Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Fabijan Bošnjak, Nikola Dmitrović, Marin Kišić, Josip Klepec, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Koeficijent

Pripremio: Nikola Dmitrović
Potrebno znanje: naredba učitavanja i ispisivanja

Nekoliko je različitih načina na koje možemo riješiti ovaj zadatak. Najjednostavniji način je ispis izraza oblika $(N-1)+1$. Uočite da ispis razmaka, koji Python obavezno dodaje, nije dozvoljen što nas dovodi do činjenice da u naredbi ispisa trebamo koristiti svojstva argumenta `sep`.

Programski kod (pisan u `Python 3`):

```
N = int(input())
print(N-1,'+',1,sep = '')
# može i ovako.. print(N-1,1,sep='+')
# ili ovako... print(str(N-1) + '+' + str(1))
```

Drugačije rješenje moglo je ići u smjeru kreiranja stringa oblika $1+1+\cdots+1$ s ukupno N jedinica.

Programski kod (pisan u `Python 3`):

```
N = int(input())
s = '1'
for i in range(N-1):
    s += '+1'
print(s)
```

Zadatak: Hajduk

Pripremio: Fabijan Bošnjak
Potrebno znanje: naredba ponavljanja, naredba odlučivanja

Odredimo najprije koliko je glasova dobio trener s oznakom 1, a koliko su glasova dobili ostali treneri. Ovo bismo mogli napraviti tako da, prilikom učitavanja, varijablu A povećamo za 1 ako smo učitali broj 1, a varijablu B povećavamo za 1 ako smo učitali broj različit od 1.

Sve što nam preostaje je odrediti je li trener s oznakom 1 osvojio barem polovicu glasova. Ovaj uvjet elegantno možemo provjeriti uspoređivanjem varijabli A i B. Naime, ako je $A \geq B$, tada je trener s oznakom 1 sigurno osvojio barem polovicu glasova.

Naravno, isti uvjet mogli smo provjeriti uspoređivanjem varijable A s varijablom N (ukupnim brojem glasova), međutim, naivna implementacija ovog smjera razmišljanja mogla nas je koštati bodova. Matematički gledano, uvjet "trener 1 osvojio je barem polovicu glasova" odgovara izrazu $A \geq \frac{N}{2}$ kojeg bismo naivno u naš program mogli ukomponirati u obliku $A >= N/2$. Greška u dijelu podržanih programskih jezika se krije u činjenici da znak `'/'` označava tzv. cjelobrojno dijeljenje. Probajte sami pronaći primjer u kojem ovakva implementacija nije ispravna.

Problem cjelobrojnog dijeljenja rješavamo jednostavnom algebarskom manipulacijom pa umjesto $A >= N/2$ pišemo $2 * A >= N$. Na taj smo način izbjegli cjelobrojno dijeljenje.

Na kraju još valja upozoriti na rješenja koja se oslanjaju na "pravo dijeljenje", odnosno, na rad s decimalnim brojevima. U ovom zadatku to uglavnom neće biti problem, no načelno vam savjetujemo da izbjegavate rad s decimalnim brojevima ako je to moguće. Više o ovoj temi možete pročitati ovdje.

Zadatak: Preokret

Pripremio: Nikola Dmitrović
Potrebno znanje: naredba ponavljanja, rad s nizovima

Zadatak se sastoji od tri dijela. Za svakog natjecatelja po nešto. Krenimo redom. Da bi odrediti koliko je koji tim postigao golova dovoljno je učitavati zadane vrijednosti i brojati koliko se puta pojavio broj 1, a koliko broj 2.

Programski kod (pisan u `Python 3`*):*

```
N = int(input())
city = protivnik = 0
for i in range(N):
    gol = int(input())
    if gol == 1:
      city += 1
    else:
      protivnik += 1
print(city, protivnik)
```

Nastavimo dalje. Da bi odredili i koliko se puta dogodio neriješen rezultat trebamo pratiti kada je broj postignutih golova jednak, tj. kada će razlika postignutih golova biti jednaka nuli.

