

Algorytmy z powracaniem

Maciej Kaszkowiak, 151856

1 METODOLOGIA POMIARU WYDAJNOŚCI ALGORYTMÓW

Zmierzyłem czas wykonywania wybranych operacji dla następujących struktur danych:

- nieskierowana macierz sąsiedztwa
- skierowana lista następników

Zmierzone operacje dla powyższych struktur obejmowały:

- znalezienie cyklu Eulera (algorytm Hierholzera)
- znalezienie cyklu Hamiltona (algorytm Robertsa-Floresa)

Algorytmy zostały zaimplementowane w języku Python 3.8.10. Testy zostały uruchomione pod systemem Windows 10 21H1.

Dane wejściowe zostały wygenerowane w następujący sposób:

- Graf o współczynniku nasycenia $X * 10\%$, utworzony poprzez rozpatrywanie krawędzi pomiędzy wierzchołkiem N a wierzchołkami $N+1, N+2, \dots$ oraz dodawanie kolejno X możliwych krawędzi i pomijanie $10-X$ następnych. W przypadku grafu skierowanego krawędzie zastąpiono łukami.

Czas wykonywania algorytmów został zmierzony dla wszystkich permutacji:

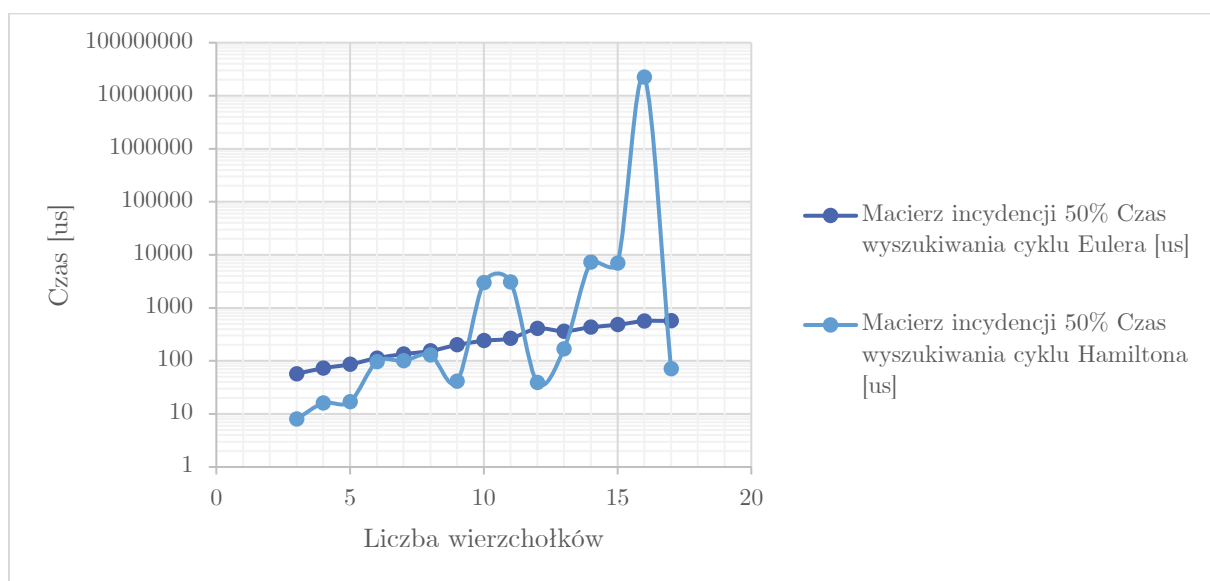
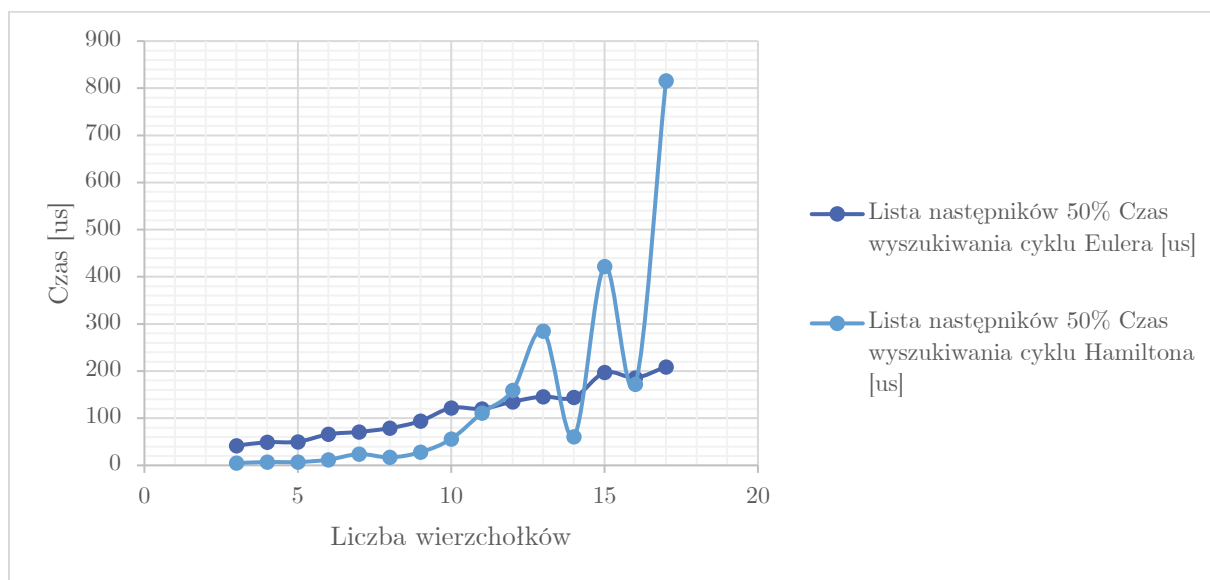
- struktury danych służącej do reprezentacji grafu
- liczby wierzchołków
- stopnia nasycenia

