COMBINATÓRIA.PROBABILIDADE

Resumão:

- [ ] Combinatória - problemas de contagem <=> Prob
- [ ] **PFC** - escolhas em cada etapa ✕
- [ ] **Elementos** (n) e **Posições** (p)
- [ ] Simples e com Repetição
- [ ] Fatorial (n!)
- [ ] Número Binomial <=> Cn,p . Triângulo de Pascal (soma => acha nºs binomiais)

$$n \geq p$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

dá result 1 qd: (p = 0) ou (n = p)

Triângulo Pascal aux cálc Combinações, achar Coeficientes binomiais

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1
7: 1 7 21 35 35 21 7 1
8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

- **Binômio de Newton**: técnica pra calc polinômios.

  - coeficientes 1 ; 1 na linha 1: $(a+b)^1$
  - coeficientes 1; 2; 1 na linha 2: $(a+b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2$
  - 1 ; 3; 3; 1 na linha 3: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$
  - 1; 4; 6; 4; 1 na linha 4: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- $(x+y)^n = \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 \ldots$

[Binômio Newton_mundo educacao uol]

- [ ] se **n > p** ? Arranjo simples (**An,p** A **Ordem importa**) e Combinação simples (**Cn,p** **Ordem não importa**)
- [ ] não usa todos os elementos

$$An, p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$Cn, p = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

- [ ] se **n = p** ? Permutação simples (**Pn** = n !) : embaralhar, **ordenar usa**ndo **todos** os **elementos**;
- [ ] Anagramas sem repetição
- [ ] Permutação **COM Repetição** (**PR** elementos! / repetições!)

$$P_{elementos}^{repeticões} = \frac{elementos!}{repeticões!}$$

- [ ] **Permutação Circular (**PCn**)**: elementos em ordem cíclica

$$PC_n = (n-1)!$$

- [ ] **Arranjo com Repetição** (**AR**, **pode ter** **n < p**)

$$AR_{n,p} = n^p$$

- [ ] **Combinação com Repetição** (CR)

$$CR_{n,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}$$

- [ ] Universo
- [ ] Espaço Amostral (**S**): conj Elemento / Membros => Todos results Possíveis.
- [ ] Espaços Equiprováveis e Não equiprováveis
- [ ] Evento aleatório: **subconj S**
- [ ] **P(E)** = casos favoráveis à E / casos possíveis = qtd elementos E / qtd elementos S
- [ ] Prob entre 0 a 1.
- [ ] Teorema da Soma (**A ou B = A U B**)

- [ ] com Intersecção P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)
- [ ] sem Intersecção (intersecção = 0) => **Mutuamente Excludentes** **P(A U B) = P(A) + P(B)**
- [ ] Evento **Complementar** 1 - Prob
- [ ] Prob **Condicional**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leftrightarrow Teorema\ do\ Produto\ P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

- [ ] Eventos **Independentes**

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

- [ ] **Teorema da Prob Total**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \leftrightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$

- [ ] **Teorema de Bayes**

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)}$$

Vars Aleatórias Quantitativas (V.A)

- [ ] **V.A Discreta**: enumerável
- [ ] **F.D.P para V.A Discretas** (Função Distribuição Probabilidade): contar nº casos favoráveis e casos possíveis.

> **FDP** nos dá a **probabilidade acumulada**. Chance de X assumir valores $FDP(número) = P(X \leq número)$.

- E(x), Var, Dp, CV** de Vars Discretas

☆ Na Dist. Binomial, **E(X) = n.p. Var = (n.p.q)**

- [ ] **V.A Contínua**: não enumerável (infinitos pontos na reta real)
- [ ] f.d.p Função Densidade Prob
- [ ] **F.D.P para V.A Continua** (Função Distribuição Probabilidade): não consegue CONTAR nº casos favoráveis, nem o nº casos possíveis. Pra determinar as probabilidades usamos a **FUNÇÃO DENSIDADE** (área do gráfico = probabilidade)
- [ ] **E(x), Var, Dp, CV** de Vars Contínuas

Distribuições V.A Discretas

- [ ] Distribuição Uniforme Discreta
- [ ] Distribuição/ **Experimento de Bernoulli q = 1 - p**
- [ ] sucesso 1, p
- [ ] fracasso 0, q

$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}$

- [ ] **Distribuição Binomial**: experimento Bernoulli repetida n vezes. Calc prob k sucessos em n tentativas. O nº lançamentos é FIXO, a var X india o nº de sucessos.

