

Sprawozdanie 5

Metody Numeryczne - Laboratoria

Temat laboratoriów:

Diagonalizacja macierzy metodą potęgową.



WFIS AGH

08.04.2021

Łukasz Wajda

1. Wstęp teoretyczny

1.1. Metoda potęgowa

Metoda potęgowa jest jedną z metod iteracyjnych umożliwia numeryczne wyznaczenie pojedynczych wartości i wektorów własnych danej macierzy. Konieczne jest założenie o istnieniu jej n liniowo niezależnych wektorów własnych, które stanowią bazę przestrzeni liniowej postaci $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$. Mając do dyspozycji daną bazę, można zdefiniować poniższe równości dla dowolnego wektora \vec{v}_0 i pojedynczych wartości własnych λ_i macierzy wejściowej.

$$\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{x}_i \quad (1)$$

$$A\vec{v}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i \vec{x}_i \quad (2)$$

$$\vec{v}_m = A^m \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \lambda_i^m \vec{x}_i \quad (3)$$

Jeżeli ponadto założyć się istnienie słabo malejącego ciągu wartości własnych:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N| \quad (4)$$

to można wystosować granicę z λ_1 jako dominującą wartością własną (tzn., że zachodzi zależność, że $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1$ dla $j \neq 1$) i na tej podstawie łatwo ją obliczyć

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{A^m \vec{v}_0}{\lambda_i^m} = \alpha_i \vec{x}_i \Rightarrow \lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\vec{y}^T \vec{v}_{m+1}}{\vec{y}^T \vec{v}_m}. \quad (5)$$

Wektory własne macierzy wyznacza się w następujący sposób

$$\vec{v}_m \approx \lambda_1^m \alpha_1 \vec{x}_1 \quad (6)$$

więc unormowany wektor własny będzie miał postać:

$$\vec{x} = \frac{\vec{v}_m}{|\vec{v}_m|} \quad (7)$$

Jeśli wartość własna jest pierwiastkiem wielokrotnym równania charakterystycznego to metoda jest zbieżna bo składnik z λ_1 dominuje:

$$\vec{v}_m = \lambda_1^m \sum_{i=1}^N \alpha_i \vec{x}_i + \sum_{i=k+1}^N \lambda_i^m \alpha_i \vec{x}_i. \quad (8)$$

Powyższa metoda w tej postaci pozwala nam na wyznaczanie tylko pierwszych wartości wektorów własnych. By wyznaczyć kolejne należy skorzystać z metody redukcji macierzy. Klasyczna metoda potęgowa umożliwia jednak znalezienie tylko nadmienionej wartości własnej i odpowiadającego jej wektora, toteż na laboratorium wykorzystano pomocniczy algorytm opisany poniżej.

1.2. Pseudokod

Algorytm Iteracyjne wyznaczanie wartości i wektorów własnych metodą potęgową

```

for k = 1 to k <= N do
     $x_k^1 = [1, 1, \dots, 1]$ 
    for i = 1 to i <= IT_MAX do
         $x_k^{i+1} = W_k x_k^i$ 
         $\lambda_k^i = \frac{(x_k^{i+1})^T x_k^i}{(x_k^i)^T x_k^i}$ 
         $x_k^i = \frac{x_k^{i+1}}{\|x_k^{i+1}\|_2}$ 
     $W_{k+1} = W_k - \lambda_k x_k^i (x_k^i)^T$ 

```

- k - numer wyznaczonej wartości własnej,
- i - numer iteracji dla określonego k,
- A - macierz pierwotna,
- W_k - macierz iteracji,
- λ_k^i - przybliżenie k-tej wartości własnej w i-tej iteracji,
- x_k^i - i-te przybliżenie k-tego wektora własnego,
- N - liczba wartości własnych do wyznaczenia,
- IT_MAX = 12 - maksymalna liczba iteracji dla każdego k.

