

Sprawozdanie 4

Metody Numeryczne - Laboratoria

Temat laboratoriów:

**Macierzowy niesymetryczny problem własny –
wyznaczanie modów własnych niejednorodnej
struny w 1D**



WFIS AGH

01.04.2021

Łukasz Wajda

1. Wstęp teoretyczny

Tematem, który poruszyliśmy na kolejnych zajęciach był problem własny na przykładzie niejednorodnej struny, które wychylenie w czasie i przestrzeni dane jest funkcją:

$$\psi = \psi(x, t). \quad (1)$$

Jej dynamikę możemy opisać równaniem falowym:

$$\frac{N}{p(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

w którym, N – napięcie struny oraz $\rho(x)$ – liniowy rozkład gęstości. Po kolejnych przekształceniach, możemy uzyskać uproszczenie powyższego wzoru w postaci równania różniczkowego zależnego jedynie od zmiennej położeniowej:

$$-\frac{N}{p(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda u. \quad (3)$$

W powyższym równaniu λ jest kwadratem częstości drgań własnych, a zmienna u wynika z podstawienia $\psi(x, t) = u(x)\theta(t)$.

Przy założeniu, że strunę o długości L mocujemy tak, że jej końce znajdują się w położeniach $-L/2$ oraz $L/2$, możliwe jest wprowadzenie siatki równoodległych od siebie węzłów, które określać będą kolejne punkty na danej strunie. W dalszej części zadania określamy odległość pomiędzy węzłami:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}. \quad (4)$$

A także położenie w przestrzeni:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (5)$$

Następnie dokonujemy dyskretyzacji równania poprzez podstawienie trójpunktowego ilorazu różnicowego za drugą pochodną i otrzymując równanie postaci:

$$-\frac{N}{\rho_i} \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda u_i. \quad (6)$$

W ten sposób otrzymujemy problem własny (7), w którym kolejne elementy macierzowe opisane są wzorem (8).

$$A\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (7)$$

$$A_{i,j} = (-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}) \cdot \frac{N}{(\rho_i \Delta x^2)}, \quad (8)$$

gdzie deltą Kroneckera wyraża się:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (9)$$

2. Zadanie

Rozwiązując problem własny w naszym zadaniu posłużyliśmy się gotową funkcją *int gsl_eigen_nonsymmv(gsl_matrix *A, gsl_vector_complex *eval, gsl_matrix_complex *evec, gsl_eigen_nonsymmv_workspace *w)*; z biblioteki GSL, która wylicza znormalizowane wektory i wartości własne niesymetrycznej macierzy **A** i zapisuje je odpowiednio w wynikowych: macierzy **evec** i wektorze **eval**.

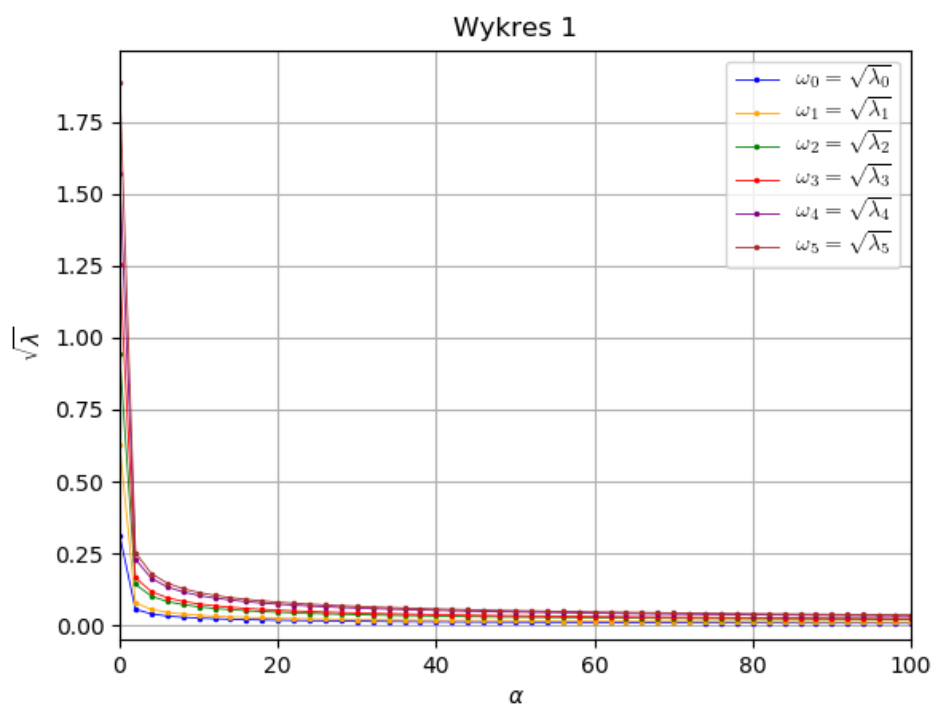
W dalszej kolejności do naszego zadania należało obliczenie pierwiastków z 6 kolejnych, najmniejszych wartości własnych dla każdej wartości parametru $\alpha \in [0, 100]$, z krokiem $\Delta\alpha = 2$ oraz obliczenie wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$. Przy przyjętych parametrach:

$$L = 10, \quad n = 200, \quad \rho(x) = 1 + 4\alpha x^2, \quad N = 1, \quad (10)$$

