ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«*Вычислительная математика*»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 5
«Интерполяция функции»

Вариант 8

Выполнил:
Студент гр. P32151
Соловьев Артемий Александрович

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

Цель работы:

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.
Для исследования использовать:

- Многочлен Лагранжа
- Многочлен Ньютона
- Многочлен Гаусса

Задание:
Обязательное задание (до 80 баллов)

1. Вычислительная реализация задачи:
   1.1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу $y = f(x)$ (таблица 1.1–1.5)
   1.2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы. Таблицу отразить в отчете
   1.3. Вычислить значения функции для аргумента X_1 (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться
   1.4. Вычислить значения функции для аргумента X_2 (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться
   1.5. Подробные вычисления привести в отчете.
2. Программная реализация задачи:
   2.1. Исходные данные задаются тремя способами:
   a) В виде набора данных (таблицы x, y), пользователь вводит значения с клавиатуры
   b) В виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов)
   c) На основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $\sin(x)$. Пользователь выбирает уравнение, используемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функции)

   2.2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей
   2.3. Вычислить приближенное значение функции для заданного аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 5.2). Сравнить полученные значения
   2.4. Построить графики заданной функции с отмеченным узлами интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами)
   2.5. Программа должна быт протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных
   2.6. Проанализировать результаты работы программы

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Стирлинга.
2. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Бесселя.

Рабочие формулы исследуемых методов:

Формула для полинома Лагранжа:

$$\mathrm{L_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)}$$

Формула Ньютона для не равностоящих узлов:

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

,где $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k} = \frac{f(x_{j+1},\dots,x_{j+k})-f(x_j,x_{j+k-1})}{x_{i+k}-x_i}$ – разделенные разности.

Вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад всех равностоящих узлов:

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Формула интерполяции полинома Гаусса для $x > a$:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\ + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} \\ + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \dots \\ + \frac{(t+n-1)\dots(t-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} \\ + \frac{(t+n-1)\dots(t-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Формула интерполяционного полинома Стирлинга:

$$\begin{aligned} P_n(x) = y_0 + t\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2-1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} \\ + \frac{t^2(t^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{t(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \\ \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\ + \frac{t^2(t^2-1^2)(t^2-2^2)\dots(t^2-(n-1)^2)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Формула интерполяционного полинома Бесселя:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = {} & \frac{y_0 + y_{-1}}{2}{}_0 + \left(t - \frac{1}{2}\right)\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3)}{6!}\frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \cdots \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \\
& + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)\ldots(t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}
\end{aligned}
$$

, где $t = \frac{x - x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Вычислительная реализация задачи:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	1,1	0,2234	1,0204	0,0002	-0,0132	-0,0268	-0,0262	0,0187
1	1,25	1,2438	1,0206	0,0134	0,0136	-0,0006	-0,0449	
2	1,40	2,2644	1,034	-0,0002	0,0142	0,0443		
3	1,55	3,2984	1,0338	-0,0144	-0,0301			
4	1,70	4,3322	1,0194	0,0157				
5	1,85	5,3516	1,0351					
6	2,00	6,3867						

$X_1 = 1{,}852$

Используем первую формулу Ньютона:

$$t = \frac{X_1 - x_0}{h} = \frac{1{,}852 - 1{,}1}{0{,}15} \approx 5$$

$$\mathrm{Y}_1 = 0{,}2234 + 1{,}0204 \cdot 5 + \frac{-0{,}0002 \cdot 5(5-1)}{2!} + \frac{(-0{,}0132) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} + \frac{-0{,}0268 \cdot 5 \ \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} + \frac{(-0{,}0262) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} + 0 = 5{,}2252$$

$X_2 = 1{,}652$

Используем вторую формулу Гаусса:

$$t = \frac{X_2 - a}{h} = \frac{1{,}652 - 1{,}55}{0{,}15} = 0{,}68$$

$$Y_2 = 3{,}2984 + 1{,}034 \cdot 0{,}68 + \frac{0{,}68\cdot(1+0{,}68)}{2!} \cdot (-0{,}0002) + \frac{0{,}68\cdot(0{,}68-1)\cdot(0{,}68+1)}{3!} \cdot (0{,}0136) + \frac{0{,}68\cdot(0{,}68-1)\cdot(0{,}68+1)\cdot(0{,}68+2)}{4!} \cdot (-0{,}006) + \frac{0{,}68\cdot(0{,}68-1)\cdot(0{,}68+1)\cdot(0{,}68+2)\cdot(0{,}68-2)}{5!} \cdot (-0{,}00262) + \frac{0{,}68\cdot(0{,}68-2)\cdot(0{,}68-1)\cdot(0{,}68+1)\cdot(0{,}68+2)\cdot(0{,}68+3)}{6!} \cdot 0{,}0187 = 4{,}0009$$