Ciekawostką jest fakt, że podobnego algorytmu używa się w pozycjonowaniu stron internetowych podczas ich wyszukiwania. Podany algorytm zawiera w sobie metodę redukcji Hotellinga. W zadaniu obliczeń dokonywaliśmy na macierzy symetrycznej, dlatego mogliśmy skorzystać z tego rozwiązania. W metodzie przyjmujemy lewy wektor własny przynależny do wartości własnej λ_1 , jednak zwykle nie znamy ich, dlatego metoda skuteczna jest tylko w przypadku macierzy symetrycznych, gdzie lewe wektory są identyczne z prawymi. Przy tych założeniach otrzymujemy:

$$W_1 = A - \lambda_1 x_1 (x_1)^T \quad (9)$$

W postaci rekurencyjnej:

$$W_0 = A$$

$$W_i = W_{i-1} - \lambda_{i-1} x_{i-1} (x_{i-1})^T \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (10)$$

2. Zadanie

Do przetestowania metody użyto macierzy symetrycznej A rzędu $N = 7$ danej przepisem

$$a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{2 + |i - j|}} \text{ dla } i, j \in \{1, \dots, 7\}. \quad (11)$$

Symetryczność macierzy zagwarantowała, że wszystkie wartości własne oraz składowe wektorów własnych były rzeczywiste. Utworzono ponadto macierz iterującą W_0 będącą wstępnie kopią macierzy A. W celu sprawdzenia poprawności obliczeń zdefiniowano macierz D z twierdzenia o ortogonalnym podobieństwie, które opisuje wzór

$$D = X^T A X \quad (12)$$

gdzie X to macierz składająca się z kolumn będących kolejnymi wektorami własnymi macierzy wejściowej:

$$X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N]. \quad (13)$$

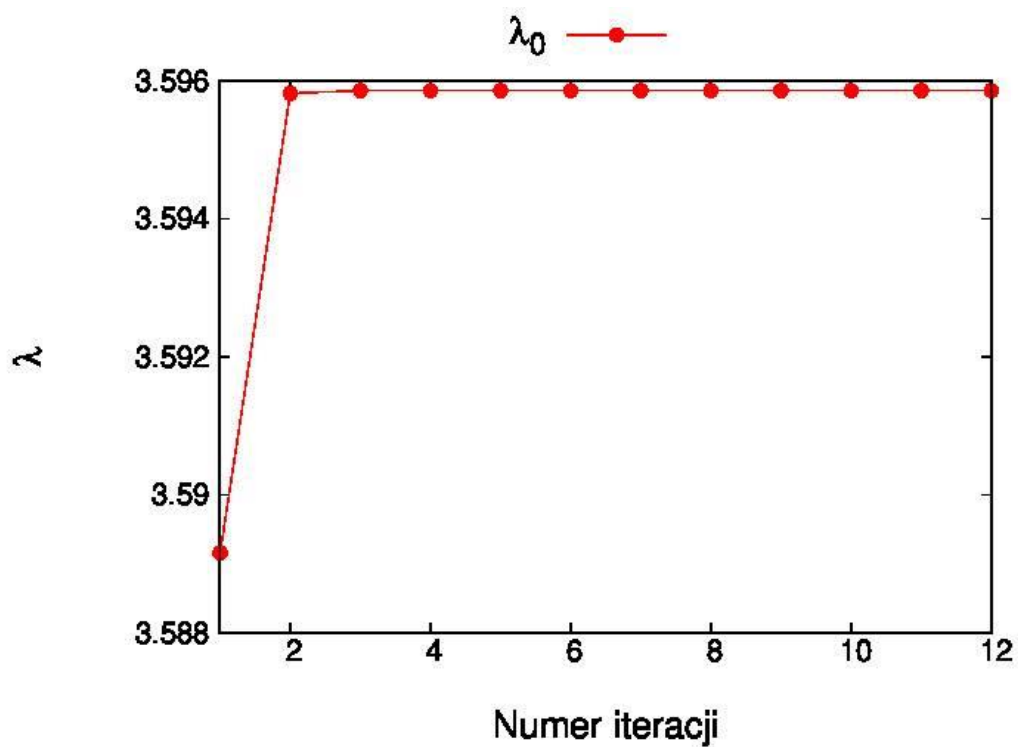
Każdy wektor własny \vec{x}_k był inicjalizowany jedynkami w poszczególnych obiegach pętli. Zgodnie z pseudokodem należało je kolejno przybliżać, wykonując zawsze z góry założoną liczbę iteracji równą $IT_MAX = 12$ dla każdej wartości własnej.

