

Cvičení 5 - 17.10.2024

červené - spolu

modré - samostatně

L'Hospitalovo pravidlo

4. Vypočtete limitu funkce

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + x - 14}{x^3 - 2x^2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

(k) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2 - 4}$

(m) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{6+x} - \sqrt{2-x}}{x+2}$

(o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

(q) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$

(s) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cotg x}$

(u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 4^x}{x}$

(w) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\cos x - 1}$

(y) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\cos x - 1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{\sin x - \sin 3x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{4x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - e^{5x})$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$

(p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$

(r) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$

(t) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

(v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

(x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

(z) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x - 3^x)$

První derivace & průběh funkce

6. Najděte intervaly, ve kterých je funkce rostoucí, resp. klesající a lokální extrémů funkce f , dané předpisem

(a) $f(x) = x \cdot \ln x$

(b) $f(x) = \ln^2 x$

(c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

(d) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x$

(e) $f(x) = 5^{-x^2}$

(f) $f(x) = 4 \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$

(g) $f(x) = \ln(1 - e^x)$

(h) $f(x) = \frac{3e^x}{x}$

(i) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$

(j) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

(k) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

(l) $f(x) = e^{2x} + 2e^{3-x}$

(m) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

(n) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$

Výsledky

4. (a) 0, (b) 0, (c) $\frac{3}{4}$, (d) -4, (e) $\frac{13}{4}$, (f) $\frac{1}{2}$, (g) 0, (h) $-\infty$, (i) $\frac{1}{2}$,
(j) $\frac{1}{2}$, (k) $-\frac{1}{16}$, (l) $-\frac{1}{56}$, (m) $\frac{1}{2}$, (n) $\frac{1}{5}$, (o) 0, (p) $-\frac{1}{3}$, (q) -1,
(r) ∞ , (s) 0, (t) 1, (u) $\ln \frac{3}{4}$, (v) 1, (w) 0, (x) $\frac{\pi}{2}$, (y) 1, (z) $-\infty$.

6. (a) f je klesající v $(0, e^{-1})$, rostoucí v $\langle e^{-1}, \infty \rangle$, v bodě $x = e^{-1}$ má lokální (i absolutní) minimum,
(b) f je klesající v $(0, 1)$, rostoucí v $\langle 1, \infty \rangle$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,
(c) f je rostoucí v $(0, e)$, klesající v $\langle e, \infty \rangle$, v bodě $x = e$ má lokální (i absolutní) maximum,
(d) f je rostoucí v $(-\infty, -1)$ a v $\langle 6, \infty \rangle$, klesající v $\langle -1, 6 \rangle$, v bodě $x = -1$ má lokální maximum, v bodě $x = 6$ má lokální minimum,
(e) f je rostoucí v $(-\infty, 0)$, klesající v $\langle 0, \infty \rangle$, v bodě $x = 0$ má lokální (i absolutní) maximum,
(f) f je rostoucí v $(-\infty, 2)$, klesající v $\langle 2, \infty \rangle$, v bodě $x = 2$ má lokální (i absolutní) maximum,
(g) f je klesající v $(-\infty, 0)$,
(h) f je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, 1)$, rostoucí v $\langle 1, \infty \rangle$, v bodě $x = 1$ má lokální minimum,

- (i) f je klesající v $(-\infty, -4)$ a v $(0, \infty)$, rostoucí v $\langle -4, 0 \rangle$, v bodě $x = -4$ má lokální minimum,
- (j) f je klesající v $(-\infty, 1)$, rostoucí v $\langle 1, \infty \rangle$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,
- (k) f je rostoucí v $(-\infty, 0)$ a v $\langle 2, \infty \rangle$, klesající v $\langle 0, 2 \rangle$, v bodě $x = 0$ má lokální maximum, v bodě $x = 2$ má lokální minimum,
- (l) f je klesající v $(-\infty, 1)$, rostoucí v $\langle 1, \infty \rangle$, v bodě $x = 1$ má lokální (i absolutní) minimum,
- (m) f je klesající v $(-\infty, -1)$ a v $\langle 1, \infty \rangle$, rostoucí v $\langle -1, 1 \rangle$, v bodě $x = -1$ má lokální minimum, v bodě $x = 1$ má lokální maximum,
- (n) f je klesající v $(-\infty, 0)$, rostoucí v $\langle 0, \infty \rangle$, v bodě $x = 0$ má lokální (i absolutní) minimum.