Wykorzystane liczby wierzchołków wynoszą 3, 4, ..., 17, natomiast wykorzystane stopnie nasycenia wynoszą 10%, 20%, ..., 90%. Górna liczba wierzchołków została ograniczona do 17 ze względu na wykładniczą złożoność algorytmu Robertsa-Floresa.

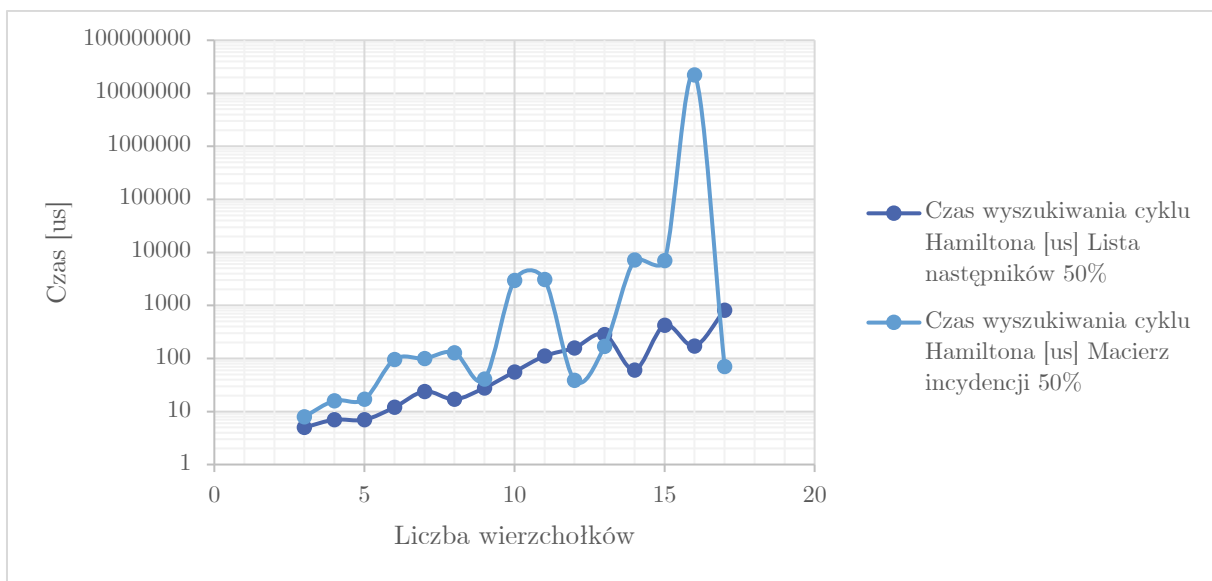
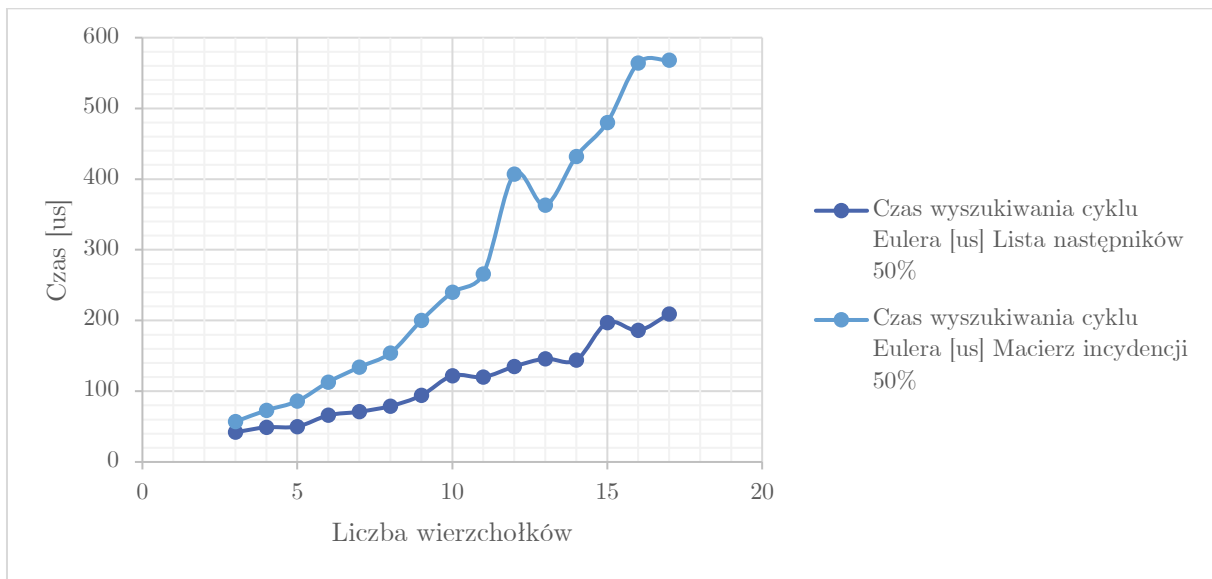
Pomiary zostały wykonane z dokładnością do mikrosekund. Pominęto czas generowania danych wejściowych.

