Fakultät für Informatik

# Algorithmen und Datenstrukturen VU

4 Stunden / 6 ECTS Punkte

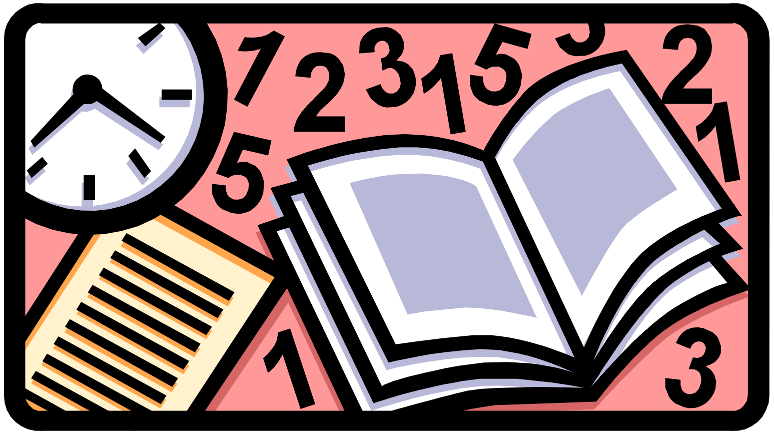
Vorlesungsteil

Ass.-Prof. Dr. Kathrin Hanauer
Forschungsgruppe Theorie und Anwendung von Algorithmen

Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Erich Schikuta
Dipl.-Ing. Helmut Wanek
Forschungsgruppe Workflow Systems and Technology

SS 2023

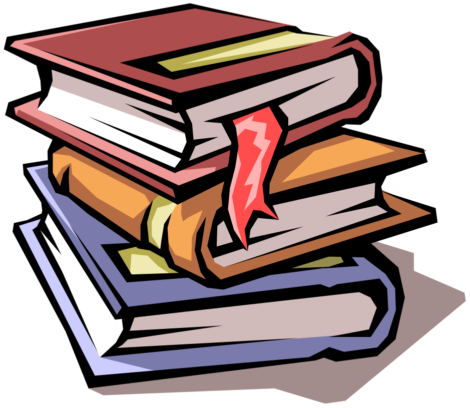
# Inhaltsüberblick



1. Algorithmen
   Paradigmen, Analyse
2. Datenstrukturen
   Motivation, Überblick
3. Vektoren
   Hashing, Sortieren
4. Listen
   Lineare Speicherstrukturen, Stack, Queue
5. Bäume
   Suchstrukturen
6. Graphen
   Traversierungs- und Optimierungsalgorithmen

R. Sedgewick, *Algorithmen in C++* (Teil 1-4), Addison Wesley, 3. überarbeitete Auflage, 2002

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest und Clifford Stein, *Introduction to Algorithms*, published by MIT Press, 2009



# *Danksagung*

Für Mitarbeit und Durchsicht der Folien geht mein besonderer Dank an Helmut Wanek und Martin Polaschek

Mein weiterer Dank geht an zahlreiche Studierende der letzten Jahre, die im Rahmen ihrer Übungen die Basis für einige der dynamischen Beispiele der VO lieferten.

# Kapitel 1
# Algorithmen

# Algorithmen

Verfahrensvorschriften, Anweisungsfolgen, Vorgangsmodellierungen, beschriebene Lösungswege

# Zwei Ziele

1. Algorithmen zu Problemstellungen finden!
   - Lösungsansätze finden, „konstruieren“
2. „Gute“ Algorithmen finden!
   - “bessere” Algorithmen
     - schneller, vollständiger, korrekter, ...
   - “leistungsfähigere” Datenstrukturen
     - kompakter, effizienter, flexibler, ...
   - Generell: Ersparnis an Rechenzeit und/oder Speicherplatz

# Aufgabe: “Summe der ganzen Zahlen bis n”

Straight-forward solution: “Aufsummieren der einzelnen Werte zwischen 1 und n”

$$summe \leftarrow \sum_{i \leftarrow 1}^{n} i$$

Realisierung (C/C++ Programm)

```
int sum(int n) {
  int i, summe = 0;
  for(i=1; i<=n; i++)
    summe += i;
  return summe;
}
```

Vergleiche mit anderem Programmieransatz, z.B. while- statt for-Schleife!

$\Rightarrow$ alternativer Programmierstil

# Alternative Realisierung (1)

Zwei Alternativen

1. Alternativer Programmierstil

   Problemlösungsansatz beibehalten, aber programmiertechnische Umsetzung überarbeiten

 Beispiel:

   Schleifenform (siehe oben)

   Rekursion statt Iteration

```
int sum(int n) {
  if(n <= 0) return 0;
  if(n == 1) return 1;
  else
    return n+sum(n-1);
}
```

# Alternative Realisierung (2)

universität wien

## 2. Alternativer Lösungsweg

Wahl eines anderen Problemlösungsweges, z.B.

Gauß´sche Summenformel

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Umsetzung

```
int sum(int n) {
  return (n*(n+1))/2;
}
```

Ableitung der Gauß'schen Summenformel

| | | |
|---|---|---|
| 1 | … | n |
| n | … | 1 |
| n+1 | … | n+1 |

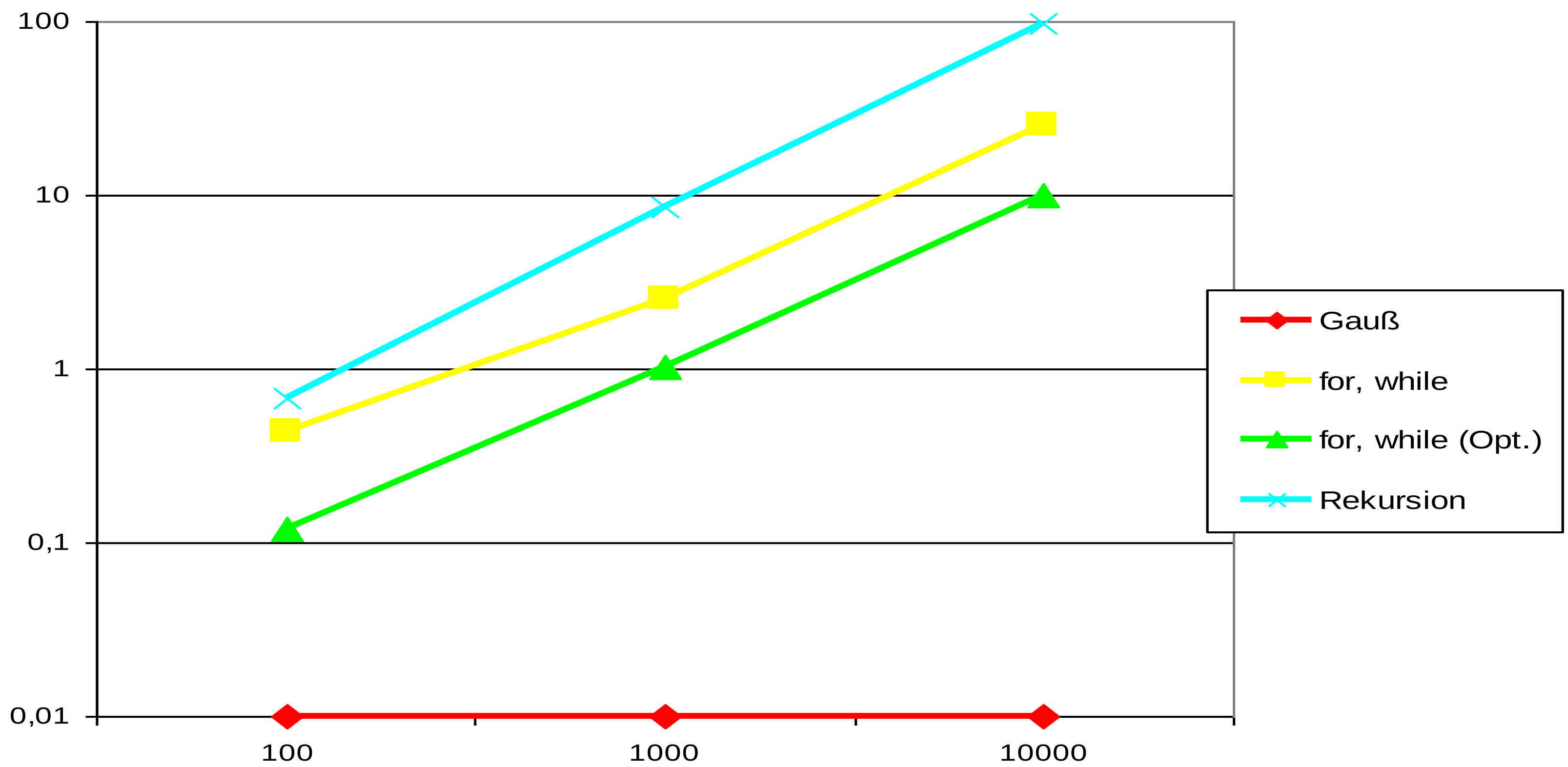
= 2 * Summe von 1 bis n

n * (n+1)

Daraus folgt die
Summen-Formel
n * (n+1) / 2

## Vergleich der Laufzeiten

Summenberechnung, 100000 Wiederholungen, CPU: 200 MHz Pentium



## *Was ist gut? Oder vielleicht besser?*

Problem: Laufzeitenvergleich führt nur zu punktueller Qualitätsbestimmung

- Laufzeit, Speicherplatzverbrauch
- Abhängig von
  - Computer
  - Betriebssystem
  - Compiler, ...

