Отчет по Лабораторной работе №3
по курсу “Вычислительная математика”

Вариант №5

Выполнил:
Студент группы P32082
Панин Иван Михайлович

Преподаватель:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург, 2023

Лабораторная работа №3. Численное интегрирование

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

№ варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.

Лабораторная работа состоит из двух частей: вычислительной и программной.

Обязательное задание (до 80 баллов)

Исходные данные:

1. Пользователь выбирает функцию, интеграл которой требуется вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.
2. Пределы интегрирования задаются пользователем.
3. Точность вычисления задается пользователем.
4. Начальное значение числа разбиения интервала интегрирования: n=4.
5. Ввод исходных данных осуществляется с клавиатуры.

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
   - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
   - Метод трапеций
   - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

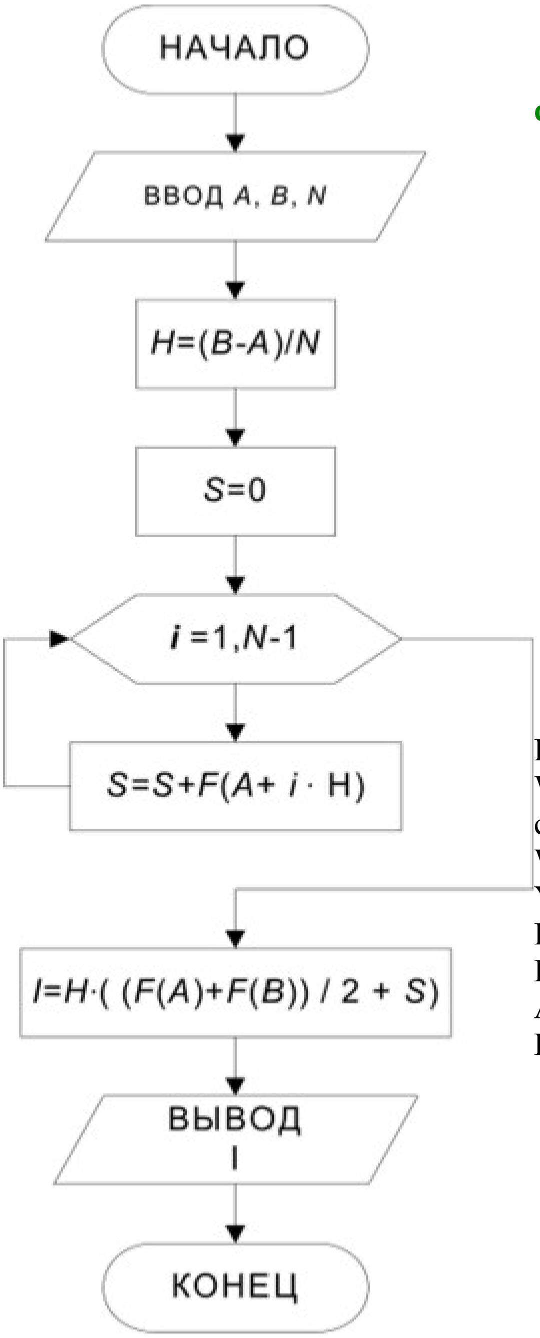
Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при $n = 5$.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при $n = 10$.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете ***отразить последовательные вычисления***.

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Установить сходимость рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода (2-3 функции). Если интеграл - расходящийся, выводить сообщение: «Интеграл не существует».
2. Если интеграл сходящийся, реализовать в программе вычисление несобственных интегралов 2 рода (заданными численными методами).
3. Рассмотреть случаи, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв: 1) в точке a, 2) в точке b, 3) на отрезке интегрирования

1. Метод прямоугольников.
На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени –
отрезком, параллельным оси абсцисс. Площадь криволинейной трапеции приближенно
заменяется площадью многоугольника, составленного из n- прямоугольников. Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению суммы n- элементарных прямоугольников.