3. Wyniki

Rozwiązanie opracowano w oparciu o samodzielnie stworzone funkcje pomocnicze: mnożącą dwie macierze, obliczającą iloczyn skalarny dwóch wektorów, dokonującą transpozycji macierzy oraz obliczającą macierz iteracji. Dzięki temu operacje na macierzach i wektorach były intuicyjne i klarowne. Wartości własne zapisano do pliku w celu sporządzenia wykresów ich przybliżeń za pomocą programu gnuplot. Co warto podkreślić, obliczenia zostały wykonane dla liczb pojedynczej precyzji. Poniżej zaprezentowano otrzymane wyniki.

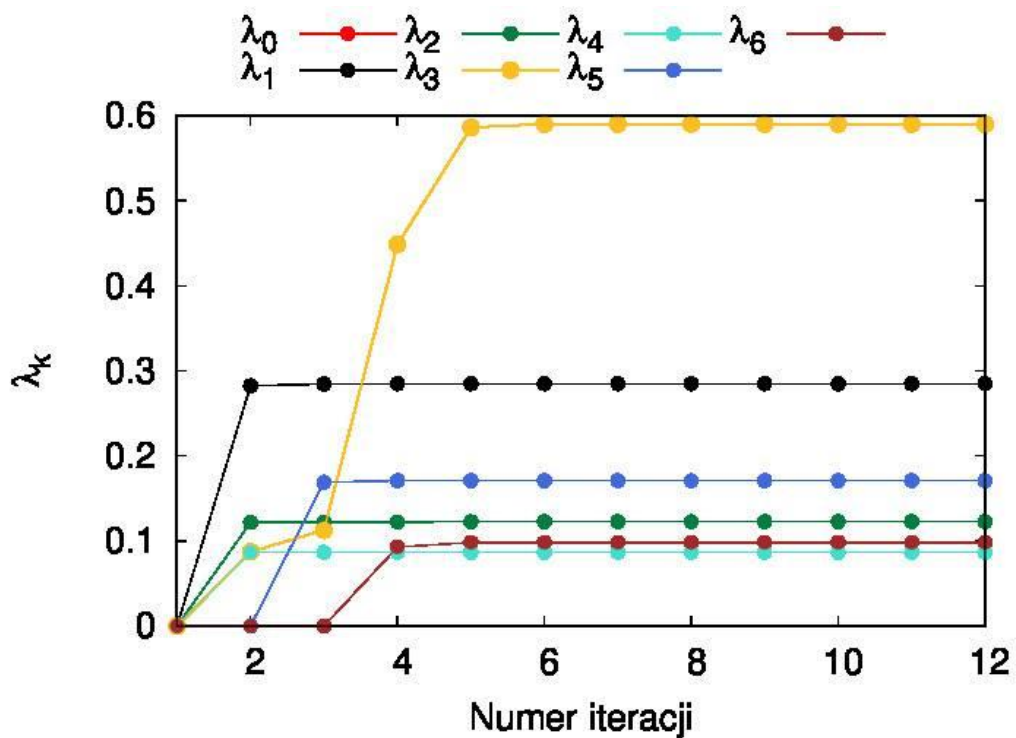
$$X = \begin{pmatrix} 0,352941 & 0,477239 & 0,364007 & -0,478726 & 0,130626 & -0,449005 & 0,262282 \\ 0,377935 & 0,164774 & -0,461327 & -0,447176 & -0,338022 & 0,172676 & -0,520312 \\ 0,392221 & -0,314852 & -0,138849 & -0,266515 & 0,476991 & 0,518245 & 0,400604 \\ 0,396889 & -0,540298 & 0,518756 & 0,000635757 & -0,531333 & -6,29403 \cdot 10^{-09} & -3,40684 \cdot 10^{-13} \\ 0,392221 & -0,314852 & -0,141987 & 0,26617 & 0,476992 & -0,518245 & -0,400604 \\ 0,377935 & 0,164774 & -0,466589 & 0,44604 & -0,33802 & -0,172676 & 0,520312 \\ 0,352941 & 0,477239 & 0,358362 & 0,479611 & 0,130628 & 0,449005 & -0,262282 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3,59586 & -1,2268 \cdot 10^{-13} & -1,27676 \cdot 10^{-15} & 8,88178 \cdot 10^{-16} & 1,09357 \cdot 10^{-14} & 1,77636 \cdot 10^{-15} & -1,77636 \cdot 10^{-15} \\ -1,22548 \cdot 10^{-13} & 0,284988 & -6,25256 \cdot 10^{-06} & -7,6505 \cdot 10^{-09} & -3,81633 \cdot 10^{-09} & -1,31839 \cdot 10^{-16} & 6,93889 \cdot 10^{-17} \\ -1,26635 \cdot 10^{-15} & -6,25256 \cdot 10^{-06} & 0,122802 & -0,00332763 & -0,000329115 & -3,70643 \cdot 10^{-12} & -2,25514 \cdot 10^{-17} \\ 7,49401 \cdot 10^{-16} & -7,6505 \cdot 10^{-09} & -0,00332763 & 0,590389 & 8,23117 \cdot 10^{-07} & 1,03251 \cdot 10^{-14} & 1,38778 \cdot 10^{-17} \\ 1,09201 \cdot 10^{-14} & -3,81633 \cdot 10^{-09} & -0,000329115 & 8,23117 \cdot 10^{-07} & 0,0865957 & -2,97259 \cdot 10^{-09} & -1,56455 \cdot 10^{-14} \\ 1,8735 \cdot 10^{-15} & -1,38778 \cdot 10^{-16} & -3,70639 \cdot 10^{-12} & 1,02071 \cdot 10^{-14} & -2,97259 \cdot 10^{-09} & 0,170974 & -1,03402 \cdot 10^{-08} \\ -2,12504 \cdot 10^{-15} & 6,76542 \cdot 10^{-17} & -5,55112 \cdot 10^{-17} & 2,94903 \cdot 10^{-17} & -1,56485 \cdot 10^{-14} & -1,03402 \cdot 10^{-08} & 0,0981544 \end{pmatrix}$$



