AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

# Metody Numeryczne Laboratoria

## Sprawozdanie nr 9

*Aproksymacja w bazie wielomianów Grama*

Łukasz Wajda, 06.05.2021 r.

# 1. Wstęp teoretyczny

Zakładając istnienie f(x) - funkcji, którą aproksymujemy, która ponadto $f \in X$ , gdzie X jest przestrzenią liniową.

Możemy mówić o aproksymacji liniowej funkcji f(x) polegającej na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, \dots, a_m$ funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_m\phi_m(x)\,, \tag{1}$$

gdzie $\phi_i(x)$ to funkcje bazowe $(m+1)$ wymiarowej podprzestrzeni liniowej $x_{m+1}(x_{m+1} \in X)$. Żądamy, aby funkcja F(X) spełniała:

$$\|f(x) - F(x)\| = minimum\,. \tag{2}$$

Wybór podprzestrzeni i bazy zależy od rodzaju problemu:

1. podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:
$$1\,, sin(x)\,, cos(x)\,, sin\,(2x)\,, cos(2x)\,, \dots\,, sin(kx)\,, cos(kx)\,,$$
2. podprzestrzeń wielomianów stopnia m z bazą:
$$1\,, x\,, x^2\,, \dots, x^m\,,$$
3. podprzestrzeń funkcji, których o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu, np.:
$$exp(a_0 + a_1x + a_2x^2)\,.$$

Przykładami norm stosowanych w aproksymacji są: norma Czebyszewa, norma $L_2$ czy norma $L_2$ z wagą.

Aproksymacja średniokwadratowa dla funkcji ciągłej f(x) określonej w przedziale [a , b] polega na poszukiwaniu minimum wartości całki:

$$\|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx\,, \tag{3}$$

lub sumy dla funkcji określonej na dyskretnym zbiorze n+1 punktów:

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)\,[F(x_i) - f(x_i)]^2\,, \tag{4}$$

gdzie $w(x_i) \geq 0$ dla $i = 0, 1, \dots, n$ .

Metoda aproksymacji średniokwadratowej polega na znalezieniu najlepszego przybliżenia średniokwadratowego funkcji f(x) na zbiorze $X = (x_j)$ .

Dysponując układem funkcji bazowych w podprzestrzeni $X_n : \phi_i(x)$ dla $i = 0,1, \dots, m$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x) \,. \tag{5}$$

Dla $F(x)$ liczymy normę $L_2$:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^{n} w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x_j) \right]^2 = \sum_{j=0}^{n} w(x_j) R_j^2 \,, \tag{6}$$

gdzie $R_j$ jest odchyleniem w punkcie $x_j$ .

Następnie szuka się minimum funkcji H (wielu zmiennych) ze względu na współczynniki $a_0, a_1, \dots, a_m$ :

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0, dla\ k\ = 0, 1, \dots, m \,. \tag{7}$$

Warunek ten generuje m+1 równań liniowych z m+1 niewiadomymi:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^{n} w(x_j) \left[ f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x_j) \right] \phi_k(x_j) = 0\ \ , dla\ k = 1, 2, \dots, m \,. \tag{8}$$

Powyższy układ równań zwany jest układem normalnym. Ponieważ funkcje bazowe są liniowo niezależne, istnieje więc dokładnie jedno rozwiązanie minimalizujące wartość H. Aproksymacją średniokwadratową w bazie wielomianów ortogonalnych definiujemy: Funkcję $f(x)$ i $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi na dyskretnym zbiorze punktów $x_1, x_2, \dots, x_n$ : ,

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i) = 0 \,, \tag{9}$$

jeżeli f(x) i g(x) spełniają warunki:

- $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0$ ,
- $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i)]^2 > 0$ .

W aproksymacji średniokwadratowej ciąg funkcyjny $\{\phi_m(x)\} = \phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \ldots, \phi_m(x)$ stanowi bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kiedy narzucimy:

- $\sum_{i=0}^{n} \phi_j(x_i)\phi(x_i) = 0\,, \iff \mathrm{j} \neq \mathrm{k}\,,$
- $\sum_{i=0}^{n} \upphi_\mathrm{j}^2(x_i) > 0$ - nie wszystkie węzły są zerami tych wielomianów.

