Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет ПиИКТ

Лабораторная работа № 5

по «Вычислительной математике»

Интерполяция функции

Работу выполнил: Велюс Арина

Группа: P32151

Преподаватель: Машина Екатерина Александровка

Санкт-Петербург

2023 г.

Цель работы:

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Вариант №2

x	y	№ варианта	X_1	X_2
0,50	1,5320	2	0,502	0,645

- многочлен Лагранжа;
- многочлен Гаусса.

Задание лабораторной работы:

<u>Обязательное задание (до 80 баллов)</u>

Вычислительная реализация задачи:

1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу;
2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете;
3. Вычислить значения функции для аргумента (см. табл.1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
4. Вычислить значения функции для аргумента (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
5. Подробные вычисления привести в отчете.

Программная реализация задачи:

1. Исходные данные задаются тремя способами:
   a) в виде набора данных (таблицы x,y), пользователь вводит значения с клавиатуры;
   b) в виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов);
   c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, sin x. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).
2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;
3. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 5.2). Сравнить полученные значения;
4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами);

5. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.
6. Проанализировать результаты работы программы.

Описание метода, расчетные формулы:

Формула для полинома Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

Формула интерполяции полинома Гаусса для $x > a$:

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Таблица для вычислительной реализации:

x	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80
y	1.5320	2.5356	3.5406	4.5462	5.5504	6.5559	7.5594

X1 = 0.502

X2 = 0.645

Конечные разности:

x_i	y_i	Δ^1 y_i	Δ^2 y_i	Δ^3 y_i	Δ^4 y_i	Δ^5 y_i	Δ^6 y_i
0.50	1.5320	1.0036	0.0014	-0.0008	-0.0012	0.0059	-0.0166
0.55	2.5356	1.0050	0.0006	-0.0020	0.0047	-0.0107	-
0.60	3.5406	1.0056	-0.014	0.0027	-0.0060	-	-
0.65	4.5462	1.0042	0.0013	-0.0033	-	-	-
0.70	5.5504	1.0055	-0.0020	-	-	-	-
0.75	6.5559	1.0035	-	-	-	-	-

0.80	7.5594	-	-	-	-	-	-

t = (0.502 - 0.50) / 0.05 = 0.04

Для X1:

t = (0.502 - 0.50) / 0.05 = 0.04
y = 1.5320 + 0.04 * 1.0036 + (0.04 * (0.04 - 1))/2! * 0.0014 + (0.04 * (0.04 - 1)(0.04 - 2))/3! *-0.0008 + … = 1.5723

Для X2:

t = (0.645 - 0.6) / 0.05 = 0.9

y = 1.5320 + 0.9 * 1.0036 + … = 4.4457

Листинг программы:

```
@staticmethod
def lagrange_method(x_list, y_list, x0):
    """
        Выполняет интерполяцию методом Лагранжа для заданного x0.

        Параметры:
            x_list (list): Список значений x.
            y_list (list): Список значений y.
            x0 (float): Значение x, для которого выполняется интерполяция.

        Возвращает:
            float: Результат интерполяции методом Лагранжа.
    """
    result = 0
    for y_index in range(len(y_list)):
        mul = 1
        for x_index in range(len(x_list)):
            mul *= (x0 - x_list[x_index]) / (x_list[y_index] - x_list[x_index]) if x_index != y_index else 1
        result += y_list[y_index] * mul
    return result

@staticmethod
def gauss_method(x_list, differences, x0):
    """
        Выполняет интерполяцию методом Гаусса для заданного x0.

        Параметры:
            x_list (list): Список значений x.
            differences (list): Список конечных разностей.
            x0 (float): Значение x, для которого выполняется интерполяция.
```

```
        Возвращает:
            float: Результат интерполяции методом Гаусса.
    """
    differences = [row[1:] for row in differences]
    middle = len(x_list) // 2 + len(x_list) % 2 - 1
    x = x_list[middle]

    y_values = []
    k = 0 if x >= x0 else 1
    row = middle

    for ind in range(len(differences)):
        if differences[row][ind] == "-":
            break

        y_values.append(differences[row][ind])

        if ind % 2 == k:
            row -= 1

    t = (x0 - x) / (x_list[1] - x_list[0])
    num = 1
    coefficients = [1, t]

    for ind in range(2, len(y_values)):
        if (k == 0 and ind % 2 == 0) or (k == 1 and ind % 2 !=
0):
            coefficients.append(coefficients[-1] * (t + num) /
ind)
        else:
            coefficients.append(coefficients[-1] * (t - num) /
ind)

        if ind % 2 != 0:
            num += 1

    result = sum(y_values[ind] * coefficients[ind] for ind in
range(len(y_values)))
    return result
```

Примеры и результаты работы программы:

Ввод:

```
2
cos(x + sin(x)) + sin(x)
-10
10
6
-8
```

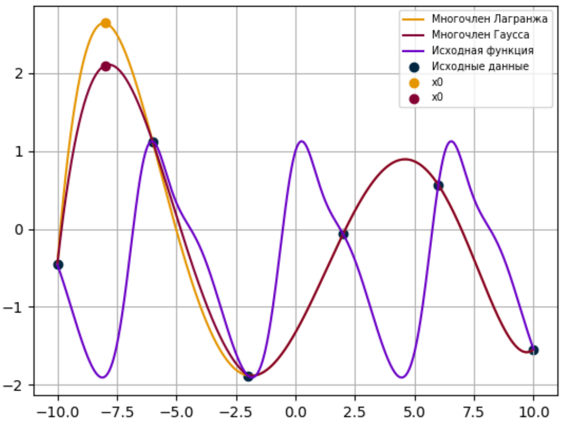
Вывод:

```
Выберите тип ввода
(1) Файл
(2) Консоль
1

Полученные точки:
+---+----------+---------+---------+---------+--------+---------+
| x | -10.0000 | -6.0000 | -2.0000 |  2.0000 | 6.0000 | 10.0000 |
+---+----------+---------+---------+---------+--------+---------+
| y | -0.4555  |  1.1253 | -1.8824 | -0.0638 | 0.5665 | -1.5435 |
+---+----------+---------+---------+---------+--------+---------+

Конечные разности:
+----------+---------+---------+---------+---------+----------+---------+
|    xᵢ    |    yᵢ   |  Δ^1 yᵢ |  Δ^2 yᵢ |  Δ^3 yᵢ |  Δ^4 yᵢ  |  Δ^5 yᵢ |
+----------+---------+---------+---------+---------+----------+---------+
| -10.0000 | -0.4555 |  1.5808 | -4.5885 |  9.4148 | -15.4294 | 19.8921 |
| -6.0000  |  1.1253 | -3.0077 |  4.8263 | -6.0146 |  4.4626  |    -    |
| -2.0000  | -1.8824 |  1.8186 | -1.1883 | -1.5520 |    -     |    -    |
|  2.0000  | -0.0638 |  0.6303 | -2.7403 |    -    |    -     |    -    |
|  6.0000  |  0.5665 | -2.1100 |    -    |    -    |    -     |    -    |
| 10.0000  | -1.5435 |    -    |    -    |    -    |    -     |    -    |
+----------+---------+---------+---------+---------+----------+---------+

Реальное значение: -1.8961
Многочлен Лагранжа: 2.6435
Многочлен Гаусса: 2.0996
```



Вывод:

В данной работе были рассмотрены методы интерполирования, с помощью многочлена Лагранжа и Гаусса. Реализован код для многочленов Лагранжа и Гаусса. Методы довольно точно строят функции, во многом даже близко совпадают, однако в среднем метод Гаусса немного точнее.