Ziel: Methodik für generellen Qualitätsvergleich zwischen Algorithmen

- Unabhängig von äußeren Einflüssen

# *1.2 Algorithmen-Paradigmen*

Generelle Techniken zur Lösung großer Klassen von Problemstellungen

*Greedy algorithms*

- “gefräßiger, gieriger” Ansatz, Wahl des lokalen Optimums

*Divide-and-conquer algorithms*

- schrittweises Zerlegen des Problems der Größe n in kleinere Teilprobleme

*Dynamic programming*

- dynamischer sukkzessiver Aufbau der Lösung aus schon berechneten Teillösungen

# *1.2.1 Greedy (1)*

In jedem Schritt eines *Greedy* (*gierigen*) Algorithmus wird die Möglichkeit gewählt, die *unmittelbar* (lokal) den *optimalen* (kleinsten bzw. größten) *Wert* bezüglich der *Zielfunktion* liefert. Dabei wird die globale Sicht auf das Endziel vernachlässigt.

Vorteil:

- Effizienter Problemlösungsweg, oft sehr schnell, kann in vielen Fällen relativ gute Lösung finden

Nachteil:

- Findet oft keine optimale Lösung

## Beispiel: Münzwechselmaschine

"Wechsle den Betrag von 18.- in eine möglichst kleine Anzahl von Münzen der Größe 10.-, 5.- und 1.-"

Greedy Ansatz:

```
wähle größte Münze
 kleiner als Betrag
gib die Münze aus
subtrahiere ihren
 Wert vom Betrag
wiederhole solange
 bis Differenz gleich 0
```

d.h.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18.- | - | **10.-** | = | 8.- | ❿ |
| 8.- | - | **5.-** | = | 3.- | ❺ |
| 3.- | - | **1.-** | = | 2.- | ❶ |
| 2.- | - | **1.-** | = | 1.- | ❶ |
| 1.- | - | **1.-** | = | 0 | ❶ |

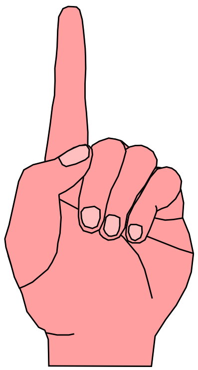
Lösung für diese Problemstellung nicht nur "gut" sondern sogar optimal!

# *Greedy (3)*

DOCH

Problem bei kleiner Änderung der Problemstellung:

5.- ➔ 6.-



Münzwerte 10.-, ***6.-*** , 1.-

greedy Ansatz liefert

18.- - **10.-** = 8.- ❿

8.- - **6.-** = 2.- ❻

2.- - **1.-** = 1.- ❶

1.- - **1.-** = 0 ❶

$\Rightarrow$ 4 Münzen

optimal wäre aber 3 x 6.-

18.- - **6.-** = 12.- ❻

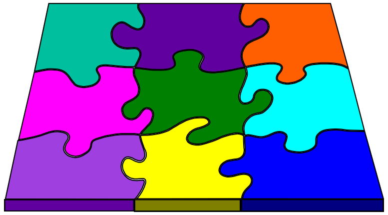
12.- - **6.-** = 6.- ❻

6.- - **6.-** = 0 ❻

$\Rightarrow$ 3 Münzen

# 1.2.2 Divide-and-conquer (1)

Bei *Divide-and-Conquer* (*Teilen-und-Herrschen*) Algorithmen wird ausgehend von einer generellen Abstraktion das Problem iterativ verfeinert, bis Lösungen für vereinfachte Teilprobleme gefunden wurden, aus welchen eine Gesamtlösung konstruiert werden kann.



Diese Vorgangsweise wird auch oft mit “stepwise refinement” oder “top-down approach” bezeichnet

# *Divide-and-conquer (2)*

Verschiedene Ansätze

*Problem size division*

- Zerlegung eines Problems der Größe n in eine endliche Anzahl von Teilproblemen kleiner n

*Step division*

- Aufteilen einer Aufgabe in eine Sequenz (Folge) von individuellen Teilaufgaben

*Case division*

- Identifikation von Spezialfällen zu einem generellen Problem ab einer gewissen Abstraktionsstufe

…

# Problem size division

**Durch Zerlegung Verringerung der Problemgröße, d.h.**

$$P(n) \Rightarrow k*P(m),$$

wobei $k, m < n$

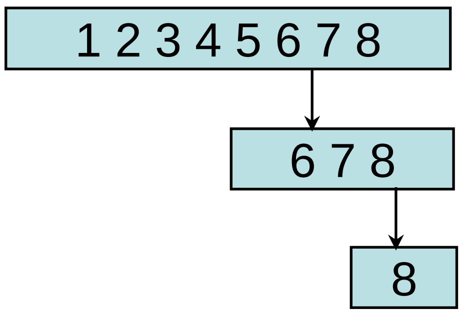
## Binäre Suche

Suche eine Zahl x in der (aufsteigend) sortierten Folge $z_1,z_2,..,z_n$ (allgemein: $z_l,z_{l+1},..,z_r$ mit $l=1$, $r=n$) und ermittle ihre Position i

Zerlegung: $k = 1$ und $m \approx n/2$

- Trivial: finde mittleren Index $m = (l+r) \div 2$
- Falls $z_m=x$ Ergebnis m, sonst
- Falls $x<z_m$ suche x im Bereich $z_l,z_2,..,z_{m-1}$ sonst suche x im Bereich $z_{m+1},z_{m+2},..,z_r$

Suche Zahl 8



# Step division

Idee: Straßenkehrer-Philisophie:

“Atemzug - Besenstrich - Schritt”

Beispiel

Gehaltserhöhung

| |
|---|
| Bestimme Mitarbeiter |
| Finde eindeutige Identifikation |
| Suche im Datenbestand |
| Stelle aktuelles Gehalt fest |
| Ändere auf neues Gehalt |
| Speichere Information |
| Vermerke Änderungsvorgang |

Speichere Information

| |
|---|
| Lösche alten Datensatz |
| Füge neuen Datensatz ein |

# Case division

## Ansatz: Identifikation von Fallunterscheidungen im Problemdatenbereich

Beispiel

Berechnung der Lösungen zu einer quadratischen Gleichung

$$az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{q}}{2a}, \quad q = b^2 - 4ac$$

$$\begin{array}{lll} \text{if} & q > 0, & \text{2 reelle Wurzeln} \\ & q = 0, & \text{reelle Doppellösung} \\ & q < 0, & \text{Paar komplexer Wurzeln} \end{array}$$

# 1.2.3 *Dynamic Programming (1)*

Problem

Oft ist eine Teilung des Originalproblems in eine ‘kleine’ Anzahl von Teilproblemen nicht möglich, sondern führt zu einem exponentiellen Algorithmus.

Man weiß aber, es gibt aber nur eine polynomiale Zahl von Teilproblemen.

