М. Д. Караяни

Категорический силлогизм как функция

Михаил Дмитриевич Караяни
Независимый Исследователь.
Неаффилирован.
E-mail: mkarajani@gmail.com

Аннотация: В данной статье атрибутивные суждения категорического силлогизма будут классифицированы как все возможные отношения между двумя множествами (в т.ч. пустыми), а модусы силлогизма — как все возможные отношения между тремя множествами. Из последних — будет выведена *силлогистическая функция*, отображающая отношения, заданные в посылках, в достоверно следующее из них отношение между субъектом и предикатом заключения.

Ключевые слова: силлогистическая функция, отношения между множествами, онтологическая характеристика, полином Жегалкина

1. Введение

Цель статьи – рассмотреть категорический силлогизм с альтернативной точки зрения: не как все комбинации отношений между меньшим, средним и бо́льшим терминами, где только некоторые комбинации приводят к достоверным выводам, а как функцию, отображающую отношения, заданные в посылках, в достоверно следующее из них отношение между субъектом и предикатом заключения.

Категорические высказывания будем трактовать с т.з. *фундаментальной силлогистики*[1], т.к. «данная интерпретация, по мнению многих математиков, оправдана потребностями математических применений логики» [Бочаров, Маркин, 2010, с. 32].

2. Отношения между двумя множествами

В. И. Маркин [Маркин, 2020] предложил рассматривать *силлогистические константы* как знаки отношений между двумя непустыми множествами (объемами двух общих терминов) и разработал на их основе алфавит языка позитивной силлогистики. 5 отношений, соответствующих диаграммам Эйлера — Жергонна, он назвал *эйлеровскими* и классифицировал

[1] Так А. Де Морган [De Morgan, 1847] назвал интерпретацию Г. Лейбница и Ф. Брентано.

все возможные отношения как комбинации (в т.ч. *нулькомпонентную*) эйлеровских — всего получилось 32 отношения.

Классификация атрибутивных суждений как отношений между двумя множествами пригодится в вычислении отношений между субъектом и предикатом заключения. Однако, чтобы арифметизировать процесс вычисления, нам понадобится альтернативная классификация — с фиксированным количеством компонент. Самый очевидный вариант — использовать онтологические характеристики элементов диаграмм Венна. Чтобы зафиксировать контекст используемых терминов дадим им определения.

Определение 1. *Онтологической характеристикой* множества будем называть качество *суждений существования*[2]: *утвердительной*, если множество непустое, и *отрицательной*, если — пустое.

Определение 2. *Элементами отношений* между множествами будем называть все возможные непересекающиеся подмножества этих множеств, полученные в результате их вычитаний и пересечений.

Элементами отношений между множествами S и P являются подмножества $S \setminus P$, $S \cap P$ и $P \setminus S$ (см. рис. 1).

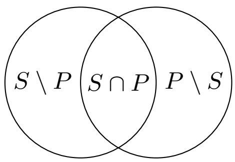

Рис. 1. Элементы отношений между двумя множествами

2.1. Обобщённая онтологическая характеристика

Вслед за Лейбницем и Брентано [Brandl, Textor, 2018] будем транслировать простые атрибутивные суждения в суждения существования следующим образом:

1) «Все S есть P» (SaP) — «Sне-P не существуют» ($S \setminus P = \varnothing$);

2) «Ни один S не есть P» (SeP) — «SP не существуют» ($S \cap P = \varnothing$);

3) «Некоторые S есть P» (SiP) — «SP существуют» ($S \cap P \neq \varnothing$);

4) «Некоторые S не есть P» (SoP) — «Sне-P существуют» ($S \setminus P \neq \varnothing$);

---

[2] В оригинальной формулировке суждения существования применяются к индивидам [Маркин, 2021]. В данной статье мы будем применять их к множествам — объёмам общих терминов.

В такой интерпретации нам недостаточно утвердительного и отрицательного значений онтологической характеристики, т.к. в атрибутивных суждениях a, e, i и o они применимы только к одному элементу отношений — значения двух остальных неизвестны.

На неизвестность онтологической характеристики элементов можно взглянуть и с другой стороны: известно, что характеристики двух из трёх элементов не играют никакой роли в указанных суждениях, т.е. являются *обобщёнными*.

