Metody numeryczne

Laboratorium 12

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów Simpsona i Milne'a.

01.06.2021r.

Łukasz Wajda

1. Wstęp teoretyczny

Kwadratury Newtona-Cotesa – metody obliczania całek oznaczonych, opierające się na przybliżeniu funkcji podcałkowej wielomianem Lagrange'a stopnia co najwyżej N na siatce równoodległych węzłów. W kolejnym kroku na drodze odpowiednich obliczeń i podstawień wyznacza się współczynniki kwadratury, które to pozwalają na uzyskanie ostatecznego wyniku całki oznaczonej.

Wzór (metoda) Simpsona – kwadratura Netwona-Cotesa rzędu 2 (wzór parabol). Wartość całki wyraża się następującą sumą:

$$S = \sum_{i=0}^{(N/2)-1} \frac{h}{3}\left(f\left(x_{2i}\right) + 4f\left(x_{2i+1}\right) + f\left(x_{2i+2}\right)\right), \quad (1)$$

gdzie krok w zależności on liczby węzłów wynosi:

$$h_n = \frac{b-1}{2^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,8, \quad N = 2^{n+1}, \quad i = 0,1,2,3,\ldots,N. \quad (2)$$

Wzór (metoda) Milne'a – kwadratura Newtona-Cotesa rzędu 4. Wartość całki wyraża się następującą sumą:

$$S = \sum_{i=0}^{(N/4)-1} \frac{4h}{90}\left(7f\left(x_{4i}\right) + 32f\left(x_{4i+1}\right) + 12f\left(x_{4i+2}\right) + 32f\left(x_{4i+3}\right) + 7f\left(x_{4i+4}\right)\right), \quad (3)$$

gdzie krok w zależności on liczby węzłów wynosi:

$$h_n = \frac{b-1}{2^{n+2}}, \quad n = 0,1,2,\ldots,8, \quad N = 2^{n+1}, \quad i = 0,1,2,3,\ldots,N. \quad (4)$$

Ekstrapolacja Richardsona – polega na rozwinięciu funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktów $x \mp h$, odjęciu od siebie otrzymanych wyrażeń a następnie takim ich pogrupowaniu aby obliczyć przybliżenie pierwszej pochodnej. Generalnie jest to rekurencyjny proces wyznaczania np. całki lub pochodnej tworząc macierz trójkątną dolną kolejnych, lepszych przybliżeń zgodnie ze wzorem:

$$D_{w,k} = \frac{4^k D_{w,k-1} - D_{w-1,k-1}}{4^k - 1}. \quad (5)$$

Teoretycznie najlepsze przybliżenie stanowi $D_{M,M}$, gdzie M to wymiar macierzy.

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Podczas zajęć, mając daną funkcję:

$$f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x),$$

należało obliczyć wartość całki z tej funkcji w granicach $[0,1]$:

$$I = \int_0^1 f(x) = -0.186486896.$$

Wartość docelowa została z góry podana w celu zweryfikowania otrzymanych rezultatów.

Obliczenia przeprowadzono na dwa sposoby, wykorzystując kwadratury Newtona-Cotesa a dokładniej wzory Simpsona (1) i Milne'a (3). Dodatkowo skorzystano z ekstrapolacji Richardsona w celu poprawienia zbieżności wyników. Dla ekstrapolacji dokonano 8 iteracji tworząc tym samym macierz trójkątną dolną o wymiarach 9x9 – pierwszy wiersz to odpowiada iteracji zerowej. Jej elementy zostały wypełnione zgodnie ze wzorem (5):

$$D = \begin{pmatrix} D_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D_{1,0} & D_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{8,0} & D_{8,1} & D_{8,2} & \dots & D_{8,8} \end{pmatrix}.$$

2.2 Wyniki

Dla obu metod dla każdej iteracji (iteracja == wyznaczenie kolejnego wiersza) zapisano w pliku element z pierwszej kolumny oraz z przekątnej. Element z pierwszej kolumny to efekt czystej metody Simpsona/Milne'a natomiast ten na przekątnej odpowiada jego ekstrapolacji. Zebrane dane zamieszczone zostały w tabelach poniżej. Każdy wiersz ω_i odpowiada podziałowi przedziału $[0,1]$ na $N = 2^{\omega+2}$ podprzedziałów.

ω	$D_{\omega,0}$	$D_{\omega,\omega}$
0.	-0.0971410499	-0.0971410499
1.	0.4083851989	0.5768939485
2.	-0.2209681412	-0.4979290236
3.	-0.1880063997	-0.1547412817
4.	-0.1865747211	-0.1872519207
5.	-0.1864922827	-0.1864826455
6.	-0.1864872311	-0.1864869011
7.	-0.1864869169	-0.1864868960
8.	-0.1864868973	-0.1864868960

