ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«Вычислительная математика»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 3
«Численное интегрирование»

Вариант 3

Выполнил:
Студент гр. P32151
Горинов Даниил Андреевич

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

Цель лабораторной работы:

Найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

Порядок выполнения лабораторной работы:

Программная реализация задачи:

1. Реализовать в программе методы по выбору пользователя:
    - Метод прямоугольников (3 модификации: левые, правые, средние)
    - Метод трапеций
    - Метод Симпсона
2. Методы должны быть оформлены в виде отдельной(ого) функции/класса.
3. Вычисление значений функции оформить в виде отдельной(ого) функции/класса.
4. Для оценки погрешности и завершения вычислительного процесса использовать правило Рунге.
5. Предусмотреть вывод результатов: значение интеграла, число разбиения интервала интегрирования для достижения требуемой точности.

Вычислительная реализация задачи:

1. Вычислить интеграл, приведенный в таблице 1, точно.
2. Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Котеса при n = 5.
3. Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона при n = 10.
4. Сравнить результаты с точным значением интеграла.
5. Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.
6. В отчете отразить последовательные вычисления.

Рабочие формулы методов:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)c_n^i$$

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = h * \left(\frac{y_0+y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}[(y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + y_n)]$$

Листинг программы:

```
def rectangle_method(f, a, b, e, min_n=4, max_itr=10):
    n = min_n
    result = float('inf')
    while n <= n * (2 ** max_itr):
        last_result = result
        result = 0
        h = (b - a) / n
        x = a

        for _ in range(n):
```

```
            result += f(x + h / 2)
            x += h
        result *= h

        if abs(result - last_result) <= e:
            break
        else:
            n *= 2
    return {'result': result, 'n': n}


def trapezoid_method(f, a, b, e, min_n=4, max_itr=10):
    n = min_n
    result = float('inf')
    while n <= n * (2 ** max_itr):
        last_result = result
        result = (f(a) + f(b)) / 2
        h = (b - a) / n
        x = a + h

        for _ in range(n - 1):
            result += f(x)
            x += h
        result *= h

        if abs(result - last_result) <= e:
            break
        else:
            n *= 2
    return {'result': result, 'n': n}


def simpson_method(f, a, b, e, min_n=4, max_itr=10):
    if min_n % 2 != 0:
        return None
    n = min_n
    result = float('inf')
    while n <= n * (2 ** max_itr):
        last_result = result
        result = f(a) + f(b)
        h = (b - a) / n
        x = a + h

        for i in range(n - 1):
            coeff = 4 if i % 2 == 0 else 2
            result += coeff * f(x)
            x += h
        result *= h / 3

        if abs(result - last_result) <= e:
            break
        else:
            n *= 2
```

```python
    return {'result': result, 'n': n}


def death_dot(f, a, b, e, x0):
    answer1 = rectangle_method(f, a, x0 - e, e)
    answer2 = rectangle_method(f, x0 + e, b, e)
    data = {
        'result': answer1['result'] + answer2['result'],
        'n': answer1['n'] + answer2['n']
    }
    return data
```

Результаты выполнения программы:

```
Лабораторная работа #3
Горинов Даниил Андреевич
Вариант 3

Выберите функцию.
 1 — x²
 2 — 1/x
 3 — -x³-x²+x+3
Функция: 1

Выберите метод решения.
 1 — Метод прямоугольников
 2 — Метод трапеций
 3 — Метод Симпсона
 4 — РАЗРЫВ X0 = 0
Метод решения: 1

Введите пределы интегрирования.
Пределы интегрирования: -5 5

Введите погрешность вычисления.
Погрешность вычисления: 0.001


Результаты вычисления.
Значение интеграла: 83.33301544189453
Количество разбиений: 512

Process finished with exit code 0
```

```
Лабораторная работа #3
Горинов Даниил Андреевич
Вариант 3

Выберите функцию.
 1 — x²
 2 — 1/x
 3 — -x³-x²+x+3
Функция: 3

Выберите метод решения.
 1 — Метод прямоугольников
 2 — Метод трапеций
 3 — Метод Симпсона
 4 — РАЗРЫВ X0 = 0
Метод решения: 3

Введите пределы интегрирования.
Пределы интегрирования: -5 5

Введите погрешность вычисления.
Погрешность вычисления: 0.001


Результаты вычисления.
Значение интеграла: -53.333333333333336
Количество разбиений: 8

Process finished with exit code 0
```

Вычисление заданного интеграла:

Точное вычисление:

$\int_0^2 (-x^3 - x^2 + x + 3)dx = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x|_0^2 = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3} = 1.333$

Вычисление по формуле Ньютона-Котеса при n=5:

i	c	x	f(x)	f(x)*c
0	0.132	0	3	0.396
1	0.521	0.4	3.176	1.654
2	0.347	0.8	2.648	0.919
3	0.347	1.2	1.032	0.358
4	0.521	1.6	-2.056	-1.071
5	0.132	2	-7	-0.924

Ответ: $\sum_{i=0}^{n} f(x_i) * c_n^i = 1.333$

Относительная погрешность: 0%.

Вычисление по формуле средних прямоугольников:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
f(x)	3.089	3.183	3.125	2.867	2.361	1.559	0.413	-1.125	-3.103	-5.569

Ответ: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) * h = 1.360$

Относительная погрешность: 2.7%.

Вычисление по формуле трапеций:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
f(x)	3.152	3.176	3.024	2.648	2.0	1.032	-0.304	-2.056	-4.272

Ответ: $h * (\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i) = 0.2 * (-2 + 8.4) = 1.28$

Относительная погрешность: 5.33%.

Вычисление по формуле Симпсона:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
f(x)	3	3.152	3.176	3.024	2.648	2.0	1.032	-0.304	-2.056	-4.272	-7

Ответ: $\frac{1}{3} * h * \left(f_1 + f_{10} + 4 * (f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + f_9) + 2 * (f_2 + f_4 + f_6 + f_8)\right) = \frac{1}{3} *$

$0.2 * (3 - 7 + 4 * 3.6 + 2 * 4.8) = 1.333$

Относительная погрешность: 0%.

Вывод:

Вычисление определенного интеграла с использованием численных методов - задача, которая может быть достаточно простой, если необходимо учитывать несобственные интегралы. В основном, это сводится к созданию массива значений функции для заданного значения n и затем суммированию этих значений с использованием заранее известной формулы. Однако, при работе с определенными интегралами требуется учитывать критические точки и проверять сходимость интеграла в этих точках как справа, так и слева.