Пример. Суждение SaP обобщает 4 отношения:

$$\Big\{S \setminus P = \varnothing \wedge S \cap P = \varnothing \wedge P \setminus S = \varnothing,\\ S \setminus P = \varnothing \wedge S \cap P \neq \varnothing \wedge P \setminus S = \varnothing,\\ S \setminus P = \varnothing \wedge S \cap P = \varnothing \wedge P \setminus S \neq \varnothing,\\ S \setminus P = \varnothing \wedge S \cap P \neq \varnothing \wedge P \setminus S \neq \varnothing\Big\}$$

Замечание. Обобщённую онтологическую характеристику будем приписывать не только множествам, о которых известно, что они могут быть как пустыми, так и непустыми, но и множествам, о которых ничего неизвестно.

2.2. Онтологическая функция

Определение 3. *Онтологической функцией* множества будем называть функцию χ, транслирующую онтологическую характеристику множества в значения трёхзначной модулярной арифметики следующим образом:

$$\chi\left(A\right) =_{def} \begin{cases} 0 \iff V_A \neq \varnothing \wedge \forall a \in V_A : a = \varnothing \\ 1 \iff V_A = \varnothing \vee \exists a \exists b \in V_A : a = \varnothing \wedge b \neq \varnothing \\ 2 \iff V_A \neq \varnothing \wedge \forall a \in V_A : a \neq \varnothing \end{cases},$$

где V_A — все варианты обобщённого множества A;
0, 1 и 2 — значения, соответствующие отрицательной, обобщённой и утвердительной онтологическим характеристикам.

Следствие 1. Из определения 3 следует, что:

$$\chi\left(A \cup B\right) = \max\left\{\chi\left(A\right),\ \chi\left(B\right)\right\}$$

2.3. Элементарное представление

Определение 4. *Элементарным представлением* отношения между двумя множествами будем называть кортеж значений онтологической функции для элементов отношения. Для отображения множеств в элементарное представление будем использовать двухместную функцию r:

$$r\left(S,\, P\right) =_{def} \left(\chi\left(S \setminus P\right),\ \chi\left(S \cap P\right),\ \chi\left(P \setminus S\right)\right)$$

Для простых атрибутивных суждений в интерпретации Лейбница — Брентано получаем:

1) $SaP \iff r\,(S,\,P) = (0,\,1,\,1)$;

2) $SeP \iff r\,(S,\,P) = (1,\,0,\,1)$;

3) $SiP \iff r\,(S,\,P) = (1,\,2,\,1)$;

4) $SoP \iff r\,(S,\,P) = (2,\,1,\,1)$.

Таким образом можно задать $3^3 = 27$ *уникальных* отношений между двумя множествами, в т.ч. *пустыми*. Полученные отношения отличаются по определению от 32-х отношений, задаваемых силлогистическими константами Маркина, и в общем случае несводимы к ним.

Обобщение в элементарном представлении работает как *пересечение* множеств атрибутивных суждений, поэтому взаимно исключающие суждения[3] схлопываются в пустое множество. Тогда как силлогистические константы описывают отношения, *объединяющие* множества атрибутивных суждений, в т.ч. взаимно исключающие. Чтобы продемонстрировать это, дополним простые атрибутивные суждения константами a' и o':

$$Sa'P =_{def} PaS$$
$$So'P =_{def} PoS$$

Распределив множества атрибутивных суждений по элементам отношений, получим таблицу 1 со всеми возможными значениями онтологических характеристик элементов.

Таблица 1

Онтологические характеристики элементов отношений

Характеристика	$S \setminus P$	$S \cap P$	$P \setminus S$
Отрицательная	$\{a\}$	$\{e\}$	$\{a'\}$
Утвердительная	$\{o\}$	$\{i\}$	$\{o'\}$
Обобщённая	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
Объединённая	$\{a,\,o\}$	$\{e,\,i\}$	$\{a',\,o'\}$

[3] С т.з. силлогистической терминологии, речь — о категорических высказываниях, находящихся в отношении *контрадикторности* (противоречия) [Бочаров, Маркин, 2010, с. 20].