2 WYDAJNOŚĆ WYSZUKIWANIA CYKLI EULERA ORAZ HAMILTONA W ZALEŻNOŚCI OD LICZBY ELEMENTÓW

2.1 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA REPREZENTACJĘ GRAFU

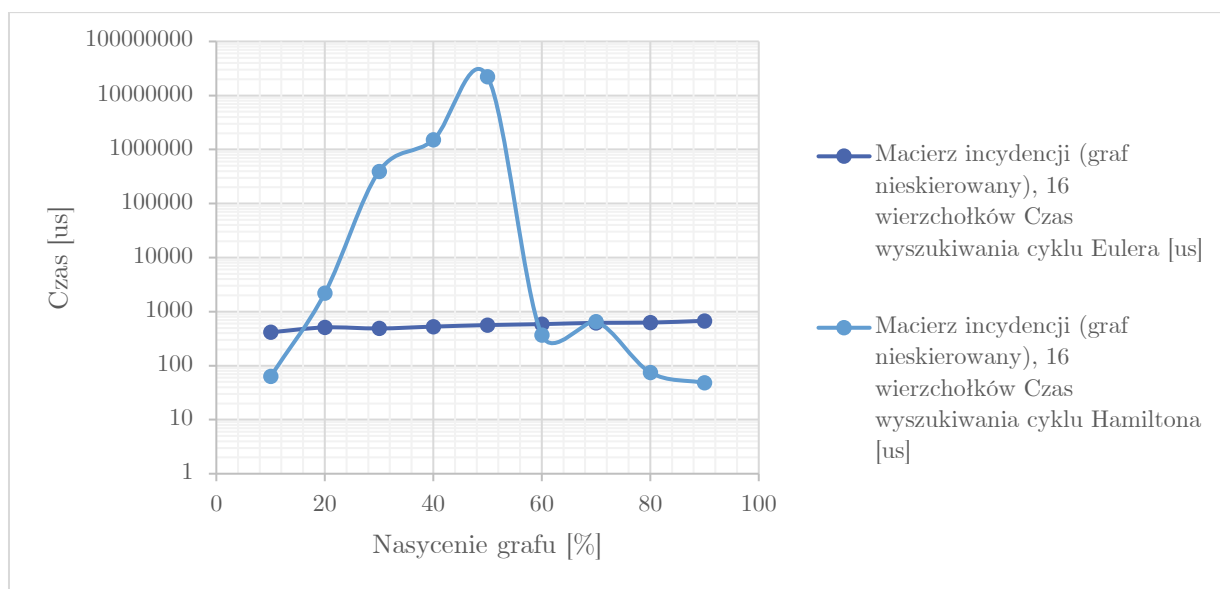
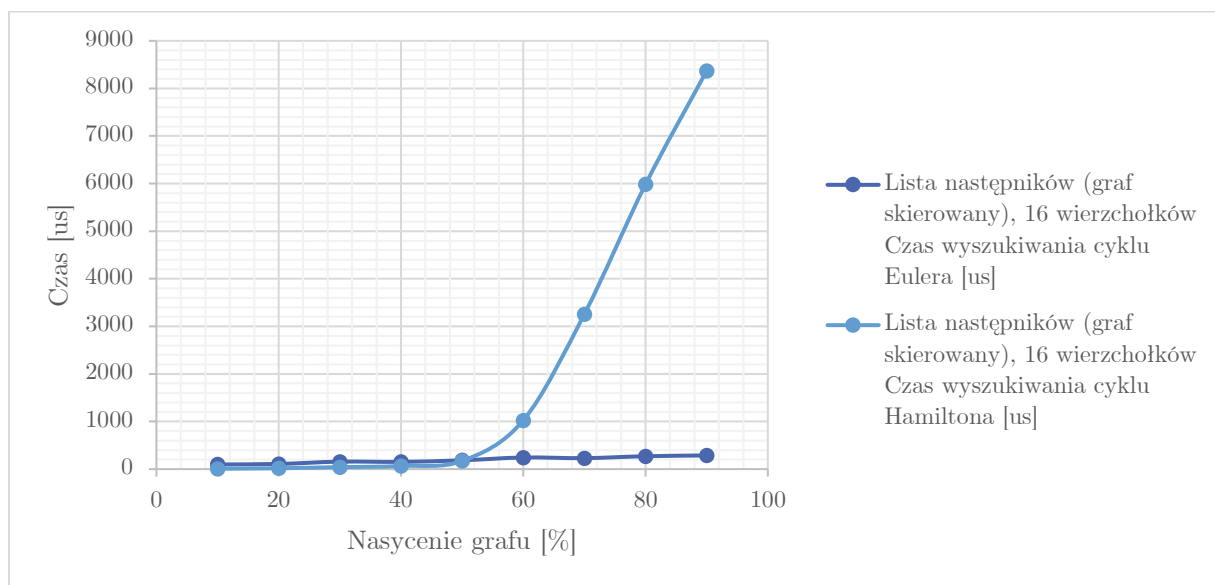