$P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

k = qtd sucessos

[Geogebra - Dist Binomial - Dhiego Loiola]

- [ ] **Esperança** na Dist Binomial $\mu = E(X) = np$
  - [ ] n = qtas vezes repete experimento; p=prob sucesso; q=prob fracasso
- [ ] **Variância** $\sigma^2 = npq$
- [ ] **Dist. Geométrica**: repetir até o 1º sucesso
- [ ] Enquanto na Binomial o nº lançamentos é cte e a variável X indica o nº de sucessos, na GEOMÉTRICA, o **nº de sucessos** é **FIXO** valendo **= 1** (pq está interessado em apenas 1 sucesso) e **variável X** indica o **nº de lançamentos**.

$$X = k = (q^{k-1}).(p)$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1}{p^2}$$

- [ ] **Dist. Hipergeométrica**: Prob varia de acordo com tamanho da amostra
- [ ] **Dist Poisson**

https://www.geogebra.org/m/PUS7ZYW8

Distribuições V.A Contínua

- [ ] **f.d.p** (Função Densidade Prob) <–> proprieds Histograma (ÁREA = 1, **ÁREA <–> Prob**)
- [ ] Histograma: densidade freq = Fr / h
- [ ] f.d.p = amplitude (h), ou seja, tamanho do intervalo tende a zero.

> áreas: Trapézio = (B+b)/2 * h

> Triângulo = b.h / 2
>
> Retângulo = b.h

- f.d.p com **Integral**: qd função não é uma reta, Integral facilita cálc área.

> $$integral\ X^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

> $$e^x = e^x$$

> $$e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a}$$

- [ ] Distribuição Uniforme Contínua
- [ ] **Distribuição Normal / Gaussiana**
- [ ] [ ]

- [ ] *Como pode viciar um dado? baralho? bolas na roleta de um bingo?*
- [ ] *jogo de baralho: 52 cartas,*

Análise Combinatória

- pte da Matemática pra resolver problemas de contagem (possibilidades).

PFC (Princp Fund Contagem / Princp Multiplicativo ✕):

- Etapas sucessivas e independentes. Em cada etapa faz n escolhas => Multiplica escolhas.

> 👚Possibilidades de looks de 2 calças, 3 blusas, 4 chapéus => 3 etapas, => 2 x 3 x 4 = 24 possibilidades de looks.
>
> Qtos nºs naturais com 3 algarismos podemos formar? => 10 Algarismos 0 a 9 => Restrição no 1º algarismo não pode ser nº 0 => 9 x 10 x 10 = 900 possibilidades.

> Qtos nºs Naturais pares com 3 algarismos podemos formar?
>
> $$Número \neq Algarismo$$
>
> Restrição: ser nº par, pra ser par tem q terminar (0,2,4,6,8) 1º algarismo, Restrição é não começar com 0 => tem 9 opções ; 2º algarismo, sem restrição => 10 opções ; 3º algarismo, ser par => 5 opções (0,2,4,6,8) ;
>
> 9 x 10 x 5 = 450 possibilidades de nºs naturais

Fatorial (n❗)

- nº inteiro positivo;
- multiplica pelos antecessores
- 0! =1! = 1

> 2 . 5! = 2 .(5 x 4 x 3 x 2 x 1) = 2 x 120 = 140
>
> (2.5)! = 10! = 3.628.800
>
> 2! . 3! = 2 x1 x 3 x 2 x 1 = 12
>
> (2.3)! = 6! = 720

Número Binomial

$$n \geq p$$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- se p = 0 => result 1
- se n = p => result 1

Triângulo de Pascal: acha nºs binomiais **somando**

- **n Elementos, p Posições** elementos n >= p posições

Permutação Simples (sem repetir, n = p) Pn = n!

- técnica de contagem pra determinar qtas maneiras tem de ORDENAR, embaralhar elementos de um conjunto FINITO.
- Permutação simples (Pn = n !) é um caso particular do Arranjo Simples (Ordem importa);
- ANAGRAMAS SEM Repetição

> 5 pessoas e 5 cadeiras. Qtas formas podemos acomodar estas pessoas nas cadeiras? 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5! = 120 formas
>
> Anagramas da palavra MEL: n = 3, p = 3. P_3 = 3! = 6 anagramas.
>
> Anagramas da palavra REVISTA, devendo manter letras EVI juntas e nesta ordem? : considera EVI como um bloco => 5! = 120
>
> Anagramas da palavra REVISTA, devendo iniciar com a letra T: 1ª posição reservado pra T e outras letras ordenadas nas posições seguintes => 1 . 6! = 720

Permutação com Repetição (elementos! / repetições!)

$$Permutac\tilde{a}o\ com\ Repetic\tilde{a}o \neq Arranjo\ com\ Repetic\tilde{a}o$$

tem elemento repetido;

- ANAGRAMAS COM Repetição

*no **Arranjo com Repetição** pode repetir elemento; pode ter *$n < p$ posições maior elementos <=> PFC *

> Anagramas ATA => ATA, TAA, AAT 3 letras, A repete 2 vezes
>
> $$P_3^2 = \frac{3!}{2!} = 3$$
>
> Anagramas ARARA => 5 letras, 3 repetições A, 2 repetições R
>
> $$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$$

Permutação Circular

- n elementos em ordem cíclica

$$PC_n = (n-1)!$$

> Qtas formas 4 crianças podem sentar em um brinquedo gira gira carrossel de 4 cadeiras? as posições não mudam, quem está sentado em uma cadeira (independente de qtas vezes girar) sempre ficará com as mesmas pessoas ao lado e a frente. Então, as 4 posições, formam a mesma combinação. 4! / 4 = 3! <=> PC (4-1)! = 6

Arranjo e Combinação Simples (sem repetir, n > p)