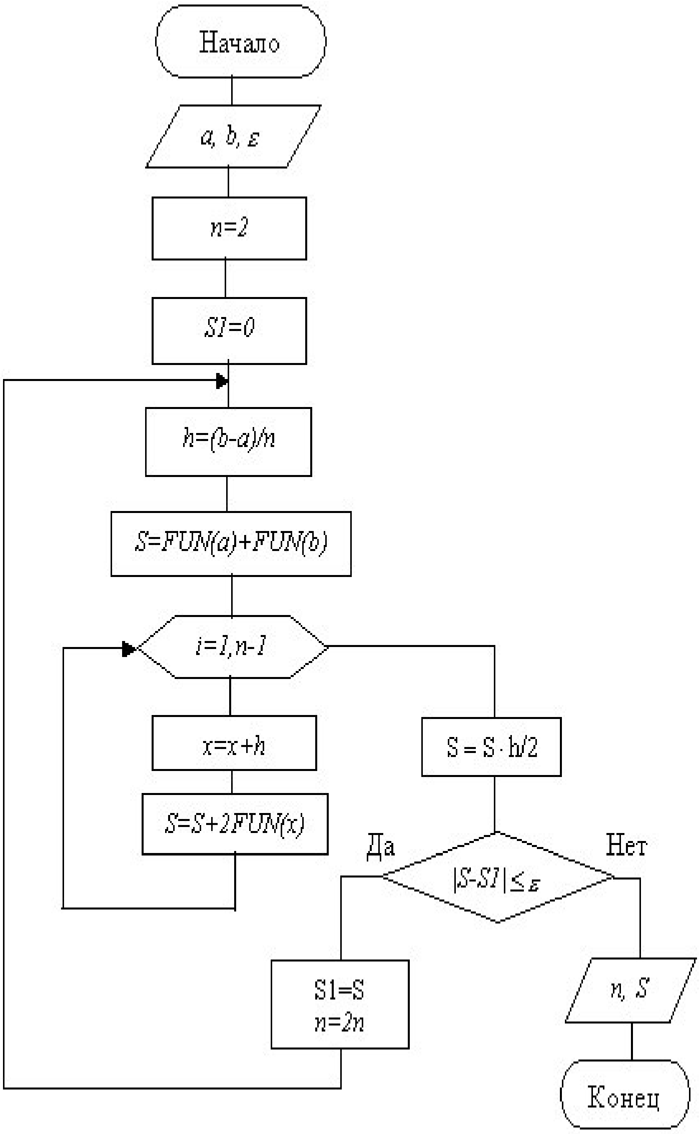

```
def math_cell_method(f, a, b, n, side):
        h = (b - a)/n
        answ = 0

        if side == "center":
                a += h /2
        elif side == "right":
                a += h

        while a < b and n >= 1:
                answ += f(a)
                a += h
                n -= 1
        answ *= h
        return answ
```

Пример работы метода:
Wich method do you want to see? (s(simpson), t(trapeze), c(cell))c
Which function do you want to integrate?(1, 2, 3)3
Your interval(<a> <b>):-10 10
Enter N: 1
Enter center:2
Answ: -91340.0
Runge rule: i - i_(h/2) = 15200.0

2. Метод трапеций.
Подынтегральную функцию на каждом отрезке $[xi; xi+1]$ заменяют интерполяционным многочленом первой степени: $fx \approx i\varphi$ (x) $= aix+b$

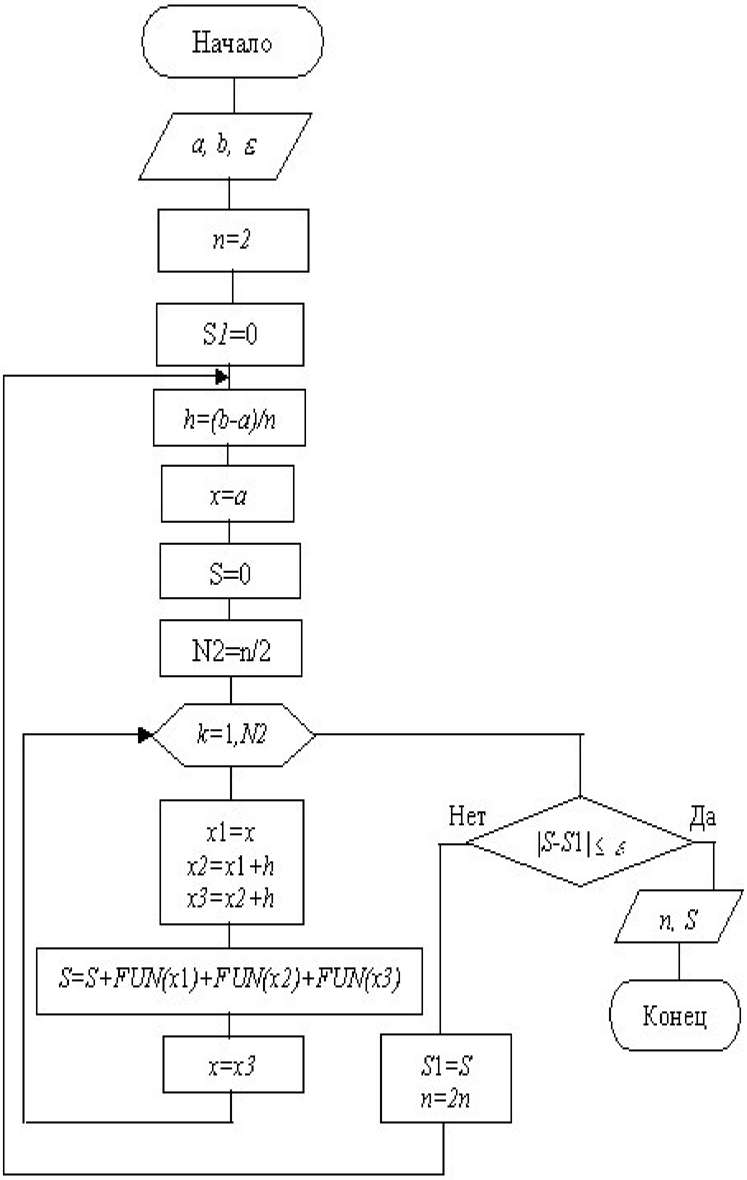



```
def math_trapeze_method(f, a, b, n):
        h = (b - a)/h
        answ = (f(a) + f(b))/2
        a += h
        n -= 1

        while a < b and n >= 1:
                answ += f(a)
                a += h
                n -= 1
        answ *= h
        return answ
```

