ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«Вычислительная математика»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 5
«Интерполяция функции»

Вариант 3

Выполнил:
Студент гр. P32151
Горинов Даниил Андреевич

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

<u>Цель лабораторной работы:</u>

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек

<u>Порядок выполнения лабораторной работы:</u>

Обязательное задание (до 80 баллов)

Вычислительная реализация задачи:

1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу (таблица 1.1 – таблица 1.5);
2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете;
3. Вычислить значения функции для аргумента (см. табл.1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
4. Вычислить значения функции для аргумента (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться;
5. Подробные вычисления привести в отчете.

Программная реализация задачи:

1. Исходные данные задаются тремя способами:
   a) в виде набора данных (таблицы x, y), пользователь вводит значения с клавиатуры;
   b) в виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов);
   c) на основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $sinx$. Пользователь выбирает уравнение, исследуемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функций).
2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей;
3. Вычислить приближенное значение функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 5.2). Сравнить полученные значения;
4. Построить графики заданной функции с отмеченными узлами интерполяции и интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами);
5. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных.

6. Проанализировать результаты работы программы.

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Стирлинга;
2. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Бесселя.

Рабочие формулы методов:

Формула для полинома Лагранжа:

$$\mathrm{L_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}$$

Формула Ньютона для не равностоящих узлов:

$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1}(x - x_j)$

,где $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k} = \frac{f(x_{j+1},\dots,x_{j+k}) - f(x_j, x_{j+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$ – разделенные разности.

Вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад всех равностоящих узлов:

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

, где $t = \frac{x - x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Формула интерполяции полинома Гаусса для $x > a$:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\ + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} \\ + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots \\ + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} \\ + \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Формула интерполяционного полинома Стирлинга:

$$P_n(x) = y_0 + t\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n} + \Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2} + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n}$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1}y_{j+1} - \Delta^{k-1}y_j$

Формула интерполяционного полинома Бесселя:

$$P_n(x) = \frac{y_0 + y_{-1}}{2}{}_0 + \left(t-\frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\dots(t-n)(t+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n}y_{-n} + \Delta^{2n}y_{-(n-1)}}{2} + \frac{\left(t-\frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\dots(t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1}y_{-n}$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1}y_{j+1} - \Delta^{k-1}y_j$

Вычисление значений функции

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	1,1	0,2234	1,0204	0,0002	0,0132	-0,0268	0,0262	0,0187
1	1,25	1,2438	1,0206	0,0134	-0,0136	-0,0006	0,0449	
2	1,4	2,2644	1,034	-0,0002	-0,0142	0,0443		
3	1,55	3,2984	1,0338	-0,0144	0,0301			
4	1,7	4,3322	1,0194	0,0157				
5	1,85	5,3516	1,0351					
6	2	6,3867						

$X_1 = 1.121$

Используем первую формулу Ньютона:

$$t = \frac{X_1 - x_0}{h} = \frac{1.121 - 1.1}{0.15} \approx 0.14$$

$Y_1 = 0.2234 + 1.0204 \cdot 0.14 + \frac{-0.0002\cdot 0.14(0.14-1)}{2!} + \frac{(-0.0132)\cdot 0.2239}{3!} + \frac{-0.0268\cdot(-0.6405)}{4!} + \frac{(-0.0262)\cdot 2.4723}{5!} + 0 = 0.3735$

$X_2 = 1.482$

Используем вторую формулу Гаусса:

$$t = \frac{X_2 - a}{h} = \frac{1.482 - 1.55}{0.15} = 0.453$$

$$Y_2 = 3{,}2984 + 1{,}034 \cdot 0{,}453 + \frac{0{,}453 \cdot (1+0{,}453)}{2!} \cdot (-0{,}0002) + \frac{0{,}453 \cdot (0{,}453-1) \cdot (0{,}453+1)}{3!} \cdot (0{,}0136) + \frac{0{,}453 \cdot (0{,}453-1) \cdot (0{,}453+1) \cdot (0{,}453+2)}{4!} \cdot (-0{,}006) + \frac{0{,}453 \cdot (0{,}453-1) \cdot (0{,}453+1) \cdot (0{,}453+2) \cdot (0{,}453-2)}{5!} \cdot (-0{,}00262) + \frac{0{,}453 \cdot (0{,}453-2) \cdot (0{,}453-1) \cdot (0{,}453+1) \cdot (0{,}453+2) \cdot (0{,}453+3)}{6!} \cdot 0{,}0187 = 3.766$$