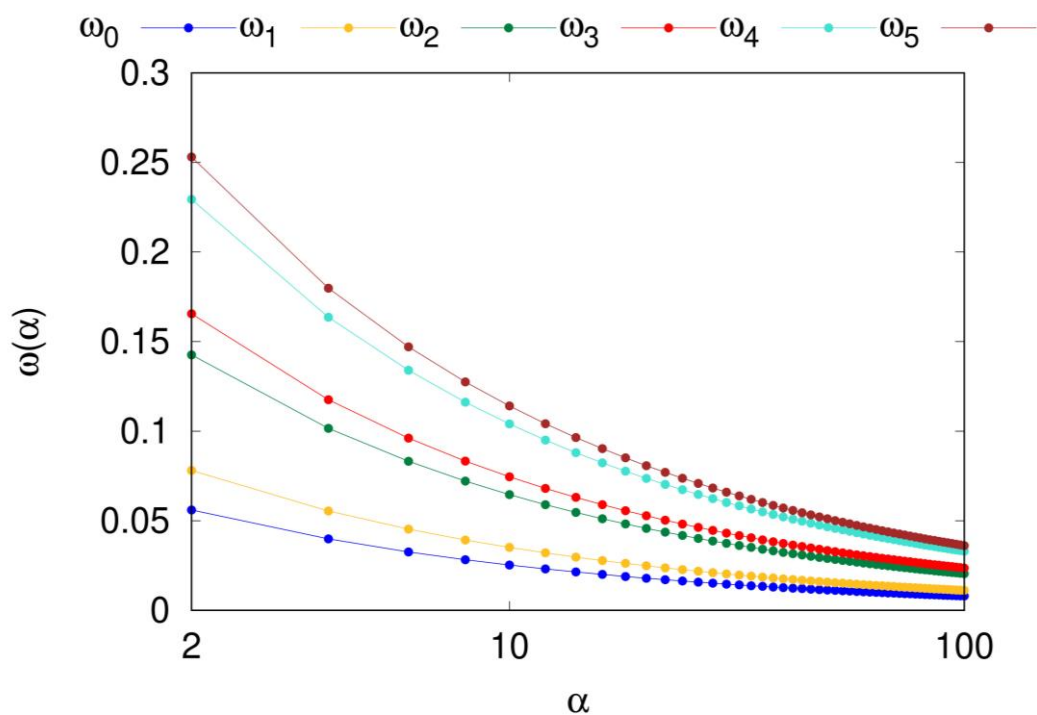
(gdzie: L - parametr określający długość struny, n - parametr określający liczbę węzłów na siatce, $\rho(x)$ - liniowy rozkład gęstości, N - naciąg struny), należało sporządzić wykresy wektorów własnych dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 100$ oraz wykres $\omega = \sqrt{\lambda} = f(a)$. Po rozwiązaniu wektory i wartości własne posortowaliśmy, wykorzystując funkcję *int gsl_eigen_nonsymmv_sort (gsl_vector * eval ,gsl_matrix_complex * evec, gsl_eigen_sort_t sort_type)*; rosnąco względem modułów wartości własnych.

3. Wyniki

Poniżej przedstawiono dwa wykresy obrazujące zależność częstości własnej struny w funkcji parametru α .



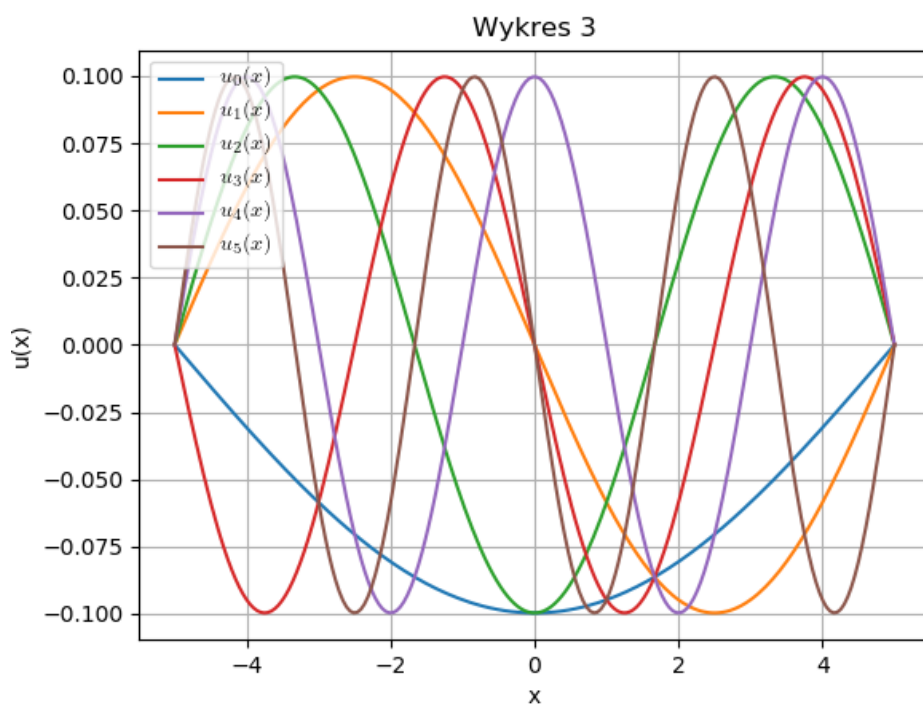
Rysunek 1: Wykres wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych w funkcji α , $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$.