Элементарное представление по определению не использует объединённую онтологическую характеристику и, на первый взгляд, описывает меньше отношений, чем силлогистические константы Маркина. Однако при более детальном рассмотрении видно, что некоторые отношения, описываемые силлогистическими константами, эквивалентны друг другу, поэтому 32 отношения сводятся к 15-ти уникальным (см. таблицу 2).

3. Силлогистическая функция

Определение 5. *Силлогистической функцией* будем называть шестиместную функцию σ, принимающую в качестве аргументов элементарное представление отношений между терминами бо́льшей и меньшей посылок первой фигуры категорического силлогизма[4] и возвращающую элементарное представление отношения между субъектом и предикатом заключения:

$$\sigma\left(\chi\left(M \setminus P\right),\ \chi\left(M \cap P\right),\ \chi\left(P \setminus M\right),\ \chi\left(S \setminus M\right),\ \chi\left(S \cap M\right),\ \chi\left(M \setminus S\right)\right) =_{def} \left(\chi\left(S \setminus P\right),\ \chi\left(S \cap P\right),\ \chi\left(P \setminus S\right)\right)$$

Или исходя из определения 4:

$$\sigma\left(r\left(M,\, P\right),\ r\left(S,\, M\right)\right) =_{def} r\left(S,\, P\right)$$

Для более компактного представления аргументов и значений силлогистической функции объединим их в кортежи x и y:

$$x = \left(\chi\left(M \setminus P\right),\ \chi\left(M \cap P\right),\ \chi\left(P \setminus M\right),\ \chi\left(S \setminus M\right),\ \chi\left(S \cap M\right),\ \chi\left(M \setminus S\right)\right), \quad y = \left(\chi\left(S \setminus P\right),\ \chi\left(S \cap P\right),\ \chi\left(P \setminus S\right)\right) \qquad (1)$$

Определим компоненты кортежа y как функции от x:

$$y = \left(f_1\left(x\right),\ f_2\left(x\right),\ f_3\left(x\right)\right) \qquad (2)$$

Таким образом задача поиска функции σ сводится к поиску функций f_1, f_2 и f_3. Для этого мы рассчитаем таблицу их истинности и затем — из значений полученной таблицы — коэффициенты соответствующих им полиномов Жегалкина.

3.1. Расчёт таблицы истинности

Для определения всех возможных отображений исходных онтологических характеристик в искомые необходимо рассмотреть все возможные отношения между меньшим, средним и бо́льшим терминами. Все 7 элементов этих отношений приведены на рисунке 2.

[4] Благодаря наличию в элементарном представлении взаимно симметричных отношений нет необходимости в использовании остальных трёх фигур силлогизма.

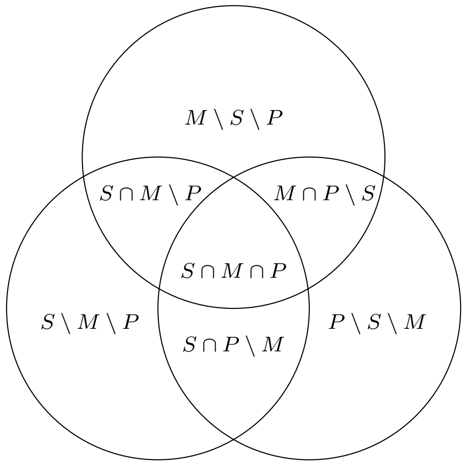

Рис. 2. Элементы отношений между тремя множествами

С учётом трёх значений онтологических характеристик получаем множество F всех возможных отношений между тремя множествами:

$$F = \Big\{ f \in \{0,\, 1,\, 2\}^7 \mid f = \Big(\chi\left(M \setminus S \setminus P\right),\, \chi\left(M \cap P \setminus S\right),\, \chi\left(P \setminus S \setminus M\right),\\ \chi\left(S \cap P \setminus M\right),\, \chi\left(S \setminus M \setminus P\right),\, \chi\left(S \cap M \setminus P\right),\, \chi\left(S \cap M \cap P\right) \Big) \Big\} \quad (3)$$

