Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа №1 по дисциплине
«Вычислительная математика»

"Решение системы линейных алгебраических уравнений

Выполнил: Бобринёв Кирилл

Группа: P32082

Преподаватель: Машина Е.А

г. Санкт-Петербург

2023

Цель работы:

Научиться писать программы для решения СЛАУ, изучить прямые и итерационные методы решения, узнать их преимущества и недостатки.

Задание лабораторной работы:

Вариант №1 - метод Гаусса.

1. № варианта определяется как номер в списке группы согласно ИСУ.
2. В программе численный метод должен быть реализован в виде отдельной подпрограммы/метода/класса, в который исходные/выходные данные передаются в качестве параметров.
3. Размерность матрицы n<=20 (задается из файла или с клавиатуры - по выбору конечного пользователя).
4. Должна быть реализована возможность ввода коэффициентов матрицы, как с клавиатуры, так и из файла (по выбору конечного пользователя).

<u>Для прямых методов должно быть реализовано:</u>

- Вычисление определителя
- Вывод треугольной матрицы (включая преобразованный столбец B)
- Вывод вектора неизвестных: $x_1,\ x_2,\ \dots, x_n$
- Вывод вектора невязок: $r_1,\ r,\ \dots, r_n$

Описание метода, расчетные формулы:

Смысл метода состоит в преобразовании расширенной системы линейных алгебраических уравнений в треугольный вид, а затем определении всех переменных. В случае квадратной матрицы с ненулевым определителем существует единственное решение. Далее определяются все переменные, начиная с последнего уравнения. Каждая переменная определяется с использованием предыдущих, а последняя переменная известна сразу.

Приведение к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} - \frac{a_{2,1} * a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & a_{2,n} - \frac{a_{2,1} * a_{1,n}}{a_{1,1}} & b_2 - \frac{b_1 * a_{2,1}}{a_{1,1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2} - \frac{a_{n,1} * a_{1,2}}{a_{1,1}} & \cdots & a_{n,n} - \frac{a_{n,1} * a_{1,n}}{a_{1,1}} & b_n - \frac{b_1 * a_{n,1}}{a_{1,1}} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right)$$

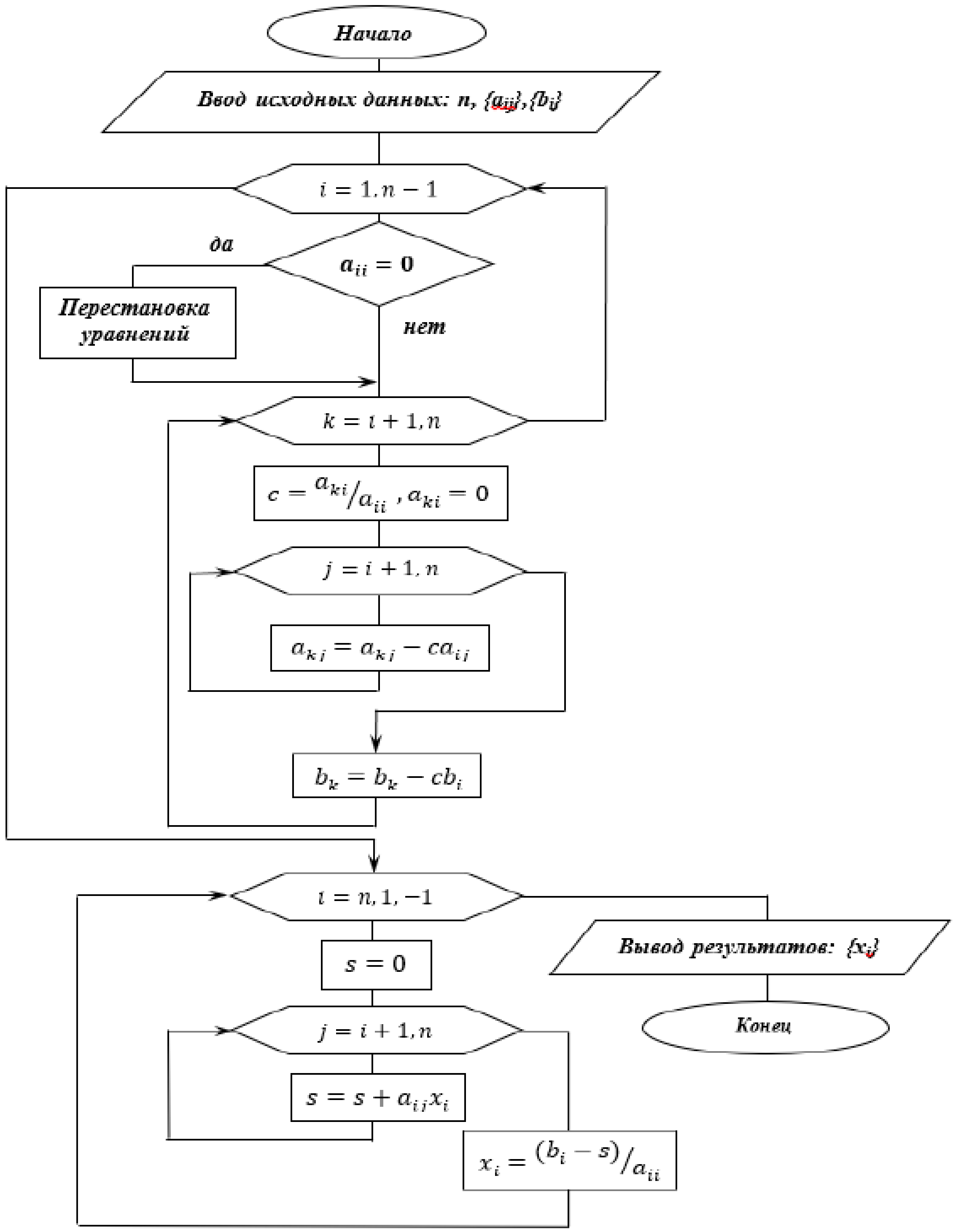
Решения:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} * x_j}{a_{i,i}}$$