Wówczas macierz układu normalnego przy aproksymacji wielomianami ortogonalnymi jest macierzą diagonalną, nazywamy ją dobrze uwarunkowaną, co oznacza, że posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Aby wyznaczyć wielomiany ortogonalne na siatce dla węzłów równoległych:

$$x_i = x_0 + i \cdot h\,, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,, \tag{10}$$

wykonujemy przekształcenie:

$$q = \frac{x - x_0}{h}\,, \quad x_i \to q_i \tag{11}$$

Poszukujemy ciąg wielomianów postaci:

$$F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q + a_1(q-1) + \cdots + a_k q(q-1)\ldots(q-k+1)\,, \tag{12}$$

spełniające warunek ortogonalności:

$$\sum_{i=0}^{n} F_k^{(n)}(q) F_k^{(n)}(i) = 0 \iff \mathrm{j} \neq \mathrm{k}\,. \tag{13}$$

Wykorzystując postać wielomianu czynnikowego:

$$q^{[k]} = q(q-1)\ldots(q-k+1) \Rightarrow F_k^{(n)}(q) = a_0 + a_1 q^{[1]} + a_2 q^{[2]} + \cdots + a_k q^{[k]}\,, \tag{14}$$

oraz normując wielomiany do 1, tzn. że mają postać:

$$\widehat{F_k^{(n)}}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \cdots + b_k q^{[k]}. \tag{15}$$

Szukane wielomiany ortogonalne są wielomianami Grama:

$$\widehat{F_k^{(n)}}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}} \tag{16}$$

Znając bazę mona wyznaczyć funkcję aproksymującą $F(x)$ :

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \phi_i(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{c_k}{s_k} \widehat{F_k^{(n)}}(q) \,, \tag{17}$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} y_i \widehat{F_k^{(n)}}(x_i) \ \ i \ s_k = \sum_{q=0}^{n} \left( \widehat{F_k^{(n)}}(q) \right)^2 \ . \tag{18}$$

Aby wyznaczyć wielomiany ortogonalne nierównoległe posługujemy się rekurencją, tj. na podstawie znajomości wielomianów niższych stopni:

$$\phi_{j+1}(x) = \left(x - \alpha_{j+1}\right)\phi_j(x) - \beta_j \phi_{j-1}(x) \,, \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{19}$$

z warunkami początkowymi: $\phi_{-1}(x) = 0$, oraz $\phi_0(x) = 1$ .

Aby wyznaczyć współczynniki $\alpha_{j+1}$ , $\beta_j$ mnożymy równanie (19) przez $\phi_j(x_i)$ i sumujemy po $x_i$ wykorzystując ortogonalność funkcji. Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1} &= \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \phi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \phi_j^2(x_i)} \,, \\ \beta_j &= \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i \phi_{j-1} \phi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \phi_{j-1}^2(x_i)} \,. \end{aligned} \tag{20}$$

# 2. Zadanie do wykonania

Celem zadania jest wykonanie aproksymacji funkcji

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x) \,, \tag{21}$$

gdzie:

$$\begin{gathered} f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right) \cdot \left( \exp\left(\frac{-(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(\frac{-(x + x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \right) , oraz \\ C_{rand}, = \frac{Y - 0.5}{5} \,. \end{gathered} \tag{22}$$

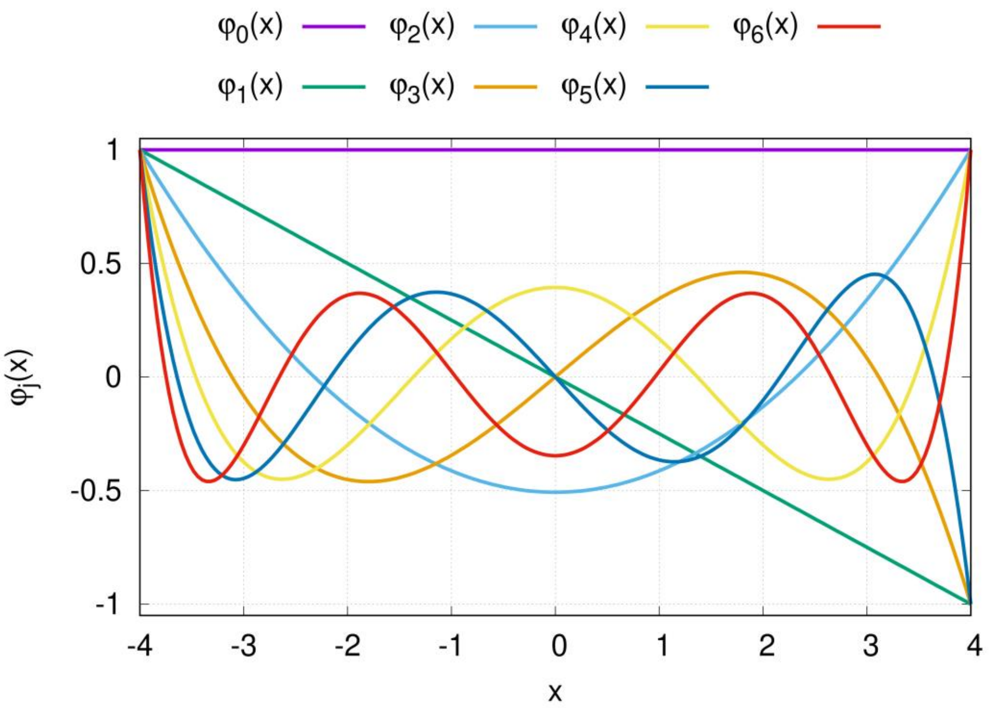
$C_{rand}$ to stochastyczne zaburzenie, dla pseudolosowej liczby o rozkładzie równomiernym $Y \in [0,1]$.