Пример работы:
Wich method do you want to see? (s(simpson), t(trapeze), c(cell))t
Which function do you want to integrate?(1, 2, 3)2
Your interval(<a> <b>):0 10
Enter N: 2
Answ: 9686.666666666666
Runge rule: i - i_(h/2) = 0.0

3. Метод Симпсона.
Разобьем отрезок интегрирования [a, b] на четное число n равных частей с шагом h. На
каждом отрезке [x0, x2], [x2, x4], ..., [xi-1, xi+1], ... , [xn-2, xn] подынте-гральную
функцию заменим интерполяционным многочленом второй степени:
$f x \approx i\ x = aix2+bix+ci,\ xi-1 \le x \le xi+1$




```
def math_simpson_method(f, a, b, n):
        if n % 2:
                n += 1
        h = (b - a)/n

        answ = f(a) + f(b)
        a += h

        for i in range(1, n):
                if not(i % 2):
                        answ += 2 * f(a)
                elif i % 2:
                        answ += 4 * f(a)
                a += h
        return answ * h / 3
```

Пример работы:
Wich method do you want to see? (s(simpson), t(trapeze), c(cell))s
Which function do you want to integrate?(1, 2, 3)3
Your interval(<a> <b>):-10 10
Enter N: 4
Answ: -3473.3333333333335
Runge rule: i - i_(h/2) = 0.0

Для проверки погрешностей используется правило Рунге.

$$I - I_{h/2} = \frac{I_{h/2} - I_h}{2^k - 1}$$

```
def runge_rule(ih, ihdiv2, k):
        d = (abs(ihdiv2-ih))/(2**k-1)
        print("Runge rule: i - i_(h/2) = ", d)
                        answ += 4 * f(a)
                a += h
        return answ * h / 3
```

Вычислительная реализация:

5	$\int_{2}^{4}(-2x^3 - 3x^2 + x + 5)dx$	= -160

Ньютона-Котеса (n = 5):

n	Cn	C0n	C1n	C2n	C3n	C4n	C5n
0	1	1					
1	2	1	1				
2	6	1	5	1			
3	7	2	3		1		
4	80	6	43	12	43	7	
5	292	20	70	53	55	70	15

j	Xj	Yj	Cj*f(Xj)	h	a	b
0	1	-15	-190	0.33	1	4
1	2	-20	-1251.2			
2	2.33	-73	-983.23			
3	3	-73	-984.4			
4	3.66	-167	-1316.24			
5	4	-160	-266			

ОТВЕТ: -160

Формула средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n=10:
Средних прямоугольников:

i	Xi	Yi	h
0	2.0	-118.123	0.2
1	2.2	-130.935	
2	2.4	-142.134	
3	2.6	-159.124	
4	2.8	-145.523	
5	3.0	-120.2	
6	3.2	-134.123	
7	3.4	-152.921	
8	3.6	-110.232	
9	3.8	-120.23	
6	ОТВЕТ	-160	
	Delta	0.053333	
Относительная:	-0.001538		

Трапеций:

i	Xi	Yi	h
0	2	-21	0.2
1	2.2	-30.7	
2	2.4	-39.25	
3	2.6	-49.20	
4	2.8	-60.41	
5	3.0	-77.5	
6	3.2	-87.06	
7	3.4	-108.24	
8	3.6	-126.04	
9	3.8	-154.23	
10	4	-167	
Относительная	0.00012		

Выводы:
В ходе лабораторной работы я познакомился с новыми для себя методами вычисления
интегралов при помощи языков программирования. Больше всего мне понравился метод
Симпсона, так как он является наиболее точным из предложенных (при приблизительно
схожей эффективности). Кроме того, попробовал реализацию вычисления несвойственных
интегралов с обработкой ситуаций, когда интеграл расходится.