Programski kod (pisan u `Python 3`*):*

```
N = int(input())
city = protivnik = 0
nerijeseno = 1 # zbog 0:0
for i in range(N):
    gol = int(input())
    if gol == 1:
      city += 1
    else:
      protivnik += 1
    nerijeseno += (city == protivnik)
print(city, protivnik)
print(nerijeseno)
```

Za treći dio zadatka uočimo da se preokret sastoji od tri dijela. Prvo, jedan od timova gubi i počne postizati golove. Drugo, nakon niza postignutih golova dođe do neriješenog rezultata. Treće, tu ne stane već nastavi davati golove. Znači, razlika postignutih golova prvo pada do nule i onda nastavi rasti. Ili obrnuto, ovisno jel li City pravi preokret ili njegov protivnik. Jednu od implementacija rješenja možete pronaći u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Grudanje

Pripremio: Marin Kišić
Potrebno znanje: prefiks sume, binarna pretraga

Za 14 bodova bilo je potrebano samo simulirati ono što piše u zadatku. Jednom for-petljom ćemo slovo po slovo označavati s `'*'`. Nakon toga ćemo drugom for-petljom proći po svim intervalima te za svaki interval trećom for-petljom provjeriti je li savršen.

Vremenska složenost ovog dijela je $\mathcal{O}(NQN) = \mathcal{O}(QN^2)$.

Za dodatnih 14 bodova bilo je potrebno poznavati ideju prefiks suma. Recimo da za svako slovo imamo niz $pref$ u kojem će na poziciji i pisati broj tog slova od početka riječi do i-tog slova. Primjerice, za riječ `abcaab` i slovo `'a'`, niz $pref$ bio bi $[1, 1, 1, 2, 3, 3]$. Niz $pref$ nam je koristan jer sada možemo u $\mathcal{O}(1)$ odrediti kolko puta se to slovo pojavljuje u intervalu od L-tog slova do R-tog slova u riječi. Formula je $pref[R] - pref[L - 1]$.

Sad je ideja da prije prolaska po intervalima izračunamo niz pref za svako slovo. Zatim, kada prolazimo po intervalima ćemo, uz pomoć niza $pref$, za svako slovo odrediti kolko ga ima u trenutnom intervalu.

Vremenska složenost ovog dijela je $\mathcal{O}(N(N\Sigma * Q\Sigma)) = \mathcal{O}((N^2 + Q)\Sigma)$, gdje Σ označava veličinu abecede (u našem slučaju $\Sigma = 26$).

Za sve bodove bilo je potrebno primijetiti sljedeće: ako je riječ savršena nakon i-te grude, tada će onda biti savršena i nakon svake grude poslije i-te grude. To svojstvo nam omogućava da binarnom pretragom pronađemo prvu grudu nakon koje riječ postane savršena. Provjeru u binarnoj pretrazi radit ćemo kao i u prethodnoj parcijali (uz pomoć prefiks suma).

Vremenska složenost: $\mathcal{O}((N\Sigma + Q\Sigma)\log N) = \mathcal{O}((N \log N + Q)\Sigma)$.

Zadatak: Drvca

Pripremili: Marin Kišić i Josip Klepec
Potrebno znanje: ad-hoc, ugrađene strukture podataka

Formalnim rječnikom, zadatak je bio razdvojiti zadanih N brojeva u 2 aritmetička niza.

Za 20 bodova bilo je dovoljno u $\mathcal{O}(2^N)$ fiksirati neku bitmasku u kojoj vrijednost i-tog bita govori u kojem se redu nalazi i-ti broj. Nakon tog trebalo je još provjeriti jesu li redovi aritmetički nizovi.

Za dodatnih 30 bodova bilo je potrebno primijetiti da će najmanji broj iz niza biti i najmanji broj u jednom od redova. Sada, najmanji broj stavimo kao prvi broj u prvi red, fiksiramo neki broj iz niza koji ćemo staviti na drugo mjesto u prvom redu. Sada, kada znamo prvi i drugi broj prvog reda, znamo i razliku između svaka dva susjedna broja u prvom redu pa možemo dodavati broj po broj u prvi red tako dugo dok broj koji želimo dodati postoji u originalnom nizu te nakon svakog dodavanja provjerimo tvore li svi brojevi koje nismo stavili u prvi red aritmetički niz. Ako je tako, onda smo našli rješenje. Ako nakon isprobavanja svih mogućih brojeva za drugi broj u prvom redu nismo našli rješenje, onda ono ni ne postoji.