Idee *Dynamic Programming* (*Dynamisches Programmieren*)

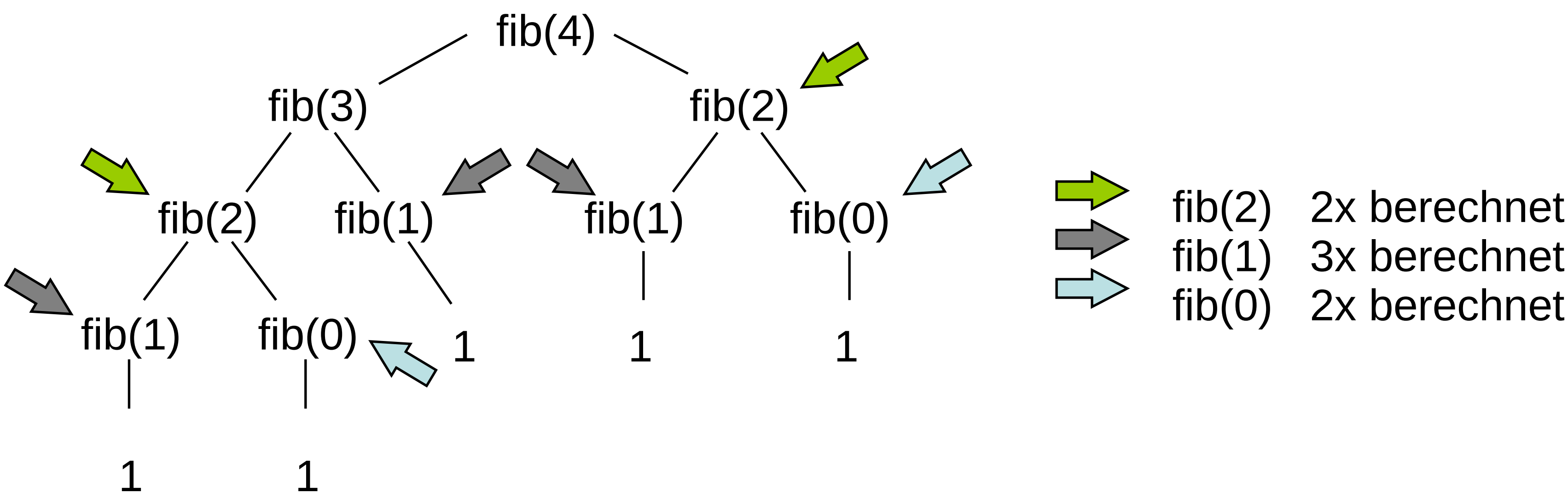
nicht Start von Problemgröße n und Aufteilung bis Größe 1,

SONDERN

Start mit Lösung für Problemgröße 1, Kombination der berechneten Teillösungen bis eine Lösung für Problemgröße n erreicht wurde.

Beispiel: Berechnung der Fibonacci Zahlen

```
int fib(int n) {
  if(n <= 1) return 1;
  return fib(n-1) + fib(n-2)
}
```




Problem: Wiederholte Lösung eines Teilproblems

# Dynamic Programming (3)

## Lösungsweg

Beginn mit Berechnung für **`fib(0)`**, Anlegen einer Tabelle aller berechneten Werte und Konstruktion der neuen Werte aus den berechneten Tabelleneinträgen.

Berechnungsrichtung

| fib(0) | fib(1) | fib(2) | … | fib(n) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | … | fib(n-2)+fib(n-1) |

Werte werden aus der Tabelle entnommen

```
int fib(int n) {
    int F[MAXSIZE];
    F[0] = 1; F[1] = 1;
    for(i = 2; i <= n; i++) {
      F[i] = F[i-1] + F[i-2];
    }
    return F[n];
  }
```

**Beachte:** Verbesserung der Laufzeit ABER zusätzlicher Speicherplatzbedarf

# 1.3 Analyse u. Bewertung von Algorithmen

Ziel ist objektive Bewertung von Algorithmen

Kriterien

*Effektivität*

Ist das Problem lösbar, ist der Ansatz umsetzbar in ein Programm?

*Korrektheit*

Macht der Algorithmus was er soll?

*Termination*

Hält der Algorithmus an, besitzt er eine endliche Ausführungszeit?

*Komplexität*

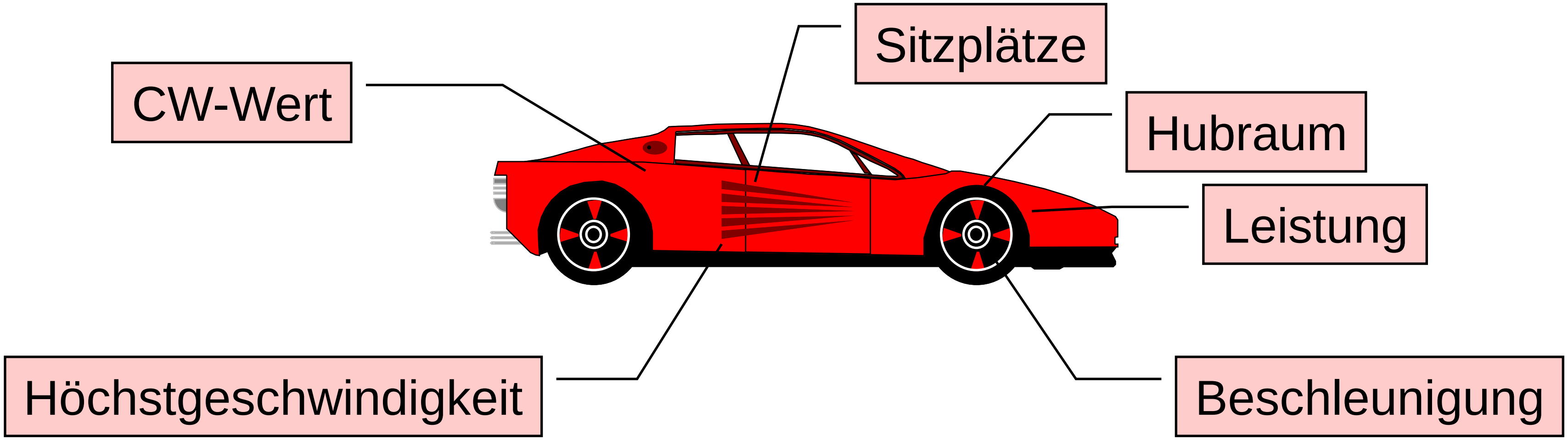
Wie schnell ist der Algorithmus $\Rightarrow$ Laufzeitkomplexität?

Wie strukturiert ist der Algorithmus $\Rightarrow$ Strukturkomplexität?

Wie viel Speicherplatz braucht der Algorithmus $\Rightarrow$ Speicherplatzkomplexität?

# Spezifische Kriterien

Auswahl




Statistische Kennzahlen

- Beurteilungsmöglichkeit, Klassifikationsmöglichkeit
  - Sportwagen, Lastwagen, Familienlimousine, ...

# Bewertung von Programmen

## Beipiel Sortierprogramm

Effektivität

Korrektheit

```
void selection(Element v[], int n) {
  int i, j, min;
  for(i = 0; i < n; i++) {
    min = i;
    for(j = i+1; j < n; j++)
      if(v[j] < v[min]) min = j;
    swap(v[min], v[i]);
  }
```

Laufzeit

Struktur

Termination

Klassfikation

schnell, korrekt, wartbar, problemüberdeckend, endlich, …

# 1.3.1 Effektivität

## Prinzip

- Algorithmus kann als lauffähiges Computerprogramm formuliert werden.
- effective $\Rightarrow$ it does work

## Problem

- Formulierung
- Transformation der Problembeschreibung in einen exekutierbaren Algorithmus
- Frage: Gibt es überhaupt eine ausführbare Lösung zum gegebenen Problem?


# 1.3.2 Korrektheit

## Produziert der Algorithmus das gewünschte Ergebnis?

Zwei Vorgangsweisen möglich

- Testen
- Verifikation

## Testen

- Vollständiges Austesten meist nicht möglich
- Statistischer Ansatz meist verfolgt, z.B. Pfadüberdeckung (Strukturelle Komplexität)
- Bestenfalls „Falsifizierung“ erreichbar
  - Es können nur Fehler gefunden werden, aber es kann keine Korrektheit bewiesen werden

# Verifikation

Mathematisch orientierte Verifikationstechniken erlauben es, die Korrektheit von Programmstücken in Abhängigkeit von Bedingungen an die Eingabedaten (Prämissen) zu beweisen

zwingt den Entwickler, Entwurfsentscheidungen noch einmal nachzuvollziehen und hilft beim Auffinden logischer Fehler

Algorithmus muss verstanden werden

je größer ein Programmsystem, umso schwieriger die Verifikation (in der Praxis kaum von Bedeutung)

Beweisansatz abhängig vom Problem

# Vollständige Induktion

## Beispiel: Gauß´sche Summenformel

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Ind. Anfang

für n = 1 → 1*2/2 = 1 ✓

Ind. Voraussetzung

(1+2+…+n-1) = (n-1)*n/2

Ind. Schluss

(1+2+…+n-1)+n = (n-1)*n/2 +n =

= ((n-1)*n +2n)/2 = ($n^2$-n+2n)/2 =

= n*(n+1)/2 ✓

# Programm-Verifikation

verschiedene Ansätze

- McCarthy, Naur, Floyd, Hoare, Knuth, Dijkstra, etc.