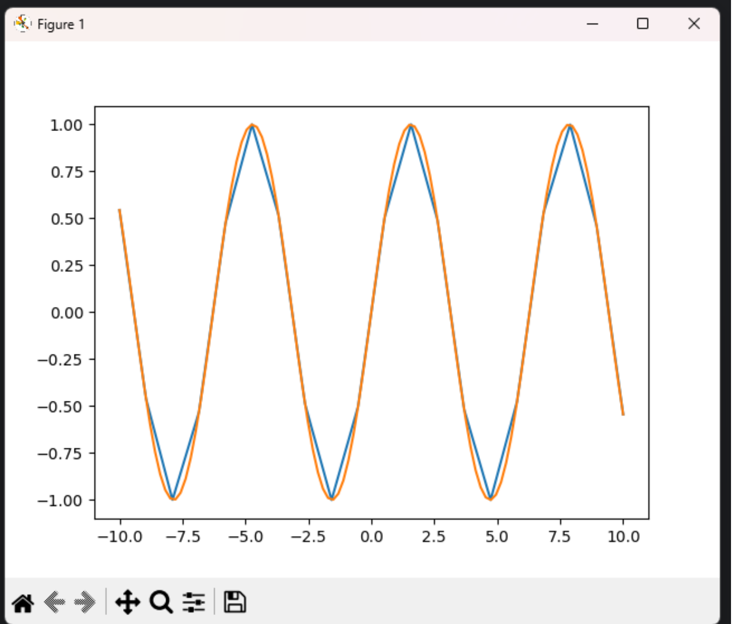
Листинг программы:

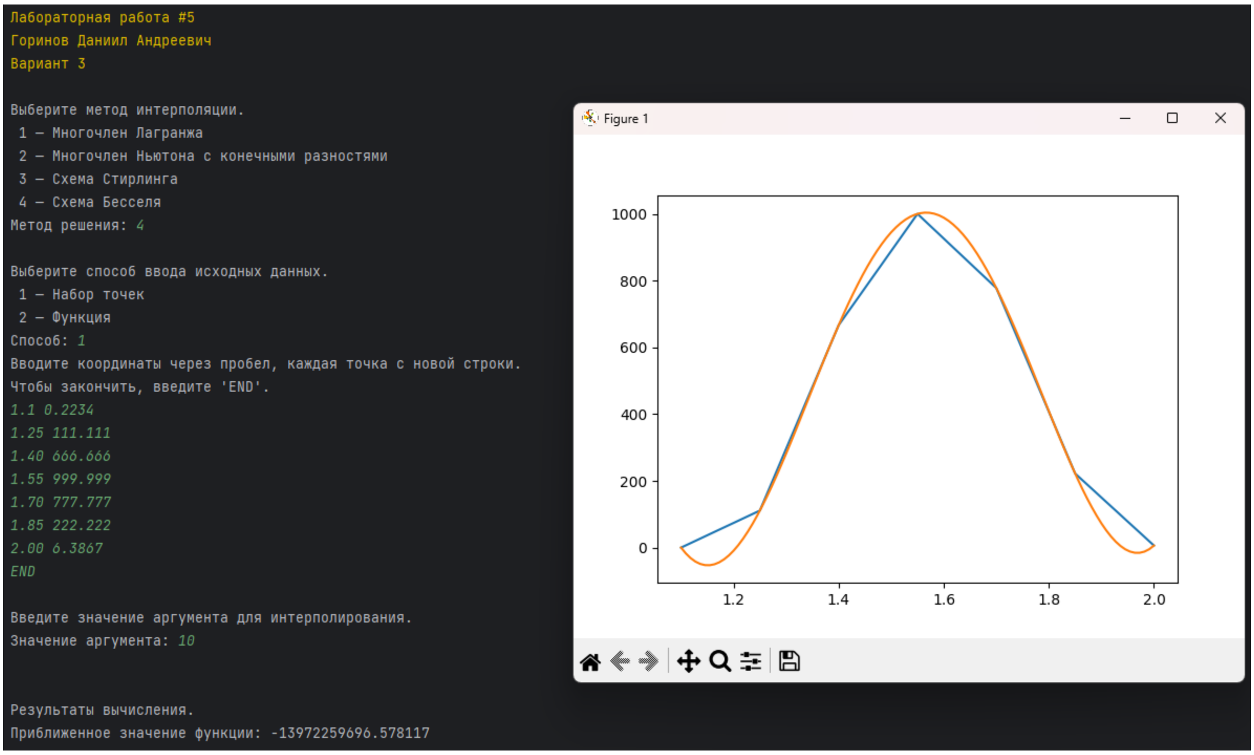
```
def lagrange_polynomial(dots, x):
    result = 0
    n = len(dots)
    for i in range(n):
        c1 = c2 = 1
        for j in range(n):
            if i != j:
                c1 *= x - dots[j][0]
                c2 *= dots[i][0] - dots[j][0]
        result += dots[i][1] * c1 / c2
    return result


def newton_polynomial(dots, x):
    y_arr = [i[1] for i in dots]
    x_arr = [i[0] for i in dots]
    diff = [y_arr]
    for i in range(len(x_arr)):
        tmp_dif = []
        for j in range(len(x_arr) - i - 1):
            tmp_dif.append((diff[-1][j + 1] - diff[-1][j]) / (x_arr[j + i + 1] - x_arr[j]))

        diff.append(tmp_dif)
    mul = 1
    answer = y_arr[0]
    for i in range(len(x_arr) - 1):
        mul *= (x - x_arr[i])
        answer += diff[i + 1][0] * mul
    return answer


def sterling_scheme(dots, x):
    n = len(dots)

    def divided_differences(dots):
        n = len(dots)
        divided_diff = [[y for _, y in dots]]
        for i in range(1, n):
            diff = [(divided_diff[i - 1][j + 1] - divided_diff[i - 1][j]) / (dots[j + i][0] - dots[j][0]) for j in
```

```python
                    range(n - i)]
            divided_diff.append(diff)
        return divided_diff

    def sterling_polynomial(dots, divided_diff, x):
        n = len(dots)
        y = divided_diff[0][0]
        p = 1
        for i in range(1, n):
            p *= (x - dots[i - 1][0])
            y += divided_diff[i][0] * p
        return y
    divided_diff = divided_differences(dots)
    result = sterling_polynomial(dots, divided_diff, x)
    return result


def bessel_scheme(dots, x):
    n = len(dots)
    result = 0.0
    for i in range(n):
        term = dots[i][1]
        for j in range(n):
            if i != j:
                term *= (x - dots[j][0]) / (dots[i][0] - dots[j][0])
        result += term
    return result
```

Результаты выполнения программы:

```
Лабораторная работа #5
Горинов Даниил Андреевич
Вариант 3

Выберите метод интерполяции.
 1 – Многочлен Лагранжа
 2 – Многочлен Ньютона с конечными разностями
 3 – Схема Стирлинга
 4 – Схема Бесселя
Метод решения: 2

Выберите способ ввода исходных данных.
 1 – Набор точек
 2 – Функция
Способ: 2

Выберите функцию.
 1 – √x
 2 - x²
 3 – sin(x)
Функция: 3

Введите границы отрезка.
Границы отрезка: -10 10

Выберите количество узлов интерполяции.
Количество узлов: 20

Введите значение аргумента для интерполирования.
Значение аргумента: 10


Результаты вычисления.
Приближенное значение функции: -0.544021108982884
```





<u>Вывод:</u>

Интерполяция функций представляет собой значительно более сложный процесс по сравнению с аппроксимацией. Кроме того, выражения, используемые для получения интерполяционных полиномов, обычно являются достаточно сложными для визуального восприятия и понимания. Непонятно, почему существует так много способов построения полинома для интерполяции, хотя итоговый полином должен быть единственным. Тем не менее, поставленная задача была успешно решена.