# ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

# «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

# Дисциплина: «Вычислительная математика»

# ОТЧЕТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2 Вариант 9.

Выполнил:

Студент гр. P32151 Понамарев Степан Андреевич

Проверил:

Машина Екатерина Алексеевна

1. **Цель лабораторной работы**: изучить численные методы решения нелинейных уравнений и их систем, найти корни заданного нелинейного уравнения/системы нелинейных уравнений, вы-полнить программную реализацию методов.

# 2. Задание лабораторной работы:

#### Задание:

- 1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически (вид уравнения представлен в табл. 6)
  - 2. Определить интервалы изоляции корней.
  - 3. Уточнить корни нелинейного уравнения (см. табл. 6) с точностью  $\varepsilon=10^{-2}$ .
- 4. Используемые методы для уточнения каждого из 3-х корней многочлена представлены в таблице 7.
- 5. Вычисления оформить в виде таблиц (1-5), в зависимости от заданного метода. Для всех значений в таблице удержать 3 знака после запятой.
  - 5.1 Для метода половинного деления заполнить таблицу 1.
  - 5.2 Для метода хорд заполнить таблицу 2.
  - 5.3 Для метода Ньютона заполнить таблицу 3.
  - 5.4 Для метода секущих заполнить таблицу 4.
  - 5.5 Для метода простой итерации заполнить таблицу 5.
  - 6. Заполненные таблицы отобразить в отчете.

## 3. Рабочий метод по варианту и рабочие формулы (вариант 9):

- 1. Крайний левый корень: Метод простой итерации.
  - $\bullet \quad x_{i+1} = \varphi(x_i)$
  - $x = \varphi(x)$  получается приведением f(x) к эквивалентному виду
  - $x_0$  определяется начальным приближением
  - Критерий окончания итерационного процесса:  $|x_n x_{n-1}| < \varepsilon$
- 2. Центральный корень: Метод секущих.

• 
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} f(x_i)$$

- Выбор  $x_0$ :  $x_0 = a_0$  если  $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$ , иначе  $x_0 = b_0$
- $x_1$  выбирается рядом с  $x_0$
- 3. Крайний правый корень: Метод половинного деления.
  - $\bullet \quad x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
  - $\bullet \quad x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$
  - $a_{i+1} = x_i$  и  $b_{i+1} = b_i$ , если  $f(x_i) \cdot f(a_0) > 0$ , иначе  $a_{i+1} = a_i$  и  $b_{i+1} = x_i$

### 4. Вычислительная реализация задачи:

1. Отделить корни заданного нелинейного уравнения графически

# Вид уравнения: $y = -1.8 x^3 - 2.94 x^2 + 10.37 x + 5.38$

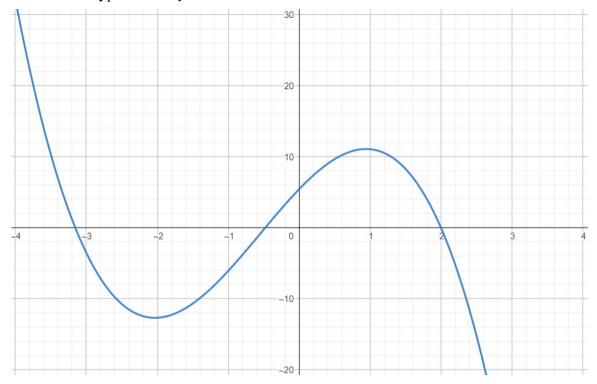


Рис. 1. График нелинейного уравнения

- 2. Интервалы изоляции корней:
  - I.  $x_1 \in [-3.4, -3]$
  - II.  $x_2 \in [-0.8, -0.2]$
  - III.  $x_3 \in [1.8, 2.2]$
- 3. Уточнение корней нелинейного уравнения с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}.$ 
  - I.  $x_1 \approx -3.157$
  - II.  $x_2 \approx -0.473$
  - III.  $x_3 \approx 1.998$
- 4. Таблицы вычислительной части лабораторной работы:
  - I. Метод простой итерации для крайнего левого корня  $(x_1)$ :
    - $f(x) = -1.8 x^3 2.94 x^2 + 10.37 x + 5.38$