- **Arranjo Simples**: Ordem importa;
  - Não utiliza todos os elementos;
  - Sem repetir elementos;

$$An, p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

> Qtas possibilidades de senhas existem em um cofre, sabendo q nesse cofre as senhas tem 4 dígitos e q os dígitos de cada senha devem ser distintos?
>
> n = 10 {0,1,2…9}; p = 4 => n > p
>
> 10 x 9 x 8 x 7 = 5040
>
> ou com a fórmula A10, 4 = 10! / (10-4)! = 5040

> Qtas possibilidades de senhas existem em um cofre que funciona apenas os botões (4, 5, 7 e 8) sabendo q nesse cofre as senhas tem 4 dígitos e q os dígitos de cada senha devem ser distintos?
>
> n = 4 = p => Permutação Simples;
>
> 4! = 24 possibilidades de senhas; Se usasse a fórmula Arranjo: 4! / 0! = 4! = 24

- **Combinação simples**: ordem Não importa; sem repetir elementos

$$Cn, p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

> Na aposta Mega-sena, vc escolhe 6 números dos 60 disponíveis. Qts jogos distintos é possível fazer? (60 x 59 x 58 x 57 x 56 x 55) / 6! pq como não importa a ordem, 6 posições são o msm conj de números = 36.045.979.200 / 720 = 50.063.860
>
> pela fórmula: C60, 6 = 60! / 6! (54!) = 50.063.860

- relação (<-> Triângulo Pascal é simétrico: 1º elemento do triâng igual ao Último; 2º elemento ao Penúltimo…):

$$C_{n,\ p} = C_{n,\ n-p}$$

Arranjo com Repetição (AR)

- importa a ordem e pode repetir
- pode ter p > n (qtd posições > qtd elementos)

$$AR_{n,p} = n^p$$

> Qts possibilids de senhas existem em um cofre sabendo q nesse cofre as senhas tem 15 dígitos? n = 10; p = 15 ; n < p
>
> $$A_{n,p} = 10^{15}$$

Combinação com Repetição (CR)

- Ordem Não importa

$$CR_{n,p} = \frac{(n+p-1)!}{p!.(n-1)!}$$

- pode calcular como Combinação simples n = Cn + p - 1

$$CR_{n,p} = C_n + p - 1, p$$

- ou pode tb como Permutação

$$CR_{n,p} = P_{n+p-1}^{p,n-1}$$

> Shirley faz 3 tipos de doces (brigadeiro, beijinho e cajuzinho) e vende uma caixa com 8 doces dentre estes 3 tipos. Qts combinações distintas é possível fazer, em relação a esta caixa de doces? n = 3, p = 8. n < p .
>
> $$\perp 2\ Divisorias\ dos\ Docinhos$$
>
> $$\triangle\ 8 Docinhos$$
>
> $$doce1\triangle\ , \triangle,\ \triangle,\ \perp \triangle,\ \triangle, \perp\ \triangle,\ \triangle,\ \triangle doce8$$
>
> no total: 10 elementos (8 docinhos e 2 divisórias) => Permutação desses 10 elementos Como tem repetição:
>
> $$P_{10}^{8,2} = \frac{elementos!}{repeticões!} = \frac{10!}{8!.2!} = 45 combinações$$
>
> pela fórmula:
>
> $$CR_3^8 = \frac{10!}{8!.2!} = 45$$

(enem 2017) - precisava saber fórmula

> Brinquedo caminhão-cegonha formado por uma carreta com 10 carrinhos. No setor de pintura são usadas cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado de uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determina q em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos 1 carrinho de cada uma das 4 cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo. Quantos modelos distintos do brinquedo a empresa poderá produzir?
>
> Ordem não importa e pode repetir => Combinação com Repetição.
>
> n = 4, p = 6 (ñ é 10 pq já está determinado q tenha pelo menos usado uma das 4 cores. Se os 4 primeiros carrinhos já possuem uma cor, os outros 6 carrinhos pode pintar à vontade, repetindo qualquer uma das cores)
>
> relação com Combinação Simples Cn+p-1,p = C4+6-1, 6 = C9,6. Se:
>
> $$C_{n,\ p} = C_{n,\ n-p}$$
>
> $$C_{9,\ 6} = C_{9,\ 9-6} = C_{9,\ 3}$$
>
> com a fórmula
>
> $$CR_{4,6} = \frac{(4+6-1)!}{6!(4-1)!} = \frac{9!}{3!6!} = C_{9,3}$$

Estatística

- [ ] **Probab**ilidade (conhece população/ espaço amostral -> qual probabilide de ocorrer evento?);
- [ ] Estatística **Descritiva**;
- [ ] Estatística **Inferencial** (conhece evento / amostra -> como população se comporta?).

Probabilidade

- Fenômenos: **Determinístico** (results sempre os mesms) e **Probabilístico/ Aleatórios**.
- Probabilidade estuda **Aleatoriedade** e **Incerteza**
- Espaço **Amostral** (**S**): conjunto de todos possíveis resultados/ eventos.
  - Espaço **Equiprovável**: todos pontos (elementos) amostrais tem a mesma chance de ocorrer (ex dado honesto).
  - Evento Aleatório (**E**): subconjunto do (S).

