ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:

«*Вычислительная математика*»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 2

«Численное решение нелинейных уравнений и систем»

Вариант 11

Выполнил:

Студент гр. P32151

Соловьев Артемий Александрович

Проверил:

Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург

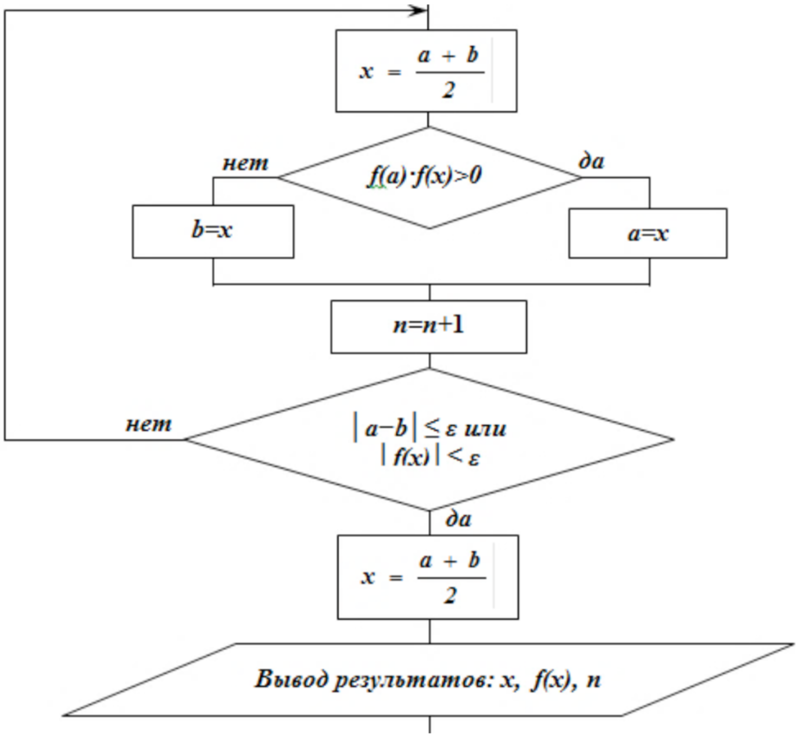
2023г.

Цель работы: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, выполнить программную реализацию методов.

Используемые методы:

- Метод половинного деления:

  Блок-схема



  Рабочая формула: $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$

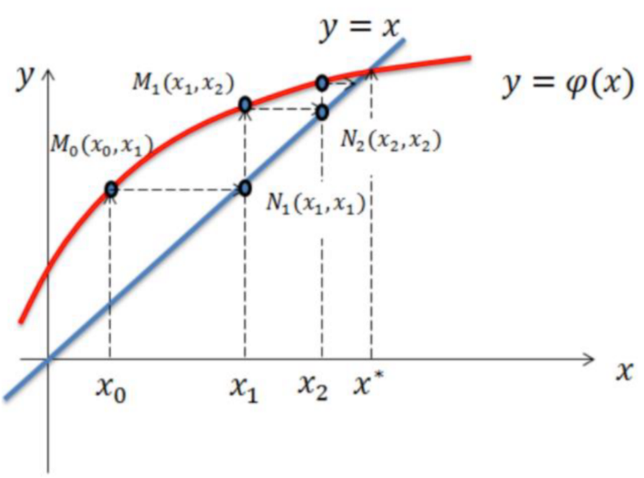
  Критерий окончания: $|b_n - a_n| \leq \varepsilon$ или $|f(x_n)| \leq \varepsilon$

- Метод простой итерации

  Рабочая формула:

$$x_{i+1} = \varphi(x_i)$$

  Геометрический смысл:



Достаточное условие сходимости: $\varphi'(x) \le q < 1$

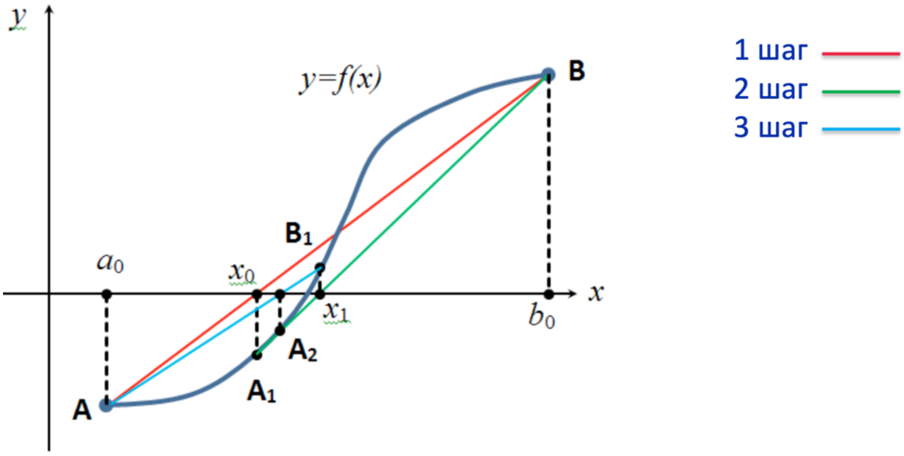
Критерий окончания: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$

- Метод хорд

Рабочая формула: $x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{(f(b_i) - f(a_i))}$

Критерий окончания: $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$ или $|a_i - b_i| \le \varepsilon$ или $|f(x_i)| \le \varepsilon$

Визуализация:



- Метод секущих

Рабочая формула: $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$

Критерий окончания: $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$ или $|f(x_n)| \le \varepsilon$

- Метод Ньютона

Приведем систему уравнений к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Или, в векторной форме: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X})$ $\quad \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\boldsymbol{X}) \\ \varphi_2(\boldsymbol{X}) \\ \dots\dots \\ \varphi_n(\boldsymbol{X}) \end{pmatrix}$

Если выбрано начальное приближение: $\boldsymbol{X}^{(0)} = x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

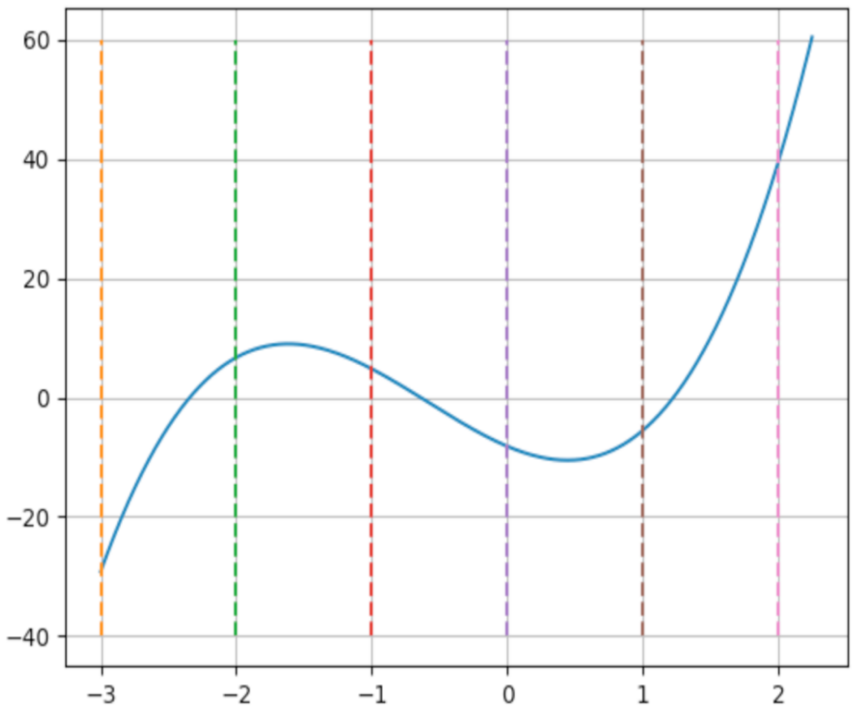
Критерий окончания итерационного процесса:

$$\max_{1<i<n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^k \right| \le \varepsilon$$

Вычислительная реализация задачи:

Функция: $y = 4{,}45x^3 + 7{,}81x^2 - 9{,}62x - 8{,}17$

1) Отделить корни графически



2) Определить интервалы изоляции корней:
   a. интервал первого корня: (-3; -2)
   b. интервал второго корня: (-1; 0)
   c. интервал третьего корня: (1; 2)
3) Уточнить корни с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$
4) Методы для уточнения корней:
   a. крайний правый корень: метод половинного деления
   b. крайний левый корень: метод простой итерации
   c. центральный корень: метод хорд

5) Таблицы уточнений:

Метод половинного деления для правого корня

№ шага	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	|a-b|
0	1	2	1.5	-5.53	39.43	9.99	1
1	1	1.5	1.25	-5.53	9.99	0.7	0.5
2	1	1.25	1.12	-5.53	0.7	-2.77	0.25
3	1.12	1.25	1.19	-2.77	0.7	-1.13	0.12
4	1.19	1.25	1.22	-1.13	0.7	-0.24	0.06
5	1.22	1.25	1.23	-0.24	0.7	0.22	0.03
6	1.22	1.23	1.23	-0.24	0.22	-0.01	0.02
7	1.23	1.23	1.23	-0.01	0.22	-0.01	0.01

Метод простой итерации для левого корня

№ шага	X_k	X_{k+1}	$F(X_{k+1})$	$\|X_{k+1}-X_k\|$
0	-3.0	-2.54	-6.34	0.46
1	-2.54	-2.44	-2.92	0.1
2	-2.44	-2.4	-1.51	0.05
3	-2.4	-2.37	-0.82	0.02
4	-2.37	-2.36	-0.46	0.01
5	-2.36	-2.35	-0.26	0.01

Метод хорд для центрального корня

№ шага	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	|a-b|
0	-1.0	0.0	0.0	4.81	-8.17	-8.17	1.0
1	-1.0	-0.63	-0.63	4.81	-0.13	-0.13	0.37
2	-0.65	-0.63	-0.63	0.01	-0.13	-0.13	0.01

Листинг программы:

Код будет на гитхабе ☺

Примеры работы:

Soloviev Artemiy P32151

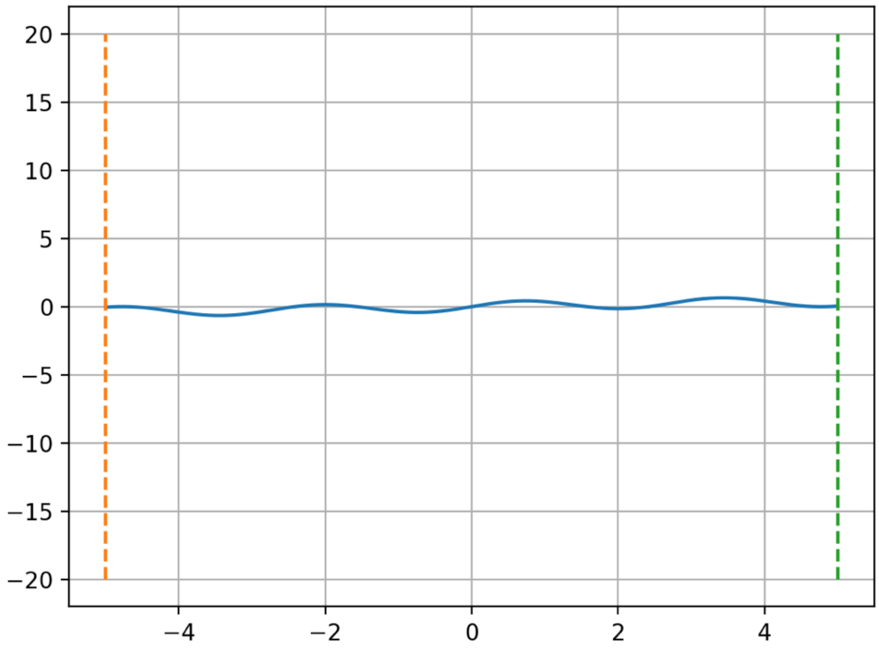
Task option 11

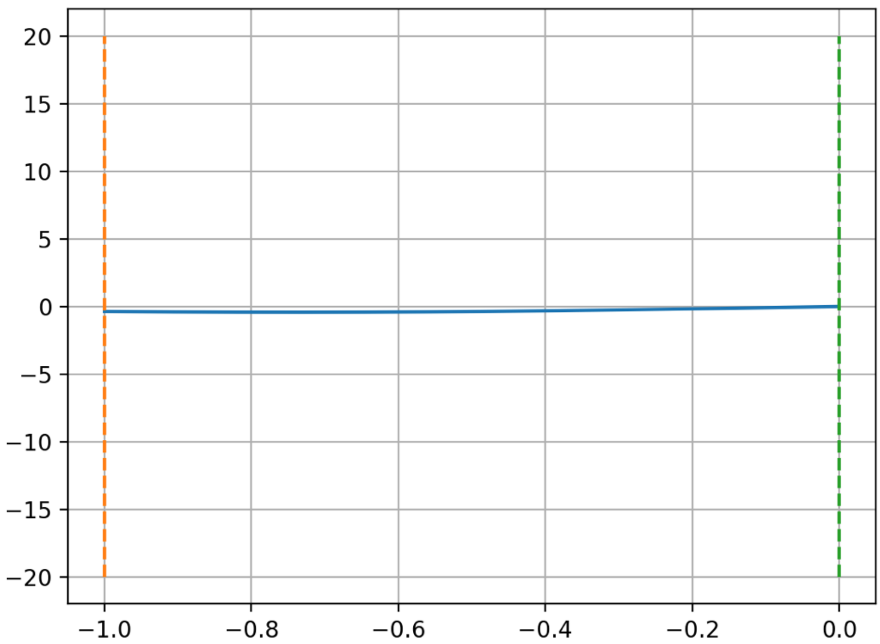
Choose type:

```
1) Non-linear functions
2) System of non-linear functions
>>>1
Chosen type: Non-linear functions
Choose functions:
1) 4.45*x^3 + 7.81*x^2 − 9.62*x − 8.17
2) x^3 - 4.81*x^2 − 17.37*x + 5.38
3) x^3 − 4.5*x^2 − 9.21*x − 0.383
4) 0.7*cos(x) * sin(1.3*x)
>>>4
Chosen function: 0.7*cos(x) * sin(1.3*x)
Choose method:
1) half division method
2) secant method
3) iterations method
>>>1
Chosen method: half division method
Function graph is on your screen!
Enter the left border of the interval
>>>-1
Enter the right border of the interval
>>>0
Look at the screen
Is this the correct interval?(y/n)
>>>y
Chosen interval: [-1.0:0.0]
Enter an accuracy that is a multiple of a power of 10
>>>0.01
Chosen accuracy: 0.01
Half division method:
+---+-------+-----+-------+-------+------+-------+-------+
| n |   a   |  b  |   x   |  f(a) | f(b) |  f(x) | |a-b| |
+---+-------+-----+-------+-------+------+-------+-------+
| 0 |  -1.0 | 0.0 |  -0.5 | -0.36 | 0.0  | -0.37 |  1.0  |
| 1 |  -0.5 | 0.0 | -0.25 | -0.37 | 0.0  | -0.22 |  0.5  |
```

2	-0.25	0.0	-0.12	-0.22	0.0	-0.11	0.25
3	-0.12	0.0	-0.06	-0.11	0.0	-0.06	0.12
4	-0.06	0.0	-0.03	-0.06	0.0	-0.03	0.06
5	-0.03	0.0	-0.02	-0.03	0.0	-0.01	0.03

result: x = -0.02 ,f(x) = -0.01 ,n = 5





Вывод:

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены методы нахождения корня нелинейного уравнения и нескольких корней системы нелинейных уравнений. На практике были выявлены преимущества и недостатки каждого из методов: метод половинного деления самый простой, но зачастую требует большее количество операций, метод хорд чуть сложнее в реализации, но требует меньше операций, чем метод половинного деления, метод простых итераций оказался самым сложным среди других методов, затрачивает значительное количество операций и сложен в реализации. К достоинствам метода Ньютона для решения систем нелинейных уравнений можно отнести быструю сходимость, а к недостаткам: необходимо выбирать начальное приближение и необходимо вычислять производные на каждом из шагов. Исходя из этого, метод половинного деления лучше всего подходит для решения нелинейных уравнений, он прост в реализации и обладает высокой точностью.