• 
$$\varphi(x) = \sqrt[3]{\frac{-2.94x^2 + 10.37x + 5.38}{1.8}}$$

- $\varphi'(x) = \frac{1}{5.4}(-2.94x^2 + 10.37x + 5.38)^{-\frac{2}{3}}(5.88x + 10.37)$
- $|\varphi'(-3.4)| = 0.297 < 1$ ,  $|\varphi'(-3)| = 0.256 < 1$ , условие сходимости выполняется.
- $x_0 = -3$  начальное приближение.
- $\varphi(-3) = -2,076$

Таблица 1

$\mathbb{N}_{\mathbb{Q}}$ итерации   $x_k$   $x_{k+1}$   $\varphi(x_{k+1})$   $f(x_{k+1})$   $ x_{k+1} - x_k $	№ итерации	Y,	Y		$I(X_{\nu+1})$	$ \chi_{\nu+1} - \chi_{\nu} $
--	------------	----	---	--	----------------	-------------------------------

1	-3,000	-2,076	-1,703	-12,714	0,924
2	-2,076	-1,703	-1,528	-11,918	0,373
3	-1,703	-1,528	-1,438	-10,909	0,175
4	-1,528	-1,438	-1,388	-10,257	0,090
5	-1,438	-1,388	-1,360	-9,867	0,049
6	-1,388	-1,360	-1,344	-9,637	0,028
7	-1,360	-1,344	-1,335	-9,501	0,016
8	-1,344	-1,335	-1,329	-9,420	0,009

# II. Метод секущих для центрального корня $(x_2)$ :

- a = -0.8, b = -0.2
- $f(x) = -1.8 x^3 2.94 x^2 + 10.37 x + 5.38$
- f''(x) = -10.8x 5.88
- $f(a) \cdot f''(a) \approx -3,876 < 0$  не подходит, значит берём  $x_0 = b = -0.2$
- $x_1 = -0.25$  точка рядом с  $x_0$
- $f(-0.2) \approx 3.203, f(-0.25) \approx 2.632$

Таблица 2

№ итерации	$x_{k-1}$	$x_k$	$x_{k+1}$	$f(x_{k+1})$	$ x_{k+1} - x_k $
1	-0,200	-0,250	-0,480	-0,082	0,230
2	-0,250	-0,480	-0,474	0,001	0,007

# III. Метод половинного деления для крайнего правого корня $(x_3)$ :

$$a_0 = 1.8$$

$$b_0 = 2.2$$

Таблица 3

№ шага	а	b	x	f(a)	f(b)	f(x)	a-b
1	1,800	2,200	2,000	4,023	-5,202	-0,040	0,400
2	1,800	2,000	1,900	4,023	-0,040	2,123	0,200
3	1,900	2,000	1,950	2,123	-0,040	1,075	0,100
4	1,950	2,000	1,975	1,075	-0,040	0,526	0,050
5	1,975	2,000	1,988	0,526	-0,040	0,245	0,025
6	1,988	2,000	1,994	0,245	-0,040	0,103	0,013
7	1,994	2,000	1,997	0,103	-0,040	0,032	0,006