2.2 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA POSZUKIWANY CYKL

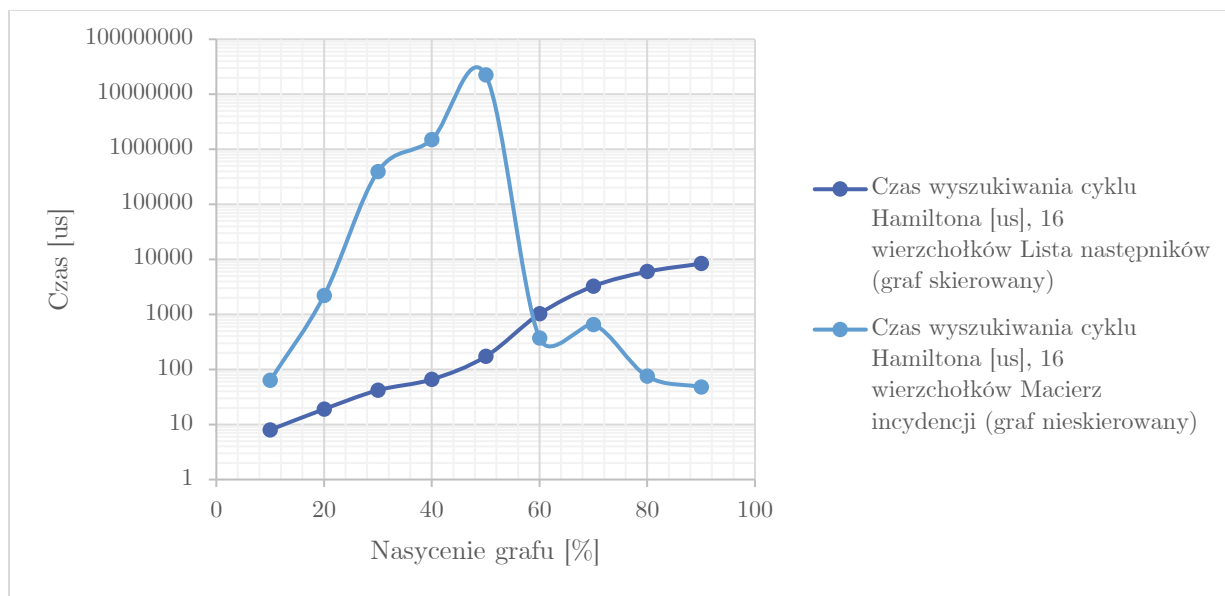
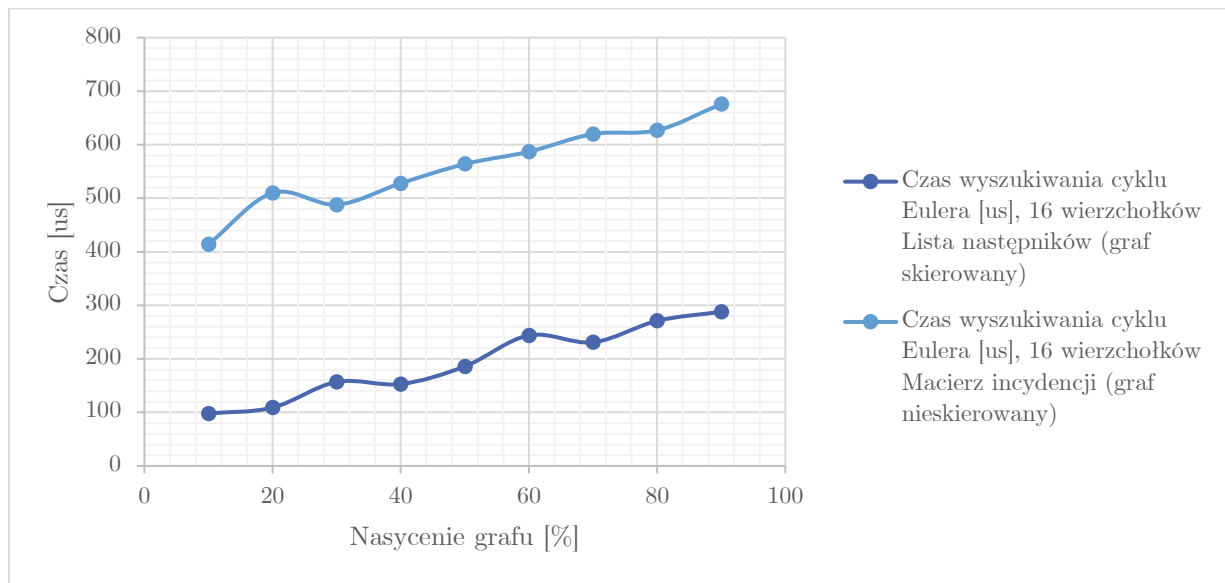


