$

$$4x_1 + 2x_2 + ax_3 = 5.$$

3. Vypočtěte limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 8} - n).$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(2x - 3)}{\sin(4 - x^2)}.$$

5. Najděte intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, resp. konkávní

$$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}.$$

6. Vypočtěte derivaci funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = y e^{3x-2y} \quad \text{v bodě } C = [2, 3].$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 4} dx.$$

8. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 2y' = 8.$$

Varianta Z09

4MM101

- 1.] Určete hodnotu matice A vzhledem k reálnému parametru a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & a & 0 \\ 6 & 6 & a \end{bmatrix}.$$

- 2.] Vypočítejte obecné řešení dané soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2, \\ 2x_1 + x_2 &= 3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4. \end{aligned}$$

- 3.] Pomocí Bolzanovy věty řešte nerovnici

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x+5}}(2-x) \leq 0.$$

- 4.] Vypočítejte limity dané funkce v krajních bodech definičního oboru

$$f(x) = \frac{4x}{3-x}.$$

- 5.] Vypočítejte druhou derivaci funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{\sin 2x}.$$

- 6.] Najděte lokální extrémy funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = 2y^3 - 3y^2 - x^4 - 4x.$$

- 7.] Vypočítejte obsah plochy omezené grafy funkcí f a g

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3 + 2x.$$

- 8.] Najděte partikulární řešení vyhovující dané počáteční podmínce

$$y' + y = 3, \quad y(0) = 5.$$

Varianta Z10

4MM101

1. Stanovte všechny hodnoty parametru p tak, aby vektory byly lineárně nezávislé

$$(-1, 0, 2), \quad (2, -3, p), \quad (-3, 1, 2).$$

2. Pomocí inverzní matice řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 2, \\ -2x_1 + 7x_2 &= 7. \end{aligned}$$

3. Určete definiční obor funkce

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2 - 3x}.$$

4. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 3}{(x + 1)^2}.$$

5. Určete intervaly, ve kterých je daná funkce rostoucí, resp. klesající

$$f(x) = \frac{2 - x}{x^2}.$$

6. Vypočtěte druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x e^{2y} + y^3 \ln x.$$

7. Vypočtěte integrál

$$\int \sin x \cos^4 x \, dx.$$

8. Najděte partikulární řešení vyhovující daným počátečním podmínkám

$$y'' = \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2.$$

Výsledky

Varianta Z01

- [1] LZ, [2] $a \neq 0 \wedge a \neq 4$, [3] $x_2 = 3$, [4] $D(f) = (0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$,
 [5] $f''(x) = \frac{6x(1-2x^6)}{(1+x^6)^2}$, [6] $A = [0, 1]$, $B = [0, -1]$, $f(A) = f(B) = 4$ MAX, $C = [0, 0]$,
 $f(C) = 0$ MIN, [7] ∞ , [8] $y = xe^x + c$

Varianta Z02

- [1] $x \neq -1$, [2] $x = (-5, 4)$, [3] $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 2 - i$, [4] 2, [5] f je konvexní v $(0, \infty)$,
 [6] v $A = [6, 3]$ je LOKMAX, [7] $2\sqrt{e^x - 2} + c$, [8] $y = ce^{4x} - 2$

Varianta Z03

- [1] $p = \frac{1}{2}$, $x = t(1, 0, -2)$, $t \in \mathbb{R}$, [2] $h = 2$, [3] $\frac{5}{7}$, [4] $-\frac{4}{3}$, [5] $f(-1) = -2$ MIN,
 $f(0) = 0$ MAX, [6] $\partial_{xx}f(x, y) = 2y - \frac{1}{x^2}$, $\partial_{xy}f(x, y) = \partial_{yx}f(x, y) = 2x$, $\partial_{yy}f(x, y) = -\frac{2}{y^2}$,
 [7] $\frac{1}{2} \ln 2$, [8] $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 1$

Varianta Z04

- [1] není reg. ani sing., [2] $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, [3] -4, [4] $a \in (3, \infty)$, [5] v $x = -3$ je LOKMAX,
 [6] $f'(C) = (3, -1)$, [7] $\sin x^2 + c$, [8] $y = -e^{-4x} + 2e^{2x}$

Varianta Z05

- [1] $u = 3u_1 - 4u_2$, [2] $x_1 = 2$, [3] $\mathcal{D}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, 5)$, [4] $a \in (-4, -2)$,
 [5] f je klesající v $\langle 0, 2 \rangle$, f je rostoucí v $(-\infty, 0)$, $\langle 2, \infty \rangle$, [6] v $A = [2, -1]$ je LOKMAX,
 [7] $\frac{1}{3} \sin(3x - 5) + c$, [8] $y = ce^x - 2x - 2$

Varianta Z06

- [1] $a = -4 \vee a = 1$, [2] $x = (5, 2)$, [3] $x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (1, 3)$, [4] 0, [5] v $x = 1$ je inflexe,
 [6] v $A = [0, -1]$ LOKVMAX, v $B = [2, 1]$ LOKVMIN, [7] $4 + \ln 9$, [8] $y = \cos \frac{x}{2} + c_1x + c_2$