“Rückwärtsbeweis”:

- Strukturierter Ansatz, beruht auf *Prädikatentransformation*
- Überprüfung, ob die Voraussetzungen (*weakest preconditions, wp*) an die Eingabedaten garantieren, dass das Programm in einem Zustand terminiert, der das gewünschte Programmziel erfüllt.
- Man bezeichnet dieses Programmziel, welches die Aufgabe des Programms beschreibt, als *Korrektheitsbedingung, KB*
  - Hierzu darf das Programm nur aus einfachen Zuweisungen, Vergleichen, while-Form Schleifen und Anweisungsfolgen bestehen. Alle anderen Konstrukte müssen übersetzt werden.

## Beispiel

```
int sum(int n) {
  int s = 0;
  int i = 1;
  while(i <= n) {
    s = s + i;
    i = i + 1;
  }
  return s;
}
```

## Rückwärtsbeweis

*Korrektheitsbedingung KB* : $s = \sum_{i=1}^{n} i$

(I) *Schleifeninvariante SI*

$$SI: (s = \sum_{j=1}^{i-1} j) \wedge (i \leq n+1)$$

$$(1) SI \wedge \neg Bed \Rightarrow KB$$

$$s = (\sum_{j=1}^{i-1} j) \wedge (i \leq n+1) \wedge (i > n) \Rightarrow s = (\sum_{j=1}^{i-1} j) \wedge (i = n+1) \Rightarrow s = \sum_{j=1}^{n} j \Rightarrow KB$$

$$(2) SI \wedge Bed \Rightarrow wp(Schleifenblock \mid SI)$$

$$wp(s = s + i \mid wp(i = i+1 \mid (s = \sum_{j=1}^{i-1} j) \wedge (i \leq n+1))) \Rightarrow wp(s = s + i \mid (s = \sum_{j=1}^{i} j) \wedge$$

$$\wedge (i+1 \leq n+1)) \Rightarrow (s + i = \sum_{j=1}^{i} j) \wedge (i \leq n) \Rightarrow (s = \sum_{j=1}^{i-1} j) \wedge (i \leq n) \equiv SI \wedge Bed$$

(II) *Rest des Programms*

$$wp(s = 0 \mid wp(i = 1 \mid SI)) \Rightarrow wp(s = 0 \mid (s = \sum_{j=1}^{1-1} j) \wedge (1 \leq n+1)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 = \sum_{j=1}^{0} j) \wedge (0 \leq n) \Rightarrow \quad n \geq 0$$

# 1.3.3 Termination (1)

Hält der Algorithmus an, d.h. besitzt er eine endliche Ausführungszeit?

Falls nicht klar, manchmal folgende Technik einsetzbar:

Man finde die bestimmende Größe oder Eigenschaft des Algorithmus der die folgenden 3 Charakteristiken erfüllt:

- Eine 1-1 Abbildung dieser Größe auf die ganzen Zahlen kann aufgestellt werden.
- Diese Größe ist positiv.
- Die Größe nimmt während der Ausführung des Algorithmus kontinuierlich ab (dekrementiert).

# Termination (2)

Idee:

Die gefundene Größe besitzt bei Algorithmusbeginn einen vorgegebenen positiven Startwert, der sich kontinuierlich verringert. Da die Größe nie negativ werden kann, folgt, dass der Algorithmus terminieren muss, bevor die Größe kleiner 0 ist.

Beispiel:

Größe n

Termination bevor n < 0

```
int sum(int n) {
  if(n <= 0) return 0;
  if(n == 1) return 1;
  else
  return n+sum(n-1);
}
```

Dekrement

# 1.3.4 Laufzeitkomplexität

Die *Laufzeitkomplexität* liefert Aussagen über das Laufzeitverhalten von Algorithmen in Abhängigkeit von der Problemgröße

## Ziel

- Algorithmen zu vergleichen

## Ansatz

- Messen der Ausführungszeit der einzelnen Anweisungen
- Bestimmen, wie oft jede Anweisung beim Programmablauf ausgeführt wird
- Summe berechnen

## Problem

- Ausführungszeiten abhängig von Maschinen- bzw. Systemarchitektur, Übersetzungsqualität des Compilers, etc.

# Summe-Beispiel: simpler Ansatz

```
int sum(int n)
  int s = 0;
  int i = 1;
  while(i <= n) {
    s = s + i;
    i = i + 1;}
  return s;
}
```

Zeit in msec

$T_1 \Rightarrow 0.1$

$T_2 \Rightarrow 0.1$

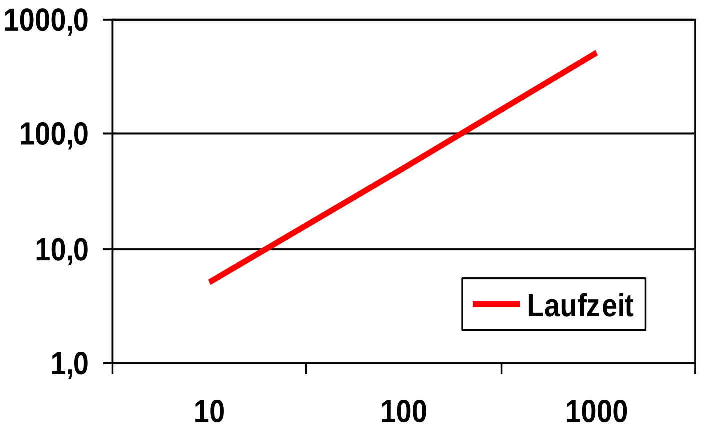
$T_3 \Rightarrow 0.3$

$T_4 \Rightarrow 0.1$

$T_5 \Rightarrow 0.1$

$T_6 \Rightarrow 0.1$

Gemessene Zeiten im Programm




## Berechnung der Laufzeit

$f_{sum}(n) = T_1+T_2+n*(T_3+T_4+T_5)+T_3+T_6$

$f_{sum}(10) = 0.1+0.1+10*(0.3+0.1+0.1)+0.3+0.1 = 5.6$

$f_{sum}(100) = 0.1+0.1+100*(0.3+0.1+0.1)+0.3+0.1 = 50.6$

$f_{sum}(1000) = 0.1+0.1+1000*(0.3+0.1+0.1)+0.3+0.1 = 500.6$

$f_{sum}(n) = 0.6 + n*(0.5)$

# Probleme des simplen Ansatzes

- Entspricht einem Ansatz des „Ausprobierens“
- Nur punktuell möglich
  - bestimmte Problemgröße, Datenverteilung
- Sonderfälle problematisch
- Systemabhängig
  - Hardware, Prozessor, ...
  - Betriebssysteme, Compiler, Bibliotheken, ...
- Lastabhängig
- Frage schwer zu beantworten, ob „graduelle“ oder „grundsätzliche“ Verbesserung erreichbar

Grundprinzip

Die exakten Werte der Ausführungszeiten sind uninteressant!

Über die *Ordnungsnotation* möchte man Aussagen treffen (siehe Ziel), dass Algorithmus A grob gesehen gleich schnell wie Algorithmus B ist.

Durch Beschreiben der Laufzeiten von A und B über Funktionen f(n) und g(n) wird diese Fragestellung auf Vergleich dieser Funktionen zurückgeführt.

Man betrachtet das *asymptotische Wachstum* der Ausführungszeiten der Algorithmen bei wachsender Problemgröße n.

d.h., wenn die Problemgröße gegen Unendlich geht

# *Big - O / Ω / Θ - Notation*

*Big-O-Notation*: Eine Funktion f(n) heißt von der Ordnung O(g(n)), wenn zwei Konstanten $c_0>0$ und $n_0$ existieren, sodass $f(n) \leq c_0 g(n)$ für alle $n > n_0$.

liefert eine Obergrenze für die Wachstumsrate von Funktionen

$f \in O(g)$, wenn f höchstens so schnell wie g wächst.

z.B.: $17n^2 \in O(n^2)$, $17n^2 \in O(2^n)$

*Big-Ω-Notation*: Eine Funktion f(n) heißt von der Ordnung Ω(g(n)), wenn zwei Konstanten $c_0>0$ und $n_0$ existieren, sodass $f(n) \geq c_0 g(n)$ für alle $n > n_0$.

liefert eine Untergrenze für die Wachstumsrate von Funktionen

$f \in O(g)$, wenn f mindestens so schnell wie g wächst.

z.B.: $17n^2 \in \Omega(n^2)$, $2^n \in \Omega(n^2)$, $n^{37} \in \Omega(n^2)$

*Θ-Notation*: Das Laufzeitverhalten ist Θ(g(n)) falls gilt: $f(n) \in O(g(n))$ und $f(n) \in \Omega(g(n))$ (beschreibt das Laufzeitverhalten exakt)

# Weitere Notationen

*Little-o-Notation*: Eine Funktion f(n) heißt von der Ordnung o(g(n)), wenn für jedes c>0 ein $n_0$ existiert, sodass $f(n) \leq cg(n)$ für alle $n > n_0$.

f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar.

