ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«*Вычислительная математика*»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 3
«Численное интегрирование»

Вариант 8

Выполнил:
Студент гр. P32151
Соловьев Артемий Александрович

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

Цель

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами

Задание

1. № варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.
2. **Исходные данные:**
   - Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
   - Пределы интегрирования задаются пользователем.
   - Точность вычисления задается пользователем.
   - Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
   - Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.
3. **Программная реализация задачи:**
   - Реализовать в программе методы по выбору пользователя: Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние), Метод трапеций, Метод Симпсона
   - Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
   - Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
   - Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
   - Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.
4. **Вычислительная реализация задачи:**
   - Вычислить интеграл $\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)dx$,точно.
   - Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 5.

- Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10.
- Сравнить результаты с точным значением интеграла.
- Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
- В отчете отразить последовательные вычисления.

5. **Необязательное задание:**
   - Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
   - Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
   - Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

Описание метода, расчетные формулы

Метод прямоугольников:

Идея этого метода в том, чтобы считать интеграл через вычисление площади под интегральной кривой. Её разбивают на прямоугольники ширины h высоты равной *f*(*x*i) где xi принадлежит отрезку (основанию) нашего прямоугольника.

Различают метод левых, правых и средних прямоугольников.

Площади всех прямоугольников суммируются и получается приближенное значение интеграла, чем больше будет отрезков (а соответственно и прямоугольников), тем точнее будет результат.

Рабочая формула метода: средних, левых и правых соответственно.

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_{i-1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) \qquad \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

Метод трапеций:

Метод трапеции работает аналогичным образом -- мы приближаем значение интеграла через площадь под интегралом, но на этот раз трапециями с основаниями параллельными оси y. Получаются прямоугольные трапеции с боковой стороной соединяющей точки *f*(*x*i) и *f*(*x*(i+1)) - значения функции в начале и конце отрезка.

Рабочая формула метода:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \cdot \left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

Метод Симпсона:

Метод Симпсона приближает подынтегральную площадь параболами, проведенными через три соседние точки -- на которые мы разбиваем наш интервал от a до b. Такую параболу можно построить пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени, проходящий через точки (x(i-1), y(i-1)), (xi, yi), (x(i+1), y(i+1)).

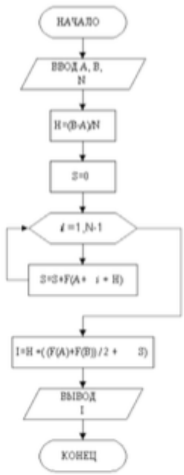
Рабочая формула метода:

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n)\right]$$

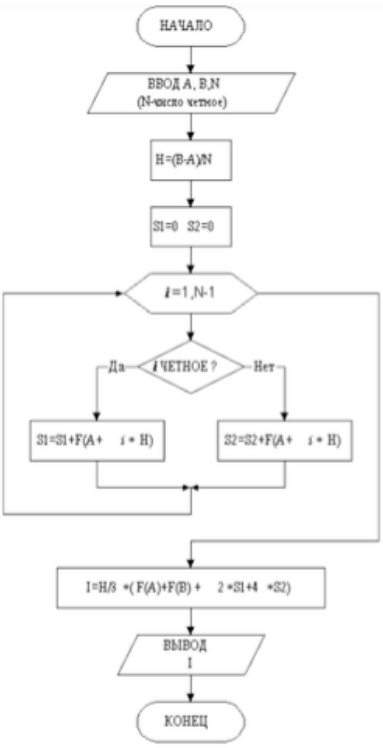
Блок-схема

Метод прямоугольников(средних):

Метод трапеций:



Метод Симпсона:



Вычислительная часть

$$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)dx$$

1. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)\, dx = (2x^4/4 - 2x^3/3 + 7x^2/2 - 14x) =$$

$$= (x^4/2 - 2x^3/3 + 7x^2/2 - 14x) = (4^4/2 - 2 * 4^3/3 + 7 * 4^2/2 - 14 * 4) -$$

$$- (2^4/2 - 2 * 2^3/3 + 7 * 2^2/2 - 14 * 2) = (256/3) - (-34/3) =$$
$$= 290/3 \approx 96,667$$

2. По формуле Ньютона – Котеса при n =5:

5	$c_5^0 = c_5^5 = \frac{19(b-a)}{288}$	$c_5^1 = c_5^4 = \frac{75(b-a)}{288}$	$c_5^2 = c_5^3 = \frac{50(b-a)}{288}$

$$c^0_5 = c^5_5 = 19 * (4 - 2)/288 = 38/288 = 19/144$$

$c^1_5 = c^4_5 = 75 * (4 - 2)/288 = 150/288 = 25/48$

$c^2_5 = c^3_5 = 50 * (4 - 2)/288 = 100/288 = 25/72$

$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)\,dx = c^0_5 * f(2) + c^1_5 * f(2,4) + c^2_5 * f(2,8) +$

$+ c^3_5 * f(3,2) + c^4_5 * f(3,6) + c^5_5 * f(4) = 19/144 * 8 + 25/48 * 2366/125 +$
$25/72 * 4228/125 + 25/72 * 6682/125 + 25/48 * 9824/125 + 19/144 * 110 =$
$= 290/3 \approx 96,667$

Погрешность $\Delta = 0$

3. По формуле средних прямоугольников при n = 10:

   h = (4-2)/10 = 0,2

$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)\,dx = 0,2 * \sum_1^{10} f(x_{i-1/2}) = 0,2 * (482,8) = 96,56$

Погрешность $\Delta = 8/75 \approx 0,107$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
$x_{i-1/2}$		2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,7	3,9
$f(x_{i-1/2})$		5201/500	7927/500	89/4	14843/500	19129/500	24031/500	29597/500	287/4	42913/500	50759/500

4. По формуле трапеций при n = 10:

   h = (4-2)/10 = 0,2

$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)\,dx = 0,2 * ((8 + 110)/2 + \sum_1^{n-1} f(x_i)) =$

$= 0,2 * (59 + 43 + 382,4) = 0,2 * 484,4 = 96,88$

Погрешность $\Delta = 16/75 \approx 0,213$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
$f(x_i)$	8	1627/125	2366/125	3229/125	4228/125	43	6682/125	8161/125	9824/125	11683/125	110

5. По формуле Симпсона при n = 10:
   h = (4-2)/10 = 0,2

$$\int_2^4 (2x^3 - 2x^2 + 7x - 14)\,dx = 0,2\,/\,3 * (8 + 4 * (240,6) + 2 * (184,8) + 110) =$$
$$= 0,2\,/\,3 * 1450 = 290/3 \approx 96,667$$

Погрешность $\Delta = 0$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
$f(x_i)$	8	1627/125	2366/125	3229/125	4228/125	43	6682/125	8161/125	9824/125	11683/125	110

6. Погрешность при вычислении методом Симпсона и по формуле Ньютона – Котеса получилась нулевая, а самая большая погрешность получилась при вычислении методом трапеций.