Задача 1.
Даны значения зарплат из выборки выпускников: 100, 80, 75, 77, 89, 33, 45, 25, 65, 17, 30, 24, 57, 55, 70, 75, 65, 84, 90, 150. Посчитать (желательно без использования статистических методов наподобие std, var, mean) среднее арифметическое, среднее квадратичное отклонение, смещенную и несмещенную оценки дисперсий для данной выборки.

Сумма:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = (x_1 + \ldots + x_n);$$

$$100+80+75+77+89+33+45+25+65+17+30+24+57+55+70+75+65+84+90+150=1306;$$

Среднее арифметическое:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1306}{20} = 65{,}3;$$

Смещенная оценка дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2;$$

$$\frac{1}{20} \cdot (100-65{,}3)^2 + (80-65{,}3)^2 + (75-65{,}3)^2 + (77-65{,}3)^2 + (89-65{,}3)^2 +$$
$$(33-65{,}3)^2 + (45-65{,}3)^2 + (25-65{,}3)^2 + (65-65{,}3)^2 + (17-65{,}3)^2 +$$
$$(30-65{,}3)^2 + (24-65{,}3)^2 + (57-65{,}3)^2 + (55-65{,}3)^2 + (70-65{,}3)^2 +$$
$$(75-65{,}3)^2 + (65-65{,}3)^2 + (84-65{,}3)^2 + (90-65{,}3)^2 + (150-65{,}3)^2 = 950{,}11;$$

Несмещенная оценка дисперсии:

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2;$$

$$\frac{1}{20} \cdot (100-65{,}3)^2 + (80-65{,}3)^2 + (75-65{,}3)^2 + (77-65{,}3)^2 + (89-65{,}3)^2 +$$
$$(33-65{,}3)^2 + (45-65{,}3)^2 + (25-65{,}3)^2 + (65-65{,}3)^2 + (17-65{,}3)^2 +$$
$$(30-65{,}3)^2 + (24-65{,}3)^2 + (57-65{,}3)^2 + (55-65{,}3)^2 + (70-65{,}3)^2 +$$
$$(75-65{,}3)^2 + (65-65{,}3)^2 + (84-65{,}3)^2 + (90-65{,}3)^2 + (150-65{,}3)^2 \approx 1000{,}12;$$

Среднее квадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2};$$
$$\sqrt{950{,}11} \approx 30{,}82;$$

Задача 2.
В первом ящике находится 8 мячей, из которых 5 - белые. Во втором ящике - 12 мячей, из которых 5 белых. Из первого ящика вытаскивают случайным образом два мяча, из второго - 4. Какова вероятность того, что 3 мяча белые?

Возможные благоприятные исходы:

I. 2 белых мяча из первого ящика и 1 белый из второго;

Общее количество комбинаций при вытаскивании двух мячей из первого ящика составляет:

$$c_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{8!}{2! \cdot (8-2)!} = 28;$$

Количество комбинаций, при котором из первого ящика достают 2 белых мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = 10;$$

Общее количество комбинаций при вытаскивании четырех мячей из второго ящика составляет:

$$c_n^m = \frac{12!}{4!\cdot(12-4)!} = 495;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 1 белый мяч составляет:

$$c_n^m = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 5;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 3 черных мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = 35;$$

Таким образом, общее количество возможных благоприятных вариантов составляет $10\cdot5\cdot35=1750$*, при общем количестве вариантов* $28\cdot5=13860$*, а общая вероятность I благоприятного исхода составляет 0,1263 или 12,63 %.*

II. 1 белый из первого ящика и 2 из второго;

Количество комбинаций, при котором из первого ящика достают 1 белый мяч составляет:

$$c_n^m = \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 5;$$

Количество комбинаций, при котором из первого ящика достают 1 черный мяч составляет:

$$c_n^m = \frac{3!}{1!\cdot(3-1)!} = 3;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 2 белых мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = 10;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 2 черных мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{7!}{2!\cdot(7-2)!} = 21;$$

Таким образом, общее количество возможных благоприятных вариантов составляет $5\cdot3\cdot10\cdot21=3150$*, при общем количестве вариантов* $28\cdot5=13860$*, а общая вероятность такого благоприятного исхода составляет 0,2276 или 22,76 %.*

III. 3 белых мяча из второго ящика.

Количество комбинаций, при котором из первого ящика достают два черных мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{3!}{2!\cdot(3-2)!} = 3;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 3 белых мяча составляет:

$$c_n^m = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!} = 10;$$

Количество комбинаций, при котором из второго ящика достают 1 черный мяч составляет:

$$c_n^m = \frac{7!}{1!\cdot(7-1)!} = 7;$$

Таким образом, общее количество возможных благоприятных вариантов составляет $3\cdot10\cdot7=210$*, при общем количестве вариантов* $28\cdot5=13860$*, а общая вероятность такого благоприятного исхода составляет 0,0152 или 1,52 %.*

Суммируя все вероятности, мы получаем, что общая вероятность того, что три мяча будут белыми составляет $0{,}1263+0{,}2276+0{,}0152=0{,}3691$ *или 36,91%.*

Задача 3.
На соревновании по биатлону один из трех спортсменов стреляет и попадает в мишень. Вероятность попадания для первого спортсмена равна 0.9, для второго — 0.8, для третьего — 0.6. Найти вероятность того, что выстрел произведен: а) первым спортсменом б) вторым спортсменом в) третьим спортсменом.