Определитель:

$$detA = (-1)^k \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Блок схема метода Гаусса:



Реализация вычисления:

```
# В случае, если во время вычисления a11, a22, a33, ... = 0 - переставляем соответственно коэф
def __check_diagonal(self, i):
    j = i
    while j < self.n:
        if (self.system[j][i] != 0) and (self.system[i][j] != 0):
            swap = self.system[j]
            self.system[j] = self.system[i]
            self.system[i] = swap
            self.swap += 1
            return
```

```
        j += 1
    print('Нет решений!')
    return ArithmeticError

# Вычисление треугольной матрицы
def __make_triangle(self):
    try:
        i = 0
        while i < self.n:
            if self.system[i][i] == 0:
                self.__check_diagonal(i)
            m = i
            while m < self.n - 1:
                a = -(self.system[m + 1][i] / self.system[i][i])
                j = i
                while j < self.n:
                    self.system[m + 1][j] += a * self.system[i][j]
                    j += 1
                self.system[m + 1][-1] += a * self.system[i][-1]
                m += 1
            k = 0
            line_sum = 0
            while k < self.n:
                line_sum += self.system[i][k]
                k += 1
            if line_sum == 0:
                print('Данная система не совместима, решений нет!')
                return ArithmeticError
            i += 1
    except ValueError:
        print('Некорректная работа с данными!')
        return

# Нахождение и вывод определителя на экран
def __get_determinate(self):
    i = 0
    self.det = 1
    while i < self.n:
        self.det *= self.system[i][i]
        i += 1
    if self.swap % 2 == 1:
        self.det *= -1
    print(f'\nОпределитель = {self.det}\n')
    if self.det == 0:
        print('Система является вырожденной, нет решения.')
        return ArithmeticError

# Находим неизвестные x1, x2, x3, ..., xn
def __calc_vector_x(self):
    i = self.n - 2
    self.x.append(self.system[self.n - 1][-1] / self.system[self.n - 1][self.n - 1])
    while i > -1:
        k = self.n - 1
```

```python
        val = self.system[i][-1]
        while k > i:
            val -= self.x[self.n - 1 - k] * self.system[i][k]
            k -= 1
        self.x.append(val / self.system[i][i])
        i -= 1

# Подсчет коэф. невязки r1, r2, r3, ..., rn
def __print_vector_residuals(self):
    i = 0
    print('Невязки (величина ошибки):')
    while i < self.n:
        res = 0
        j = 0
        while j < self.n:
            res += self.system[i][j] * self.x[j]
            j += 1
        res -= self.system[i][-1]
        i += 1
        print('Невязка для', i, 'строки:', abs(res))
    print('')
```

Пример работы программы:

```
*Решение СЛАУ методом Гаусса*

Доступные функции:
1: Считывание системы из файла
2: Ввод системы с клавиатуры
3: Выход
Выберите действие (1-3): 2
Выбран способ ввода вручную
Укажите размерность матрицы (не более 20): 3
Введите коэффициенты уравнения в формате:
ai1 ai2 ... aij | bi
1: 2 2 10 | 14
2: 10 1 1 | 12
3: 2 10 1 | 13

Наша система:
2.0 x[0] 2.0 x[1] 10.0 x[2] | 14.0
10.0 x[0] 1.0 x[1] 1.0 x[2] | 12.0
2.0 x[0] 10.0 x[1] 1.0 x[2] | 13.0

Треугольная матрица:
2.0 x[0] 2.0 x[1] 10.0 x[2] | 14.0
0.0 x[0] -9.0 x[1] -49.0 x[2] | -58.0
0.0 x[0] 0.0 x[1] -52.55555555555555 x[2] | -52.55555555555555

Определитель = 945.9999999999999

Решение системы:
x[0]: 1.0
x[1]: 1.0
x[2]: 1.0

Невязки:
Невязка для 1 строки: 0.0
Невязка для 2 строки: 0.0
Невязка для 3 строки: 0.0
```

Вывод по работе:

Метод Гаусса подходит для простого решения систем линейных алгебраических уравнений, поскольку он универсален, легок в реализации и выполняется за ограниченное количество арифметических операций. Однако у этого метода также есть недостатки, такие как необходимость хранения всего массива в оперативной памяти компьютера. В процессе решения накапливается погрешность, так как на каждом этапе используются результаты предыдущих операций. Эту проблему можно решить с помощью округления, но у этого подхода также есть свои минусы (менее точное решение, зависимость от выбора округления, возможные потери в производительности).