Vremenska složenost je $\mathcal{O}(N^3)$.

U stilu Boba Graditelja: *"Možemo li to popraviti? Naravno da možemo!"*

Potrebno je primijetiti da za prva dva broja u prvom redu ne trebamo isprobavati sve kombinacije (najmanji broj, neki broj iz niza), već samo tri kombinacije. Promotrimo tri najmanja broja iz niza, označimo ih s $A \leq B \leq C$. Sigurno znamo da, ako postoji rješenje, jedan od redova će početi s (A, B) ili (A, C) ili (B, C).

Za treći podzadatak možemo probati započeti jedan od redova na sva tri gore opisana načina, napraviti niz od točno $\frac{N}{2}$ brojeva i onda provjeriti tvori li ostalih $\frac{N}{2}$ brojeva aritmetički niz.

Vremenska složenost je $\mathcal{O}(N)$.

Za sve bodove fiksirat ćemo na gore spomenuta tri načina početak jednog reda. Zatim ćemo dodavati broj po broj u taj red te provjeriti tvore li svi brojevi koji su ostali aritmetički niz. Tu provjeru moramo napraviti pametnije od naivnog rješenja for petljom. Održavat ćemo dva skupa. U jednom ćemo pamtiti sve brojeve koji su ostali, a u drugom razlike između susjednih brojeva koji su u prvom skupu. Kada broj izbacimo iz prvog skupa, tj. dodamo ga u prvi red, onda moramo iz drugog skupa izbaciti razlike između njega i brojeva susjednih njemu, ali i ubaciti razliku između brojeva koji su mu bili susjedi jer su sada oni posatli susjedi. Kada imamo ta dva skupa i znamo kako ih održavati, možemo samo u skupu razlika provjeriti je li najveći broj jednak najmanjem. Ako jest, onda su svi brojevi u skupu jednaki, a to znači da je razlika između svaka dva susjedna broja koja su ostala jednaka, a to znači da ti brojevi tvore aritmetički niz, odnosno da smo pronašli rješenje. Sve operacije nad spomenutim skupovima može podržati kolekcija `std::set` u jeziku C++. Slične kolekcije postoje i u ostalim podržanim jezicima uz iznimku programskog jezika C.

Vremenska složenost je $\mathcal{O}(N \log N)$.

Zadatak: Lampice

Pripremio: Tonko Sabolčec
Potrebno znanje: hashiranje, binarno pretraživanje, centroidna dekompozicija stabla

Prvi podzadatak moguće je riješiti na više načina. Opisat ćemo rješenje pomoću hashiranja koje će nam koristiti i za konačno rješenje. Ukorijenimo stablo u čvoru R. Zanimaju nas svi palindromski segmenti kojima je jedan kraj u čvoru R. Za svaki čvor X računamo dvije hash vrijednosti:

$$down_x = x_0 B^{k-1} + x_1 B^{k-2} + \cdots + x_{k-1} B^0$$
$$up_x = x_0 B^0 + x_1 B^1 + \cdots + x_{k-1} B^{k-1}$$

Pri tome je $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ niz boja na putu od korijena R do čvora X ($color(R) = x_0$, $color(X) = x_{k-1}$), a B vrijednost baze hashiranja. Ove dvije vrijednosti mogu se jednostavno odrediti jednim DFS obilaskom po stablu. Put od žaruljice R do žaruljice X je palindromski segment ako vrijedi $down_X = up_X$. Ako ovaj postupak ponovimo za svaki mogući korijen stabla, pokrili smo sve slučajeve. Složenost tog algoritma iznosi $\mathcal{O}(N^2)$.

Drugi podzadatak klasični je problem traženja najduljeg palindroma u nizu, koji se moze riješiti pomoću Manacherovog algoritma.