Aproksymacji dokonano przy użyciu wielomianów Grama w przedziale $[-4,\ 4]$ , dla liczby węzłów $N = 201$, $\sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{16}$, $x_0 = 2$.

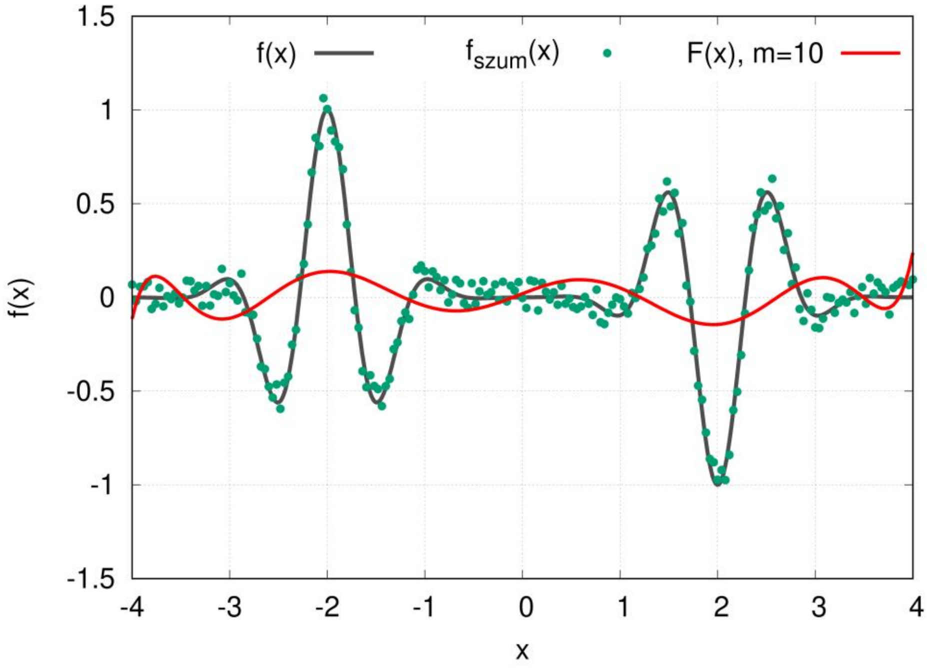
Ponadto sporządzono rysunek, na którym pokazano pierwsze 7 wielomianów Grama. Przeprowadzono aproksymację dla $m = 10, 30, 50$ liczby wielomianów z wagą $w(x) = 1$. Funkcję aproksymującą porównano na wykresach z funkcją aproksymowaną oraz bez szumu. W celu porównania wyników wykonano również aproksymację funkcji $f(x)$ bez szumu.