3 WYDAJNOŚĆ WYSZUKIWANIA CYKLI EULERA ORAZ HAMILTONA W ZALEŻNOŚCI OD STOPNIA NASYCENIA GRAFU

3.1 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA REPREZENTACJĘ GRAFU

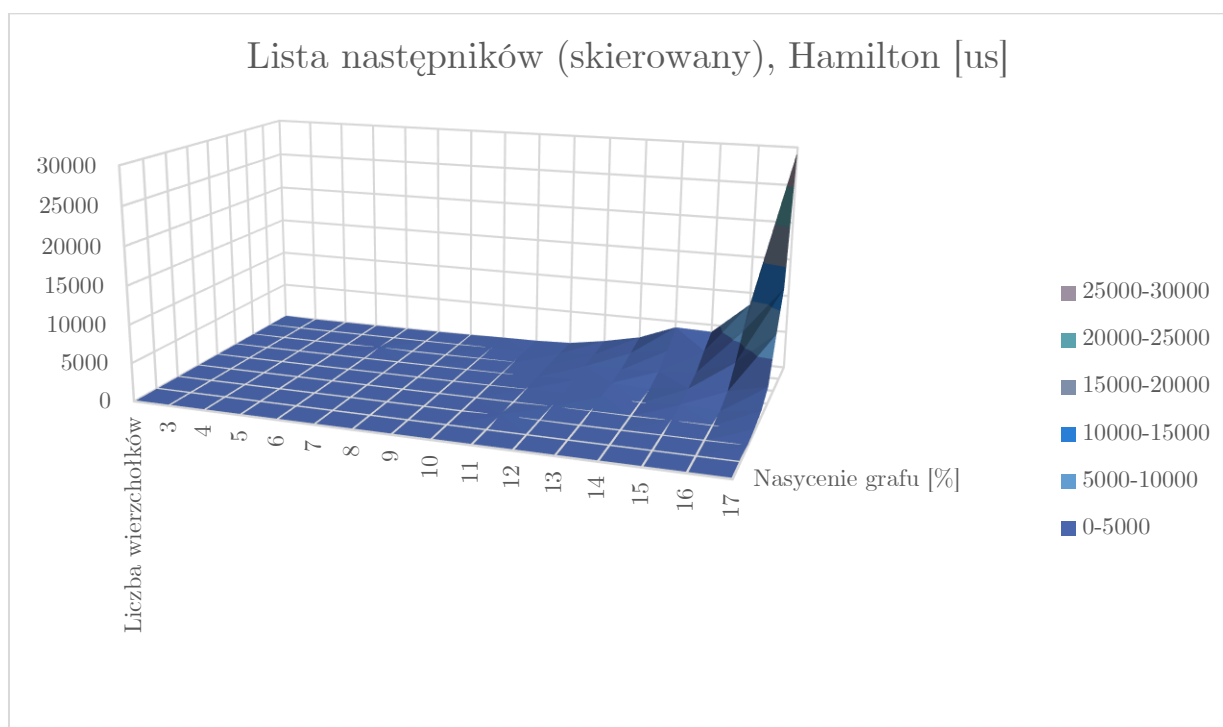
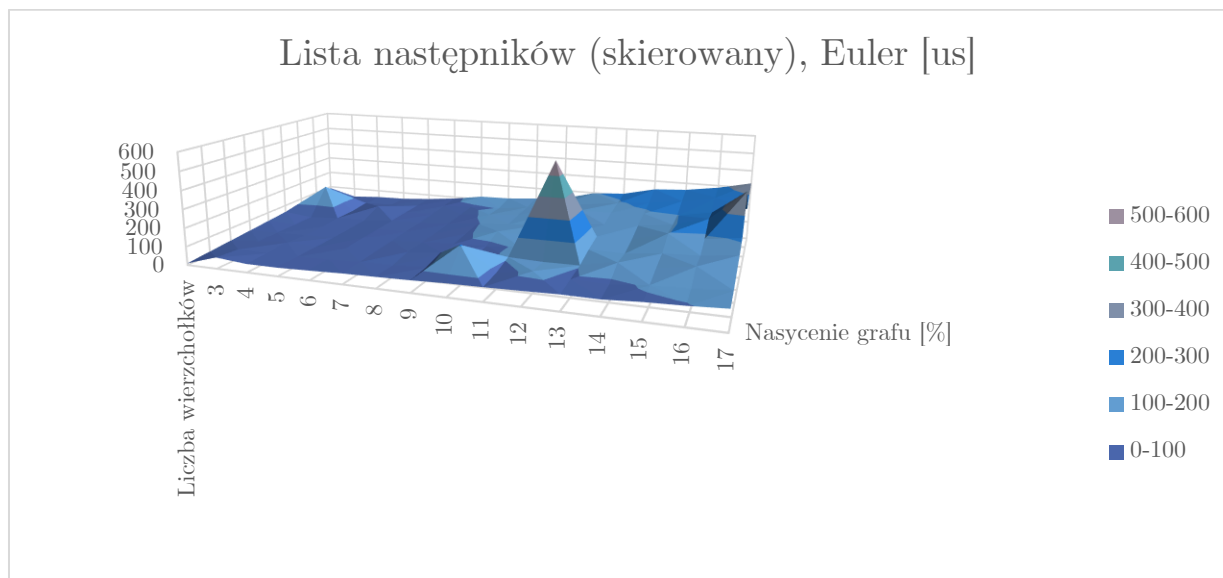