> Embora os experimentos aleatórios tenham resultados incertos e não determinísticos, podemos calcular todas as possibilidades de resultados dos experimentos aleatórios através das distribuições de probabilidades. O valor de cada probabilidade na distribuição de probabilidades está no intervalo de 0 a 1, já que a soma de todas as probabilidades é 1 (ou seja 100%).

$$P(E) = \frac{casos favoraveis}{casospossíveis} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

- P(E) entre 0 e 1
- n(E) qtd elementos do Evento e n(S) qtd elementos do Espaço Amostral.
- experimentos aleatórios => **V.A's** (letras maiúsc)
- var quantitativa (valor). ex: quantificar cada ponto do espaço amostral de uma moeda atribuindo 0 pra Cara e 1 pra coroa; nº coroas lançando 2 moedas; nº itens defeituosos em uma amostra; intervalo de peso de uma amostra da população de um bairro; nº pessoas visitam site num certo período de tempo;
- V.A DISCRETA: conj results possíveis é FINITO, ENUMERÁVEL
  - 👀 Finito $\neq$ Limitado (em um intervalo entre 2 valores tem Infinitos pontos)
- V.A CONTÍNUA: valores não enumerável e por isso são expressos como intervalo ou união de nºs reais (ex: peso, altura, massa, nível de açúcar no sangue)

> > Os experimentos probabilísticos (ou também chamados de aleatórios) podem ser constituídos por variáveis aleatórias discretas ou variáveis aleatórias contínuas. As variáveis aleatórias discretas são valores que podem ser quantificados e listados, enquanto que as

> variáveis aleatórias contínuas são valores que podem ser subdivididos, ou seja, estão em determinado intervalo.
>
> - *Ciência é determinística ou probabilística? Se soubermos todas vars e condições, conseguimos determinar o resultado? teoria que prevalece hoje -> Mecânica Quântica -> sabendo todas vars ainda tem certa aleatoriedade*

<–> Função q associa cada valor da V.A com a sua prob

- f.d.p (função densidade prob)

Teorema da Soma (A OU B, com intersecção = A U B)

P(A U B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

> **Lançamento de dado**
>
> S = {1, 2, 3, 4, 5 ,6}
>
> A: result > 2, então P(A) = {3, 4, 5, 6} =
>
> $$P(A) = \frac{4}{6}$$
>
> B: result par , então P(B)= {2,4,6} =
>
> $$P(B) = \frac{3}{6}$$
>
> A ∩ B = {4, 6}
>
> $$\frac{2}{6}$$
>
> P(A U B) = {2, 3, 4, 5, 6}
>
> $$\frac{5}{6}$$
>
> Teorema da Soma: P(A U B)= P(A) + P(B) - P(A ∩ B)
>
> $$\frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

Eventos Mutuamente Excludentes (A OU B, sem intersecção)

P(A U B) = P(A) + P(B)

- P(A ∩ B) = 0

- União: somar prob de cada um.

Espaços não equiprováveis

- Como viciar dados, baralhos, bolinhas? : pintar com tinta metálica pro lado ficar mais pesado e ter +chance de sair uma face. . Pesos nas bolinhas tendem a ter +chance de saírem.

> Ex: Numa empresa 10% lâmpadas produzidas possuem algum defeito. Qual prob de ao selecionar 3 lâmpadas, no máximo, 1 possuir algum defeito?
>
> com defeito: 0,10 e sem defeito: 0,90
>
> C S S ou S C S ou S S C => 0,10 . 0,90 . 0,90 = 0,081 x 3 = 0,243
>
> ou S S S => 0,90 . 0,90 . 0,90 = 0,729
>
> P(máximo um Com defeito) = 0,972

> Ex: Prob de sair cara de uma moeda viciada é 0,6. Qual prob sair exatamente 3 coroas lançando 4 vezes?
>
> Ca = 0,6 e Co = 0,4.
>
> P(3 Co) = (0,4 . 0,4. 0,4 . 0,6) x 4 = 0,1536
>
> ou como a Ordem Não importa => **Combinação**. n = 4 total de moedas, p = 3 Coroas
>
> $$C_{4,3} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$
>
> ou ainda, n = 4, p = 1 Cara
>
> $$C_{4,1} = \frac{4!}{1!.3!} = 4$$

> Ex: Prob sair cara na moeda viciada é 0,6. Qual a prob sair pelo menos uma coroa, lançando esta moeda 4 vezes?
>
> mais fácil calc complementar 1 - prob(4 caras)
>
> $$P(Caras) = 0,6.0,6.0,6.0,6 = 0,6^4 = 0,1296$$
>
> ou
>
> $$C4,4 = 1$$
>
> 1 - P(Caras) = 1 - 0,1296 = 0,8704

Prob. Evento Complementar

evento A ⊂ S

$$P(A^{\complement}) = 1 - P(A)$$

Probabilidade Condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} <=> Teorema\ do\ Produto\ P(A \cap B) = P(A|B).P(B)$$

- Prob de ocorrer A, dado q ocorreu B
- como um evento (B) já aconteceu, o espaço amostral ‘original’ (S) fica reduzido. Agr o espaço amostral será B.

