AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

Metody Numeryczne Laboratoria

Sprawozdanie nr 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Łukasz Wajda, 29.04.2021 r.

1. Wstęp teoretyczny

Dla zadanego przedziału $[a\ , b]$ danych jest $n\ +\ 1$ punktów, takich że:

$$a = x_0 < \ x_1 \ <\ldots< \ x_n = b \tag{1}$$

Punkty te pozwalają na określenie przedziału $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ na n podprzedziałów, czyli $[\mathrm{x_i}, \mathrm{x_{i+1}}]$.

Interpolacja funkcjami sklejanymi polega na przybliżeniu takich funkcji interpolujących, które na przedziałach pomiędzy kolejnymi węzłami dają najmniejszą wartość tzw. krzywizny całkowitej. W praktyce oznacza to znajdowanie takich funkcji, które „wygładzają" krzywą na zadanych podprzedziałach $[x_i, x_{i+1}]$ przedziału $[a, b]$.

Funkcję s(x) określona na przedziale $[\mathrm{a}\ , \mathrm{b}]$ nazywa się funkcją sklejaną stopnia m $(\mathrm{m} \geq 1)$,gdy:

1. $s(x)$ jest wielomianem stopania co najwyżej m na każdym podprzedziale.
2. $s(x) \in C^m$.

Punkty $\mathrm{x_j}$ z równania (1) nazywamy węzłami funkcji sklejanej, możemy więc zapisać funkcję s(x) wzorem:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1}+\ldots+ c_{i0}x + c_{i0}\ , \qquad gdzie \ \ x \in (x_i\ ; x_{i+1})\ . \tag{2}$$

Lub zapisać funkcję interpolującą jako kombinację liniową elementów bazy $\{\mathrm{s_i(x)}\}$:

$$s(x) = \sum_{i-0}^{n-1} c_i s_i(x)\ , \qquad gdzie\ x \in [a, b]\ . \tag{3}$$

Funkcjami najczęściej stosowanymi są sklejane trzeciego stopnia $(\mathrm{m} = 3)$, nazywamy tak funkcję interpolujące, jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i\ , \qquad i = 0, 1, \ldots, n;\ n \geq 2 \tag{4}$$

Do określenia funkcji s(x) stopnia trzeciego potrzebne jest wyznaczenie $\mathrm{n} + 3$ parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest równa $\mathrm{n} + 1$ pozostają 2 stopnie swobody, dlatego też nakłada się dwa dodatkowe warunki zależne od funkcji f(x) lub od znajomości jej zachowania w pobliżu końców przedziału [a, b] :

I pochodna:

$$\begin{aligned} s^{(1)}(a + 0) = \alpha_1, \\ s^{(1)}(b - 0) = \beta_1, \end{aligned} \tag{5}$$

II pochodna:

$$s^{(2)}(a+0)=\alpha_2, \\ s^{(2)}(b-0)=\beta_2, \tag{6}$$

warunek na I i II pochodną (stosuje się dla funkcji okresowych):

$$s^{(i)}(a+0)=s^{(i)}(b-0), \quad i=1,2\,. \tag{7}$$

Interpolację funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach oznaczamy jako:

$$M_j=s^{(2)}(x_j), \quad j=0,1,\ldots,n. \tag{8}$$

Zgodnie z założeniem druga pochodna funkcji s(x) jest ciągła i liniowa w każdym z przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$, możemy więc zapisać:

$$s_{i-1}^{(2)}(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\,, \quad gdzie \;\; x\in[x_{i-1},x_i]\; oraz \;\; h=x_i-x_{i-1}\,. \tag{9}$$

Całkując dwukrotnie wyrażenie (9) otrzymujemy:

$$s_{i-1}(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+A_i(x-x_{i-1})+B_i\;, \tag{10}$$

do wyznaczenia brakujących stałych A_i , B_i wykorzystujemy warunek interpolacji:

$$s_{i-1}(x_{i-1})=M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}+B_i=y_{i-1} \quad \Longrightarrow \quad B_i=y_{i-1}-M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\;, \\ s_{i-1}(x_i)=M_i\frac{h_i^2}{6}+A_ih_i+B_i=y_i \quad \Longrightarrow \quad A_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1})\;, \tag{11}$$

Natomiast w punkcje x_i pochodna musi być ciągła, a więc:

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i)=s_i^{(1)}(x_i)\;, \\ s_{i-1}^{(1)}(x_i-0)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\;, \\ s_{i-1}^{(1)}(x_i+0)=\frac{-h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}\;. \tag{12}$$

Porównując prawe strony z równania (12) dla każdego z węzłów uzyskujemy $n-1$ równań, które można zapisać w postaci:

$$\mu_iM_{i-1}+2M_i+\lambda_iM_{i+1}=d_i\,, \quad i=0,1,\ldots,n-1\;, \\ \lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\;, \\ \mu_i=1-\lambda_i\;, \tag{13}$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) = 6f(x_{i-1}; x_i; x_{i+1})\,.$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania wynikające z dodatkowych warunków:

dla warunków z I pochodną:

$$\begin{aligned} 2M_0 + 2M_1 = d_0\,, \quad gdzie\ d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1\right), \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n\,, \quad gdzie\ d_n = \frac{6}{h_1}\left(\beta_1 - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

dla warunków z II pochodną:

$$\begin{aligned} M_0 = \alpha_2\,, \\ M_n = \beta_1\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Otrzymujemy finalny układ równań, który w postaci macierzowej wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \mu_{i-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Do jego rozwiązania wykorzystuje się wzór (10).

2. Zadanie do wykonania

Głównym celem tych zajęć laboratoryjnych było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych, będących wielomianami trzeciego stopnia, poprzez wyznaczanie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Wykorzystując metodę interpolacji funkcji sklejanych należało poddać analizie dwie funkcje:

$$\begin{aligned} f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \\ f_2(x) = \cos(2x)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Pierwszym krokiem było napisanie procedury do wyznaczania drugich pochodnych w węzłach, co w praktyce sprowadzało się do rozwiązania układu równań liniowych $Am = d$ przedstawionego w wzorze (16). Narzucone są też warunki brzegowe $m_1 = m_n = 0$, a odległości międzywęzłowe oznaczamy jako $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Kolejnym etapem zadania było napisanie procedury do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym $s_i(x)$. Przyjęto warunki na II pochodną równą $0 - \alpha = \beta = 0$, przedział interpolacji $x \in [-5, 5]$ oraz liczbę węzłów $n = 5, 8, 21$. Sporządzono wykresy funkcji interpolującej i interpolowanej dla każdego przypadku.

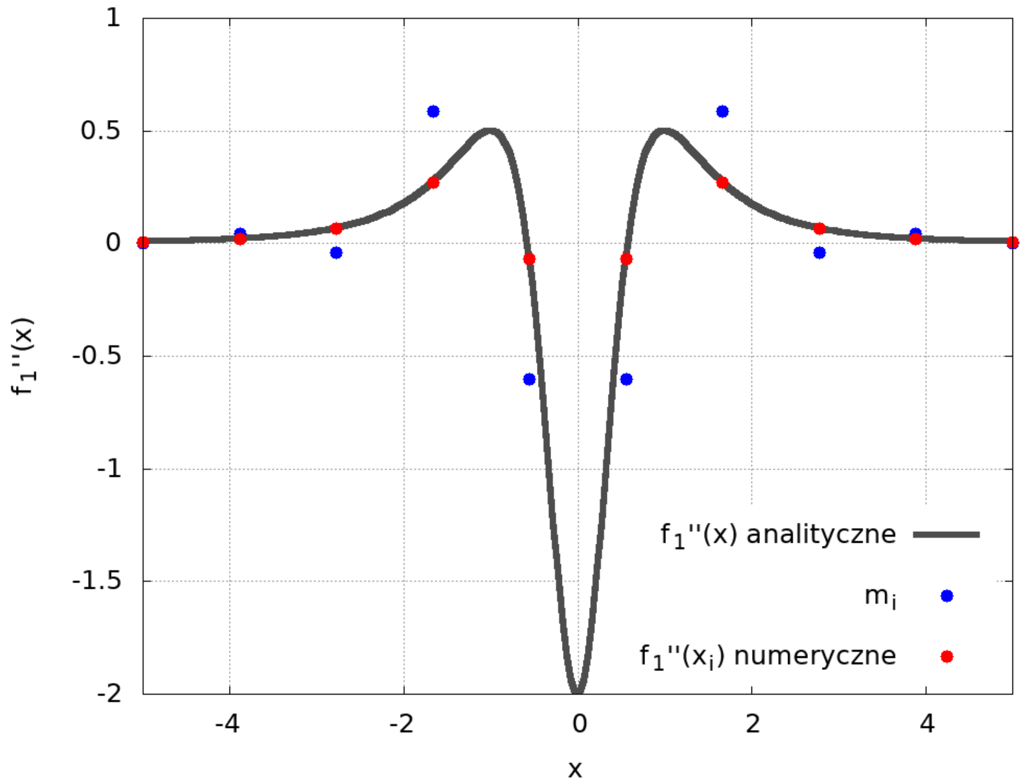
Ponadto dla $f_1(x)$ oraz $n = 10$ wyznaczono wartości drugich pochodnych i porównano je z dokładniejszymi wartościami obliczonymi ze wzoru:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x - \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2}, \tag{18}$$

