ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«*Вычислительная математика*»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 4

«Аппроксимация функции методов наименьших квадратов»

Вариант 11

Выполнил:
Студент гр. P32151
Черных Роман Александрович

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

Цель работы: найти функцию, являющуюся наилучшим приближением заданной табличной функции по методу наименьших квадратов.

Задание:

1. Методика проведения исследования:

a. Вычислить меру отклонения: -$S = \sum_{i=1}^{n}[\varphi(x_i) - y_i]^2$ для всех исследуемых функций.

b. Уточнить значения коэффициентов эмпирических функций, минимизируя функцию S.

c. Сформировать массивы предполагаемых эмпирических зависимостей $(\phi(x_i)\varepsilon)$.

d. Определить среднеквадратическое отклонение для каждой аппроксимирующей функции. Выбрать наименьшее значение и, следовательно, наилучшее приближение.

e. Построить графики полученных эмпирических функций.

Программная реализация задачи:

a. Предусмотреть ввод исходных данных из файла/консоли (таблица y=f(x) должна
содержать 10–12 точек)

b. Реализовать метод наименьших квадратов, исследуя все функции п.1.

c. Предусмотреть вывод результатов в файл/консоль.

d. Для линейной зависимости вычислить коэффициент корреляции Пирсона.

e. Программа должна отображать наилучшую аппроксимирующую функцию.

f. Организовать вывод графиков функций, графики должны полностью отображать весь исследуемый интервал (с запасом).

Вычислительная реализация задачи:

a) Для заданной функции (см. таблицу 1) построить наилучшие линейное и квадратичное приближения по 11 точкам указанного интервала.

b) Найти среднеквадратические отклонения. Ответы дать с тремя знаками после запятой.

c) Построить графики линейного и квадратичного приближений и заданной функции.

d) Привести в отчете подробные вычисления.

Рабочие формулы используемых методов:

Параметры $a_0, a_1, a_2, \dots a_m$ эмпирической формулы находятся из условия минимума функции $S = S(a_0, a_1, a_2, \dots a_m)$. Так как здесь параметры выступают в роли независимых переменных функции S, то ее минимум найдем, приравнивая к нулю частные производные по этим переменным.

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1x_i + \dots + a_{m-1}x_i^{m-1} + a_mx_i^m - y_i = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1x_i + \dots + a_{m-1}x_i^{m-1} + a_mx_i^m - y_i)x_i = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=1}^{n} (a_0 + a_1x_i + \dots + a_{m-1}x_i^{m-1} + a_mx_i^m - y_i)x_i^m = 0$$

Преобразуем полученную линейную систему уравнений: раскроем скобки и перенесем свободные слагаемые в правую часть выражения:

$$\begin{cases} a_0n + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i + \dots + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{m-1} + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \dots + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \\ \dots\dots\dots \\ a_0\sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + \dots + a_{m-1}\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m-1} + a_m\sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} x_i^my_i \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^m \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} \\ & \dots\dots\dots & & \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^m & \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^my_i \end{vmatrix}$$

Вычислительная реализация задачи:

Функция: $y = \frac{5x}{x^4+11}$

Составим таблицу с точками и значениями функции в этих точках на промежутке $x \in [-2, 0]$ с шагом 0.2:

x_i	-2	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0
$f(x_i)$	-0.37	-0.419	-0.456	-0.47	-0.459	-0.42	-0.351	-0.269	-0.181	-0.09	0

	x	x^2	x^3	x^4	y	x*y	x^2*y
1	-2	4	-8	16	-0,37037	0,740741	-1,48148
2	-1,8	3,24	-5,832	10,4976	-0,41865	0,753572	-1,35643
3	-1,6	2,56	-4,096	6,5536	-0,45575	0,729195	-1,16671
4	-1,4	1,96	-2,744	3,8416	-0,47165	0,660306	-0,92443
5	-1,2	1,44	-1,728	2,0736	-0,45894	0,550728	-0,66087
6	-1	1	-1	1	-0,41667	0,416667	-0,41667
7	-0,8	0,64	-0,512	0,4096	-0,35058	0,280466	-0,22437
8	-0,6	0,36	-0,216	0,1296	-0,26955	0,161731	-0,09704
9	-0,4	0,16	-0,064	0,0256	-0,1814	0,072558	-0,02902
10	-0,2	0,04	-0,008	0,0016	-0,0909	0,018179	-0,00364
11	0	0	0	0	0	0	0
Σ	-11	15,4	-24,2	40,5328	-3,48445	4,384143	-6,36066

