

# **Sprawozdanie 6**

**Metody Numeryczne - Laboratoria**

## **Temat laboratoriów:**

**Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda Newtona).**



**WFIS AGH**

**15.04.2021**

**Łukasz Wajda**

# 1. Wstęp teoretyczny

Równanie nieliniowe równanie matematyczne, które można zapisać w postaci:

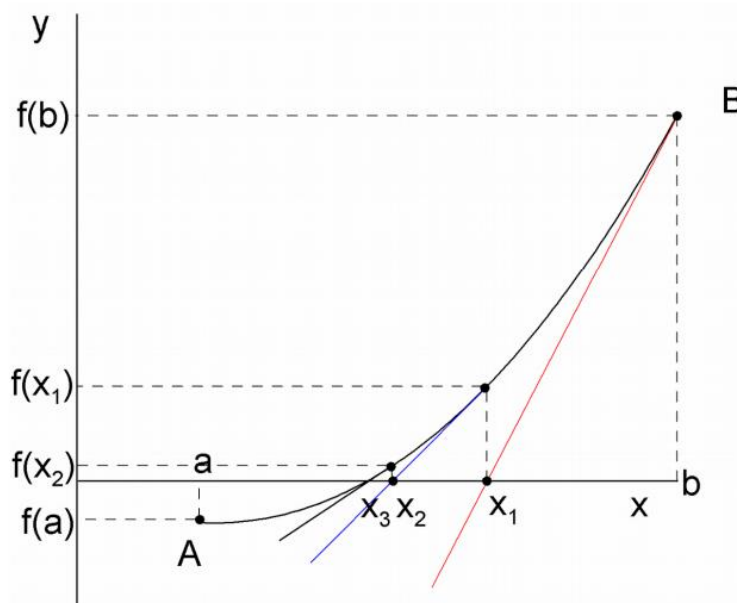
$$f(x) = 0 \quad (1)$$

przy czym  $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ , dla  $i \geq 2$ .

W rzeczywistości poszukiwanie rozwiązań tego typu równań jest bardzo potrzebne. Niestety nie istnieją ogólne reguły prowadzące do znalezienia pierwiastków takiego rozwiązania (poza szczególnymi przypadkami), ponieważ równanie w tej formie może zarówno posiadać kilka pierwiastków lub też nie posiadać żadnego. Analityczne rozwiązywanie tego typu zagadnień bardzo często również nie jest najprostsze, dlatego stosuje się różne metody numeryczne, które w pewnym okolicznościach i przy pewnych założeniach są w stanie przybliżyć nam takie rozwiązanie.

Na naszych laboratoriach skorzystaliśmy z metody Newtona (zwana również metodą Newtona-Raphsona lub metodą stycznych). Jest to algorytm iteracyjny wyznaczania przybliżonej wartości pierwiastka funkcji. Jest metodą jednopunktową, w której przyjmuje się następujące założenia dla funkcji  $f$ :

- W przedziale  $[a, b]$  znajduje się dokładnie jeden pierwiastek.
- Funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału, tj.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .
- Pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w tym przedziale.



Wykres 2: Wykres ilustrujący metodę Newtona (stycznych)

Algorytm działania jest następujący:

1. z końca przedziału  $[a, b]$  w którym funkcja ma ten sam znak co druga pochodna należy poprowadzić styczną do wykresu funkcji  $y = f(x)$ . W ten sposób wykonujemy jedną iterację mniej, bo zbliżamy się od pierwiastka z jednej strony, jak pokazano na Wykresie 2.
2. styczna przecina oś  $OX$  w punkcie  $x_1$  który stanowi pierwsze przybliżenie

rozwiązania.