Wykres 1: Kolejne przybliżenia wartości własnej λ_1 w funkcji numeru iteracji. Wykonano 12 iteracji (bez badania zbieżności).

Dla pozostałych wartości własnych sporządzono wykres (2) w celu zachowania czytelności.



Wykres 2: Kolejne przybliżenia znalezionych wartości własnych λ_k w funkcji numeru iteracji. Wykonano 12 iteracji (bez badania zbieżności).

4. Wnioski

Dowodem na poprawność zaimplementowanej metody jest postać macierzy D , która zawiera na diagonalu wartości własne odpowiadające kolejnym wektorom własnym przechowywanym w kolumnach macierzy X . Pozostałe elementy powinny być w idealnym przypadku równe zeru, lecz przez wgląd na pojedynczą precyzję i niedokładność są tylko zbliżone do niego, jeśli spojrzeć na rząd tych liczb.

Wartości własne nie zostały znalezione w porządku ciągu malejącego. Szeregując je w ten sposób otrzymuje się ciąg

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_4| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_6| \geq |\lambda_3| \geq |\lambda_7| \geq |\lambda_5|. \quad (14)$$

Oprócz dominującej wartości, kolejne sąsiednie pojawiały się na wyjściu w odwrotnej kolejności. Ich cechą wspólną jest stosunkowo szybkie osiągnięcie teoretycznej zbieżności, która jednak nie zawsze musi wystąpić. Aby zwiększyć dokładność przybliżeń zwiększano kilkakrotnie iterację. Dla liczby iteracji równej 288 przybliżone wartości λ_k już się nie zmieniają w znacznym stopniu. Warto zauważyć też, że obliczone wartości własne dla 300 i więcej iteracji, to wartości obliczone przy mniejszej liczbie iteracji, ale w innej kolejności. Dla dokładniejszych wartości własnych, zmieni się również postać macierzy D .