Varianta Z07

- [1] $h = 3$, [2] $a \neq 2 \wedge a \neq -2$, [3] $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, [4] $-\frac{1}{3}$, [5] $f(4) = 8$ MIN, $f(8) = \frac{32}{3}$ MAX,
 [6] $A = [2, -2]$, $f(A) = e^6$ VMAX, $B = [-2, 2]$, $f(B) = e^{-6}$ VMIN, [7] $\frac{1}{2} \ln^2 x + c$,
 [8] $y = 2 + e^{-2x}$

Varianta Z08

- [1] singulární, [2] $a = -5 \Leftrightarrow \infty$ řešení, 1 volitelná, $a \neq -5 \Leftrightarrow 1$ řešení, [3] 0, [4] $-\frac{1}{2}$,
 [5] f je konkávní v $\langle 6, \infty \rangle$, f je konvexní v $(-\infty, 0)$, $(0, 6)$, [6] $f'(C) = (9, -5)$, [7] $-\frac{1}{x+2} + c$,
 [8] $y = c_1 + c_2e^{-2x} + 4x$

Varianta Z09

- [1] $h = 2 \Leftrightarrow (a = 3 \vee a = -3), h = 3 \Leftrightarrow (a \neq 3 \wedge a \neq -3), [2] x = (1, 1, 0) + t(-2, 4, 1), t \in \mathbb{R},$
 [3] $x \in (-5, 0) \cup (2, \infty), [4] D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty,$
 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, [5] f''(x) = 2e^{\sin 2x} \cos^2 2x - 2e^{\sin 2x} \sin 2x, [6] v A = [-1, 0] \text{ je LOKMAX},$
 [7] $\frac{1}{3}, [8] y = 2e^{-x} + 3,$

Varianta Z10

- [1] $p \neq 8, [2] x = (7, 3), [3] D(f) = (-3, 0) \cup (0, 3), [4] \infty, [5] f \text{ je klesající v } (0, 4),$
 $f \text{ je rostoucí v } (-\infty, 0), (4, \infty), [6] \partial_{xx} f(x, y) = -\frac{y^3}{x^2}, \partial_{xy} f(x, y) = \partial_{yx} f(x, y) = 2e^{2y} + \frac{3y^2}{x},$
 $\partial_{yy} f(x, y) = 4xe^{2y} + 6y \ln x, [7] -\frac{1}{5} \cos^5 x + c, [8] y = -3 \ln |x| + 5x - 5$

Varianta Z11

- [1] u není LK $u_1, u_2, [2] p = 0, x = t(-2, 6, 1), t \in \mathbb{R}, [3] \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, [4] \frac{\pi}{2},$
 $[5] v x = e \text{ je LOKMIN}, [6] f'(C) = (-2, 12), [7] -\frac{1}{3} \ln 2, [8] y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

Varianta Z12

- [1] $h = 2 \Leftrightarrow a = -1, h = 3 \Leftrightarrow a \neq -1, [2] x_1 = -3, [3] \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, [4] -\frac{2}{5},$
 $[5] f \text{ je konkávní v } (-\infty, 3), f \text{ je konvexní v } (3, \infty), [6] v A = [-2, 2] \text{ je LOKMIN}, [7] 2\pi,$
 $[8] y = c_1 + c_2 e^x - x$

Varianta Z13

- [1] $a = 6 \vee a = 4, [2] x = (4, 1), [3] 3, [4] D(f) = (-\infty, \infty), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2},$
 $[5] f \text{ je rostoucí v } (-\infty, 0), (2, \infty), f \text{ je klesající v } (0, 1), (1, 2), [6] v A = [1, -4] \text{ je}$
 $\text{LOKVMIN}, v B = [-1, -4] \text{ je LOKVMAX}, [7] \frac{2}{9}(2 + x^3)^{\frac{3}{2}} + c, [8] y = x^3 - \frac{1}{x} + 2$

Varianta Z14

- [1] $u = 2u_1 + 5u_2, [2] x = t(-3, 0, 1), t \in \mathbb{R}, [3] \text{ regulární}, [4] a \in (0, 6), [5] f(0) = 1 \text{ MIN},$
 $f(2) = e^{16} \text{ MAX}, [6] A = [1, 0], B = [-1, 0], f(A) = f(B) = 2 \text{ VMIN}, C = [0, 1],$
 $D = [0, -1], f(C) = f(D) = 3 \text{ VMAX}, [7] -(5 - 3x) \cos x - 3 \sin x + c, [8] y = 2e^{8x}$

Varianta Z15

- [1] $p = 2 \Leftrightarrow \text{nemá řešení}, p = -6 \Leftrightarrow \infty \text{ řešení}, 1 \text{ volitelná}, (p \neq 2 \wedge p \neq -6) \Leftrightarrow 1 \text{ řešení},$
 $[2] \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 0, [3] D(f) = (-2, 3), [4] \frac{1}{8}, [5] v x = 1 \text{ je LOKMAX},$
 $[6] v A = [1, 2] \text{ je LOKMIN}, [7] 5, [8] y = c_1 e^{3x} \cos x + c_2 e^{3x} \sin x$

Varianta Z16

- [1] LN, [2] $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [3] x_2 = -7, [4] a \in (3, \infty), [5] f \text{ je konkávní v } (-\infty, -1), (1, \infty),$
 $f \text{ je konvexní v } (-1, 1), [6] v A = [-3, 3] \text{ je LOKVMIN}, [7] \frac{1}{4 \cos^4 x} + c, [8] y = 3 - e^{-2x}$