# 5. Листинг программы (коды используемых методов):

# main.py:

```
from AnyEquationSolver import EquationSolver
from EquationManager import Equation
from Exceptions import InvalidAlgebraicEquationException
from InputManager import InputManager
from PreparedEquationManager import PreparedEquation
from PreparedSystemManager import PreparedSystem
def variants function solver():
    result = None
   values = [PreparedEquation(lambda x: 3 * x ** 3 + 1.7 * x **
                              derivative func=lambda x: -15.42
              PreparedEquation(lambda x: x * np.sin(x) - 1,
np.sin(x) + x * np.cos(x)),
              PreparedEquation(lambda x: np.exp(np.sin(x)) *
np.log(abs(x)) - 1.4
                              derivative func=lambda x:
np.exp(np.sin(x)) * (
                                      abs(x) * np.log(abs(x)) *
np.cos(x) + np.sign(x)) / abs(x)),
              PreparedEquation(lambda x: np.arcsin(np.exp(-x)) -
                              derivative func=lambda x: -
np.exp(-x) / np.sqrt(1 - np.exp(-2 * x)))
             PreparedEquation(lambda x: np.tan(x / 2 *
np.sin(x))
np.cos(x * np.sin(x) / 2) ** 2))]
   chosen equation =
InputManager.multiple choice input(variants, values, "Выберите
        result = chosen equation.solve()
    if result is None:
```

```
round(chosen equation.calculate(result), 9))
chosen equation.iterations)
        if InputManager.yes or no input("Показать график
            chosen equation.draw graphic(dot x=result,
dot y=chosen equation.calculate(result))
        line = InputManager.algebraic expression input("Введите
        eq = Equation(line)
        EquationSolver.solve(eq)
    except InvalidAlgebraicEquationException:
def system solver():
    ps1 = PreparedSystem([lambda x, y: 0.1 * x ** 2 + x + 0.2 *]
y ** 2 - 0.3,
x * y - 0.7],
np.array([-0.2 * x, -0.4 * y]),
np.array([-0.4 * x - 0.1 * y, -0.1 * x])])
    ps2 = PreparedSystem([lambda x, y: np.sin(x),
np.array([np.cos(x), 0]),
np.array([y / 20, x / 20])])
name2], [ps1, ps2], "Выберите систему:")
    result = chosen system.solve()
    if result is None:
        print("Найденный корень системы:", result)
chosen system.calculate(*result))
```

# InputManager.py:

```
import numpy as np
from Exceptions import InvalidAlgebraicEquationException
class InputManager:
   def string_input(message=""):
           buf = input(message).strip()
       return buf
   @staticmethod
   def check number(buf):
           float(buf.replace(',', '.'))
   def _convert_to_number(num):
            return float(num.replace(',', '.'))
   @staticmethod
   def float input(message=""):
       number = None
```

```
while number is None:
            number =
InputManager. convert to number(InputManager.string input(messag
    @staticmethod
    def int input(message=""):
        return int(InputManager.float input(message))
    @staticmethod
    def yes or no input(message=""):
        answer = "0"
        while answer[0].lower() not in ["y", "n", "μ"]:
            answer = InputManager.string input(message + "
       return answer[0].lower() in ["y", "д"]
    @staticmethod
    def matrix input():
        lines number = InputManager.int input("Введите
        matrix = [[0] * (lines number + 1) for in
range(lines number)]
        for i in range(lines number):
            line = InputManager.string input().split()
all([InputManager. check number(t) for t in line]):
                print ("Некорректный ввод строки")
                line = InputManager.string input().split()
            for j in range(lines number + 1):
                matrix[i][j] =
InputManager. convert to number(line[j])
        print()
        return np.array(matrix)
```

```
@staticmethod
    def algebraic expression input(message=""):
        line = line.replace(",", ".")
            raise InvalidAlgebraicEquationException
        return line
    @staticmethod
    def vector dict input(var names, message=""):
        if message != "":
            print (message)
            result[name] = InputManager.float input(f"\tВведите
        return result
    @staticmethod
    def enum input(variants list, message):
            buf = InputManager.string input(message)
        return buf
    @staticmethod
   def multiple choice input(variant list, values list,
message=""):
        n = len(variant list)
        if n == 0 or len(variant list) != len(values list):
            raise ValueError
        if message != "":
            print(message)
        for i in range(n):
            lines = variant list[i].split('\n')
        i = int(InputManager.enum input([str(i) for i in
range(1, n + 1)], f"Введите число от 1 до {n}: ")) - 1
        return values list[i]
```