3.2 PODZIAŁ ZE WZGLĘDU NA POSZUKIWANY CYKL

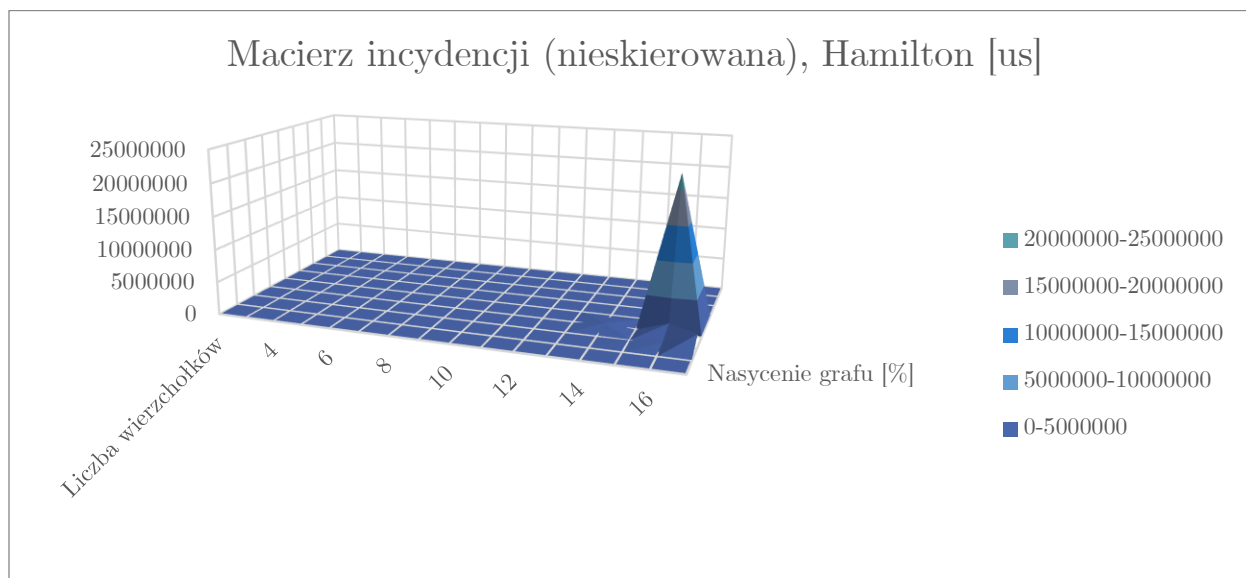
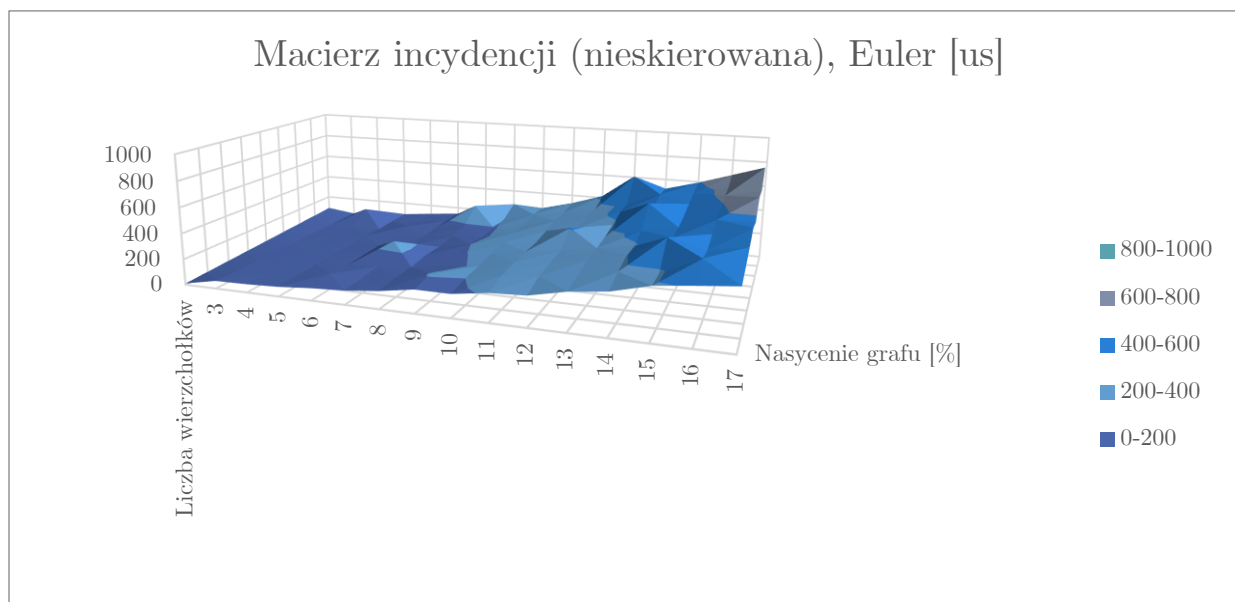


