Teorie 4 - 10.10.2024

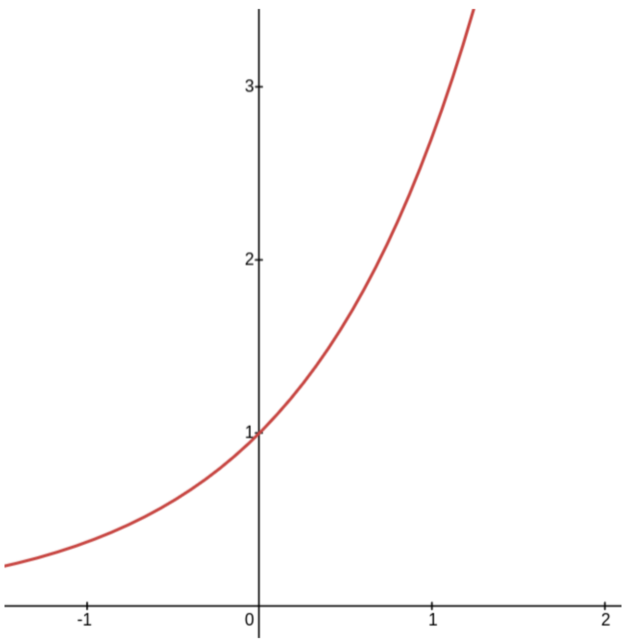
(učebnice s. 103)

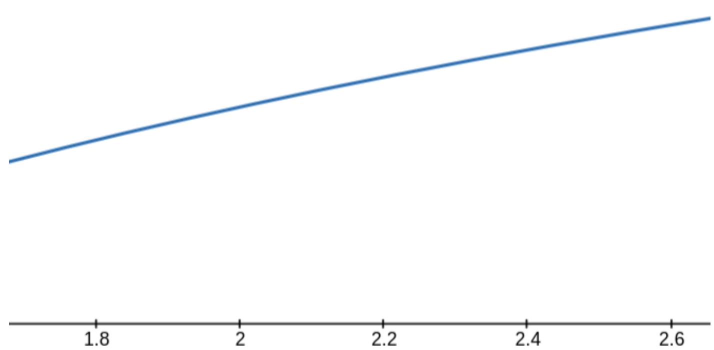
Derivace

Definice. *Nechť funkce f je definována v okolí bodu c. Číslo $f'(c)$, definované vztahem*

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

se nazývá **derivace funkce f v bodě c.**





Poznámka. **Geometrická interpretace $f'(c)$**
Derivace funkce f v bodě c je rovna *směrnici tečny* grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$, tj. $f'(c) = \operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá tato tečna s kladnou poloosou x (nakreslete si obrázek: zlomek $f(c+h) - f(c)/h$ je směrnice sečny grafu funkce f, která prochází body $[c, f(c)]$ a $[c+h, f(c+h)]$, zbytek dostanete limitním přechodem).
Například když $f'(c) = 0$, je tečna grafu funkce f v bodě $[c, f(c)]$ rovnoběžná s osou x.

Věta (o derivaci základních funkcí). *Pro derivace základních funkcí platí:*

1.	$(k)' = 0$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(k \in \mathcal{R})$
2.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(n \in \mathcal{N})$
3.	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	*pro přípustná*	x $(\alpha \in \mathcal{R})$
4.	$(e^x)' = e^x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
5.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$ $(a > 0)$
6.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	*pro*	$x > 0$
7.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$	*pro*	$x > 0$ $(a > 0,\, a \neq 1)$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
10.	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	*pro*	$x \in \mathcal{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
11.	$(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	*pro*	$x \in \mathcal{R} - \{k\pi\}$
12.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*pro*	$x \in (-1, 1)$
13.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	*pro*	$x \in (-1, 1)$
14.	$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$
15.	$(\operatorname{arccotg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	*pro*	$x \in \mathcal{R}$

Věta (o derivaci operací a superpozice). *Platí*

(a) $(f \pm g)' = f' \pm g'$

(b) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

(d) $(f[g])' = f'[g] \cdot g'$

pokud existuje pravá strana vztahů.

(učebnice s. 109)

Derivace vyšších řádů

Definice. *Funkce f'' definovaná vztahem*

$$f'' = (f')'$$

se nazývá **druhá derivace funkce f.**

Poznámka. Druhou derivaci funkce f najdeme podle definice tak, že funkci f' ještě jednou zderivujeme. Analogicky definujeme třetí derivaci funkce f (značíme f''') a derivace vyšších řádů (značíme $f^{(4)}$, $f^{(5)}$ atd.).

(učebnice s. 121 - tohle není v .pdf verzi učebnice)

Taylorův polynom

4.4. Taylorův polynom

Definice. *Nechť funkce f má v bodě a derivace až do řádu n-tého ($n \in \boldsymbol{N}$). Polynom T_n daný vztahem*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se nazývá **Taylorův polynom funkce f v bodě a.**

Taylorův polynom 1. řádu = tečna ke grafu

Hezké příklady:
https://www.geogebra.org/m/dXx6Byrs
https://www.geogebra.org/m/cvA4Xct3