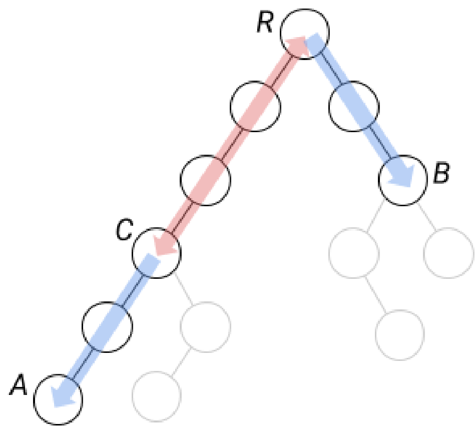
Treći podzadatak zapravo je jednak drugom podzadatku samo što Manacherov algoritam moramo primijeniti za svaki par listova u stablu, kojih zbog ograničenja ima dovoljno malo.

Potpuno rješenje započet ćemo sljedećom zamjedbom: Ako postoji palindromski segment duljine $K > 2$, tada postoji i palindromski segment duljine $K - 2$. Drugim riječima, traženu duljinu moguće je pronaći binarnim pretraživanjem za segmente parne i neparne duljine.

No, kako provjeriti postoji li palindrom određene duljine u nekom stablu? Kako bismo odgovorili na to pitanje, prvo ćemo riješiti lakšu verziju tog problema – provjerit ćemo postoji li palindrom zadane duljine koji prolazi korijenom (unaprijed određenim čvorom) stabla, čvorom R.

Na ukorijenjenom stablu, put između neka dva čvora A i B sastoji se od dvije grane na stablu, pri čemu je duljina jedne grane veća ili jednaka duljini druge grane. Pretpostavimo da se čvor A nalazi na duljoj grani. Put između čvorova A i B rastavit cemo na 3 dijela: put od A do C, put od C do korijena stabla i put od korijena stabla do čvora B, pri čemu je C odabran tako da su duljine $A - C$ i $R - B$ jednake. Primijetite kako je C jedinstveno određen čvorom A, budući da nas zanimaju samo palindromi fiksne duljine. Kako bismo provjerili je li put od A do B palindromski segment, dovoljno je provjeriti sljedeće:

- (1) Put od R do C je palindrom (na slici označeno crveno)
- (2) Slijed boja na putu od C do A jednak je slijedu boja na putu od R do B (na slici označeno plavom).



Za svaki čvor stabla unaprijed odredimo hash vrijednosti $down_X$ i up_X na isti način kao što je opisano u rješenju prvog podzadatka. Prvu provjeru jednostavno radimo uspoređivanjem vrijednosti $down_C$ i up_C. Drugu provjeru moguće je napraviti usporedbom vrijednosti:

- $down_B$
- (3) $down_A - down_{par(C)} \cdot B^{dep(A)-dep(C)}$, gdje je $par(C)$ roditelj čvora C, a $dep(X)$ dubina čvora X.

Sada znamo efikasno provjeriti je li put od čvora A do čvora B palindromski segment, ali to i dalje nije dovoljno brzo jer postoji $\mathcal{O}(N^2)$ mogućih parova (A, B). Pokušajmo promatrati problem iz malo drugačijeg kuta: Ako nam je poznat čvor A, postoji li (barem jedan) čvor B koji zadovoljava navedena svojstva? Neka je S_B skup hasheva u koji ćemo staviti vrijednosti $down_B$ svih čvorova B u promatranom stablu. Tada za neki čvor A možemo provjeriti postoji li odgovarajući čvor B tako da provjerimo uvjet (1) i postoji li hash vrijednost (3) u skupu S_B. Pretpostavlja se da je složenost operacija dodavanja vrijednosti u skup i provjeru postoji li neka vrijednost u skupu $\mathcal{O}(1)$ koristenjem hash tablice (`std::unordered_set` u jeziku C++). Složenost cijele provjere iznosi $\mathcal{O}(n)$.

Napomena: prilikom implementacije potrebno je paziti da najviši zajednički predak čvorova iz skupa S_B i čvora A bude upravo korijen R.