Линейная аппроксимация

$$y(x) = a + bx$$

$$\begin{cases} an + b\sum x_i & = \sum y_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 & = \sum x_i y_i \end{cases}$$

$$\Delta = n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 = 48.4$$

$$\Delta_{\mathrm{a}} = \sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i = -5.435$$

$$a = \frac{\Delta_{\mathrm{a}}}{\Delta} = -0.11229$$

$$\Delta_b = n \cdot \sum x_i y_i - \sum y_i \cdot \sum x_i = 9.896648$$

$$b = \frac{\Delta_{\mathrm{b}}}{\Delta} = 0.204476$$

$$y(x) = -0.11229 + 0{,}204476x$$

x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	$(\varphi(x_i) - y_i)^2$
-2	-0,37037037	-0,521242	0,022762249
-1,8	-0,418651384	-0,4803468	0,003806324
-1,6	-0,455746969	-0,4394516	0,000265539
-1,4	-0,471647262	-0,3985564	0,005342274
-1,2	-0,458940154	-0,3576612	0,010257427
-1	-0,416666667	-0,316766	0,009980143
-0,8	-0,350581966	-0,2758708	0,005581758
-0,6	-0,269551466	-0,2349756	0,001195491
-0,4	-0,181396024	-0,1940804	0,000160893
-0,2	-0,09089587	-0,1531852	0,003879961
0	0	-0,11229	0,012609044
		Σ	0,075841103

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(\varphi(x_i) - y_i\right)^2}{n}} = 0{,}083034$$

Квадратичная аппроксимация

$$y(x) = a + bx + cx^2$$

$$\begin{cases} an + b\sum x_i + c\sum x_i^2 & = \sum x_i \\ a\sum x_i + b\sum x_i^2 + c\sum x_i^3 & = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + c\sum x_i^4 & = \sum x_i y_i^2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} = 66{,}44352$$

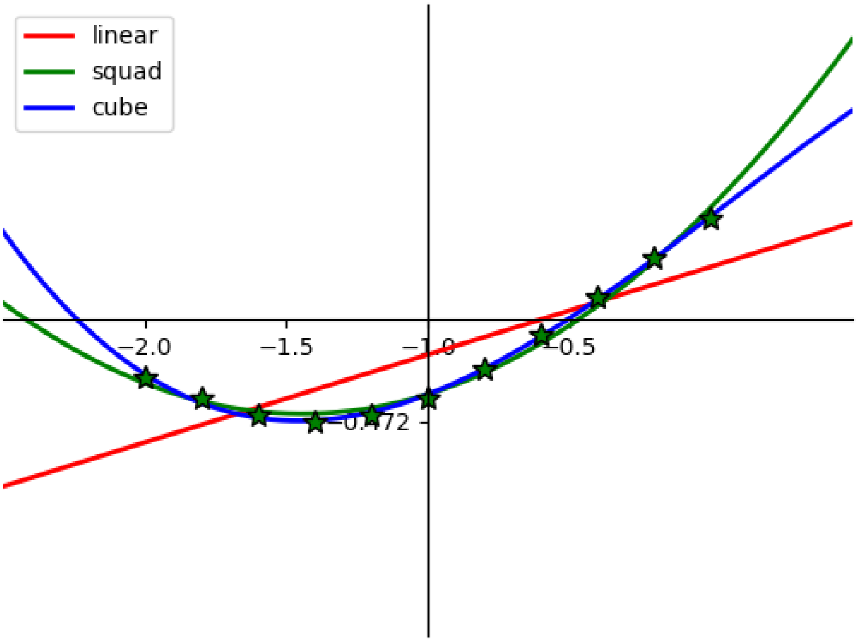
$$\Delta_\text{a} = \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} = 343{,}8348 \Rightarrow a = \frac{\Delta_\text{a}}{\Delta} = 5{,}174843$$

$$\Delta_\text{b} = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i y_i & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i y_i^2 & \sum x_i^4 \end{vmatrix} = -65{,}8702 \Rightarrow b = \frac{\Delta_\text{b}}{\Delta} = -0{,}99137$$

$$\Delta_\text{c} = \begin{vmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i y_i^2 \end{vmatrix} = 17{,}01728 \Rightarrow c = \frac{\Delta_\text{c}}{\Delta} = 0{,}256116$$

