Méthode de Jacobi

1. Introduction

La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires de type :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Elle repose sur la décomposition de la matrice A et l'approximation successive de la solution.

2. Formulation mathématique

Considérons un système linéaire AX=b, avec A∈R(n×n), B∈R(n×n).
On décompose A en :
A=D−E−F
avec :

1. D : matrice diagonale de A
2. E : partie triangulaire inférieure stricte
3. F : partie triangulaire supérieure stricte

La méthode de Jacobi correspond à la décomposition :
M=D, N=E+F
L'itération est alors :

$$X^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)X^{(k)} + D^{-1}b$$

Équivalent à, pour chaque composante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

3. Conditions de convergence

a. Diagonale strictement dominante :

Si :

$$\forall i, |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

la méthode converge pour tout vecteur initial X(0)

b. Matrice symétrique définie positive :

Si A est symétrique définie positive et 2D−A l'est aussi, la méthode converge.

---

4. Exemple

Pour le système :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale est strictement dominante ⇒ convergence garantie.

5. Avantages et limites

1. Facile à implémenter
2. Adaptée aux matrices creuses
3. Convergence lente
4. Peut ne pas converger si les conditions ne sont pas remplies