

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Дисциплина:
«Вычислительная математика»

ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ № 5
«Интерполяция функции»

Вариант 11

Выполнил:
Студент гр. Р32151
Черных Роман Александрович

Проверил:
Машина Екатерина Алексеевна

Санкт-Петербург
2023г.

Цель работы:

Решить задачу интерполяции, найти значения функции при заданных значениях аргумента, отличных от узловых точек.

Для исследования использовать:

- Многочлен Лагранжа
- Многочлен Ньютона
- Многочлен Гаусса

Задание:

Обязательное задание (до 80 баллов)

1. Вычислительная реализация задачи:
 - 1.1. Выбрать из табл. 1 заданную по варианту таблицу $y = f(x)$ (таблица 1.1–1.5)
 - 1.2. Построить таблицу конечных разностей для заданной таблицы.
Таблицу отразить в отчете
 - 1.3. Вычислить значения функции для аргумента X_1 (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться
 - 1.4. Вычислить значения функции для аргумента X_2 (см. табл. 1), используя первую или вторую интерполяционную формулу Гаусса. Обратить внимание какой конкретно формулой необходимо воспользоваться
 - 1.5. Подробные вычисления привести в отчете.
2. Программная реализация задачи:
 - 2.1. Исходные данные задаются тремя способами:
 - а) В виде набора данных (таблицы x, y), пользователь вводит значения с клавиатуры
 - б) В виде сформированных в файле данных (подготовить не менее трех тестовых вариантов)
 - в) На основе выбранной функции, из тех, которые предлагает программа, например, $\sin(x)$. Пользователь выбирает уравнение, используемый интервал и количество точек на интервале (не менее двух функции)
 - 2.2. Сформировать и вывести таблицу конечных разностей
 - 2.3. Вычислить приближенное значение функции для заданного аргумента, введенного с клавиатуры, указанными методами (см. табл. 5.2).
Сравнить полученные значения
 - 2.4. Построить графики заданной функции с отмеченным узлами интерполяционного многочлена Ньютона/Гаусса (разными цветами)
 - 2.5. Программа должна быть протестирована на различных наборах данных, в том числе и некорректных
 - 2.6. Проанализировать результаты работы программы

Необязательное задание (до 20 баллов)

1. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Стирлинга.
2. Реализовать в программе вычисление значения функции для заданного значения аргумента, введенного с клавиатуры, используя схемы Бесселя.

Рабочие формулы исследуемых методов:

Формула для полинома Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}$$

Формула Ньютона для не равностоящих узлов:

$$N_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

, где $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \frac{f(x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) - f(x_j, x_{j+k-1})}{x_{j+k} - x_j}$ – разделенные разности.

Вторая интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад всех равностоящих узлов:

$$N_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Формула интерполяции полинома Гаусса для $x > a$:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(t+1)t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} \\ & + \frac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} \\ & + \frac{(t+2)(t+1)t(t-1)(t-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} \dots \\ & + \frac{(t+n-1) \dots (t-n+1)}{(2n-1)!} \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} \\ & + \frac{(t+n-1) \dots (t-n)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

Формула интерполяционного полинома Стирлинга:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_0 + t \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2!} + \frac{t^2}{2} \Delta^2 y_{-1} + \frac{t(t^2 - 1^2)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} \\ & + \frac{t^2(t^2 - 1^2)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{t(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \\ & \cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} \\ & + \frac{t^2(t^2 - 1^2)(t^2 - 2^2) \dots (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n} \end{aligned}$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Формула интерполяционного полинома Бесселя:

$$\begin{aligned}
P_n(x) = & \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!} \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^2 y_{-1}}{2} + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2)(t+3)}{6!} \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots \\
& + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n-1)}}{2} \\
& + \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right) t(t-1)(t+1)(t-2)(t+2) \dots (t-n)(t+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}
\end{aligned}$$

, где $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $\Delta^k y_j = \Delta^{k-1} y_{j+1} - \Delta^{k-1} y_j$

Вычислительная реализация задачи:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
0	1,1	0,2234	1,0204	0,0002	-0,0132	-0,0268	-0,0262	0,0187
1	1,25	1,2438	1,0206	0,0134	0,0136	-0,0006	-0,0449	
2	1,40	2,2644	1,034	-0,0002	0,0142	0,0443		
3	1,55	3,2984	1,0338	-0,0144	-0,0301			
4	1,70	4,3322	1,0194	0,0157				
5	1,85	5,3516	1,0351					
6	2,00	6,3867						

$$X_1 = 1,852$$

Используем первую формулу Ньютона:

$$t = \frac{X_1 - x_0}{h} = \frac{1,852 - 1,1}{0,15} \approx 5$$

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 0,2234 + 1,0204 \cdot 5 + \frac{-0,0002 \cdot 5(5-1)}{2!} + \frac{(-0,0132) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \\
 &\quad + \frac{-0,0268 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} + \frac{(-0,0262) \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} + 0 \\
 &= 5,2252
 \end{aligned}$$

$$X_2 = 1,652$$

Используем вторую формулу Гаусса:

$$t = \frac{X_2 - a}{h} = \frac{1,652 - 1,55}{0,15} = 0,68$$

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= 3,2984 + 1,034 \cdot 0,68 + \frac{0,68 \cdot (1+0,68)}{2!} \cdot (-0,0002) + \frac{0,68 \cdot (0,68-1) \cdot (0,68+1)}{3!} \cdot \\
 &\quad (0,0136) + \frac{0,68 \cdot (0,68-1) \cdot (0,68+1) \cdot (0,68+2)}{4!} \cdot (-0,006) + \\
 &\quad \frac{0,68 \cdot (0,68-1) \cdot (0,68+1) \cdot (0,68+2) \cdot (0,68-2)}{5!} \cdot (-0,00262) + \\
 &\quad \frac{0,68 \cdot (0,68-2) \cdot (0,68-1) \cdot (0,68+1) \cdot (0,68+2) \cdot (0,68+3)}{6!} \cdot 0,0187 = 4,0009
 \end{aligned}$$

Пример работы:

Ведите источник точек.

Для файла - 1

Для функции - 2:

1

Введите X:

0

Методом Лагранжа: 4.6000000000000014

Методом Ньютона: 4.6000000000000004

Методом Стирлинга: 4.599999999999997

Методом Бесселя: None