*Little-ω-Notation*: Eine Funktion f(n) heißt von der Ordnung ω(g(n)), wenn für jedes c>0 ein $n_0$ existiert, sodass $f(n) \geq cg(n)$ für alle $n > n_0$.

f dominiert g asymptotisch

*~-Notation*: $f(n) \sim g(n)$, wenn $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = 1$

f und g sind asymptotisch gleich.

# *Anmerkungen*

Statt $\in$ ist (leider) auch die Verwendung von = weit verbreitet, z.B.: f(x)=O(g(x)). Konfusionen vermeiden!

Die vorgestellten Notationen werden häufig als Landau-Notation, Bachmann-Landau-Notation, oder auch als Landau-Symbole, Bachmann-Landau-Symbole bezeichnet.

In der Mathematik sind die Definitionen im Allgemeinen etwas strenger formuliert. Es werden die Absolutbeträge der Funktionen f(x) und g(x) betrachtet. Dies ist in unserem Kontext nicht notwendig, da die für die Laufzeitanalyse verwendeten Funktionen immer nur positive Werte liefern.

Für das Symbol $\Omega$ ist in der Mathematik (vor allem in der Zahlentheorie) auch eine weitere Definition üblich, die mit der hier verwendeten unverträglich ist.

# Summen-Beispiel

Laufzeitschätzung: $f_{sum}(n) = T_1+T_2+n*(T_3+T_4+T_5)+T_3+T_6$

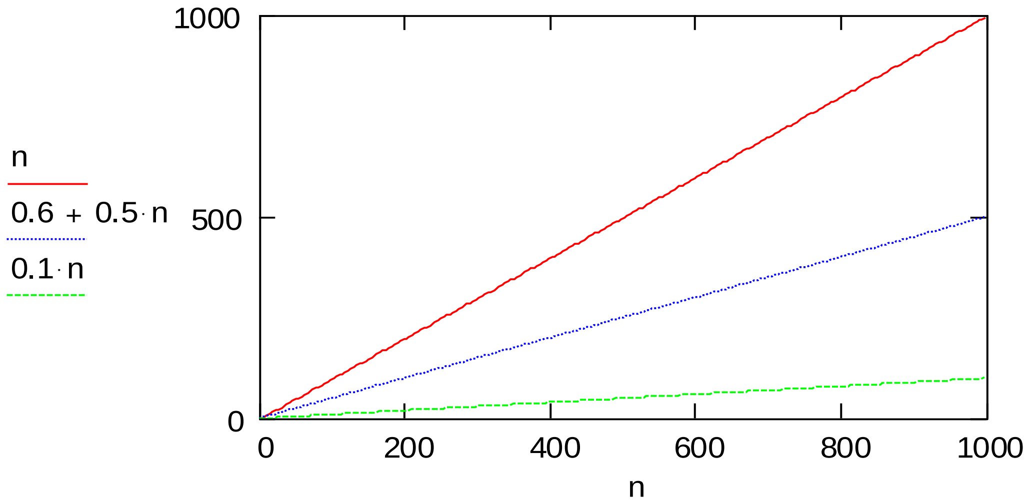
Messung: $T_1=0.1$, $T_2=0.1$, $T_3=0.3$, $T_4=0.1$, $T_5=0.1$, $T_6=0.1$

reale Werte, in der Implementierung gemessen

ergibt $f_{sum}(n) = 0.6+n*(0.5)$

$g(n)=n \Rightarrow$ Untergrenze: $0.1*g(n)$ Obergrenze: $h(n)=1*g(n)$

eine von vielen möglichen Grenzen




daraus folgt bezüglich der Ordnung des Algorithmus

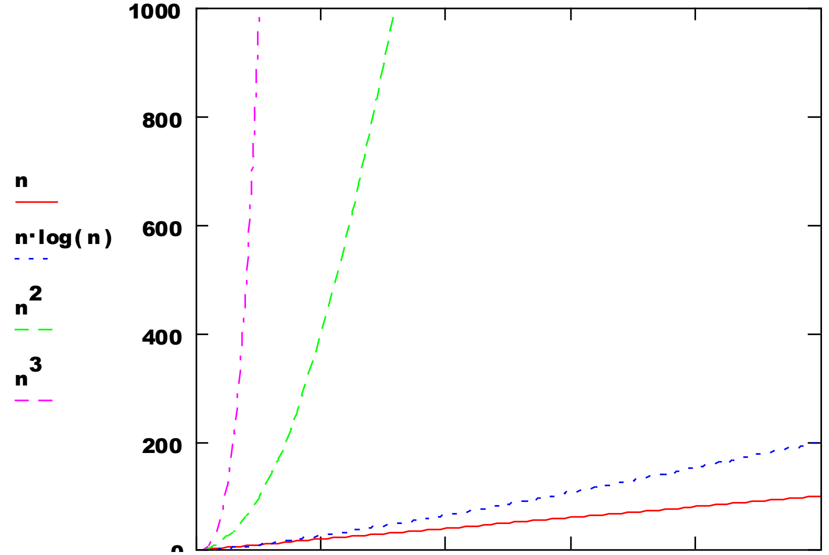
$$f_{sum}(n) \in O(n) \text{ und weiters } f_{sum}(n) \in \Omega(n), \text{ d.h. } f_{sum}(n) \in \Theta(n).$$

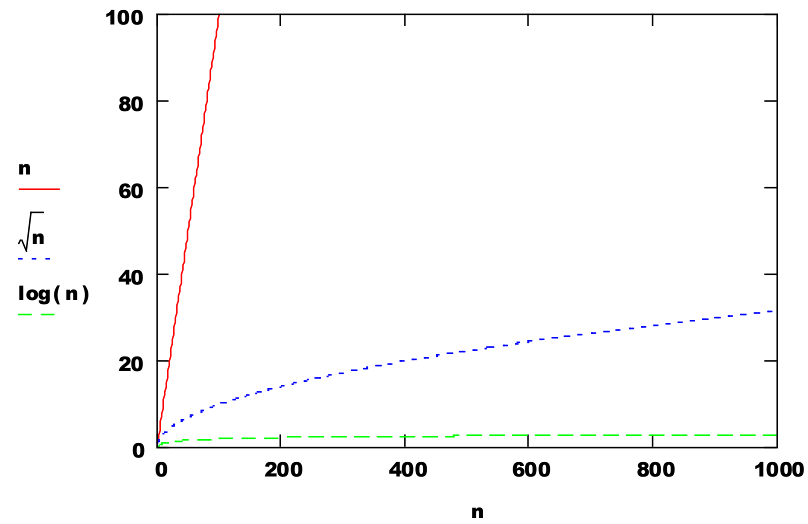
Die daraus für unser Beispiel ableitbare Aussage lautet, dass die Laufzeit des Algorithmus direkt proportional zur Problemgröße n ist

# Laufzeitenvergleich

Annahme vorgegebene Problemgröße und unterschiedliches Laufzeitverhalten

| Ordnung | Laufzeit |
|---|---|
| log n | $1.2 \times 10^{-5}$ sec |
| $\sqrt{n}$ | $3.2 \times 10^{-4}$ sec |
| n | 0.1 sec |
| n log n | 1.2 sec |
| n $\sqrt{n}$ | 6.5 sec |
| $n^2$ | 2.8 h |
| $n^3$ | 31.7 a |
| $2^n$ | über 1 Jahrhundert |