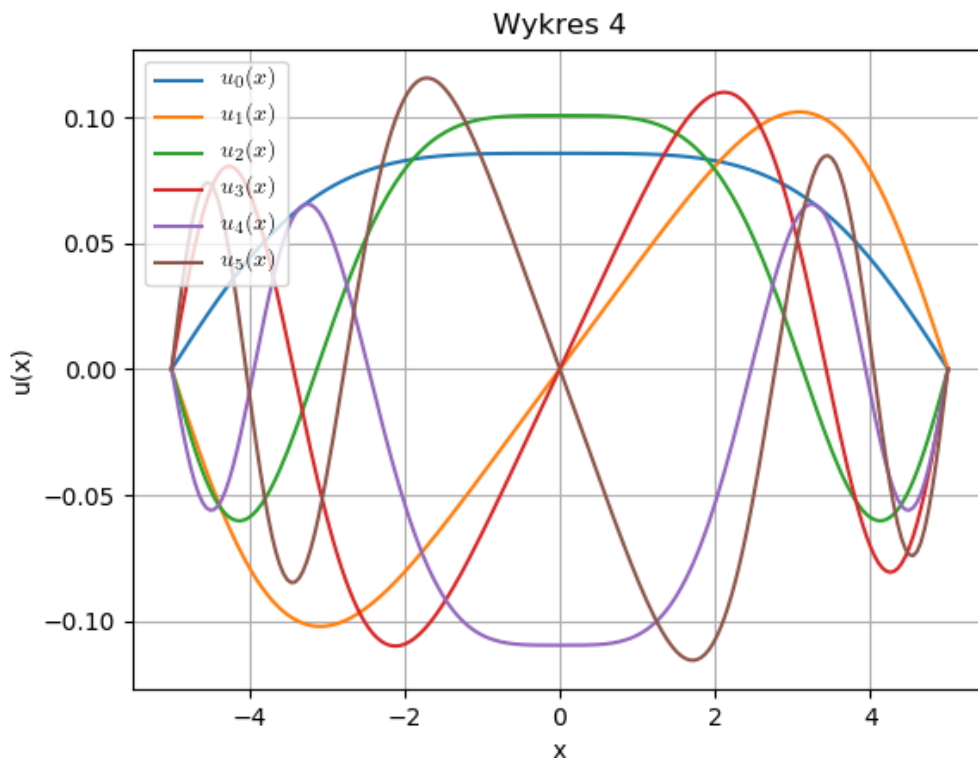
Rysunek 2: Wykres wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych w funkcji α skala logarytmiczna, $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$.

Na podstawie analizy wyników można stwierdzić, że częstotliwości własne maleją wraz ze wzrostem parametru α , którego wzrost powoduje bowiem wzrost gęstości struny. Przy zwiększającym się α można zaobserwować grupowanie się częstotliwości w pary.

Kolejne dwa wykresy przedstawiają wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym.



Rysunek 3: Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$.



Rysunek 4: Wykresy wektorów własnych odpowiadających 6 najmniejszym wartościom własnym dla $\alpha = 100$.

Trzeci wykres wskazuje, że wektory własne dla wartości $\alpha = 0$ rozrysowane w funkcji umiejscowienia punktu na strunie są parzystymi wielokrotnościami połówek wykresów funkcji sinus. Na wykresie 3 widać, że środek struny staje się masywny. Z tego powodu wektory u_0 , u_2 oraz u_4 mają płaską centralną część.

4. Wnioski

Do rozwiązania problemu używamy double-shift Francis method, zaimplementowanego w bibliotece GSL jako procedura o nazwie `gsl_eigen_nonsymmv`. Używając obecnego w nim rozkładu QR możemy przeprowadzić te operacje stabilniej niż w przypadku algorytmu LR, używającego rozkładu LU.

Parametr określający liniową gęstość struny znacząco wpływa na wartości i wektory własne otrzymywane z rozwiązania równania niesymetrycznego problemu własnego. Dla dwóch ostatnich wykresów zaobserwowano, że kolejne wyrazy wektorów własnych układają się na krzywych sinusoidalnie. Dodatkowo parametr alfa wpływał na liniowy rozkład gęstości, co powodowało zmiany kształtu wykresów. Na wykresach zaobserwowano zmianę amplitudy, symetryczność oraz rozciągnięcia względem kolejnych wyrazów wektora własnego.