Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Διδάσκοντες: Δημήτρης Φωτάκης, Δώρα Σούλιου

2η Σειρά Προγραμματιστικών Ασκήσεων - Ημ/νία Παράδοσης 5/12/2016

~~Άσκηση 1: Εμπόριο Σοκολάτας~~

Ο Θείος Σκρουτζ χρειάζεται να αυξήσει τα έσοδά του, ενόψει των εορτών των Χριστουγέννων και των δώρων που θα αγοράσει για τα ανήψια του! Έτσι αποφάσισε να ασχοληθεί (και) με το εμπόριο σοκολάτας, το οποίο πιστεύει ότι μπορεί να αποβεί ιδιαίτερα επικερδές αυτή την εποχή του χρόνου.

Ο Θείος Σκρουτζ συγκέντρωσε πληροφορίες και έχει καταφέρει να προβλέψει με ακρίβεια την τιμή της σοκολάτας (ανά τόνο, στην αγορά εμπορευμάτων) για καθεμία από τις N ημέρες που απομένουν μέχρι τα Χριστούγεννα. Έχει καταγράψει την ακολουθία τιμών $p(1), \dots, p(N)$ και θέλει να βρει πότε πρέπει να αγοράσει και πότε πρέπει να πουλήσει ώστε να μεγιστοποιήσει τα κέρδη του. Κάθε φορά θα αγοράζει και θα πουλάει την ίδια ποσότητα σοκολάτας, οπότε ενδιαφέρεται να μεγιστοποιήσει το κέρδος ανά τόνο σοκολάτας. Επιπλέον, προσπαθώντας να ελαχιστοποιήσει τα έξοδα και τις προμήθειες και να κρατήσει την εμπλοκή του στην αγορά σοκολάτας διακριτική, έχει αποφασίσει ότι οι αγορές και οι πωλήσεις θα εναλλάσσονται και ότι δεν θα πραγματοποιήσει περισσότερες από K αγοραπωλησίες μέχρι τα Χριστούγεννα. Χρειάζεται λοιπόν να υπολογίσει το βέλτιστο πλήθος αγορών (και πωλήσεων) M, όπου $0 \leq M \leq K$, τις M ημέρες $b_1, \dots, b_M$ που θα αγοράσει σοκολάτα, και τις M ημέρες $s_1, \dots, s_M$ που θα πουλήσει. Για τις επιλεγμένες ημέρες πρέπει να ισχύει ότι $1 \leq b_1 < s_1 < b_2 < s_2 < \cdots < b_M < s_M \leq N$. Στόχος του Θείου Σκρουτζ είναι να μεγιστοποιήσει το συνολικό του κέρδος ανά τόνο σοκολάτας, που είναι ίσο με $\sum_{i=1}^{M}(p(s_i) - p(b_i))$ (ή ίσο με 0, αν δεν πραγματοποιήσει καμία αγοραπωλησία).

Προσβλέποντας σε ένα γενναίο Χριστουγεννιάτικο μπόνους, έχετε προσφερθεί να βοηθήσετε τον Θείο Σκρουτζ στη νέα του επιχειρηματική δραστηριότητα. Πρέπει λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα που θα υπολογίζει το μέγιστο κέρδος (ανά τόνο σοκολάτας) που μπορεί να έχει ο Θείος Σκρουτζ αν πραγματοποιήσει το πολύ K αγοραπωλησίες.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους αριθμούς που αντιστοιχούν στο πλήθος των ημερών N και στο μέγιστο πλήθος αγοραπωλησιών K. Στην επόμενη γραμμή, θα υπάρχουν N φυσικοί αριθμοί (χωρισμένοι με κενό) που αντιστοιχούν στις τιμές $p(1), \dots, p(N)$ ενός τόνου σοκολάτας για καθεμία από τις επόμενες N ημέρες.

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) το μέγιστο κέρδος (ανά τόνο σοκολάτας) που μπορεί να επιτύχει ο Θείος Σκρουτζ αν πραγματοποιήσει το πολύ K αγοραπωλησίες.

Περιορισμοί:

$1 \leq N \leq 10^5$
$1 \leq K \leq 10^3$
$1 \leq p(i) \leq 10^4$

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec.
Όριο μνήμης: 64 MB.