Исходя из уравнений 1 и 3 и следствия 1, рассчитываем множество G всех возможных отображений аргументов в значения силлогистической функции:

$$G = \Big\{ g \in \{0,\, 1,\, 2\}^9 \mid f \in F \wedge g = (x,\, y) = \Big(\chi\left(M \setminus P\right),\, \chi\left(M \cap P\right),\, \chi\left(P \setminus M\right),\\ \chi\left(S \setminus M\right),\, \chi\left(S \cap M\right),\, \chi\left(M \setminus S\right),\, \chi\left(S \setminus P\right),\, \chi\left(S \cap P\right),\, \chi\left(P \setminus S\right) \Big) =\\ = \Big(\max\left\{f_1,\, f_6\right\},\, \max\left\{f_2,\, f_7\right\},\, \max\left\{f_3,\, f_4\right\},\, \max\left\{f_4,\, f_5\right\},\, \max\left\{f_6,\, f_7\right\},\\ \max\left\{f_1,\, f_2\right\},\, \max\left\{f_5,\, f_6\right\},\, \max\left\{f_4,\, f_7\right\},\, \max\left\{f_2,\, f_3\right\} \Big) \Big\} \quad (4)$$

Для расчёта таблицы истинности необходимо обобщить полученные отображения на все возможные комбинации аргументов силлогистической функции. Таблицу истинности определим как блочную матрицу T:

$$T = \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix},\; X_{ij} = \left\lfloor \frac{i-1}{3^{6-j}} \right\rfloor \bmod 3, \quad (5)$$

где X — матрица размером 729×6 со всеми возможными комбинациями аргументов силлогистической функции;

Y — матрица размером 729×3 с искомыми значениями силлогистической функции.

Исходя из уравнений 4 и 5 и определения 3, рассчитываем значения силлогистической функции:

$$Y_{ij} = \chi\left(H_{ij}\right),$$
$$V_{H_{ij}} = \left\{g_{j+6} \mid g \in G \wedge \left(\forall k \in \overline{1,6} : X_{ik} \in \{1,\, g_k\}\right)\right\},$$

где H_{ij} — множество, обобщённое из вариантов $V_{H_{ij}}$.

В результате получаем таблицу истинности, значения которой приведены на страницах 11 и 12.

3.2. Расчёт коэффициентов полиномов Жегалкина

Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, Д. В. Фастовец и В. Ф. Лукичев [Bogdanov et al., 2019] разработали алгоритм расчёта *алгебраической нормальной формы* для функций k-значных логик, где k — простое число. Алгебраическую нормальную форму n-местной функции f в k-значной логике можно представить в виде полинома Жегалкина следующим образом:

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \left(\sum_{i \in \overline{1, k^n}} \left(a_i \prod_{j \in \overline{1,n}} x_j^{\left\lfloor \frac{i-1}{k^{n-j}} \right\rfloor \bmod k}\right)\right) \bmod k \tag{6}$$

По определениям 3 и 5 мы используем значения трёхзначной модулярной арифметики для шестиместных функций, поэтому нас интересует только случай с $k = 3$ и $n = 6$. Из матрицы P_1 для расчёта коэффициентов одноместных функций трёхзначной логики[5] (размером 3×3), используя произведение Кронекера[6], получаем матрицу P_6 для расчёта коэффициентов шестиместных функций (размером 729×729):

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ P_6 = P_1 \otimes P_1 \otimes P_1 \otimes P_1 \otimes P_1 \otimes P_1$$

Теперь, для расчёта коэффициентов полиномов Жегалкина, соответствующих функциям f_1, f_2 и f_3 из уравнения 2, достаточно умножить матрицу P_6 на значения таблицы истинности этих функций:

$$A = P_6 Y$$

Важное замечание: в отличие от полинома Жегалкина, описанного в уравнении 6 таким образом, что при его расчёте можно использовать обычную арифметику, при расчёте матриц P_6 и A нужно учитывать, что мы

[5] В оригинальной статье матрица называется просто P для $k = 3$.

[6] В оригинальной статье используется тензорное произведение. В данном контексте операции эквивалентны.

имеем дело с модулярной арифметикой, и выполнять сложение и умножение по модулю 3.

В результате получаем матрицу A размером 729×3, значение которой приведено на страницах 13 и 14.

