Populační model

Růst populace je dynamický proces, který lze jednoduše popsat diferenciální rovnicí. Jedním z modelů, které existují pro tento jev je popsán rovnicí 1. Tento model je někdy též nazýván jako „logisticky model“. Při růstu populace dochází v určitém bodě ke zpomalení, resp. k saturaci, např. z důvodu nedostatků zdrojů, a tak se v určité fázi růst zpomaluje.

$$y'' = g - \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}} y'^2 \tag{1}$$

Obecné řešení pak je pak dáno rovnici 2.

$$N = \frac{CMe^{at}}{M + Ce^{at}} \tag{2}$$

Matematické kyvadlo

Diferenciální rovnice jednoduchého matematického kyvadla (viz obr. 1) je popsána rovnicí 3. Jedná se pouze o teoretického kyvadlo, kde vliv tření není brán v potaz:

$$y'' = -\frac{g}{L} \sin{(y)} \tag{3}$$

Obecné řešení je pak dáno rovnici 4:

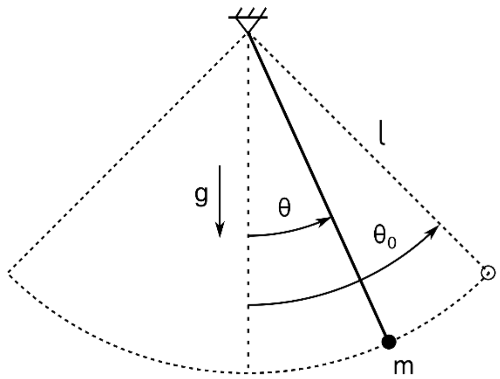
$$y = C_1 sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \tag{4}$$

Kde:

θ ... *úhlové posuní z klidového stavu*

g ... *gravitační zrychlení*

l ... *délka kyvadla*



Obrázek 1 Matematické kyvadlo

Parašutista

Parašutista o hmotnosti m padá volným vertikálním pádem a pociťuje aerodynamický odpor, y udává vzdálenost uraženou ve směru nahoru. Diferenciální rovnice popisující pád je dána rovnici 5.

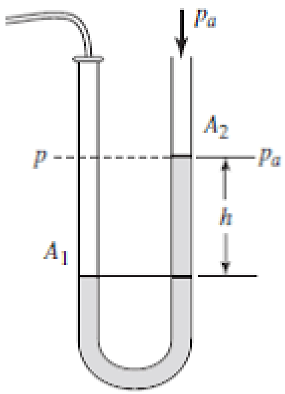
$$y'' = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{m}} y'^2 - g \tag{5}$$

Kde:

$c \dots součinitel\ odporu$
$g \dots gravitační\ zrychlení$
$m \dots hmotnost$

Kapalinového manometr

Mějme kapalinový manometr, který pracuje pod tlakem p. Sloupec kapaliny manometru získává vlivem působení tlaku polohu zobrazenou na obr 2. Celková délka sloupce kapaliny v manometru je l.



Obrázek 2 Model manometru

Pohybová rovnice je dána rovnicí 6.

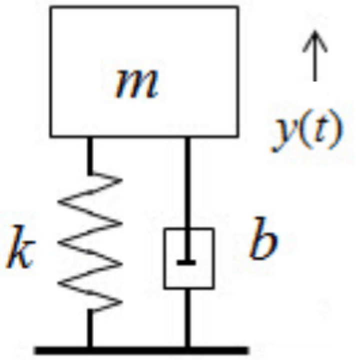
$$y'' + \frac{2g}{l} y = 0 \tag{6}$$

Obecné řešení pak je dáno rovnicí 7:

$$y = C_1 cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t + C_2 cos \sqrt{\frac{2g}{l}} t \tag{7}$$

Soustava pružina-hmota-tlumič

Mějme soustavu pružina-hmota-tlumič, kde je pohyb hmotného bodu brzděn další silou. Protože toto tlumení je primárně třecí silou, předpokládejme, že je úměrná rychlosti hmotného bodu.



Obrázek 3 Model manometru

Tento systém lze pak popsat diferenciální rovnicí 8.

$$my'' + bx' + kx = 0 \tag{5}$$

Charakteristická rovnice pak je:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \tag{5}$$

$$\lambda = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Zde rozlišujeme tři případy (viz obr4):

1. Nadkritický útlum – je-li $b^2 > 4mk$ a rovnice tedy má 2 reálné kořeny. Obecné řešení pak je:

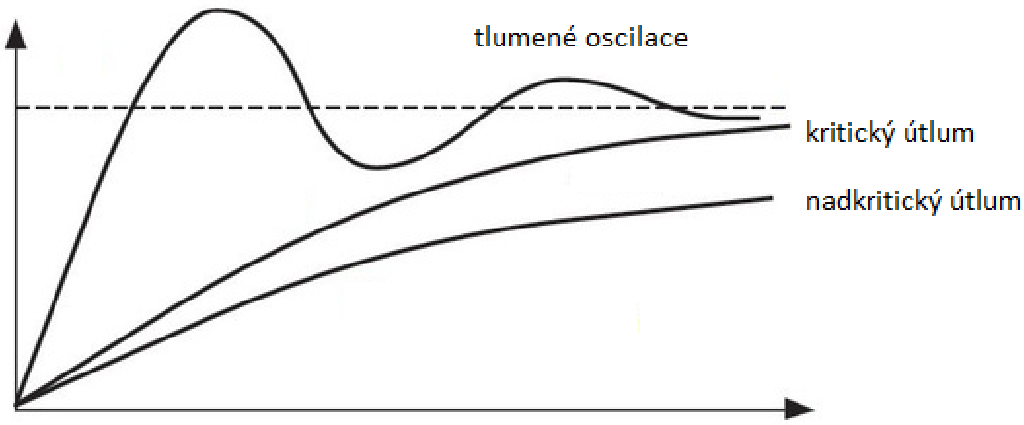
$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

2. Kritický útlum – je-li $b^2 = 4mk$ a rovnice má tedy jeden dvojnásobný kořen. Obecné řešení pak je:

$$y = e^{\lambda t}(C_1 + C_2 t) \tag{5}$$

3. Tlumený oscilátor je-li $b^2 < 4mk$ a rovnice pak má tedy komplexně sdružený kořen. Obecné řešení pak je:

$$y = e^{-t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) \tag{5}$$



Obrázek 4 Model manometru