Παραδείγματα Εισόδου:	**Παράδειγμα Εξόδου:**
`10 3` `12 12 7 10 15 8 3 4 8 8`	`13`
`5 2` `10 9 8 7 6`	`0`

Άσκηση 2: Χημικά Απόβλητα

Σε ένα χημικό εργαστήριο, υπάρχουν N διαφορετικές ουσίες που αποτελούν επικίνδυνα απόβλητα πειραμάτων και πρέπει να τοποθετηθούν σε K μεταλλικές φιάλες για να μεταφερθούν με ασφάλεια σε ειδικό χώρο εκτός του εργαστηρίου. Οι ουσίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το N και, για λόγους ασφαλείας, πρέπει να τοποθετηθούν στις φιάλες με αυτή τη σειρά και με τη συνολική ποσότητα κάθε ουσίας να βρίσκεται σε μία μόνο φιάλη. Οι φιάλες είναι αρκετά μεγάλες και η συνολική ποσότητα κάθε ουσίας αρκετά μικρή ώστε να μην υπάρχουν προβλήματα χωρητικότητας (δηλ. ακόμη και όλες οι ουσίες θα μπορούσαν να χωρέσουν στην ίδια φιάλη). Υπάρχει όμως ο κίνδυνος χημικής αντίδρασης μεταξύ των ουσιών στην ίδια φιάλη, οπότε και εκλύονται σημαντικά ποσά ενέργειας. Συγκεκριμένα, για κάθε ζευγάρι ουσιών i και j που βρίσκονται στην ίδια φιάλη, η χημική αντίδραση μεταξύ τους παράγει ενέργεια ίση με $A[i,j]$ μονάδες.

Με βάση τα παραπάνω, η διαδικασία που ακολουθούν οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου για τη συσκευασία των ουσιών είναι η εξής: Οι πρώτες t_1 ουσίες στη σειρά τοποθετούνται στην πρώτη φιάλη, οι επόμενες t_2 ουσίες στη δεύτερη φιάλη, κ.ο.κ., μέχρι να τοποθετηθούν όλες οι ουσίες στις K φιάλες. Έτσι, η ενέργεια που μπορεί να παραχθεί από τη χημική αντίδραση των ουσιών στην πρώτη φιάλη είναι $\sum_{1 \leq i < j \leq t_1} A[i,j]$, για την δεύτερη φιάλη είναι $\sum_{t_1+1 \leq i < j \leq t_2} A[i,j]$, κ.ο.κ. Η συνολική ενέργεια που θα μπορούσε να παραχθεί από την χημική αντίδραση των ουσιών σε όλες τις K φιάλες είναι το άθροισμα των παραπάνω ποσοτήτων. Για λόγους ασφαλείας κατά τη μεταφορά των ουσιών, οι υπεύθυνοι του εργαστηρίου θέλουν να προσδιορίσουν τους δείκτες $t_1, t_2, \ldots, t_{K-1}$ των ουσιών όπου θα γίνεται αλλαγή φιάλης, ώστε η συνολική ενέργεια που θα μπορούσε να εκλυθεί από όλες τις φιάλες να είναι η ελάχιστη δυνατή. Σας ζητούν λοιπόν να γράψετε ένα πρόγραμμα για αυτόν τον σκοπό.

Δεδομένα Εισόδου: Αρχικά, το πρόγραμμα θα διαβάζει από το standard input δύο θετικούς ακέραιους N και K που αντιπροσωπεύουν το πλήθος των ουσιών και το πλήθος των φιαλών. Στη συνέχεια, το πρόγραμμα θα διαβάζει $N-1$ γραμμές, η i-οστή από τις οποίες θα περιέχει $N-i$ ακεραίους χωρισμένους με κενά. Ο j-οστός ακέραιος της i-οστής γραμμής αντιστοιχεί στην ενέργεια $A[i,j+i]$ (ο πίνακας A είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο, δηλ. $A[i,j] = A[j,i]$ για κάθε $1 \leq i < j \leq N$, και η διαγώνιος έχει μηδενικά στοιχεία, δηλ. $A[i,i] = 0$ για κάθε $1 \leq i \leq N$).

Δεδομένα Εξόδου: Το πρόγραμμα πρέπει να τυπώνει στο standard output (στην πρώτη γραμμή) έναν ακέραιο που αντιστοιχεί στο ελάχιστο ποσό ενέργειας που μπορεί να εκλυθεί[1].

Περιορισμοί:

$0 \leq A[i,j] \leq 99$
$1 \leq K \leq 500$
$K \leq N \leq 1500$

Παράδειγμα Εισόδου:

```
3 2
3 2
4
```

Παράδειγμα Εξόδου:

```
3
```

Όριο χρόνου εκτέλεσης: 1 sec. Όριο μνήμης: 64 MB.

Bonus: κάποια αρχεία με $1 \leq K \leq 700$ και $K \leq N \leq 2500$

[1] **Επεξήγηση παραδείγματος:** Αν βάλουμε τις ουσίες 1 και 2 στην πρώτη φιάλη και την ουσία 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[1,2] = 3$. Από την άλλη, αν βάλουμε την ουσία 1 στην πρώτη φιάλη και τις ουσίες 2 και 3 στη δεύτερη φιάλη, τότε μπορεί να εκλυθεί ενέργεια ίση με $A[2,3] = 4$. Συνεπώς η πρώτη είναι η καλύτερη επιλογή και η απάντηση είναι 3.