3.3. Результат расчёта

Используя полученные коэффициенты A, мы можем представить силлогистическую функцию как кортеж из трёх полиномов Жегалкина:

$$\sigma(x) = \left(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x)\right),$$
$$f_i(x) = \left(\sum_{j \in \overline{1,729}} \left(A_{ji} \prod_{k \in \overline{1,6}} x_k^{\left\lfloor \frac{j-1}{3^{6-k}} \right\rfloor \bmod 3}\right)\right) \bmod 3$$

Для демонстрации использования полученных полиномов в вычислении силлогистической функции разработана веб-страница `https://codepen.io/mkarajani/pen/KKoQPYX`.

4. Заключение

4.1. Корреляции вместо валидности

В отличие от модусов категорического силлогизма, только часть из которых приводит к достоверным выводам, все заключения, вычисляемые силлогистической функцией, достоверно следуют из посылок-аргументов. Если модусы с т.з. валидности заключения можно разделить на *правильные* и *неправильные*, то все 729 комбинаций аргументов и значений силлогистической функции являются правильными.

Поэтому значения силлогистической функции корректнее оценивать в другом аспекте: устанавливают ли они какие-либо корреляции между субъектом и предикатом заключения. Отсутствие корреляций можно выразить в отношении $r(S,\ P) = (1,\ 1,\ 1)$, когда онтологические характеристики всех элементов отношения обобщены.

Силлогистическая функция устанавливает корреляции только для 419-ти комбинаций аргументов. Для 128-ми из них эти корреляции — без обобщений, т.е. онтологические характеристики всех элементов отношений между субъектом и предикатом — утвердительные или отрицательные.

Отдельно можно рассмотреть 64 комбинации аргументов силлогистической функции без обобщений в посылках: 36-ти из них соответствуют заключения с корреляциями, 27-ми — с корреляциями без обобщений.

4.2. Использование сбалансированной тройки в расчётах

Для числового представления значений трёхзначной логики можно использовать как *несбалансированную* тройку $\{0, 1, 2\}$, так и *сбалансированную* — $\{-1, 0, +1\}$ [Dubrova, 1999]. В определении 3 онтологической функции χ мы использовали несбалансированное представление. Если выполнить все расчёты, используя сбалансированную тройку значений, мы так же получим кортеж из трёх полиномов с коэффициентами в виде матрицы размером 729×3.

Однако количество ненулевых коэффициентов в этом случае будет $284+424+284 = 992$, что значительно больше количества ненулевых коэффициентов, полученных в данной статье — $242+106+242 = 590$. Поэтому, с учётом того, что аргументы и значения силлогистической функции переносятся из одного представления в другое обычным сдвигом, вычисление функции всё-таки эффективнее выполнять с использованием несбалансированной тройки значений.

4.3. Распространение подхода на другие интерпретации

Все расчёты проводились с т.з. фундаментальной силлогистики. Однако алгоритм расчёта силлогистической функции может быть применён и к другим интерпретациям силлогистики, если они формализуемы в математическую модель с алгебраической нормальной формой.

Литература

Бочаров, Маркин, 2010 – *Бочаров В.А., Маркин В.И.* Силлогистические теории. М.: Прогресс-Традиция, 2010. 336 с.

Маркин, 2020 – *Маркин В.И.* Силлогистика как логика всех отношений между двумя непустыми множествами // Логические исследования / Logical Investigations. 2020. Т. 26. № 2. С. 39–57.

Маркин, 2021 – *Маркин В.И.* Логика суждений существования и силлогистика // Логические исследования / Logical Investigations. 2021. Т. 27. № 2. С. 31–47.

Bogdanov et al., 2019 – *Bogdanov Yu.I., Bogdanova N.A., Fastovets D.V., Lukichev V.F.* Representation of Boolean functions in terms of quantum computation // arXiv preprint, 2019. 19 p.

Brandl, Textor, 2018 – *Brandl J.L., Textor M.* Brentano's Theory of Judgement // The Stanford Encyclopedia of Philosophy. 2018. URL: `https://plato.stanford.edu/entries/brentano-judgement/` (дата обращения: 07.06.2022).

De Morgan, 1847 – *De Morgan A.* Formal Logic: or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable. London: Taylor and Walton, 1847. 336 p.

Dubrova, 1999 – *Dubrova E.* Multiple-valued logic in VLSI: challenges and opportunities // Proceedings of NORCHIP. 1999. Vol. 99. No. 1999. P. 340-350.