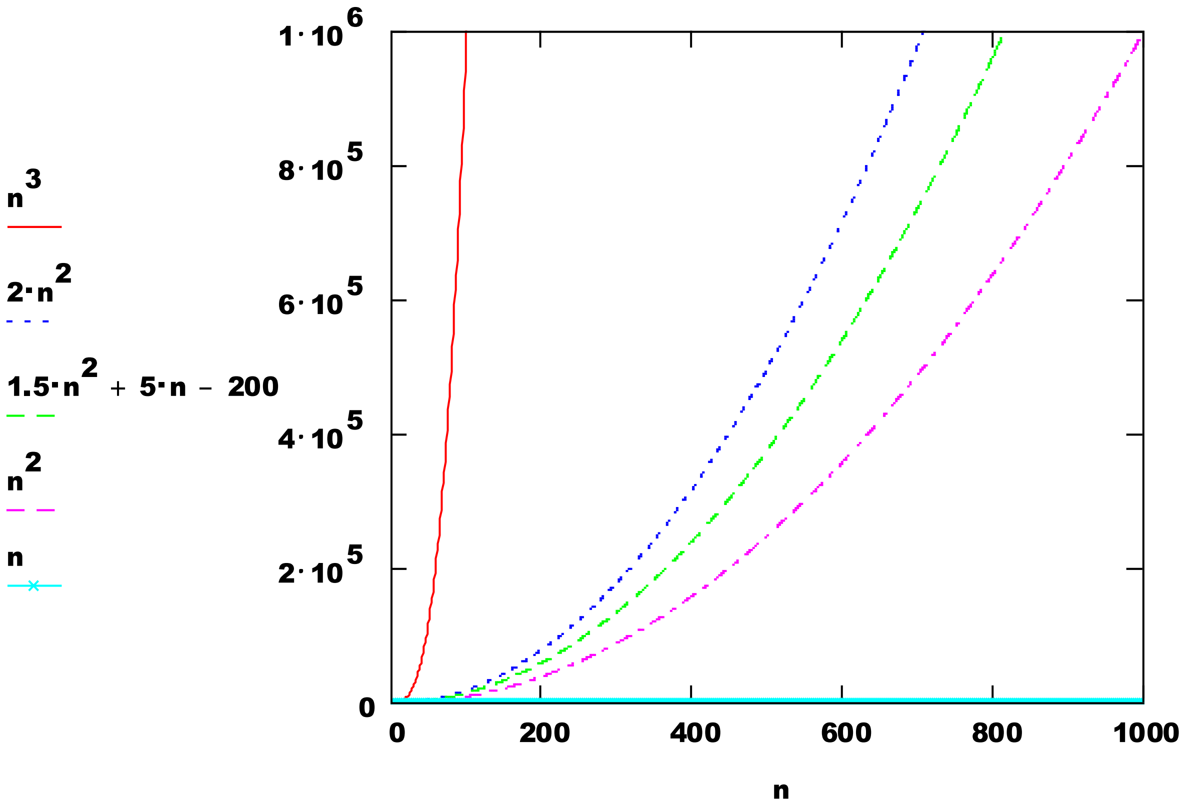


# Beschreibung des Laufzeitverhaltens

durch obere O(n) und untere Schranke Ω(n)

z.B.: $T(n) = 1.5n^2 + 5n - 200 \Rightarrow O(n^2)$, da $n^2 \leq T(n) \leq 2n^2$



# Prinzipien der mathematischen Analyse

- Definition der Problemgröße n
  - Finden eines geeigneten Problemparameters der die Problem-größe beschreibt. Dieser charakterisiert die Belastung (= f(n))
- *worst-case* versus *average-case*
  - worst-case: Verhalten im schlechtesten Fall, maximal zu erwartender Aufwand
  - average-case: ∅–Verhalten, Erwartungswert des Aufwandes

oft schwierig zu bestimmen

- Laufzeitanalyse über O(n) und Ω(n)
  - Ignoriere konstante Faktoren
  - Merke nur höchste Potenzen

# Ignoriere konstante Faktoren

Konstante Werte werden auf den Faktor 1 reduziert, d.h.

$T(n) = 13 * n \Rightarrow O(n)$

$T(n) = \log_2 (n) \Rightarrow O(\log(n))$, da $\log_x(n) = \log_a(n) / \log_a(x)$

# Merke nur höchste Potenz

Ignoriere alle anderen Potenzen außer der höchsten

$T(n) = n^2 - n + 1 \Rightarrow O(n^2)$

# Daher in Kombination:

$T(n) = 13*n^2 + 47*n – 11*\log_2(n) + 50000 \Rightarrow O(n^2)$

# Beispiel: Laufzeitanalyse ‘Bubblesort’

```
void bubble(Element v[], int n) {
  int i, j;                              T1
  for(i = n-1; i >= 1; i--)              T2
    for(j = 1; j <= i; j++)              T3
      if(v[j-1] > v[j])                  T4
        swap(v[j-1], v[j]);              T5
}
```

Problemgröße n

Informeller Ansatz:

Gleichung finden

Annahme $T_1 = \ldots T_5 = 1$

$T(n) = T_1 + (n-1)*(T_2 + (n-1)*(T_3+T_4+T_5))$

$T(n) = 1+(n-1)*(1+(n-1)*(1+1+1)) = 3n^2-5n+3$

Ignoriere konstante Faktoren

$T(n) = n^2-n+1$

Merke höchste Potenz

$T(n) = O(n^2) = \Omega(n^2) = \Theta(n^2)$

worst-case = best-case = average case

## Einfache Rekursion

```
int sum(int n) {
  if(n <= 0) return 0;
  if(n == 1) return 1;
  return n + sum(n-1);
}
```

$T_1$

$T_2$

$T_3$+T(n-1)

Lösungsansatz Rekurrenzgleichung:

$T(n) = T_1+T_2+T_3+T(n-1)$

$T(n) = T(n-1) + 1$ $\quad\quad T(0)=T(1)=1$

$T(n) = T(n-2) + 1 + 1$

…

$T(n) = \underbrace{1 + \ldots + 1 + 1}_{n}$

$T(n) = O(n)$

Einige wichtige Rekurrenzen

$T(n) =$ ***T(n-1)+n*** $\Rightarrow$
$\Rightarrow T(n) = n*(n+1)/2 =$ ***O(n²)***

$T(n) =$ ***T(n/2)+1*** $\Rightarrow T(n) = \log_2 n =$ ***O(log n)***

$T(n) =$ ***T(n/2)+n*** $\Rightarrow T(n) = 2*n =$ ***O(n)***

$T(n) =$ ***2*T(n/2)+n*** $\Rightarrow$
$\Rightarrow T(n) = n*\log_2 n =$ ***O(n*log n)***

$T(n) =$ ***2*T(n/2)+1*** $\Rightarrow T(n) = 2*n-1 =$ ***O(n)***

# Algorithmische Lücke

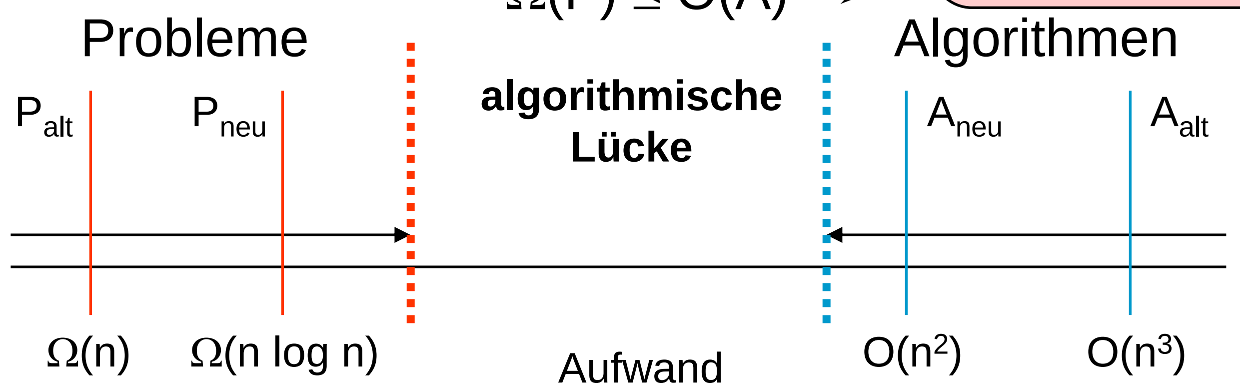
Eine *algorithmische Lücke* für ein Problem existiert, falls für die bekannten problemlösenden Algorithmen A gilt, dass ihr Aufwand größer als der ableitbare Lösungsaufwand für das Problem P ist.

