Sprawozdanie 1

Metody Numeryczne-Laboratoria

Temat:
Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji

WFiIS

AGH

11.03.2021

Łukasz Wajda

1. Wstęp teoretyczny

Tematem laboratorium numer 1 były układy algebraiczne równań liniowych i rozwiązywaniu ich metodami bezpośrednimi. Układy równań liniowych często zapisujemy w poniższej formie:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = e_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = e_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 + d_3x_4 = e_3 \\ a_4x_1 + b_4x_2 + c_4x_3 + d_4x_4 = e_4 \end{cases}$$

jednak o wiele wygodniejsza forma zapisu jest postać macierzowa.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot x = b$$

gdzie **M** to macierz współczynników układu, **b** to macierz wyrazów wolnych, a macierz **x** to kolejne niewiadome.

Dzięki tej postaci możemy skorzystać z innych metod rozwiązywania układu, np. metody Gaussa-Jordana. Metoda Gaussa-Jordana jest metodą dosyć żmudną, ale bez porównania mniej żmudną niż próba obliczania z wykorzystaniem dopełnień algebraicznych macierzy odwrotnych wymiaru 4*4 i większych. Opiera się ona na zastosowaniu elementarnych działań matematycznych w celu doprowadzenia macierz M do macierzy jednostkowej operując na wierszach. Zamiana macierzy następuje w macierzy rozszerzonej:

$$[M|I] \rightarrow [I|M^{-1}]$$

Z układu równań

$$M \cdot x = b$$

Otrzymujemy

$$I \cdot x = b'$$

z tego wynika że otrzymujemy od razu wektor niewiadomych x_i

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ \cdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

2. Zadanie do wykonania

Jednym ze źródeł UARL mogą być równania różniczkowe. Dla prostego oscylatora harmonicznego z drugiej zasady dynamiki Newtona mamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

Przybliżając występującą po lewej stronie równania pierwszego drugą pochodną położenia x w chwili t ilorazem różnicowym otrzymamy:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t}{(\Delta t)^2}$$

i wprowadzając oznaczenia $\Delta t = h, x_i = x(ih)$ otrzymujemy z równania (1) iteracyjny przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i+1}:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_1 + xi - 1 = 0$$

Znając zatem dwie dowolne kolejne wartości x (w szczególności dwie początkowe), możliwe będzie wyznaczenie kolejnej. Następnie znając kolejne dwie, możliwe będzie wyznaczenie następnej wartości. W ten sposób powstanie całe rozwiązanie. Jedyną informacją, którą należy wykorzystać, by było ono jednoznaczne, jest informacja, ile wynoszą wartości x_i oraz x_{i-1}. Mamy jednak zadane warunki początkowe: $x_0 = A$, które jest początkowym wychyleniem z położenia równowagi, a także $v_0 = (x_1 - x_0)/h$ – wyrażenie określające początkową prędkość ciała.

Równanie dla pierwszych 7 kroków czasowych w postaci macierzowej reprezentuje się następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

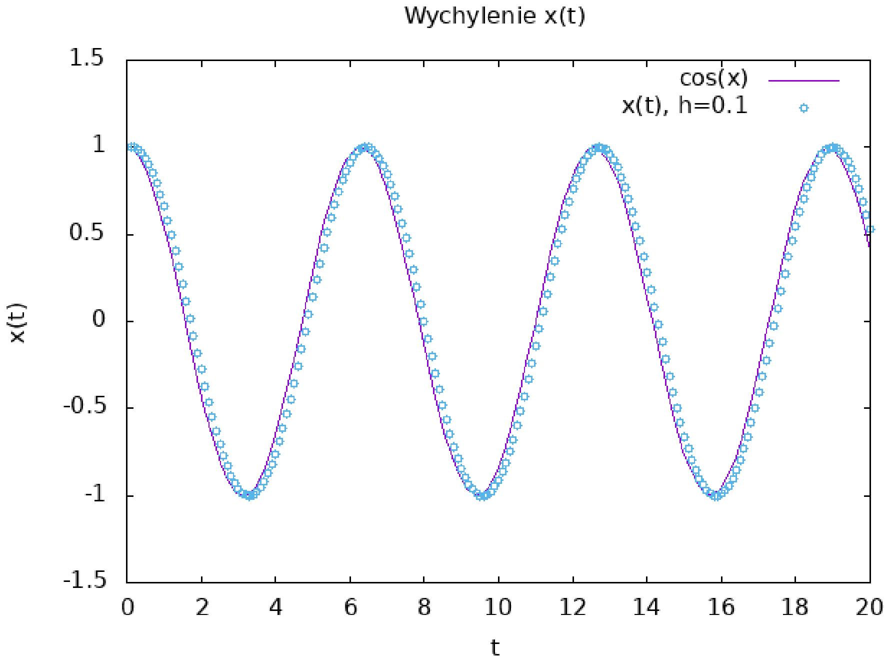
Następnym krokiem było rozwiązanie układu metodą Gaussa-Jordana oraz narysowanie zależność wychylenia z położenia równowagi dla tego układu na przestrzeni kilku okresów drgań.

3. Wyniki

Dane wejściowe: ˆ

- A = 1 ˆ
- v_0 = 0 ˆ
- k/m = 1 ˆ
- h = 0.1 krok całkowania ˆ
- N=200 wymiar macierzy M

W pierwszej kolejności skorzystaliśmy z funkcji matrix do alokacji macierzy, następnie wypełniliśmy macierz M i b danymi z zadania. Po stworzeniu macierzy kwadratowej M skorzystaliśmy z procedury gaussj.c do rozwiązywania układów równań liniowych metodą Gaussa-Jordana. Otrzymane wyniki przedstawiliśmy na wykresie razem ze znanymi nam już zależnościami analitycznymi oscylatora harmonicznego: x(t) = A cos(ωt). Dla naszych warunków początkowych A = 1 oraz ω = 1 daje to x(t)=cos(t).



Wykres 2. Niebieskie kropki oznaczają wychylenie x(t) uzyskane metodą eliminacji Gaussa-Jordana. Linią ciągłą zaznaczono rozwiązanie analityczne cos(t).

Jak można łatwo zauważyć, otrzymany wykres wychylenia oscylatora jest prawie nierozróżnialny względem wykresu funkcji cosinus. Trzeba jednak zauważyć, że wykres jest prawdziwy jedynie w przypadku niettłumionych drgań oscylatora harmonicznego (z jakim mieliśmy tutaj okazję pracować). W rzeczywistości znacznie częściej spotykane są drgania tłumione, ponieważ trudno jest wyeliminować czynniki tłumiące takie jak opór powietrza czy tarcie. Fakt uzyskania niemalże identycznych wykresów świadczy o bardzo dużej dokładności metod bezpośrednich, o ile zagwarantuje się dostarczenie odpowiednich parametrów. W naszym zadaniu był to krok, z jakim dokonywaliśmy obliczeń wartości.

4. Wnioski

Metoda eliminacji Gaussa-Jordana należy do bardzo dokładnych metod o ile zapewnimy programowi odpowiednie warunki do przeprowadzenia obliczeń. W naszym zadaniu istotna była częstość (h), z jaką dokonywaliśmy pomiaru wartości. Dzięki ustaleniu jej na stosunkowo wysokim poziomie, otrzymaliśmy dokładność, jakiej potrzebowaliśmy. Należy jednak pamiętać, że za wspomnianą dokładność odpowiada liczba obliczeń (N), im dokładniejszy chcemy wynik, tym większej liczby operacji wykonanych przez program powinniśmy się spodziewać.