Таблица 2

Сравнение отношений между двумя множествами

<table>
<tr><th colspan="3">Обобщённые</th><th colspan="3">Объединённые</th></tr>
<tr><th>№</th><th>Элементарное представление</th><th colspan="2">Множество атрибутивных суждений</th><th>Силлогистические константы Маркина</th><th>№</th></tr>
<tr><td>1</td><td>(0, 0, 0)</td><td colspan="2">$\{a, e, a'\}$</td><td colspan="2" rowspan="6"></td></tr>
<tr><td>2</td><td>(0, 0, 1)</td><td>$\{a, e\}$</td><td>$\{a, e, a', o'\}$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>(0, 0, 2)</td><td colspan="2">$\{a, e, o'\}$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>(0, 1, 0)</td><td>$\{a, a'\}$</td><td>$\{a, e, i, a'\}$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>(0, 1, 1)</td><td>$\{a\}$</td><td>$\{a, e, i, a', o'\}$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>(0, 1, 2)</td><td>$\{a, o'\}$</td><td>$\{a, e, i, o'\}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>(0, 2, 0)</td><td colspan="2">$\{a, i, a'\}$</td><td>$S1P$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>(0, 2, 1)</td><td>$\{a, i\}$</td><td>$\{a, i, a', o'\}$</td><td>$S12P$</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td>(0, 2, 2)</td><td colspan="2">$\{a, i, o'\}$</td><td>$S2P$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>10</td><td>(1, 0, 0)</td><td>$\{e, a'\}$</td><td>$\{a, o, e, a'\}$</td><td colspan="2" rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>11</td><td>(1, 0, 1)</td><td>$\{e\}$</td><td>$\{a, o, e, a', o'\}$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>(1, 0, 2)</td><td>$\{e, o'\}$</td><td>$\{a, o, e, o'\}$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>(1, 1, 0)</td><td>$\{a'\}$</td><td>$\{a, o, e, i, a'\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="11">14</td><td rowspan="11">(1, 1, 1)</td><td rowspan="11">$\varnothing$</td><td>$\varnothing$</td><td>SP</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="10">$\{a, o, e, i, a', o'\}$</td><td>$S125P$</td><td rowspan="10">5</td></tr>
<tr><td>$S135P$</td></tr>
<tr><td>$S145P$</td></tr>
<tr><td>$S15P$</td></tr>
<tr><td>$S235P$</td></tr>
<tr><td>$S1235P$</td></tr>
<tr><td>$S1245P$</td></tr>
<tr><td>$S1345P$</td></tr>
<tr><td>$S2345P$</td></tr>
<tr><td>$S12345P$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15</td><td rowspan="2">(1, 1, 2)</td><td rowspan="2">$\{o'\}$</td><td rowspan="2">$\{a, o, e, i, o'\}$</td><td>$S25P$</td><td rowspan="2">6</td></tr>
<tr><td>$S245P$</td></tr>
<tr><td>16</td><td>(1, 2, 0)</td><td>$\{i, a'\}$</td><td>$\{a, o, i, a'\}$</td><td>$S13P$</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="7">17</td><td rowspan="7">(1, 2, 1)</td><td rowspan="7">$\{i\}$</td><td rowspan="7">$\{a, o, i, a', o'\}$</td><td>$S123P$</td><td rowspan="7">8</td></tr>
<tr><td>$S1234P$</td></tr>
<tr><td>$S124P$</td></tr>
<tr><td>$S134P$</td></tr>
<tr><td>$S14P$</td></tr>
<tr><td>$S23P$</td></tr>
<tr><td>$S234P$</td></tr>
<tr><td>18</td><td>(1, 2, 2)</td><td>$\{i, o'\}$</td><td>$\{a, o, i, o'\}$</td><td>$S24P$</td><td>9</td></tr>
<tr><td>19</td><td>(2, 0, 0)</td><td colspan="2">$\{o, e, a'\}$</td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>20</td><td>(2, 0, 1)</td><td>$\{o, e\}$</td><td>$\{o, e, a', o'\}$</td></tr>
<tr><td>21</td><td>(2, 0, 2)</td><td colspan="2">$\{o, e, o'\}$</td><td>$S5P$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>22</td><td>(2, 1, 0)</td><td>$\{o, a'\}$</td><td>$\{o, e, i, a'\}$</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">23</td><td rowspan="2">(2, 1, 1)</td><td rowspan="2">$\{o\}$</td><td rowspan="2">$\{o, e, i, a', o'\}$</td><td>$S35P$</td><td rowspan="2">11</td></tr>
<tr><td>$S345P$</td></tr>
<tr><td>24</td><td>(2, 1, 2)</td><td>$\{o, o'\}$</td><td>$\{o, e, i, o'\}$</td><td>$S45P$</td><td>12</td></tr>
<tr><td>25</td><td>(2, 2, 0)</td><td colspan="2">$\{o, i, a'\}$</td><td>$S3P$</td><td>13</td></tr>
<tr><td>26</td><td>(2, 2, 1)</td><td>$\{o, i\}$</td><td>$\{o, i, a', o'\}$</td><td>$S34P$</td><td>14</td></tr>
<tr><td>27</td><td>(2, 2, 2)</td><td colspan="2">$\{o, i, o'\}$</td><td>$S4P$</td><td>15</td></tr>
</table>

