



Opisi algoritama

Zadatke, testne primjere i rješenja pripremili: Fabijan Bošnjak, Nikola Dmitrović, Marin Kišić, Josip Klepec, Daniel Paleka, Ivan Paljak, Tonko Sabolčec i Paula Vidas. Primjeri implementiranih rješenja su dani u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Koeficijent

Pripremio: Nikola Dmitrović

Potrebno znanje: naredba učitavanja i ispisivanja

Nekoliko je različitih načina na koje možemo riješiti ovaj zadatak. Najjednostavniji način je ispis izraza oblika $(N - 1) + 1$. Uočite da ispis razmaka, koji Python obavezno dodaje, nije dozvoljen što nas dovodi do činjenice da u naredbi ispisa trebamo koristiti svojstva separatora `sep`.

Programski kod (pisan u Python 3):

```
N = int(input())
print(N-1, '+', 1, sep = '')
# može i ovako.. print(N-1, 1, sep='+')
# ili ovako... print(str(N-1) + '+' + str(1))
```

Drugačije rješenje moglo je ići u smjeru kreiranja stringa oblika $1 + 1 + \dots + 1$ s ukupno N jedinica.

Programski kod (pisan u Python 3):

```
N = int(input())
s = '1'
for i in range(N-1):
    s += '+1'
print(s)
```

Zadatak: Hajduk

Pripremio: Fabijan Bošnjak

Potrebno znanje: naredba ponavljanja, naredba odlučivanja

Odredimo najprije koliko je glasova dobio trener s oznakom 1, a koliko su glasova dobili ostali treneri. Ovo bismo mogli napraviti tako da, prilikom učitavanja, varijablu A povećamo za 1 ako smo učitali broj 1, a varijablu B povećavamo za 1 ako smo učitali broj različit od 1.

Sve što nam preostaje je odrediti je li trener s oznakom 1 osvojio barem polovicu glasova. Ovaj uvjet elegantno možemo provjeriti uspoređivanjem varijabli A i B . Naime, ako je $A \geq B$, tada je trener s oznakom 1 sigurno osvojio barem polovicu glasova.

Naravno, isti uvjet mogli smo provjeriti uspoređivanjem varijable A s varijablom N (ukupnim brojem glasova), međutim, naivna implementacija ovog smjera razmišljanja mogla nas je koštati bodova. Matematički gledano, uvjet "trener 1 osvojio je barem polovicu glasova" odgovara izrazu $A \geq \frac{N}{2}$ kojeg bismo naivno u naš program mogli ukomponirati u obliku $A \geq N/2$. Greška u dijelu podržanih programskih jezika se krije u činjenici da znak `'/'` označava tzv. cjelobrojno dijeljenje. Probajte sami pronaći primjer u kojem ovakva implementacija nije ispravna.

Problem cjelobrojnog dijeljenja rješavamo jednostavnom algebarskom manipulacijom pa umjesto $A \geq N/2$ pišemo $2 * A \geq N$. Na taj smo način izbjegli cjelobrojno dijeljenje.

Na kraju još valja upozoriti na rješenja koja se oslanjaju na "pravo dijeljenje", odnosno, na rad s decimalnim brojevima. U ovom zadatku to uglavnom neće biti problem, no načelno vam savjetujemo da izbjegavate rad s decimalnim brojevima ako je to moguće. Više o ovoj temi možete pročitati [ovdje](#).



Zadatak: Preokret

Pripremio: Nikola Dmitrović

Potrebno znanje: naredba ponavljanja, rad s nizovima

Zadatak se sastoji od tri dijela. Za svakog natjecatelja po nešto. Krenimo redom. Da bi odrediti koliko je koji tim postigao golova dovoljno je učitavati zadane vrijednosti i brojati koliko se puta pojavio broj 1, a koliko broj 2.

Programski kod (pisan u Python 3):

```
N = int(input())
city = protivnik = 0
for i in range(N):
    gol = int(input())
    if gol == 1:
        city += 1
    else:
        protivnik += 1
print(city, protivnik)
```

Nastavimo dalje. Da bi odredili i koliko se puta dogodio neriješen rezultat trebamo pratiti kada je broj postignutih golova jednak, tj. kada će razlika postignutih golova biti jednaka nuli.

Programski kod (pisan u Python 3):

```
N = int(input())
city = protivnik = 0
nerijeseno = 1 # zbog 0:0
for i in range(N):
    gol = int(input())
    if gol == 1:
        city += 1
    else:
        protivnik += 1
    nerijeseno += (city == protivnik)
print(city, protivnik)
print(nerijeseno)
```

Za treći dio zadatka uočimo da se preokret sastoji od tri dijela. Prvo, jedan od timova gubi i počne postizati golove. Drugo, nakon niza postignutih golova dođe do neriješenog rezultata. Treće, tu ne stane već nastavi davati golove. Znači, razlika postignutih golova prvo pada do nule i onda nastavi rasti. Ili obrnuto, ovisno jel li City pravi preokret ili njegov protivnik. Jednu od implementacija rješenja možete pronaći u priloženim izvornim kodovima.

Zadatak: Grudanje

Pripremio: Marin Kišić

Potrebno znanje: prefiks sume, binarna pretraga

Za 14 bodova bilo je potrebno samo simulirati ono što piše u zadatku. Jednom for-petljom ćemo slovo po slovo označavati s '*'. Nakon toga ćemo drugom for-petljom proći po svim intervalima te za svaki interval trećom for-petljom provjeriti je li savršen.