za Δ x przyjęto 0.01

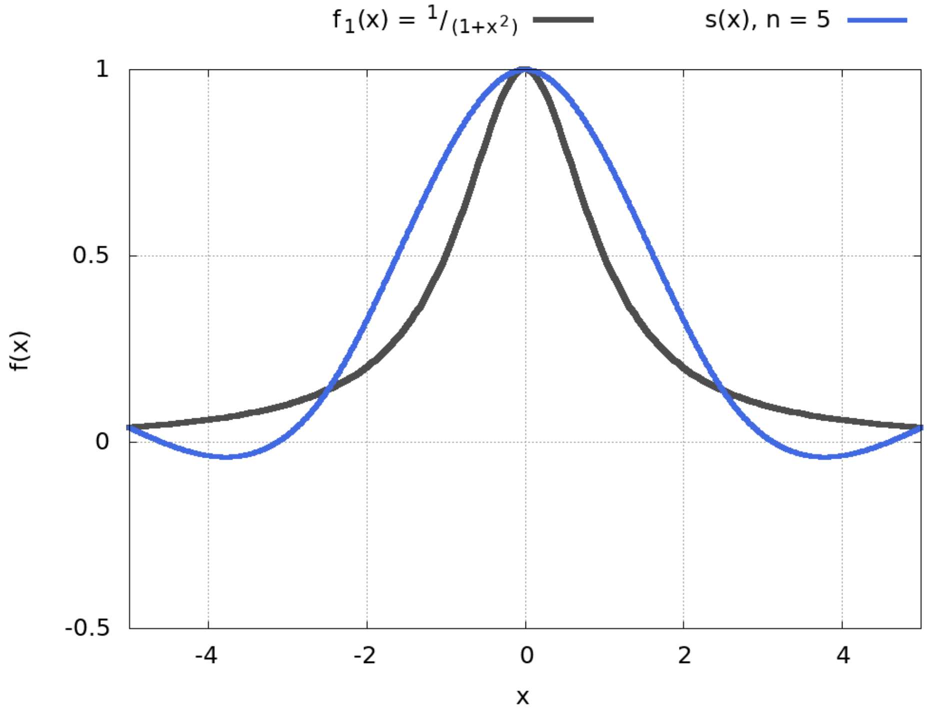
3. Wyniki

Dzięki programowi w języku C, oraz funkcji z biblioteki numerycznej Numerical Recipes stworzono odpowiednie funkcje, które wykorzystując skrypt Gnuplota pozwoliły na wygenerowanie wykresów:

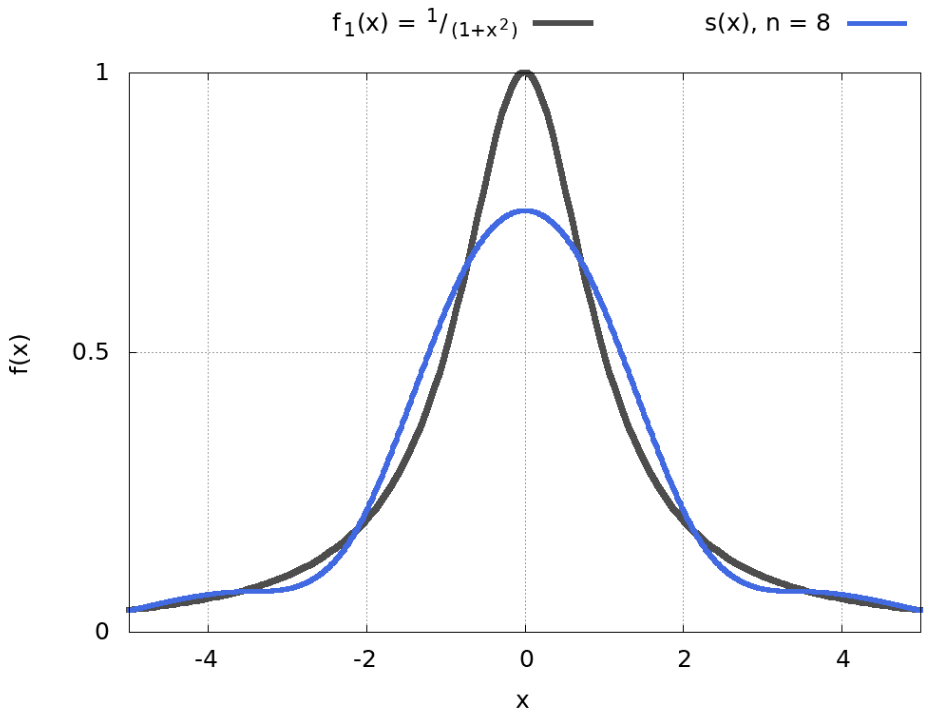


Rysunek 1.: *Wartości drugich pochodnych wyznaczone algorytmem interpolacji funkcji* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n = 10 węzłów porównane z wartościami wynikającymi z ilorazu różnicowego oraz z pochodną wyprowadzoną*

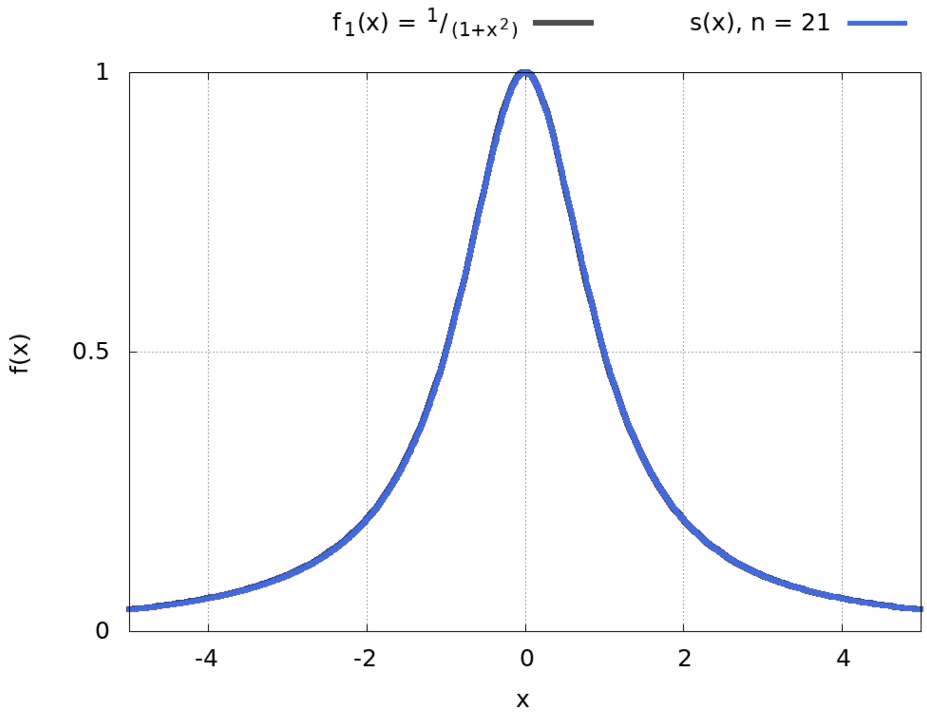
analitycznie.



$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{n} = \mathbf{5} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \mathbf{2.5}$