O(A) dient zur Beschreibung des Algorithmus

$\Omega$(P) dient zur Beschreibung des Problems

Ziel:
die algorithmische Lücke zu schließen,
d.h. $\Omega(P) = O(A)$

$$\Omega(P) \leq O(A)$$




## Geschlossene Lücke

Suchen in sortierter Sequenz, $T(A) = O(\log(n)) = \Omega(\log(n))$

Sortieren, $T(A) = O(n*\log(n)) = \Omega(n*\log(n))$

## Offene Lücke

Graphenisomorphie, $T(A_{naiv})$ aus $O(\ |V|!\ )$

# 1.3.5 Laufzeitanalyse von rekursiven Programmen

Die Laufzeitanalyse von rekursiven Programmen ist meist nicht-trivial

Laufzeitverhalten eines rekursiven Programms lässt sich durch eine Rekurrenz beschreiben

Beispiel: Mergesort

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \mathit{if}\ n = 1 \\ 2T(n/2) + \Theta(n) & \mathit{if}\ n > 1 \end{cases}$$

wobei folgende Lösung angegeben wurde

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

# Lösungsansätze

Es existieren unterschiedliche Lösungsansätze, wie z.B.

Substitutionsmethode

- Erraten einer asymptotischen Grenze und Beweis dieser Grenze durch Induktion

Iterationsmethode

- Umwandlung der Rekurrenz in eine Summe und Anwendung von Techniken zur Grenzwertberechnung von Summen

Mastermethode

- Liefert Grenzen für Rekurrenzen der Form $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, wobei $a \geq 1$, $b > 1$ und $f(n)$ ist eine gegebene Funktion

# *Master Theorem*

Das *Master Theorem* stellt ein „Kochrezept“ zur Bestimmung des Laufzeitverhaltens dar

Vereinfachte Form (generelle Version Cormen et al.)

Es seien $a \geq 1$, $b > 1$ und $c \geq 0$ Konstante

Wenn $T(n)$ durch $aT(n/b) + \Theta(n^c)$ definiert ist, wobei $n/b$ entweder $\lfloor n/b \rfloor$ oder $\lceil n/b \rceil$ ist,

Dann besitzt $T(n)$ den folgenden asymptotischen Grenzwert

Fall 1: wenn $c < \log_b a$ (d.h. $b^c < a$) dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Fall 2: wenn $c = \log_b a$ (d.h. $b^c = a$) dann $T(n) = \Theta(n^c \log n)$

Fall 3: wenn $c > \log_b a$ (d.h. $b^c > a$) dann $T(n) = \Theta(n^c)$

## Binäres Suchen

```
int bs (int x, int z[], int l, int r) {
  if (l > r) // Schwelle, kein Element vorhanden
    return -1; // 0 verboten, da gültiger Indexwert!
  else {
    int m = (l + r) / 2;
    if (x == z[m])      // gefunden!
      return m;
    else if (x < z[m])
      return bs(x, z, l, m-1);
    else // x > z[m]
      return bs(x, z, m+1, r);
  }
}
```

Fall 1: wenn $c < \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
Fall 2: wenn $c = \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^c \log n)$
Fall 3: wenn $c > \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^c)$

Laufzeit: $T(n) = T(n/2) + 1 = T(n/2) + \Theta(1)$

$a = 1, b = 2, c = 0$

Fall 2, da $c = \log_b a \Rightarrow 0 = \log_2 1$, ergibt $T(n) = \Theta(\log n)$

# *Weitere Beispiele*

Fall 1: wenn $c < \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

Fall 2: wenn $c = \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^c \log n)$

Fall 3: wenn $c > \log_b a$ dann $T(n) = \Theta(n^c)$

## Beispiel: Mergesort

$T(n) = 2T(n/2) + n = 2T(n/2) + \Theta(n)$

$a = 2, b = 2, c = 1$

Fall 2, da $c = \log_b a \Rightarrow 1 = \log_2 2$, ergibt $T(n) = \Theta(n \log n)$

## Beispiel: $T(n) = 4T(n/2) + n = 4T(n/2) + \Theta(n)$

$a = 4, b = 2, c = 1$

Fall 1, da $c < \log_b a \Rightarrow 1 < \log_2 4$, ergibt $T(n) = \Theta(n^{\log_2 4}) = \Theta(n^2)$

## Beispiel: $T(n) = T(n/2) + n = T(n/2) + \Theta(n)$

$a = 1, b = 2, c = 1$

Fall 3, da $c > \log_b a \Rightarrow 1 > \log_2 1$, ergibt $T(n) = \Theta(n^1) = \Theta(n)$

# 1.3.6 Strukturelle Komplexität

Bewertende Aussage über den strukturellen Aufbau des Programms und der Programmteile untereinander, d.h. Bewertung des Programmierstils

interne Attribute

- Allgemein angenommen, dass Programmierstil mit den zu erwartenden Softwarewartungskosten korreliert.

Aussagen über die Qualität eines Softwareproduktes (externe Attribute)

- Fehleranfälligkeit
- Wartungsaufwand
- Kosten

Annahme:
interne Attribute sind mit externen Attributen korreliert!

These

- komplexes Programm $\Rightarrow$ hohe Kosten
- klares Programm $\Rightarrow$ geringere Kosten

# Grundsatz

„When you can measure what you are speaking about and express it in numbers you know something about it, but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meager and unsatisfactory kind.“

Lord Kelvin

# Softwaremetriken

Ziel Metriken (Maßzahlen) zu finden, die den Aufbau, Struktur, Stil eines *Moduls* (Programmstücks) bewerten und vergleichen lassen.

Anforderungen

- Gültigkeit
  - Misst tatsächlich was es vorgibt zu messen
- Einfachheit
  - Resultate sind einfach verständlich und interpretierbar
- Sensitivität
  - Reagiert ausreichend auf unterschiedliche Ausprägungen
- Robustheit
  - Reagiert nicht auf im Zusammenhang uninteressante Eigenschaften

# Messung der strukturellen Komplexität

## Fokus der Messung ist das Software-Modul

- Definition schwierig – Kann Funktion, Methode, Klasse, etc. sein

## Die *Intra-modulare Komplexität* beschreibt die Komplexität eines einzelnen SW Moduls

- *Modul Komplexität* (intern)
  - LOC, Line-of-codes (simpel)
  - NCSS, non commenting source statements
  - McCabe (zyklomatische Komplexität), …
- *Kohäsion* (extern)
  - Henry-Kafura Metrik (Informationsfluss), …

## Die *Inter-modulare Komplexität* beschreibt Komplexität zwischen Moduln - *Kupplung*

  - Fenton und Melton, …

# Zusammenhang Kupplung und Kohäsion

## Kupplung

Misst Komplexität der Beziehungen zwischen Moduln

## Kohäsion

Misst Informationsfluss von und nach Außen abhängig von der Modulgröße

## Meist Beziehung zwischen Kupplung und Kohäsion

Starke Kupplung
Schwache Kohäsion

Schwache Kupplung
Starke Kohäsion
(üblicherweise das Ziel guter SW-Entwicklung)

# 1.3.6.1 Intra-modulare Komplexität – Metrik von McCabe

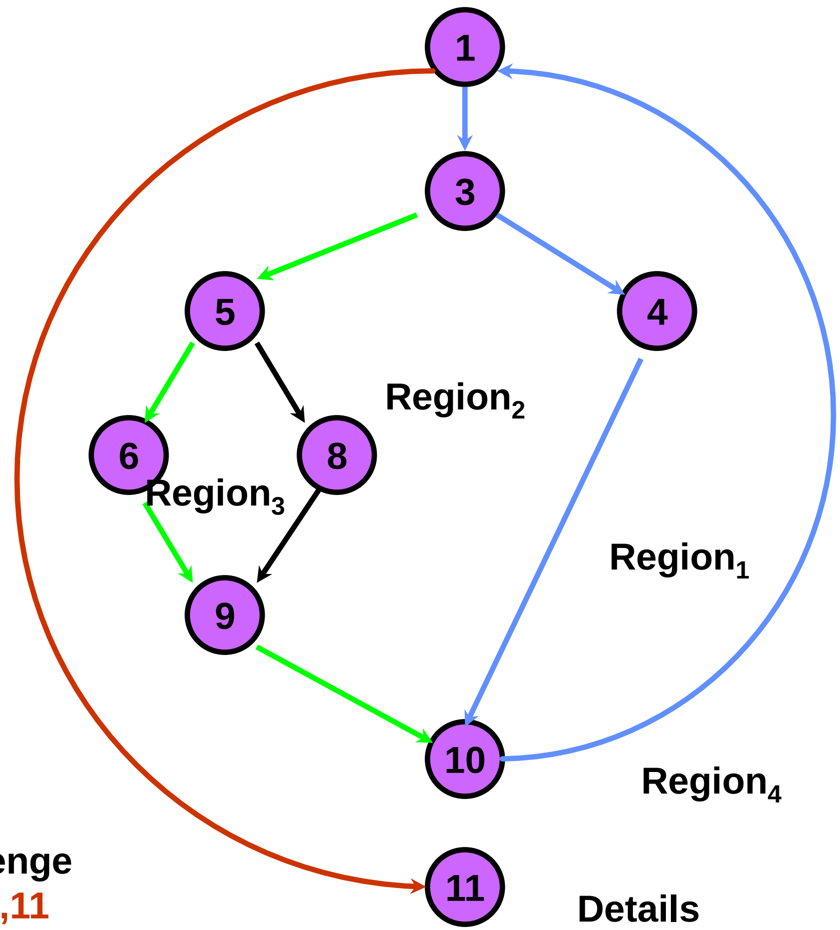
Die *Metrik von McCabe* ist ein Maß zur Beurteilung der Modul Komplexität