$$
Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \\ Y_8 \\ Y_9 \end{pmatrix}, \quad
Y_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
Y_2 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2
\end{pmatrix}, \quad
Y_3 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2
\end{pmatrix}, \quad
Y_4 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
Y_5 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
Y_6 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
Y_7 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
Y_8 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
Y_9 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \end{pmatrix}, \quad
A_1 = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1
\end{pmatrix}, \quad
A_2 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
2 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 2 & 2 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 1
\end{pmatrix}, \quad
A_3 = \begin{pmatrix}
2 & 2 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
2 & 2 & 0 \\
2 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 2 \\
2 & 0 & 2 \\
2 & 2 & 1 \\
0 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 2 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 \\
2 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \quad
A_4 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 2
\end{pmatrix},
$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; A_7 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; A_9 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Categorical syllogism as a function

Michael D. Karayani
Independent Researcher,
Unaffiliated.
E-mail: mkarajani@gmail.com

Abstract: In this paper, the categorical propositions will be classified as all possible relations between two sets (including empty ones), and the modes of a categorical syllogism will be classified as all possible relations between three sets. From the last ones, a *syllogistic function* will be deduced. This function maps the premises' relations into a valid relation between the subject and the predicate of the conclusion.

Keywords: syllogistic function, relations between sets, ontological characteristic, Zhegalkin polynomial

References

Bocharov, Markin, 2010 – Bocharov, V.A., Markin V.I. *Sillogisticheskie teorii* [Syllogistic theories]. Moscow: Progress-Tradition, 2010. 336 pp. (In Russian)

Bogdanov et al., 2019 – Bogdanov, Yu.I., Bogdanova, N.A., Fastovets, D.V., Lukichev, V.F. "Representation of Boolean functions in terms of quantum computation", *arXiv preprint*, 2019. 19 pp.

Brandl, Textor, 2018 – Brandl, J.L., Textor, M. "Brentano's Theory of Judgement", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. 2018. [https://plato.stanford.edu/entries/brentano-judgement/, accessed on 07.06.2022]

De Morgan, 1847 – De Morgan, A. *Formal Logic: or, The Calculus of Inference, Necessary and Probable*. London: Taylor and Walton, 1847. 336 pp.

Dubrova, 1999 – Dubrova, E. "Multiple-valued logic in VLSI: challenges and opportunities", *Proceedings of NORCHIP*, 1999, Vol. 99, No. 1999, pp. 340-350.

Markin, 2020 – Markin, V.I. "Sillogistika kak logika vsekh otnoshenii mezhdu dvumya nepustymi mnozhestvami" [Syllogistic as the logic of all relations between two nonempty sets], *Logical Investigations*, 2020, Vol. 26, No. 2, pp. 39–57. (In Russian)

Markin, 2021 – Markin, V.I. "Logika suzhdenii sushchestvovaniya i sillogistika" [Logic of existence judgements and syllogistic], *Logical Investigations*, 2021, Vol. 27, No. 2, pp. 31–47. (In Russian)