3. sprawdzamy czy  $f(x_1) = 0$ , jeśli nie to z tego punktu prowadzimy kolejną styczną.
4. druga styczna przecina oś OX w punkcie  $x_2$  który stanowi drugie przybliżenie.
5. kroki 3-4 powtarzamy iteracyjne aż spełniony będzie warunek:

$$|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon \quad (2)$$

Równanie stycznej poprowadzonej z punktu B:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b). \quad (3)$$

Dla  $y = 0$  otrzymujemy pierwsze przybliżenie:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (4)$$

Równanie stycznej w  $k$ -tym przybliżeniu:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k). \quad (5)$$

Wzór iteracyjny na położenie  $k$ -tego przybliżenia pierwiastka równania nieliniowego:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Rząd zbieżności metody wynosi  $p = 2$ .

Na naszych zajęciach szukaliśmy zera danego wielomianu:

$$f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0 = 0, \quad (7)$$

dzieląc wielomianu  $f(x)$  przez dwumian  $(x - x_j)$ . W ten sposób otrzymujemy:

$$f(x) = (x - x_j) \cdot (b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + b_0) + R_j, \quad (8)$$

Współczynniki  $b_k$  i resztę  $R_j$  wyznaczamy za pomocą równania rekurencyjnego:

$$b_n = 0, \quad (9)$$

$$b_k = a_{k+1} + x_j \cdot b_{k+1}, \quad (10)$$

$$R_j = a_0 + x_j \cdot b_0, \quad (11)$$

dla  $k = n - 1, n - 2, \dots, 0$ .

Ponownie dzielimy wielomian  $f(x)$  przez dwumian  $(x - x_j)$  i otrzymujemy:

$$f(x) = (x - x_j)^2 \cdot (c_{n-2} \cdot x^{n-2} + c_{n-3} \cdot x^{n-3} + \dots + c_0) + R'_j \cdot (x - x_j) + R_j. \quad (12)$$

Współczynniki obliczamy za pomocą tego samego równania rekurencyjnego. Wyliczamy kolejne przybliżenia zera wielomianu:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R'_j}. \quad (13)$$

Metoda ta działa na bardzo podobnej zasadzie, co metoda siecznych, z tym że w przypadku metody Newtona kolejnymi przybliżeniami pierwiastka równania nieliniowego są miejsca zerowe kolejnych stycznych do naszej zadanej funkcji  $f(x)$ .

## 2. Zadanie do wykonania

Problemem, z którym przyszło nam się zmierzyć na szóstym laboratorium był problem rozwiązywania równania nieliniowego:

$$f(x) = x^5 + 14 \cdot x^4 + 33 \cdot x^3 - 92 \cdot x^2 - 196 \cdot x + 240. \quad (14)$$

Na samym początku wypełniliśmy wektor  $\vec{a}$  współczynnikami zadanego wielomianu i ustaliliśmy stopień wielomianu  $N$ . W dalszej kolejności ustaliliśmy punkt startowy na  $x_0 = 0.0$  oraz wyznaczyliśmy aktualny stopień wielomianu  $n$ . Następnie iteracyjnie wyznaczyliśmy reszty z podwójnego dzielenia wielomianu przez dwumian  $(x - x_j)$  z zastosowaniem wzorów (9), (10), (11) oraz kolejne przybliżenia szukanego pierwiastka  $x_{j+1}$  poprzez implementację wzoru (13), aż do uzyskania zadanej dokładności  $\varepsilon = 10^{-7}$ . Ostatecznie przed przybliżeniem kolejnego zera zredukowaliśmy wielomian poprzez przepisanie współczynników wielomianu niższego stopnia  $b_k$  do wektora  $a_k$ .

## 3. Wyniki

W poniższych tabelach przedstawiono uzyskane rezultaty działania programu zapisane w pliku „wyniki.dat”. Na niebieskim polu zaznaczono uzyskane miejsca zerowe z najlepszą dokładnością.