- Basiert auf der *zyklomatischen Komplexität* V = die Anzahl der unabhängigen Pfade in einem Programmgraph
- Bei einem unabhängigen Pfad wird mindestens eine 'neue' Kante im Programmablaufplan beschritten.
- Erfahrungswerte für die zyklomatische Komplexität

| V(G) | Einschätzung im Normalfall |
|---|---|
| < 5 | einfach |
| 5-10 | normal |
| > 10 | komplex, sollte restrukturiert werden |
| > 20 | schwer verständlich, wahrscheinlich fehlerhaft |

# Programmbeispiel

```
0:   void foo (int a) {
1:     while (a < limit) {
2:       doit1();
3:       if(check1(a))
4:         doit2();
5:       else { if(check2(a))
6:           doit3();
7:         else
8:           doit4();
9:       } // end else
10:    } // end while
11: } // end foo
```




**Basis Menge**
**Pfad 1: 1,11**
**Pfad 2: 1, 3,4,10,1,11**
**Pfad 3: 1,3,5,6,9,10,1,11**
**Pfad 4: 1,3,5,8,9,10,1,11**

**Details**
**Kanten = 11**
**Knoten = 9**
**Bedingungsknoten = 3**

# Zyklomatische Komplexität

## Mehrere Berechnungsmöglichkeiten

1. Die Anzahl der Regionen im Programmgraph G
2. V(G) = E - N + 2  (E = Anz. d. Kanten, N = Anz. d. Knoten)
3. V(G) = P + 1  (P = Anzahl der binären Bedingungsknoten)

## Zyklomatische Komplexität des Beispiels

1. Regionen = 4
2. V(G) = 11 - 9 + 2 = 4
3. V(G) = 3 + 1 = 4

In unserem Beispiel ist die magische Zahl 4, d.h.

„einfaches“ Programm (Metrik McCabe < 5)

# *1.3.6.2 Intra-modulare Komplexität – Henry-Kafura Metrik*

Maß zur Bestimmung der Kohäsion

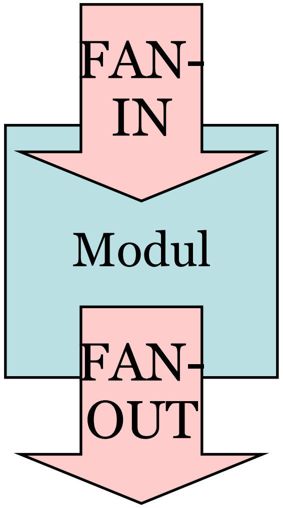
- Beschreibt die funktionale Stärke des Moduls; zu welchem Grad die Modulkomponenten dieselbe Aufgabe erfüllen

Die *Henry-Kafura Metrik* (Sallie Henry and Dennis Kafura) basiert auf Zusammenhang zwischen Modulkomplexität und Verbindungskomplexität zwischen Moduln

Maß für Modulkomplexität

- LOC
- NCSS
- McCabe

Quantifizierung des lesenden und verändernden Zugriffs des Moduls auf die Umgebung




Zählt die Datenflüsse zwischen Moduln

- $\text{FAN-IN}_m$: „Anzahl der Module die m verwenden“
  genauer: Anzahl der Datenflüsse, die im Modul m terminieren + Anzahl der Datenstrukturen, aus denen der Modul m Daten ausliest
- $\text{FAN-OUT}_m$: „Anzahl der Module die m verwendet“
  genauer: Anzahl der Datenflüsse, die vom Modul m ausgehen + Anzahl der Datenstrukturen, die der Modul m verändert

Henry-Kafura Formel

$C_{im} * (\text{FAN-IN}_m * \text{FAN-OUT}_m)^2$

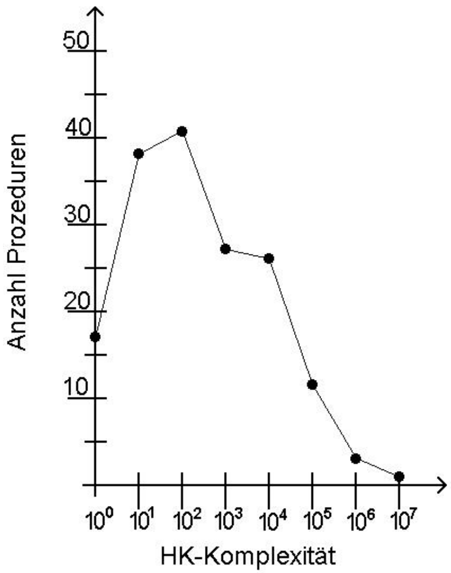
$C_{im}$ … Modulkomplexität (z.B. LOC, McCabe, …)

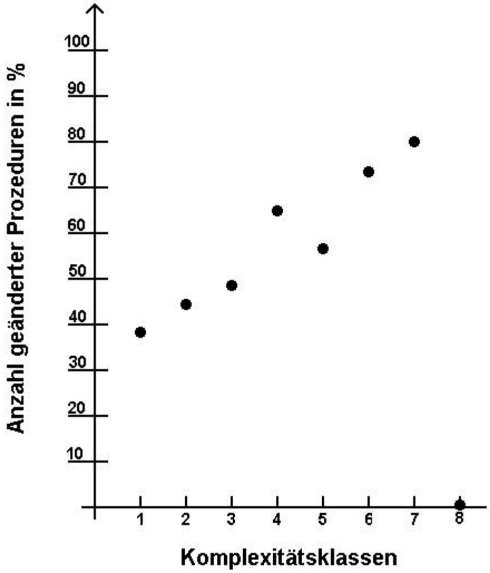
Von Henry und Kafura auf Unix Code angewendet

- Annahme: Zusammenhang zwischen Komplexität und Änderungshäufigkeit (Fehlerkorrektur) einer Prozedur
- 165 Prozeduren untersucht, Patch-Information aus Newsgroups
- Annahme bestätigt:
  - Änderungen nehmen mit Komplexitätsklasse zu

Schwächen von HK:

- Abh. vom Datenfluss, bei einem FAN = 0, gesamt 0 auch bei hoher Modulkomplexität
- Wiederverwendbarkeit wird durch hohen FAN Wert „bestraft“



*Fenton und Melton Metrik* ist ein Maß zur Bestimmung der Kupplung, d.h. die Unabhängigkeit zwischen Moduln

- Globale Kupplung eines Programms wird abgeleitet aus den Kupplungswerten zwischen allen möglichen Modulpaaren

Kupplungstypen

- Binäre Relationen definiert auf Paaren von Moduln x, y
  - Nach dem Grad der „Unerwünschtheit“ geordnet
- 0. No coupling: keine Kommunikation zwischen x und y
- 1. Data coupling: Kommunikation über Parameter (Daten)
- 2. Stamp coupling: akzeptieren selben Record-Typ als Parameter
- 3. Control coupling: Kommunikation über Parameter (Kontrolle)
- 4. Common coupling: Zugriff auf dieselbe globale Datenstruktur
- 5. Content coupling: x greift direkt auf interne Struktur von y zu (ändert Daten, Anweisungen)

# Berechnung der Kupplung

Fenton-Maß für die Kupplung zwischen 2 Moduln

*c(x,y) = i + n/(n+1)*

i ist der schlechteste Kupplungstyp zwischen Modul x und y

n ist die Anzahl der „Kupplungen“ vom Typ i

Maß C(S) für die globale Kupplung eines Systems S bestehend aus n Moduln $D_1, \dots, D_n$

*C(S) = Median der Menge der Kupplungswerte aller Modulpaare*

# Was nehmen wir mit?

## Algorithmenparadigmen

- Greedy, Divide and Conquer, Dynamic Programming

## Analyse und Bewertung von Algorithmen

- Effektivität, Korrektheit, Termination

## Laufzeitkomplexität

- Ordnungsnotation, Algorithmische Lücke, Master Theorem

## Strukturkomplexität

- McCabe, Henry-Kafura, Fenton