Eventos Independentes

Prob de ocorrer um evento não depende do outro ter ocorrido. P(A | B) = P(A)

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

> Ex1: na urna tem 4 bolas vermelhas, 4 verdes, 3 amarelas e 2 azuis, qual a prob de selecionar 2 bolas em um sorteio **com reposição**?
>
> total 13 bolas.
>
> Eventos A: 1ª bola sair vermelha e B: 2ª bola vermelha. => sair A **e** B => P(A ∩ B)
>
> 4 chances de sair vermelha em 13 tanto na A qto na B.
>
> $$\frac{4}{13}.\frac{4}{13} = \frac{16}{169} = 0,0947$$

> Ex2: na urna tem 4 bolas vermelhas, 4 verdes, 3 amarelas e 2 azuis, qual a prob de selecionar 2 bolas em um sorteio **sem reposição**?
>
> A: sair 1ª vermelha. B: 2ª vermelha. => sair A **e** B => P(A ∩ B)
>
> porém como é COM REPOSIÇÃO, A interfere no B => na Prob. Condicional P(A ∩ B) é:
>
> $$P(A \cap B) = P(B|A).P(A)$$
>
> $$P(A) = \frac{4}{13}$$
>
> $$P(B|A) = \frac{3}{12}$$

> $$P(A \cap B) = \frac{1}{13} = 0,077$$

Teorema da Prob Total

> 3 fábricas de lâmpadas X, Y e Z fornecem para o mercado. As lâmpadas da X trabalham por mais de 5.000 horas em 99% dos casos, enqto na Y trabalham por mais de 5000 h em 95% e da Z em 90% dos casos. Sabe-se q a X fornece 60% e Y fornece 30% das lâmpadas. Qual a chance de q a lâmpada comprada irá funcionar por mais de 5000 horas?
>
> selecionar 1 lâmpada no mercado de cada fábrica:
>
> P(X) = 0,6. P(+5k | X) = 0,99.
>
> P(Y) = 0,3. P(+5k | Y) = 0,95
>
> P(Z) = 0,1. P(+5k | Z) = 0,90.
>
> pelo Teorema Prob. Total
>
> $$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) \leftrightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$
>
> P(+5k) = 0,99.(0,6) + 0,95.(0,3) + 0,90.(0,1) = 0,969 = 96,9%

Teorema de Bayes

- como chegar na fórmula T.Bayes?

Prob Condicional <–> T. Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<=> Teorema do Produto

$$P(A \cap B) => P(A|B).P(B) = P(B|A).P(A)$$

substituindo acha o T.Bayes ‘simplificado’:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{P(B)}$$

Mas se não tiver o P(B), substituir pelo T. Prob. Total. Assim, o T. Bayes ‘genérico’:

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{P(B)} = \frac{P(B|A_k).P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)}$$

Função de Probabilidade

- associa cada valor da V.A com sua probabilidade
- ≥ 0

> - dado honesto, V.A valores obtidos no dado, f prob é:
>
> S: 1,2,3,4,5,6
>
> | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
> | P(X = xo) | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
>
> - f prob pra par e ímpar => transformar em número => 0 par e 1 ímpar
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | X | 0 | 1 |
> | P(X = xo) | 1/2 | 1/2 |
>
> - 4 moedas honestas, em q V.A é qtd de caras. f prob:
>
> qual espaço amostral? 2^4 (2.2.2.2) = 16 => cada caso é 1/16 ordem importa? não -> Combinação ou linha 4 do Triângulo Pascal pra calc qtas formas

> | **X (qtd caras)** | |
> |---|---|
> | 0 | 1/16 x 1 = 1/16 |
> | 1 | 1/16 x 4 = 4/16 |
> | 2 | 1/16 x 6 = 6/16 |
> | 3 | 1/16 x 4 = 4/16 |
> | 4 | 1/16 x 1 = 1/16 |
>
> $$C_{4,1} = \frac{4!}{1!.3!} = 4$$
>
> $$C_{4,2} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$
>
> $$C_{4,3} = \frac{4!}{3!.1!} = 4$$

> Triângulo Pascal:
>
> 0: 1
> 1: 1 1
> 2: 1 2 1
> 3: 1 3 3 1
> 4: 1 4 6 4 1
> 5: 1 5 10 10 5 1
> 6: 1 6 15 20 15 6 1
> 7: 1 7 21 35 35 21 7 1
> 8: 1 8 28 56 70 56 28 8 1
> 9: 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
> 10: 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
> 11: 1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
> 12: 1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
> 13: 1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
> 14: 1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
>
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

E(x), Var e Dp, C.V de v.a Discretas e Contínuas

E(X): Média ou Esperança Matemática ou Valor Esperado

Obs: E(x) pode ter valor Negativo (o valor da Prob q é positivo, 0 <= P <= 1)

