Méthode de Gauss-Seidel

1. Introduction

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires de type :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Elle repose sur la décomposition de la matrice A et l'approximation successive de la solution.
La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de Jacobi : elle utilise les composantes calculées à chaque itération immédiatement.

2. Décomposition

Considérons un système linéaire AX=b, avec A∈R(n×n), B∈R(n×n).
On décompose A en :
A=D−E−F
avec :

1. D : matrice diagonale de A
2. E : partie triangulaire inférieure stricte
3. F : partie triangulaire supérieure stricte

La méthode de Gauss-Seidel correspond à la décomposition :
M=D−E, N=F
L'itération est alors :

$$X^{(k+1)} = (D - E)^{-1}(FX^{(k)} + b)$$

Équivalent à, pour chaque composante :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

3. Convergence

a) Diagonale strictement dominante ⇒ convergence
b) Matrice symétrique définie positive ⇒ convergence

4. Exemple

Pour le système : (même exemple que Jacobi avec matrice tridiagonale):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ Méthode converge car A est SDP.

---

5. Avantages et inconvénients

1. Convergence plus rapide que Jacobi
2. Efficace pour matrices SDP
3. Peut diverger si matrice mal conditionnée
4. Moins parallélisable