# PreparedEquationManager.py:

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from InputManager import InputManager
class PreparedEquation:
        self.func = func
        self.derivative func = derivative func
        self.iterations = 0
    def calculate(self, arg):
            return self.func(arg)
   def solve(self):
self.Simple Iteration Method
       chosen method =
InputManager.multiple_choice input(variants, values, "Выберите
        return chosen method()
   def enter root isolation(self):
        left = InputManager.float input("\tЛевый конец отрезка:
       right = InputManager.float input("\tПравый конец
       while not self.calculate(left) * self.calculate(right) <</pre>
           if InputManager.yes or no input(f"Показать график
            left = InputManager.float input("\tЛевый конец
            right = InputManager.float input("\tПравый конец
        if self.calculate(left) > 0:
```

```
self.left, self.right = left, right
        return left, right
    def draw graphic(self, left=None, right=None, dot x=None,
dot y=None):
        if left is None or right is None:
            if self.left is None or self.right is None:
                left = self.left
        grid = abs(left - right) / 30
        x axis = np.linspace(min(left, right) - grid, max(left,
right) + grid, 32)
        if (min(left, right) - grid <= 0 and 0 <= max(left,</pre>
right) + grid):
        if dot x is not None:
    def Chord Method(self):
        left, right = self. enter root isolation()
        epsilon = 10 ** (-8)
(self.calculate(right) - self.calculate(left))
        while abs(self.calculate(x)) > epsilon:
            x = left - self.calculate(left) * (right - left) /
(self.calculate(right) - self.calculate(left))
            if self.calculate(x) > 0:
                right = x
                left = x
            self.iterations += 1
    def Simple Iteration Method(self):
```

```
print(f"Используемая лямбда={halflife}")
       epsilon = 10 ** (-8)
        x = InputManager.float input("Введите начальное
       while not (min(left, right) < x and x < max(left,</pre>
            x = InputManager.float input("Введите начальное
            self.calculate(x)
       while abs(self.calculate(x)) > epsilon and
self.iterations <= 1000000:</pre>
            x = phi(x)
            self.iterations += 1
        if self.iterations == 1000000:
   def Newtons Method(self):
       x = InputManager.float input("Введите начальное
       while abs(self.calculate(x)) > epsilon:
            x = x - self.calculate(x) / self.derivative func(x)
            self.iterations += 1
```

#### **PreparedSystemManager.py**:

```
self.funcs = funcs
        self.iterations = 0
        self.y left, self.y right = None, None
    def calculate (self, x, y):
        return np.array([self.funcs[0](x, y), self.funcs[1](x,
у)])
    def calculate derivatives(self, *args):
        return np.array([f(*args) for f in
    def get error rate(self):
        return abs(np.array(self.before x vector) -
self.solutions)
    def get sufficient convergence condition(self, x, y):
    def check sufficient convergence condition(self, x, y):
        return self. get sufficient convergence condition(x, y)
   def solve(self):
        x left = InputManager.float input("\tЛевый конец отрезка
        x right = InputManager.float input("\tПравый конец
        y left = InputManager.float input("\tлевый конец отрезка
        y right = InputManager.float input("\tПравый конец
        while not (self.calculate(x left, y left)[0] *
            if InputManager.yes or no input(f"Показать график
```

```
y right)
            x left = InputManager.float input("\tЛевый_конец
            x right = InputManager.float input("\tПравый конец
            y left = InputManager.float input("\tЛевый конец
            y right = InputManager.float input("\tПравый конец
        self.x left, self.x right = min(x left, x right),
max(x left, x right)
        self.y left, self.y right = min(y left, y right),
max(y left, y right)
    def draw graphic (self, x left=None, x right=None,
y left=None, y right=None):
                x left = self.x left
                y left = self.y left
        x = np.arange(x left, x right, abs(x left - x right) /
        y = np.arange(y left, x right, abs(y left - y right) /
       x, y = np.meshgrid(x, y)
        fig = plt.figure()
        ax.set xlabel('X')
        ax.set ylabel('Y')
        ax.set zlabel('Z')
        ax.plot surface(x, y, Z[1], cmap="plasma")
    def Simple Iteration Method(self):
        if InputManager.yes or no input("Показать график системы
            self.draw graphic()
        x = InputManager.float input("Введите начальное
```