- v.a Discreta: média ponderada de todos os possíveis valores de X com pesos iguais às respectivas probabilidades

$$E(x) = \sum xi.P(xi) => x1.P(x1) + x2.P(x2)...$$

☆ outro cálc na Dist. Binomial, E(X) = np e Var = npq

- v.a Contínuas:

Variância:

- v.a Discreta:
- v.a Contínuas:

$$Var(X) = E(x^2) - (E(x))^2$$

Desvio-Padrão:

- v.a Discreta:

- v.a Contínuas:

Coeficiente de Variação (C.V):: relação entre dp e média

Funções de Variáveis Aleatórias

V.A DISCRETAS

1. Vars Aleat **DISCRETAS**:

listadas, contadas

> As distribuições das variáveis aleatórias discretas estão diretamente relacionadas com o ensaio de **Bernoulli**, o qual determina que um experimento pode resultar em sucesso (o resultado interessado pelo estudo) ou fracasso (complementar do sucesso). Ao repetir várias vezes o experimento de Bernoulli, calculamos a distribuição binomial. Um exemplo do ensaio de Bernoulli é o lançamento de uma moeda honesta em que as chances de se obter cara ou coroa são as mesmas. No momento em que aumentamos a quantidade de moedas nesse experimento, a probabilidade será representada pela distribuição binomial. Portanto, o experimento de Bernoulli possui apenas dois resultados, como podemos observar nas seguintes situações: um paciente estar com certa doença ou não, ter uma peça defeituosa ou não defeituosa, alguma pergunta que possui resposta de Sim ou Não. Já a distribuição binomial considera que a probabilidade é a mesma para todos os ensaios pois ela é utilizada em grandes populações, ou seja, quando o resultado de um ensaio tem quase nenhum efeito na probabilidade de outro evento.
>
> A distribuição **geométrica** é quando o ensaio de Bernoulli é repetido até que ocorra o primeiro sucesso. Outra característica dessa distribuição é que a probabilidade de um evento não depende dos experimentos passados. Segundo Alvarez Junior (2020) uma possível aplicação está na prática clínica: dentre os medicamentos antidepressivos disponíveis no mercado, um médico pode calcular qual o número esperado de medicamentos que serão testados até encontrar um que seja eficaz para seu paciente.
>
> Na distribuição **hipergeométrica**, como a população é bem pequena, cada ensaio tem um grande efeito sobre a probabilidade de outros eventos e por isso a probabilidade varia de acordo com o tamanho da amostra. Uma aplicação da hipergeométrica é no controle de qualidade de processos, onde ao se constatar que não há peças defeituosas em determinada amostra, a possibilidade de ter peças defeituosas na próxima amostra é maior.

Dist. Bernoulli (q = 1-p)

- sucesso 1, p

- fracasso 0, q

Dist Binomial

prob k sucessos em n tentativas de experimento Bernoulli.

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

k = qtd sucessos

- **Esperança** na Dist Binomial $\mu = E(X) = np$
  - n = qtas vezes repete experimento; p = prob sucesso; q = prob fracasso
- **Variância** $\sigma^2 = npq$

O setor de controle de qualidade de uma indústria realiza periodicamente testes nos produtos que fabrica. Em determinada vistoria de rotina, o chefe do setor retira de forma aleatória um lote de dez peças, já produzidas, sabendo-se previamente que 20% destas peças estão defeituosas. Com base nos dados apresentados, qual a probabilidade do chefe do setor de qualidade, ao retirar a amostra deste lote, não retire mais de duas peças defeituosas? (Resp: 67,8%). N = 10, p =0,2, 1-p=0,8 e x <=2.

Dist. Geométrica

- repetir até ocorrer o 1º sucesso, ou seja, dá o nº (qtd <-> discreta) de experimentos para obter o 1º sucesso.
- Eventos são independentes entre si. Sucesso p e Fracasso q são ctes (os msms valores pra cada tentativa).

$$X = k = (q^{k-1}).(p)$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{1}{p^2}$$

- Esperança <–> soma dos infinitos termos P.G. Soma PG infinita é $\frac{Q1}{1-q}$

> Lançar dado honesto, considerando sucesso (p) a ocorrencia de uma face múltipla de 3: multipla de 3 {2, 3}
>
> p = 2/6 = 1/3, então q = 2/3
>
> Se var X indica nº lançamentos até obter o 1º sucesso:
>
> X = 0 (não lançar e obter sucesso?) Impossível X = 1 (sucesso logo no 1º lançamento) = 1/3

X = 2 (sucesso no 2º lançamento) = 2/3 . 1/3 = 2/9

X = 3 = 2/3 . 2/3 . 1/3 = $(\frac{2}{3})^2 . \frac{1}{3}$

X = 4 = $(\frac{2}{3})^3 . \frac{1}{3}$

X = 5 = $(\frac{2}{3})^4 . \frac{1}{3}$

generalizando, X = k = $(\frac{2}{3})^{k-1} . \frac{1}{3}$

X tem Dist. Geométrica pois termos tem sequência P.G.