4 WYDAJNOŚĆ WYSZUKIWANIA CYKLI EULERA ORAZ HAMILTONA W ZALEŻNOŚCI OD LICZBY WIERZCHOŁKÓW I STOPNIA NASYCENIA GRAFU

4.1 GRAF SKIEROWANY W POSTACI LISTY NASTĘPNIKÓW



4.2 GRAF NIESKIEROWANY W POSTACI MACIERZY INCYDENCJI



Ze względu na błąd oprogramowania nie mogłem wykorzystać skali logarytmicznej w utworzonym wykresie.

5 WNIOSKI

Wyszukanie cyklu Eulera jest problemem rozwiązywalnym w czasie wielomianowym. Algorytm Hierholzera pozwala na znalezienie cyklu w czasie zależnym liniowo od liczby krawędzi - $O(E)$. Znalezienie cyklu Hamiltona jest natomiast problemem NP-trudnym rozwiązywalnym w najgorszym przypadku w czasie $O(V!)$.

Powyższą tezę udało się potwierdzić w pomiarach – wyszukiwanie cyklu Eulera rosło liniowo względem liczby krawędzi, natomiast wyszukiwanie cyklu Hamiltona osiągnęło swoją najgorszą złożoność wykładniczą. Czas wymagany na zakończenie algorytmu zależał w ogromnym stopniu od sposobu utworzenia danych. W wykonanych testach grafy o nasyceniu $X \cdot 10\%$ zostały wygenerowane poprzez tworzenie górnotrójkątnej macierzy incydencji (oraz odpowiednika dla listy sąsiedztwa), zawierając kolejno X możliwych do utworzenia krawędzi a następnie pomijając $10 \cdot X$ krawędzi. Inna metoda generowania grafu z pewnością wpłynęłaby drastycznie na wynik testów. Ze względu na brak losowości testy działają w sposób deterministyczny. Obecne dane pozwoliły skutecznie ukazać zarówno najgorszy jak i optymistyczny wariant algorytmu szukającego cykl Hamiltona.

Stopień nasycenia grafu również wpływa na wyniki eksperymentu. W przypadku cyklu Eulera wpływ jest niezauważalny, natomiast dla cyklu Hamiltona zauważalne są dwa odmienne kształty wykresów, w zależności od reprezentacji grafu. Powód kryje się w danych – generowanie grafu za pomocą macierzy górnotrójkątnej gwarantuje brak cyklu w przypadku grafu skierowanego. Liczba możliwych ścieżek rośnie wraz ze stopniem nasycenia, jednak żadna nie wygeneruje grafu zawierającego cykl Hamiltona. W przypadku grafu nieskierowanego identyczny sposób generowania danych może spowodować występowanie grafu z cyklem. Przy niskim nasyceniu rzędu 10-20 procent, cykl może się nie znajdować w grafie przy stosunkowo małej liczbie krawędzi. Najwyższy czas wykonywania możemy zaobserwować przy średnim nasyceniu ze względu na potencjalnie najwyższą liczbę ścieżek które nie są cyklem Hamiltona. Wraz z wzrostem stopnia nasycenia czas wykonywania spada, ponieważ algorytm znajdzie cykl idąc niemal dowolną ścieżką.

6 SPIS TREŚCI

1	Metodologia pomiaru wydajności algorytmów.....	1
2	Wydajność wyszukiwania cykli Eulera oraz Hamiltona w zależności od liczby elementów.....	2
2.1	Podział ze względu na reprezentację grafu.....	2
2.2	Podział ze względu na poszukiwany cykl	3
3	Wydajność wyszukiwania cykli Eulera oraz Hamiltona w zależności od stopnia nasycenia grafu.....	4
3.1	Podział ze względu na reprezentację grafu.....	4
3.2	Podział ze względu na poszukiwany cykl	5
4	Wydajność wyszukiwania cykli Eulera oraz Hamiltona w zależności od liczby wierzchołków i stopnia nasycenia grafu.....	6
4.1	Graf skierowany w postaci listy następników.....	6
4.2	Graf nieskierowany w postaci macierzy incydencji.....	7
5	Wnioski	8