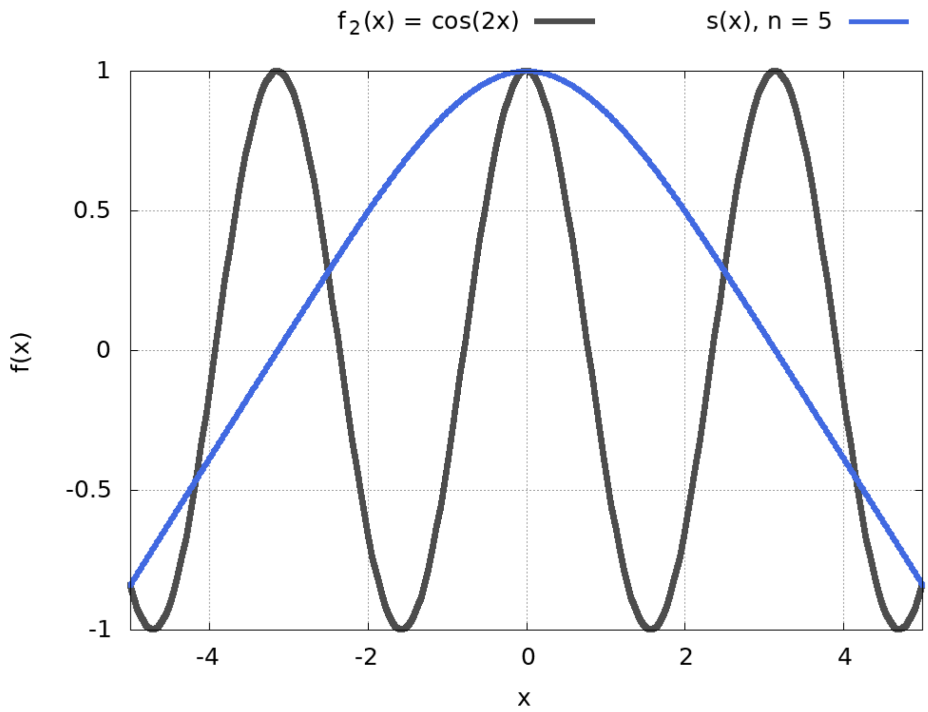


$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{n} = \mathbf{8} \Rightarrow \boldsymbol{h} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{7}}$

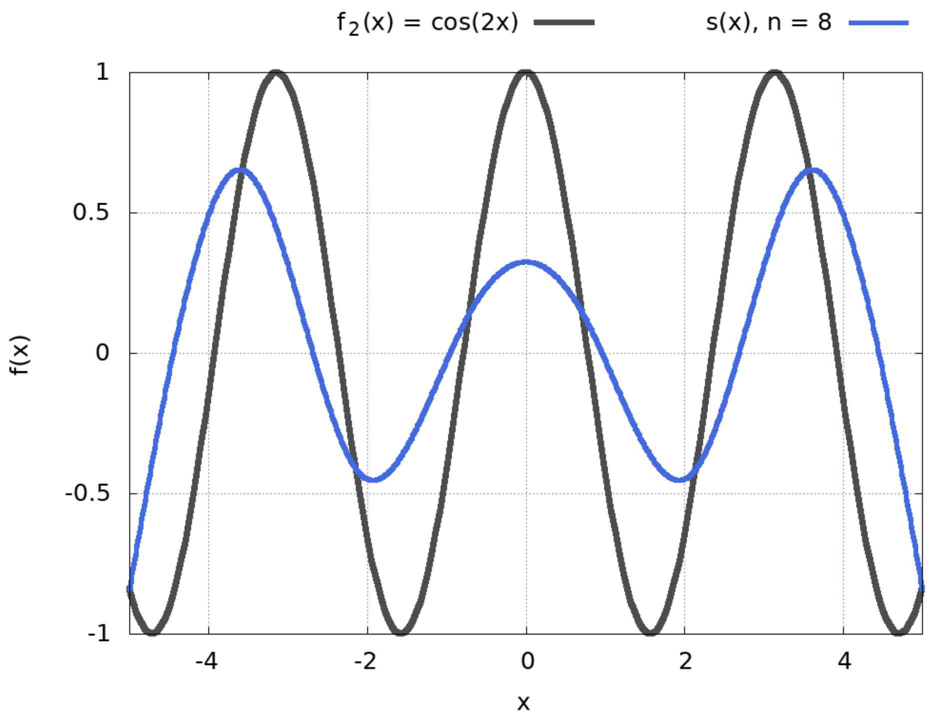


$(\boldsymbol{c})\boldsymbol{n} \;=\; \mathbf{21} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{h} \;=\; \mathbf{0.5}$