(FCC adaptada - TecConcursos) O curso para realização experimento é R$ 500. Se o experimento falhar haverá um custo adicional de R$ 100 para realização de uma nova tentativa (ou seja, cada novo experimento custará R$ 600). sabendo-se q a prob de sucesso em qualquer tentativa é 0,4 e q todas são independentes, o custo esperado de todo procedimento até q ocorra o primeiro sucesso seja alcançado é:

p = 0,4 E(X) = 1 / 0,4 = 2,5. Serão necessários, em média, 2,5 experimentos. O primeiro custo é de R$ 500. Os outros 1,5 custam R$600 cada. Custo esperado: 500 + 1,5. (600) = 1400.

Então custo esperado é de R$ 1400.

(FCC) Suponha q ao realizar um experimento ocorra evento A com probabilidade p e não ocoora com probabilidade (1-p). Repetimos o experimento de forma independente até q A ocorra pela primeira vez. seja: X = nº repetições do experimento até q A ocorra pela primeira vez. Sabendo q a média de X é 3, a prob condicional expressa por $P(X = 2|X \leq 3)$ é de: ___

E(X) = 1/ p = 3 => p = 1/3 , então q = 2/3

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(X = 2|X \leq 3) = \frac{P(X=2)}{P(X \leq 3)}$

nº tentativas X = 2: conj unitário

X = 3 = {X=1, X=2, X=3}

$P(x = 2 \cap x = 3) = P(X = 2)$

na 1ª tentativa ter sucesso $P(X = 1) = 1/3$

$P(X = 2) = q.p = 2/3.1/3 = 2/9$

$P(X = 3) = q^2.p = (2/3)^2.1/3 = 4/27$

> $P(X \leq 3) = 1/3 + 2/9 + 4/27 = 9 + 6 + 4/27 = 19/27$
>
> voltando na prob condicional $\frac{P(X=2)}{P(X\leq 3)} = \frac{2/9}{19/27} = \frac{2}{9} \cdot \frac{27}{19} = \frac{6}{19}$ Então Resposta = 6/19.

Dist. Hipergeométrica

$$\frac{(C_{k,\ x}).(C_{N-k,\ n-x})}{C_{N,\ n}}$$

$$E(X) = n.p$$

$$V(X) = n.p.q.\frac{N-n}{N-1}$$

- Qd amostragem é **COM REPOSIÇÃO**, X segue dist. **Binomial** (prob de sucesso p e de fracasso q não mudam, ou seja, as chances são as mesmas a cada extração. Cada extração são independentes entre si). Sua E(X) = n.p e sua Variância = n.p.q.
- Porém qd amostragem é **SEM REPOSIÇÃO** a prob de sucesso p e de fracasso q mudam a cada extração. Nesse caso segue uma Dist. **Hipergeométrica**. A sua E(X) se mantém igual a da Binomial pois "p"e “q” são as proporções iniciais (antes de começar a extrair sem repôr). Na Variância agr tem o FATOR DE CORREÇÃO PARA POPULAÇÕES FINITAS (fator de ajuste)

> caixa bombons com 45 bombons pretos e 5 brancos. Extraindo-se aleatoriamente 3 bombons, sem reposição, qual a chance de q exatamente 2 sejam brancos? (amostragem sem reposição ; total bombons N = 50 ; amostra n = 3 ; casos favoráveis k = 5 ; quer a chance da amostra apresentar exatamente 2 bombons brancos P(X =2))
>
> dá pra resolver com Combinação C 50, 3 pra saber Qtos modos escolhe 3 de 50 chocolates (combinação de 50 tomados 3 a 3).
>
> nº casos favoráveis: a) 5 bombons brancos e escolhe 2 : C 5,2 (combinação de 5 tomados 2 a 2) b) há 45 bombons pretos e escolhe 1 : C 45, 1 PFC: (C 5,2). (C 45, 1)
>
> Prob = casos favoráveis / casos possíveis = (C 5,2). (C 45, 1) / C 50, 3
>
> generalizando: total bombons na caixa “N” ; tamanho amostra “n” ; qtd bombons brancos na caixa “k” ; qtd bombons pretos na caixa “N - k”; qtd bombons brancos na amostra “x” ; qtd bombons pretos na amostra “n - x”
>
> $$Casostotais : C_{N,\ n}$$
>
> $$Casos\ favoráveis : [escolhadobranco].[escolhadopreto] = (C_{k,\ x}).(C_{N-k,\ n-x})$$
>
> $$Prob = casosfavoráveis/casospossíveis = \frac{(C_{k,\ x}).(C_{N-k,\ n-x})}{C_{N,\ n}}$$
>
> Variável X é qtd bombons brancos na amostra. X tem dist. Hipergeométrica

> (FCC) 4 livros didáticos com defeito na livraria foram misturados a outros 16 livros sem defeito. Um prof foi à livraria e escolheu aleatoriamente, 4 desses livros para presentear seus alunos. A prob de ter escolhido 3 livros com defeito é: __
>
> nº total: 20 livros . Escolhe 4 => $C_{20,4} = \binom{20}{4}$
>
> casos favoráveis: 1ª etapa é 3 defeituosos na amostra de 4 e 2ª etapa é escolher 1 livro normal dentre 16 => $\binom{4}{3} . \binom{16}{1}$
>
> $Prob = \frac{\binom{4}{3} . \binom{16}{1}}{\binom{20}{4}}$
>
> p = 4/20 = 0,2, então q = 0,8 n = 4 (tamanho da amostra) e N = 20
>
> E a média de X E(X) = n.p = 4. 0,2 = 0,8
>
> V(X) = 0,8 . 0,8 . (20-4) / (20-1) = 0,54

f.m.p Função Massa Prob

v.a discreta X, a fmp é: px(x) = P[X = x]