# 3. Wyniki

Dzięki programowi w języku C, oraz wskazówkom prowadzącego stworzono odpowiednie funkcje, które wykorzystując skrypt Gnuplota pozwoliły na wygenerowanie wykresów:

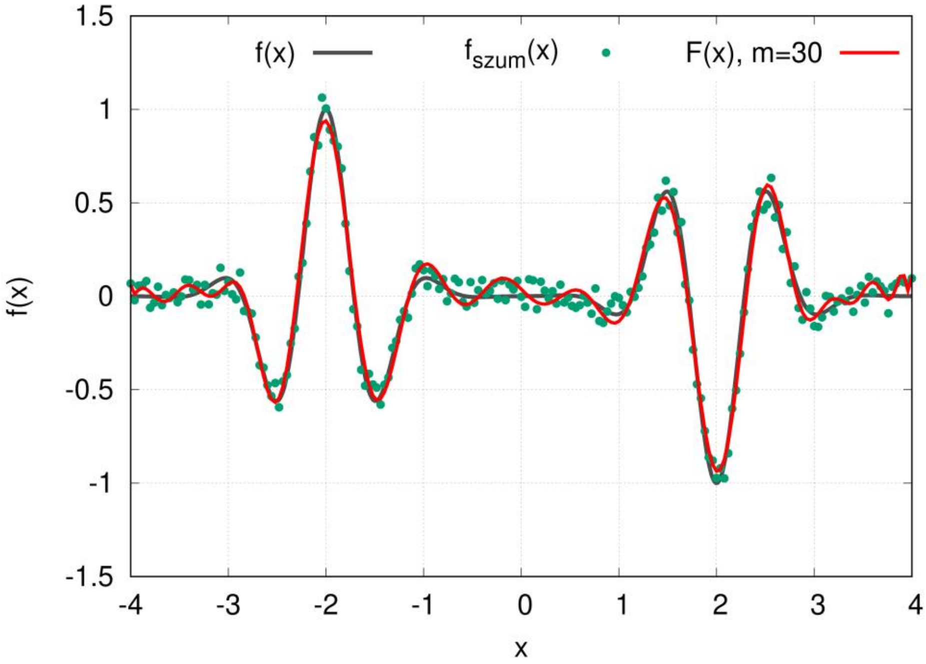



***Rysunek 1.:*** *Siedem pierwszych wielomianów Grama w przedziale [−4, 4]*



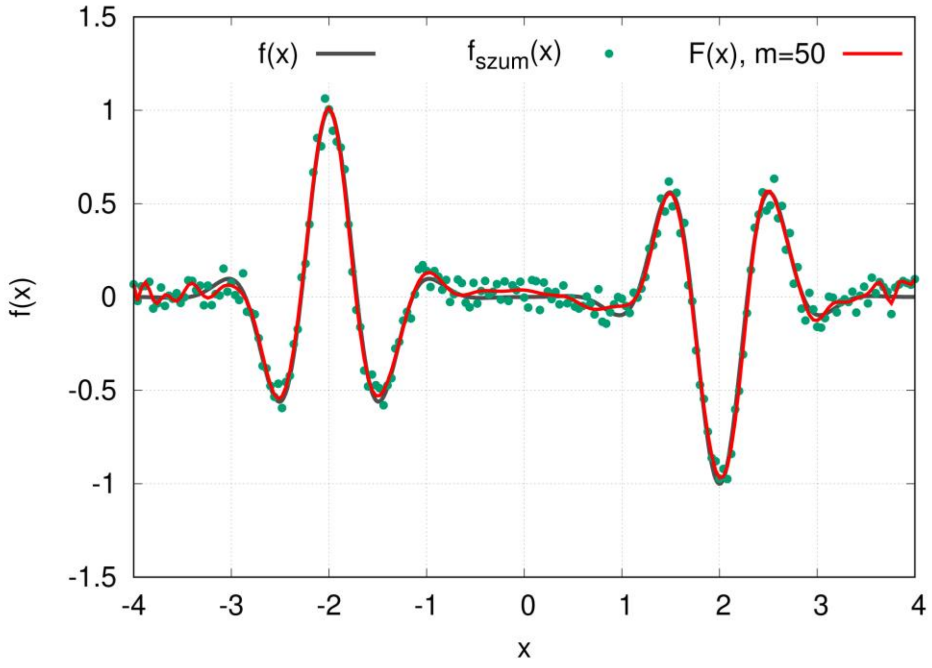
f(x)
$f_{szum}(x)$
F(x), m=10
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


$(a) m = 10$



f(x)
$f_{szum}(x)$
F(x), m=30
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
x