Miejsce zerowe	Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
1	1	1.22449	240	-196
1	2	0.952919	-43.1289	-158.813
1	3	0.999111	10.5714	-228.86
1	4	1	0.195695	-220.179
1	5	1	7.96468e-05	-220
1	6	1	1.32729e-11	-220

**Tab.1** Kolejne przybliżenia pierwszego miejsca zerowego

Miejsce zerowe	Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
2	1	-5.45455	-240	-44
2	2	-4.46352	-120.975	122.071
2	3	-4.10825	-24.2755	68.3304
2	4	-4.00957	-4.31754	43.7539
2	5	-4.00009	-0.347977	36.6891
2	6	-4	-0.00323665	36.0065
2	7	-4	-2.90891e-07	36

**Tab.2** Kolejne przybliżenia drugiego miejsca zerowego

Miejsce zerowe	Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
3	1	15	-60	4
3	2	9.20218	5850	1009
3	3	5.53752	1687.53	460.488
3	4	3.38316	469.259	217.818
3	5	2.33534	118.159	112.767
3	6	2.0277	22.07	71.739
3	7	2.00021	1.67505	60.9441
3	8	2	0.0128842	60.0073
3	9	2	7.83733e-07	60

**Tab.3** Kolejne przybliżenia trzeciego miejsca zerowego

Miejsce zerowe	Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
4	1	-2.30769	30	13
4	2	-2.94284	5.32544	8.38462
4	3	-2.99954	0.403409	7.11433
4	4	-3	0.00321531	7.00092
4	5	-3	2.10929e-07	7

**Tab.4** Kolejne przybliżenia czwartego miejsca zerowego

Miejsce zerowe	Numer iteracji	Przybliżone miejsce zerowe	Reszta z dzielenia wielomianu	Reszta z powtórnego dzielenia wielomianu
4	1	-10	10	1
4	2	-10	0	1

**Tab.5** Kolejne przybliżenia piątego miejsca zerowego

Na podstawie wyżej zamieszczonych tabel można zauważyć, że do znalezienia poszczególnych miejsc zerowych wielomianu wymagana jest różna liczba iteracji. Co więcej, istnieje wyraźna zależność pomiędzy wartością  $x_{it+1}$  i  $R_{it+1}$ . Im pierwsza liczba jest bliższa rzeczywistemu miejscu zerowemu, tym mniejsza jest wartość  $|R_{it+1}|$ . Fakt, że uzyskanie powyższych pierwiastków wymagało liczby iteracji mniejszej niż IT\_MAX wskazuje na to, że obliczenia zakończyły się z powodu uzyskania zbieżności (różnica pomiędzy kolejnymi

dwoma przybliżeniami uzyskała wystarczająco małą wartość, w naszym algorytmie  $10^{-7}$ ) w maksymalnie dziewięciu (Tab.3) i minimalnie dwóch iteracjach (Tab.5), a nie wyczerpania liczby możliwych iteracji, zatem można wnioskować o poprawności otrzymanych danych. Obserwujemy również, że ostatnie miejsce zerowe zostało znalezione niemal natychmiast.

## 4. Wnioski

Metoda Newtona jest zwykle szybko zbieżna. Odległość pomiędzy kolejnymi dwoma punktami  $x_{k+1}$  i  $x_k$  maleje. Kolejne punkty  $x_k$  leżą coraz bliżej pierwiastka funkcji. Kolejność odnajdywania zer i ilość iteracji potrzebnych do ich znalezienia jest związana prawdopodobnie z odległością od punktu startowego - te bliżej znajdowane są jako pierwsze. Gdy spadnie poniżej dokładności wyznaczania pierwiastka, obliczenia można przerwać. Dzięki temu moglibyśmy uniknąć błędów w postaci symbolu nan (not a number). Wynika z tego, iż w metodzie Newtona obliczenia kończymy w trzech przedstawionych we wstępie teoretycznym przypadkach.

Co ciekawe jest to również znacznie optymalniejsza metoda od metody siecznych w sensie ilości potrzebnych operacji, które musimy wykonać w trakcie jednej iteracji. W dodatku rząd zbieżności Newtona jest większy od rzędu metody siecznych, oznacza to, że metoda Newtona będzie szybsza.

Stosując metodę Newtona kłopotem może być obliczenie pierwiastków dla których zbieżność algorytmu staje się liniowa.