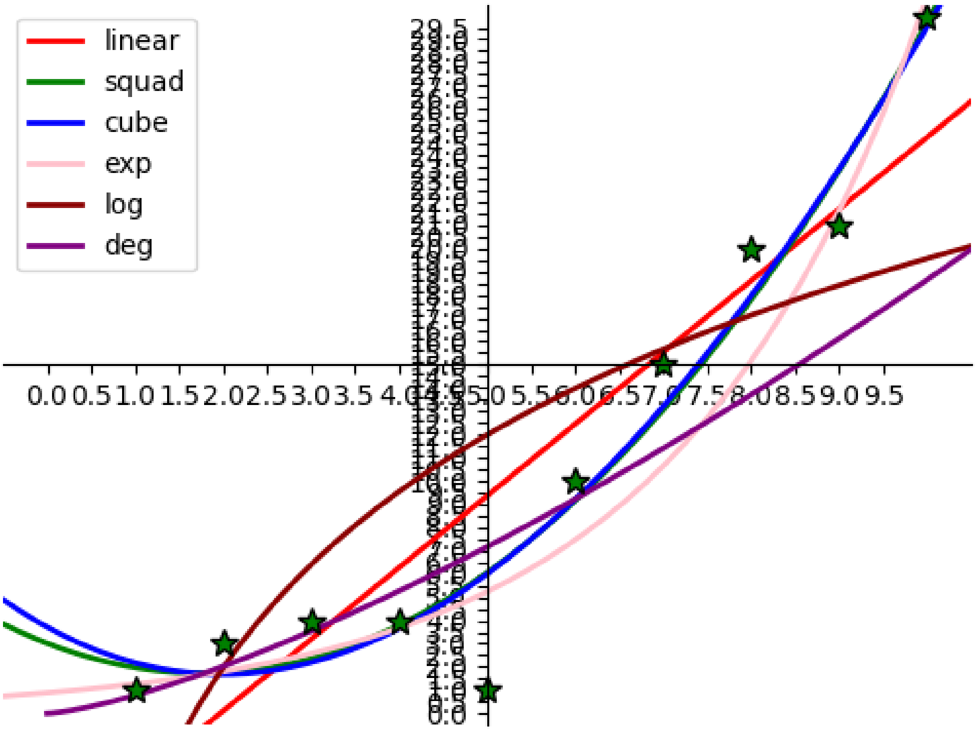
x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	$(\varphi(x_i) - y_i)^2$
-2	-0,37037	8,182051	73,14391
-1,8	-0,41865	7,789128	67,36765
-1,6	-0,45575	7,416695	61,97534
-1,4	-0,47165	7,064751	56,7973
-1,2	-0,45894	6,733296	51,72826
-1	-0,41667	6,422331	46,77188
-0,8	-0,35058	6,131855	42,02198
-0,6	-0,26955	5,861868	37,5943
-0,4	-0,1814	5,61237	33,56773
-0,2	-0,0909	5,383362	29,9675
0	0	5,174843	26,779
		$\sum$	527,7149

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\varphi(x_i) - y_i)^2}{n}} = 0{,}00689$$



Результат выполнения программы:

```
Ведите источник точек.
 Файл: 1
 Консоль: 2
 Готовая функция: 3.
 1
Полученные точки: [[4.0, 4.0], [5.0, 1.0], [6.0, 10.0], [7.0, 15.0], [8.0, 20.0], [9.0, 21.0], [10.0, 30.0], [1.0, 1.0], [2.0, 3.0], [3.0, 4.0]]

Коэффициент корреляции Пирсона равен: 0.923
Линейной аппроксимацией получена функция: 3.085x + -6.067, S = 135.806, sigma = 3.685

Квадратичной аппроксимацией получена функция: 0.413x^2 + -1.456x + 3.016, S = 45.798, sigma = 2.14

Кубической аппроксимацией получена функция: -0.008x^3 + 0.548x^2 + -2.077x + 3.715, S = 45.583, sigma = 2.135

Экспоненциальной аппроксимацией получена функция: 0.888e^0.355*x, S = 71.454, sigma = 2.673

Логарифмической аппроксимацией получена функция: 10.94 ln(x) + -5.624, S = 342.124, sigma = 5.849

Степенной апроксимацией получена функция: 0.777x^1.38, S = 246.602, sigma = 4.966

Минимальное среднеквадратичное отклонение: 2.135
Лучшая аппроксимация: кубическая

Process finished with exit code 0
```



Вывод:

В результате выполнения данной лабораторной работы мной был изучен и реализован на языке Python метод аппроксимации функции – метод наименьших квадратов. К достоинствам метода можно отнести: простые расчеты – необходимо лишь найти коэффициенты; простота функции; разнообразие возможных аппроксимирующих функций. Основным недостатком МНК является чувствительность оценок к резким выбросам, которые встречаются в исходных данных.