Вероятность того, что мишень поражена одним из трех спортсменов составляет $P(A)=\frac{1}{3}=0{,}3333$*, средняя вероятность поражения мишени одним из трех спортсменов составляет* $P(B)=\frac{0{,}9000+0{,}8000+0{,}6000}{3}=0{,}7667$.
Вероятность того, что первый спортсмен попадает (B) в мишень при выстреле (A) составляет $P(B|A)=0{,}9000$. *Таким образом по формуле Байеса вероятность того, что выстрел произведен первым спортсменом составляет*
$P(A|B)=P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}=0{,}9\cdot\frac{0{,}3333}{0{,}7667}=0{,}3913$ *или 39,13%.*
Аналогичный расчет производим для второго и третьего спортсмена: 34,78% и 26,09%.

Задача 4.
В университет на факультеты A и B поступило равное количество студентов, а на факультет C студентов поступило столько же, сколько на A и B вместе. Вероятность того, что студент факультета A сдаст первую сессию, равна 0.8. Для студента факультета B эта вероятность равна 0.7, а для студента факультета C - 0.9. Студент сдал первую сессию. Какова вероятность, что он учится: а). на факультете A б). на факультете B в). на факультете C?

Вероятность того, что студент представляет факультет A составляет $P(A)=\frac{1}{1+1+2}=0{,}2500$. *Средняя вероятность сдачи сессии студентом составляет* $P(B)=\frac{0{,}8000+0{,}7000+0{,}9000\cdot 2}{4}=0{,}8250$. *Вероятность того, что представитель факультета A (гипотеза A) сдал сессию (гипотеза B) составляет* $P(B|A)=0{,}8000$.
Таким образом, по формуле Байеса вероятность того, что успешную сессию сдал студент факультета A составляет $P(A|B)=P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}=0{,}8\cdot\frac{0{,}2500}{0{,}8250}=0{,}2424$ *или 24,24%.*
Аналогично считаем вероятности для студентов факультета B и C: 21,21% и 54,55%.

Задача 5.
Устройство состоит из трех деталей. Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0.1, для второй - 0.2, для третьей - 0.25. Какова вероятность того, что в первый месяц выйдут из строя: а). все детали б). только две детали в). хотя бы одна деталь г). от одной до двух деталей?

а) Вероятность выхода всех трех деталей из строя не зависит друг от друга. Таким образом, вероятность выхода всех трех деталей из строя в первый месяц равна произведению трех вероятностей и составит
$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}1000\cdot 0{,}2000\cdot 0{,}2500=0{,}0050$ *или 0,50%.*
б) Вероятность выхода двух деталей из трех равна сумме вероятностей всех комбинаций выхода из строя двух деталей (их всего 3) и невыхода из строя оставшейся:

$P(A)\cdot P(B)\cdot(1-P(C))+P(A)\cdot P(C)\cdot(1-P(B))+P(B)\cdot P(C)\cdot(1-P(A))=$
$0{,}1000\cdot 0{,}2000\cdot 0{,}7500+0{,}1000\cdot 0{,}2500\cdot 0{,}8000+0{,}2000\cdot 0{,}2500\cdot 0{,}9000=0{,}0800$
или 8,00%.

в) Вероятность, выхода из строя хотя бы одной детали
обратна вероятности не выхода из строя ни одной детали:
$1-P(1-A)\cdot P(1-B)\cdot P(1-C)=1-0{,}9000\cdot 0{,}8000\cdot 0{,}7500=0{,}4600$ *или 46,00%.*

г) Вероятность выхода из строя от одной до двух деталей:

Деталь А не выходит из строя

$$(1-P(A))\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}9000\cdot 0{,}2000\cdot 0{,}2500=0{,}0450$$

Деталь В не выходит из строя

$$P(A)\cdot(1-P(B))\cdot P(C)=0{,}1000\cdot 0{,}8000\cdot 0{,}2500=0{,}0200$$

Деталь С не выходит из строя

$$P(A)\cdot P(B)\cdot(1-P(C))=0{,}1000\cdot 0{,}2000\cdot 0{,}7500=0{,}0150$$

Детали А и В не выходят из строя

$$(1-P(A))\cdot(1-P(B))\cdot P(1)=0{,}9000\cdot 0{,}8000\cdot 0{,}2500=0{,}1800$$

Детали А и С не выходят из строя

$$(1-P(A))\cdot P(B)\cdot(1-P(C))=0{,}9000\cdot 0{,}2000\cdot 0{,}7500=0{,}1350$$

Детали В и С не выходят из строя

$$P(A)\cdot(1-P(B))\cdot(1-P(C))=0{,}1000\cdot 0{,}8000\cdot 0{,}7500=0{,}0600$$

Суммируя все вероятности получаем 0,4550 или 45,50%