Tabela 1. Wartości uzyskane za pomocą metody Simpsona

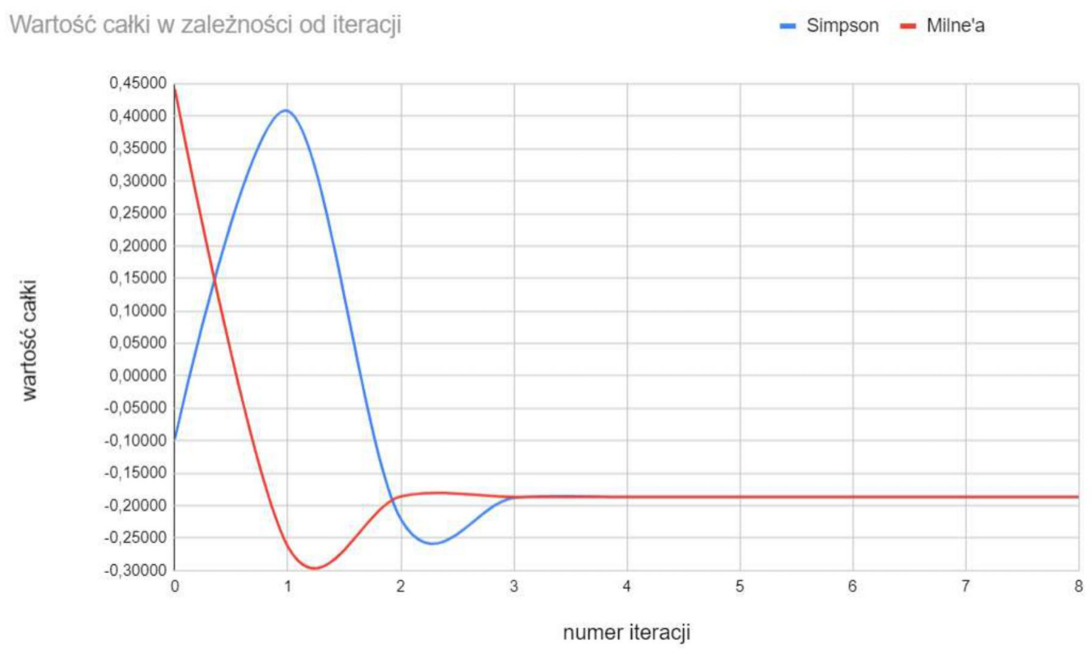
ω	$D_{\omega,0}$	$D_{\omega,\omega}$
0.	0.4420869488	0.4420869488
1.	-0.2629250305	-0.4979290236
2.	-0.1858089502	-0.1375818946
3.	-0.1864792758	-0.1892838357
4.	-0.1864867868	-0.1864321619
5.	-0.1864868943	-0.1864871836
6.	-0.1864868960	-0.1864868957
7.	-0.1864868960	-0.1864868960
8.	-0.1864868960	-0.1864868960

Tabela 2. Wartości uzyskane za pomocą metody Milne'a.

Analizując tabelę nr 1 widzimy, że dla czystej metody Simpsona uzyskano dobry wynik z dokładnością do 8 cyfr po przecinku, natomiast rozszerzenie tej metody o ekstrapolację Richardsona pozwoliło na uzyskanie wyniku identycznego jak ten podany jako wzorcowy po 7 iteracjach.

W przypadku metody Milne’a zbieżność została osiągnięta już po 6 iteracjach i to dla czystej metody bez ekstrapolacji. W tym przypadku okazało się, że ekstrapolacja opóźniła uzyskanie zbieżności o jedną iterację co wydaje się zaskakujące mając na uwadze, iż ekstrapolacja w ogólności ma na celu poprawienie zbieżności metody.

Porównując do siebie obie metody algorytm Milne’a pozawala na uzyskanej zbieżności szybciej niż algorytm Simpsona. Ponadto na wykresie nr 1 zamieszczonym poniżej widzimy, że metoda Simpsona cechuje się większymi oscylacjami wokół docelowej wartości. (wykres zaprezentowano w postaci funkcji ciągłych wyłącznie w celu lepszego zobrazowania efektu)



Wykres 1. Graficzna reprezentacja zbieżności obu metod.

3. Wnioski

Obie metody – Simpsona oraz Milne’a będące częścią rodziny kwadratur Newtona-Cotesa pozwalają na wyznaczenie wartości całki oznaczonej. Metoda Simpsona cechuje się gorszą zbieżnością, nawet jeśli wspomożemy ją ekstrapolacją Richardsona - 7 iteracji, podczas gdy metoda Milne’a potrzebowała 6. Jeśli chodzi o zastosowanie wspomnianej ekstrapolacji dla metody Milne’a, paradoksalnie opóźniło ono zbieżność. Kolejną cechą, zaobserwowaną podczas porównania tych dwóch metod jest fakt występowania większych oscylacji dla metody Simpsona.

Otrzymane wyniki są zgodne ze wzorcowymi co świadczy o poprawności implementacji algorytmu. Różnice w dokładności/szybkości zbieżności się naturalne biorąc pod uwagę stopień wielomianu interpolacyjnego – dla metody Simpsona n = 2, dla Milne’a n = 4. Większy stopień to większa dokładność jednakże w praktyce nie stosuje się często wielomianów wyższych rzędów.