```
y = InputManager.float input("Введите начальное
        while not (self.x left < x < self.x right and</pre>
            x = InputManager.float input("Введите начальное
            y = InputManager.float input("Введите начальное
        if not self.check sufficient convergence condition(x,
y):
            if not InputManager.yes or no input("Продолжить
        lambda x = -1
lambda x
        lambda y = -1
        phi y = lambda x, y: y + self.calculate(x, y)[1] /
lambda y
        self.before x vector = [x + 100, y + 100]
                  abs(y - self.before x vector[1])) > epsilon
            self.before x vector[0], self.before x vector[1] =
x, y
        return self.solutions
```

## **EquationManager.py**:

```
import numpy as np
from math import sin, cos, asin, acos, tan, atan, log2, log10
from numpy import log as ln, log10 as lg
from numpy import log10 as log 10
from numpy import log2 as log 2
from numpy.lib.scimath import logn
from numpy.lib.scimath import logn as log n
from Exceptions import InvalidVectorException
from InputManager import InputManager
class Equation:
   equation = ""
   raw equation = ""
   var names = []
    valid vars template = re.compile(r"[a-zA-Z]+[0-9]*")
    valid functions template =
re.compile(r"a?sin|lg|a?cos|a?tan|log ?(?:2|10)?|logn|pi|e")
        self.equation = line
    def find vars(self):
self. valid vars template.findall(self.equation):
               vars.append(i)
        return vars
    def set valid vars template(self, template):
        self. valid vars template = template
        self.var names =
self. valid vars template.findall(self.raw equation)
    def get var list(self):
        return self.var names.copy()
    def get variable value with match (self, match,
x vector dict):
```

#### **AnyEquationSolver.py**:

```
from InputManager import InputManager
class EquationSolver:
    @staticmethod
    def solve(equation):
        result = EquationSolver.Half Division Method(equation)
        if result is None:
            print("Корень уравнения:", result)
    @staticmethod
    def Half Division Method(equation):
        if len(equation.get var list()) != 1:
equation.get var list())
        k = equation.get var list()[0]
       a = InputManager.float input(f"\tBведите левый край
        b = InputManager.float input(f"\tВведите правый край
        while not (equation.calculate({k: a}) *
equation.calculate({k: b}) < 0):
```

#### **Exceptions.py**:

```
class InvalidVectorException(ValueError):
    def __init__(self, message):
        # Call the base class constructor with the parameters it
needs
        super().__init__(message)

class InvalidAlgebraicEquationException(ValueError):
    def __init__(self, message):
        # Call the base class constructor with the parameters it
needs
        super().__init__(message)
```

6. Результаты выполнения программы при различных исходных данных.

```
Чем хотите себя побаловать?
    1. Выбрать функцию и метод из предложенных
   3. Выбрать систему уравнений из предложенных и решить её методом простых итераций
Введите число от 1 до 3:
Введите число от 1 до 5:
Выберите метод решения уравнения:
   2. Метод Ньютона
    3. Метод простых итераций
Введите число от 1 до 3:
Введите интервал изоляции корня:
   Левый конец отрезка:
   Правый конец отрезка:
Значения функции на концах отрезка должны быть разного знака!
Показать график функции для корректировки? [y/n]:
Введите другие значения концов:
   Левый конец отрезка:
   Правый конец отрезка:
Найденный корень уравнения: 1.67873
Значение функции в точке: 9е-09
Количество итераций: 21
Показать график функции? [y/n]:
Показать график функции? [y/n]:
```

Рис. 3. Пример работы программы

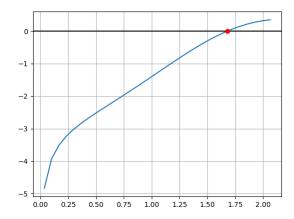


Рис. 2. График функции из примера на рис. 1

#### 7. Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я изучил и реализовал несколько методов вычисления корней. Также отработал навыки создания user-friendly консольных приложений.