Vremenska složenost ovog dijela je $\mathcal{O}(NQN) = \mathcal{O}(QN^2)$.

Za dodatnih 14 bodova bilo je potrebno poznavati ideju prefiks suma. Recimo da za svako slovo imamo niz *pref* u kojem će na poziciji *i* pisati broj tog slova od početka riječi do *i*-tog slova. Primjerice, za



riječ *abcaab* i slovo 'a', niz *pref* bio bi $[1, 1, 1, 2, 3, 3]$. Niz *pref* nam je koristan jer sada možemo u $\mathcal{O}(1)$ odrediti koliko puta se to slovo pojavljuje u intervalu od L -tog slova do R -tog slova u riječi. Formula je $pref[R] - pref[L - 1]$.

Sad je ideja da prije prolaska po intervalima izračunamo niz *pref* za svako slovo. Zatim, kada prolazimo po intervalima ćemo, uz pomoć niza *pref*, za svako slovo odrediti koliko ga ima u trenutnom intervalu.

Vremenska složenost ovog dijela je $\mathcal{O}(N(N\Sigma * Q\Sigma)) = \mathcal{O}((N^2 + Q)\Sigma)$, gdje Σ označava veličinu abecede (u našem slučaju $\Sigma = 26$).

Za sve bodove bilo je potrebno primjetiti sljedeće: ako je riječ savršena nakon i -te grude, tada će onda biti savršena i nakon svake grude poslije i -te grude. To svojstvo nam omogućava da binarnom pretragom pronađemo prvu grudu nakon koje riječ postane savršena. Provjeru u binarnoj pretrazi radit ćemo kao i u prethodnoj parcijali (uz pomoć prefiks suma).

Vremenska složenost: $\mathcal{O}((N\Sigma + Q\Sigma) \log N) = \mathcal{O}((N \log N + Q)\Sigma)$.

Zadatak: Drvca

Pripremili: Marin Kišić i Josip Klepec

Potrebno znanje:

Zadatak: Lampice

Pripremio: Tonko Sabolčec

Potrebno znanje:

Zadatak: Sob

Pripremili: Paula Vidas i Daniel Paleka

Potrebno znanje: matematika, pohlepni algoritmi

Uređeni par (a, b) zvat ćemo *dobrim* ako vrijedi $a \& b = a$.

Prvi podzadatak možemo riješiti tako da $a \in A$ uparimo sa onim $b \in B$ za kojeg vrijedi $b \bmod N = a$.

Drugi podzadatak možemo riješiti sljedećim algoritmom: Neka su $i_1 > i_2 > \dots > i_k$ pozicije jedinica u binarnom zapisu od N . Uparit ćemo najmanjih 2^{i_1} elemenata skupova A i B tako da uparimo one a i b za koje vrijedi $a \equiv b \bmod 2^{i_1}$. Zatim uzmemo sljedećih 2^{i_2} najmanjih elemenata i uparimo one koji su jednaki modulo 2^{i_2} , itd. Dokaz da su odabrani parovi dobri ostavljamo čitatelju za vježbu.

Treći podzadatak mogao se riješiti na više načina. Jedan mogući način je da napravimo bipartitni graf sa čvorovima iz skupova A i B te dodamo bridove između svih dobrih parova. Na dobivenom grafu napravimo algoritam za uparivanje na bipartitnom grafu (*bipartite matching*), na primjer u složenosti $\mathcal{O}(NE)$, pri čemu je E broj bridova u grafu. Primjetimo da broj bridova možemo ograničiti sa $E < 3^{10} = 59049$.

Drugi način koristi sljedeći pohlepni algoritam: Prolazimo kroz elemente skupa A od većih prema manjima i trenutni element uparimo sa najmanjim još neuparenim elementom skupa B s kojim ga smijemo upariti.

Ako pokrenemo taj algoritam na nekoliko primjera, možemo uočiti sljedeću pravilnost: Neka se najveći element skupa A , tj. $N - 1$, upari sa $b \in B$. Tada se upare i $N - 1 - t$ sa $b - t$ za svaki $t \in \{1, 2, \dots, b - M\}$. Nakon što maknemo uparene elemente dobili smo isti zadatak, sada za skupove $A' = \{0, 1, \dots, N - 1 - (b - M) - 1\}$ i $B' = \{b + 1, b + 2, \dots, M + N - 1\}$. Ovo rješenje možemo implementirati u složenosti $\mathcal{O}(N)$.

Dokaz prethodne tvrdnje:

Neka je $a = N - 1$ (radi ljepših oznaka) i b , kao i prije, najmanji element skupa B za kojeg vrijedi $a \& b = a$. Indeksom i ćemo označavati znamenku težine 2^i . Ako je $b = M$ nemamo što za dokazivati,



pa pretpostavimo da je $b > M$ i označimo $k = b - M$. Neka je i pozicija najmanje značajne jedinice u b . Očito mora biti $a_j = b_j = 0$ za $j < i$. Kada bi bilo $a_i = 0$ onda bi vrijedilo $a \& (b - 1) = a$ pa b ne bi bio najmanji element od B koji se može upariti sa a . Dakle, $a_i = b_i = 1$. Sada je očito da je $(a - t, b - t)$ dobar par za $t \in \{1, 2, \dots, 2^i\}$. Ako je $k \leq 2^i$ gotovi smo, inače promatramo sljedeću najmanje značajnu jedinicu u b i induktivno ponavljamo isti postupak. Preostaje još pokazati da uvijek postoji neki $b \in B$ s kojim se a može upariti, no to ostavljamo čitateljici za vježbu.