$(b)\ m = 3$



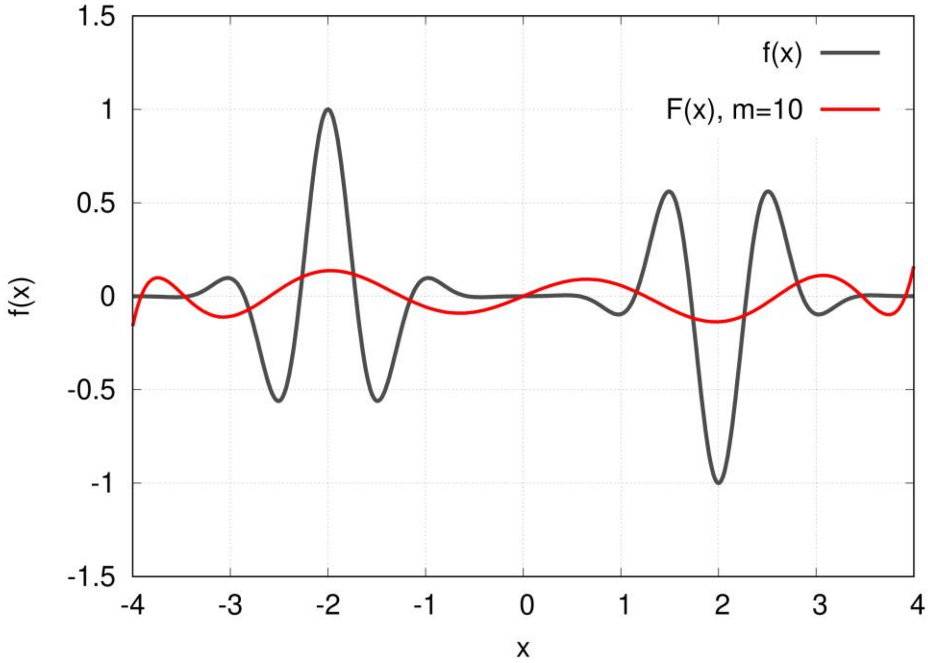

$(\boldsymbol{c})\boldsymbol{m}\ =\ \mathbf{50}$

***Rysunki 2. a) -c):*** *Wyniki aproksymacji według danych $f_{szum}(x)$ dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama: użyto m + 1 wielomianów*

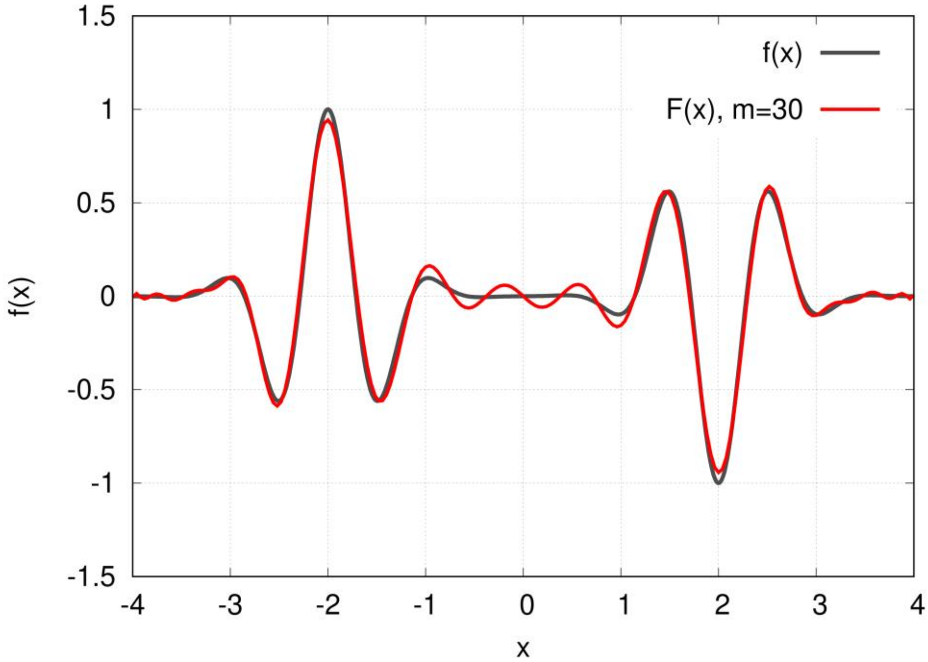
Analizując rysunek 1. można zauważyć, że funkcja dopiero po 2 przebiegu zaczyna przypominać wykres sinusoidalny, spowodowane jest to wartościami początkowymi: $\phi_{-1}(x) = 0$, $\phi_0(x) = 1$ niezbędnymi do wykorzystania wzoru rekurencyjnego.