Função Acumulada Probab / Função de Dist Prob

Dist. **POISSON**

a partir da amostra q lista qtd ocorrências em determinado intervalo de tempo, área, volume, calculará o nº **exato**. A probab do evento ocorrer é a mesma para cada intervalo e o nº de ocorrências de um intervalo é independente do outro.

$$P(X = k) =,$$

$$sendo\lambda - - > aMédiadeocorrênciasdoevento)$$

e = 2,71 k = nº de vezes desejada

- Em Poisson, a Esperança (Média) = Variância

$$E(x) = Var(x) = \lambda$$

> Um quiosque de pretzels num shopping recebe em média 2 clientes por minuto. Observando a chegada de clientes por 30 segundos, qual a probabilidade de chegar 3 clientes? use:
>
> $$e^-1 = 0,36$$
>
> $$\lambda = 2clientesem1minuto$$

$$k = 3clientesem30segundos$$

minuto -> segundo : 1min = 30s + 30s, então 30s 1 cliente e outros 30s outro cliente => 1 cliente em 30s

ou segundo -> minuto : x2 => 6 clientes em 1min

$$P(x-3) = \frac{e^{-}1.1^3}{3!} = 0,06$$

0,06 = 6% .

Uma empresa de telemarketing, visando realizar uma adequação no número de chamadas realizadas, verificou que se realizava em média oito chamadas por minuto. Visando aumentar a produtividade e mantendo o número de funcionários, a empresa deseja saber a probabilidade de se aumentar o número de chamadas para dez ou mais por minuto. De acordo com os dados apresentados, qual a probabilidade desse fato ocorrer? (Resp: 0,2834). Questão pede a prob de se aumentar o nº ligações para 10 ou mais. \lamda = 8 e p = (x>=10)= 1-p(x<10)

V.A CONTÍNUAS

2. Vars Aleat **CONTÍNUAS**

f.d.p (Função Densidade Prob)

Estatística Descritiva - Analogia da fdp com Histogramas: no Histograma cada retângulo tem a base (**amplitude** de classe h. ex: faixa etária) e altura (**frequência**, ou seja qtas pessoas).

Para qualquer Histograma e Medida Separatriz, O **percentual** de **elementos delimitado** será **igual** ao percentual da **área** q cobrimos (ex: 3º Quartil (Q3) delimita 75% ou 3/4 das observações e da área; O 8º Decil (D8) delimita 25% das observações e tbm da área total; Calculando 10% da área do Histograma corresponde a 10% dos elementos).

Então a partir da Área total (somando todas áreas de todos os restângulos) e dividir pela Amplitude de classe (h) e dps dividir pelo nº total de elementos, resultado sempre será **Área = 1**. Área total = $h.f_1 + h.f_2 + h.f_3... = h.(f_1 + f_2 + f_3...)$

- h (amplitude)
- fr (freq relativa) = fi / n
- densidade freq relativa (dfr) = fr / h

> **Sempre q Histograma for baseado em DENSIDADE FREQUÊNCIA RELATIVA (dfr) a área total vale 1**.
>
> Qd passamos da Estatística **Desritiva** para **V.As** , a **Freq Relativa** da dá lugar para a **Probabilidade** e a **Densidade de Freq Relativa (dfr**) para a **DENSIDADE DE PROBABILIDADE**. A densidade de prob é a divisão **Prob / tamanho do intervalo**.
>
> Qd diminuímos cada vez mais o tamanho do intervalo (amplitude), temos f.d.p. Então **função densidade de prob (f.d.p)** é o menor resultado da dfr (fr / h), ou seja, qd o **tamanho do intervalo tende a zero**. O gfráfico da f.d.p manterá todas as propriedades do Histograma, ou seja:
>
> **- Área total = 1**
>
> **- Área de determinado intervalo é igual à Probabilidade daquele intervalo**

- f.d.p com **Integral**: há alguns gráficos q só consegue calc usando Integral.

> Integral: função q calcula a área abaixo do gráfico

$fdp \neq FDP$ - f densid prob (fdp) e f Distribuição de Prob (FDP)

FDP

[prof Vítor Menezes - TecConcursos]

fx(x) = dFx(x) / dx

Distribuição Contínua de Prob

Fontes:

- canal Prof Douglas Maioli
- canal Murakami
- prof Vítor Menezes - TecConcursos
    - [ ] Prob https://www.youtube.com/playlist?list=PLGGUBlwLP-pVlJN6ylnXdhj8lSz-rIfhp
    - [ ] Maioli https://www.youtube.com/watch?v=snXf8YT7L3U&list=PLrOyM49ctTx8HWnxWRBtKrfcuf7ew_3nm