Sada kada znamo postoji li palindromski segment određene duljine koji prolazi korijenom stabla R, možemo primijeniti centroidnu dekompoziciju. Ako za svako dekomponirano stablo napravimo provjeru s centroidom kao korijenom stabla, pokrit ćemo sve slučajeve, odnosno moći ćemo provjeriti postoji li palindrom određene duljine u cijelom stablu. Složenost takve provjere iznosi $\mathcal{O}(n \log n)$. Dodavanje razine binarnog pretraživanja dovodi do konačnog rješenja složenosti $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

Zadatak: Sob

Pripremili: Paula Vidas i Daniel Paleka
Potrebno znanje: matematika, pohlepni algoritmi

Uređeni par (a, b) zvat ćemo *dobrim* ako vrijedi $a \,\&\, b = a$.

Prvi podzadatak možemo riješiti tako da $a \in A$ uparimo sa onim $b \in B$ za kojeg vrijedi $b \bmod N = a$.

Drugi podzadatak možemo riješiti sljedećim algoritmom: Neka su $i_1 > i_2 > ... > i_k$ pozicije jedinica u binarnom zapisu od N. Uparit ćemo najmanjih 2^{i_1} elemenata skupova A i B tako da uparimo one a i b za koje vrijedi $a \equiv b \mod 2^{i_1}$. Zatim uzmemo sljedećih 2^{i_2} najmanjih elemenata i uparimo one koji su jednaki modulo 2^{i_2}, itd. Dokaz da su odabrani parovi dobri ostavljamo čitatelju za vježbu.

Treći podzadatak mogao se riješiti na više načina. Jedan mogući način je da napravimo bipartitni graf sa čvorovima iz skupova A i B te dodamo bridove između svih dobrih parova. Na dobivenom grafu napravimo algoritam za uparivanje na bipartitnom grafu (*bipartite matching*), na primjer u složenosti $\mathcal{O}(NE)$, pri čemu je E broj bridova u grafu. Primjetimo da broj bridova možemo ograničiti sa $E < 3^{10} = 59049$.

Drugi način koristi sljedeći pohlepni algoritam: Prolazimo kroz elemente skupa A od većih prema manjima i trenutni element uparimo sa najmanjim još neuparenim elementom skupa B s kojim ga smijemo upariti.

Ako pokrenemo taj algoritam na nekoliko primjera, možemo uočiti sljedeću pravilnost: Neka se najveći element skupa A, tj. $N - 1$, upari sa $b \in B$. Tada se upare i $N - 1 - t$ sa $b - t$ za svaki $t \in \{1, 2, ..., b - M\}$. Nakon što maknemo uparene elemente dobili smo isti zadatak, sada za skupove $A' = \{0, 1, ..., N - 1 - (b - M) - 1\}$ i $B' = \{b + 1, b + 2, ..., M + N - 1\}$. Ovo rješenje možemo implementirati u složenosti $\mathcal{O}(N)$.

Dokaz prethodne tvrdnje:
Neka je $a = N - 1$ (radi ljepših oznaka) i b, kao i prije, najmanji element skupa B za kojeg vrijedi $a \,\&\, b = a$. Indeksom i ćemo označavati znamenku težine 2^i. Ako je $b = M$ nemamo što za dokazivati, pa pretpostavimo da je $b > M$ i označimo $k = b - M$. Neka je i pozicija najmanje značajne jedinice u b. Očito mora biti $a_j = b_j = 0$ za $j < i$. Kada bi bilo $a_i = 0$ onda bi vrijedilo $a \,\&\, (b - 1) = a$ pa b ne bi bio najmanji element od B koji se može upariti sa a. Dakle, $a_i = b_i = 1$. Sada je očito da je $(a - t, b - t)$ dobar par za $t \in \{1, 2, ..., 2^i\}$. Ako je $k \leq 2^i$ gotovi smo, inače promatramo sljedeću najmanje značajnu jedinicu u b i induktivno ponavljamo isti postupak. Preostaje još pokazati da uvijek postoji neki $b \in B$ s kojim se a može upariti, no to ostavljamo čitateljici za vježbu.