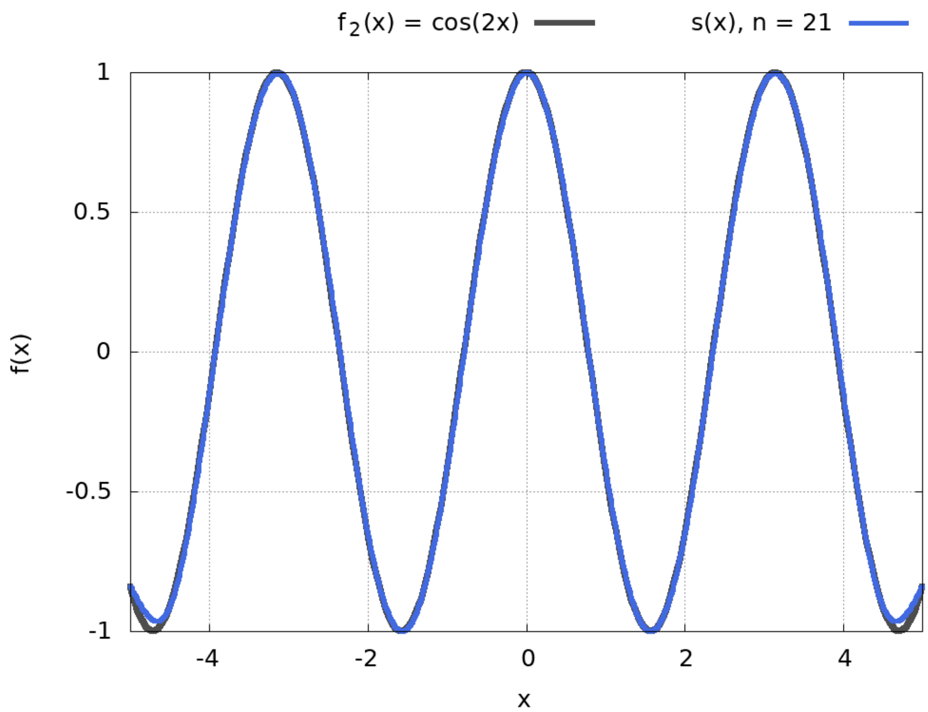
Rysunki 2. a) -c): *Wyniki interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.*



$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{n} \;=\; \mathbf{5} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{h} \;=\; \mathbf{2.5}$



$$(b)\, n = 8 \Rightarrow h = \frac{10}{7}$$



$$(c)\, n = 21 \Rightarrow h = 0.5$$

Rysunki 3. a) - c): *Wyniki interpolacji funkcji $f_2(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi dla n węzłów.*

Analizując rysunek 1., na którym widać wyznaczone wartości funkcji $f_1(x)$ dla 10 węzłów, możemy zauważyć przewagę w dokładności wartości wynikającymi z pochodnej wyprowadzonej analitycznie. Chociaż na krańcach przedziału punkty te się pokrywają, jednak dla środkowych wartości odbiegają.

Dla rysunku 2. a)-c) wraz we wzrostem ilości węzłów możemy zaobserwować zwiększającą się jakość interpolacji. Dla wartości n = 21 funkcja ta pokrywa się w całości przedziału z funkcją analityczną. Dodatkowo można zauważyć, że dla nieparzystej ilości węzłów ekstremum funkcji interpolowanej i interpolującej pokrywają się.

W przypadku funkcji sinusoidalnych z rysunku 3. a)-c) nasuwają się podobne wnioski jak w przypadku poprzedniego rysunku, tj. zwiększona ilość węzłów wpływa na poprawę wyników interpolowania. Kolejną analogią, jest niemal idealne odwzorowanie na rysunku 3c) jednak należy zauważyć delikatne rozbieżności na krańcach przedziału, które można zniwelować większą ilością węzłów.

4. Wnioski

Interpolacja funkcji sklejanymi w bazie jest szybką i efektywną metodą dla równoległych węzłów. Niewielka ilość węzłów (n=21) wystarczyła na uzyskanie relatywnie dobrego wyniku, a wraz z jej wzrostem możliwa jest widoczna poprawa interpolacji. Znaczącą poprawą względem metody interpolacji Newtona z poprzednich zajęć laboratoryjnych, jest wyeliminowanie efektu Rungego, bez konieczności optymalizacji położeń węzłów. Należy uważać szczególnie na funkcje okresowe, ponieważ tak jak w naszym przypadku rysunek 3a) odbiega znacznie od oczekiwanego, nawet ilość 21 węzłów nie zagwarantowała idealnego wyniku jak w przypadku $f_1(x)$, gdzie rysunek 2c) pokrywa się idealnie.