Na rysunkach 2. a)-c) można zauważyć polepszenie się funkcji aproksymującej wraz z ilością wykorzystanych wielomianów. Przy 10 (rys. 2.a) funkcja ta całkowicie odbiega od funkcji z szumami czy też bez. Przy $m\ =\ 30$ (rys. 2.b) F(x) dokładniej dopasowuje się do miejsc mniej zagęszczonych funkcji z szumami (ekstrem), a przy $\mathrm{m}\ =\ 50$ (rys. 2.c) pomimo ciągłych zaburzeń stochastycznych aproksymacja jest w pewnym stopniu bardziej zbliżona do funkcji idealnej (bez szumu), wygładza się, chociaż wciąż pozostają pewne rozbieżności w okolicach „płaskich”.

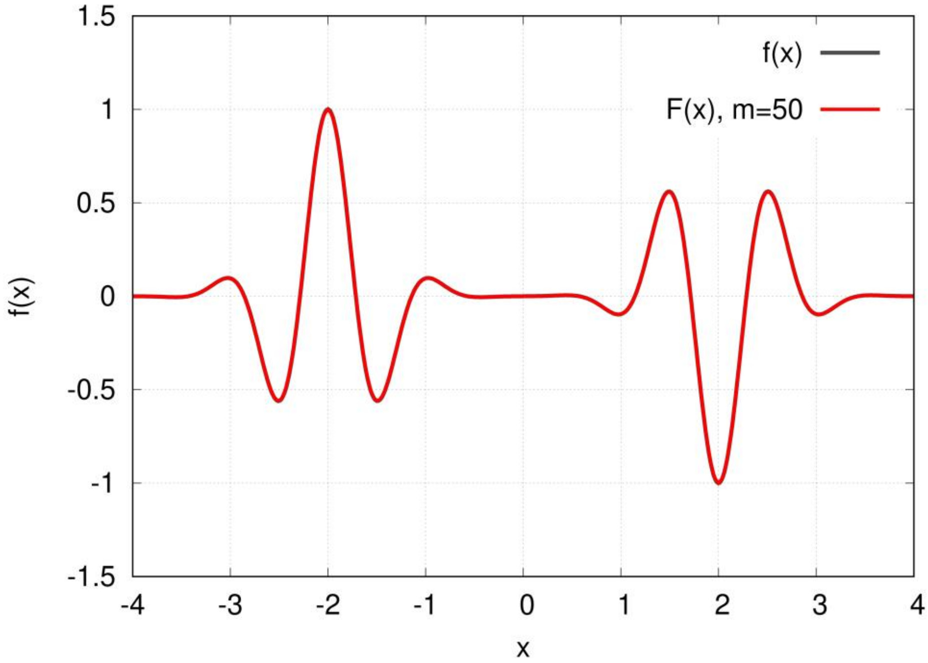
Podjęto próbę przeprowadzenia aproksymacji dla przypadku bez szumu, czyli równania (22), dla której otrzymano satysfakcjonujące wyniki dopiero dla $m\ =\ 50$.




$(\boldsymbol{a})\boldsymbol{m} = \mathbf{10}$




$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{m} = \mathbf{30}$




$(c) m = 50$

***Rysunki 3. a) - c):*** *Wyniki aproksymacji według danych f (x) (bez szumu) dla 201 węzłów przy pomocy różnej liczby wielomianów Grama:*

Jak widać z rysunku 3c) funkcje f(x) i F(x) pokrywają się idealnie, nie jesteśmy w stanie zobaczyć kontur jednej z nich. Można zauważyć, że na zwiększenie jakość aproksymacji ma wpływ zwiększenie liczby wielomianów. Wykresy uległy wygładzeniu, a oscylacje zostały zredukowane.

# 4. Wnioski

Aproksymacja w porównaniu do interpolacji daje znaczne szersze spektrum zastosowań. Cechuje się „odpornością" na zaburzenia oraz prostotą implementacji funkcji aproksymacyjnej.

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama daje idealny wynik (rys. 3c).) dla przypadków idealnych – bez szumów stochastycznych, oraz dla odpowiednio dużej ilości wielomianów.

Pomimo to potrafiliśmy uzyskać satysfakcjonujący wyniki nawet przy pewnych zakłóceniach, należy pamiętać o odpowiedniej ilości wielomianów, porównując rys. 2a i 2c wydaje się jakby aproksymowano dwie inne funkcje.

Podsumowując metoda aproksymacji funkcji w bazie wielomianów Grama poradziła sobie z postawionym problemem, dla odpowiednio dobranych parametrów.