МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

по дисциплине

“Вычислительная математика”

Вариант “Метод Эйлера”

Выполнила:

Студентка группы Р3232

Копалина Майя
Алексеевна

Преподаватель:

Перл Ольга

Вячеславовна

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Санкт-Петербург, 2024

Задание:

Придумать алгоритм и написать код, решающий данные функции методом Эйлера.

Описание метода:

Простой метод Эйлера (метод первого порядка или метод Эйлера с постоянным шагом) является одним из наиболее простых численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Он основан на аппроксимации производной функции в точке текущего состояния и использовании этой аппроксимации для вычисления значения в следующей точке.

Основные шаги простого метода Эйлера:

1) Инициализация начальной точки (a, y(a)), где a - начальная точка, а y(a) - начальное значение функции y.

2) Выберите размер шага h, который определяет, насколько далеко мы движемся в направлении x от текущей точки к следующей точке. Шаг должен быть достаточно малым для обеспечения точности, но при этом не слишком малым, чтобы сократить время вычислений.

3) Используйте текущее значение функции y и производную функции в этой точке, чтобы аппроксимировать значение функции в следующей точке. Это делается с использованием формулы:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

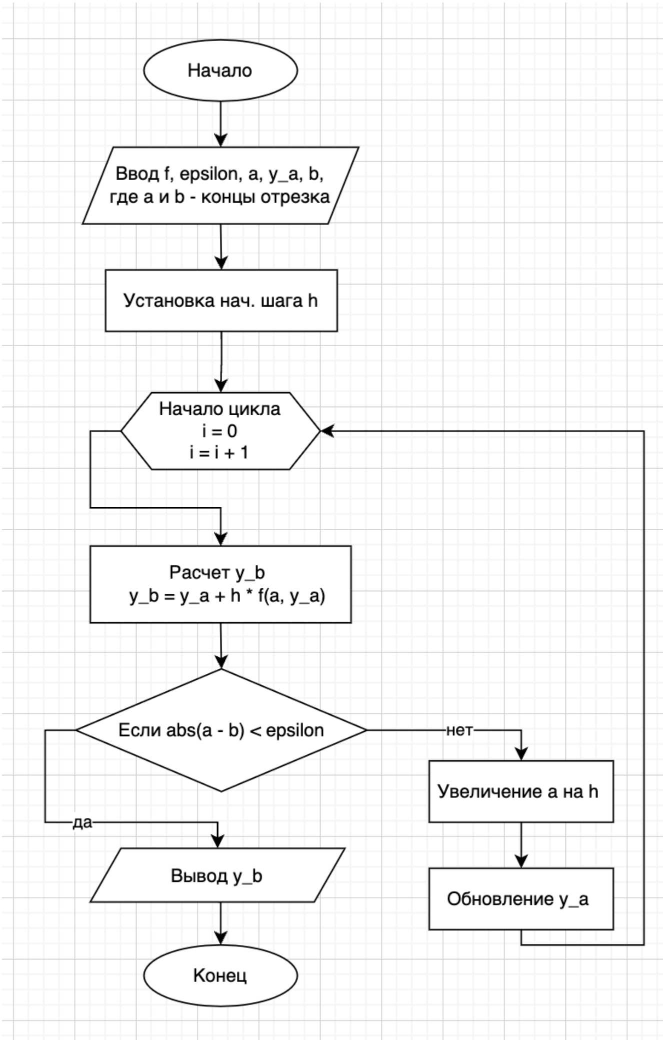
где $f(x_i, y_i)$ - производная функции y в точке (x_i, y_i).

4) Обновите переменные x и y для перехода к следующей точке:

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_{i+1}$$

5) Повторяйте шаги 3 и 4 до тех пор, пока не достигнете конечной точки b.

Блок-схема:


Начало
Ввод f, epsilon, a, y_a, b,
где a и b - концы отрезка
Установка нач. шага h
Начало цикла
i = 0
i = i + 1
Расчет y_b
y_b = y_a + h * f(a, y_a)
Если abs(a - b) < epsilon
нет
да
Увеличение a на h
Обновление y_a
Вывод y_b
Конец

Программа, написанная на python:

```
class Result:

    def first_function(x: float, y: float):
        return math.sin(x)
    def second_function(x: float, y: float):
        return (x * y)/2
    def third_function(x: float, y: float):
        return y - (2 * x)/y
    def fourth_function(x: float, y: float):
        return x + y
    def default_function(x:float, y: float):
        return 0.0

    def get_function(n: int):
        if n == 1:
            return Result.first_function
        elif n == 2:
            return Result.second_function
        elif n == 3:
            return Result.third_function
        elif n == 4:
            return Result.fourth_function
        else:
            return Result.default_function

    def solveByEuler(f, epsilon, a, y_a, b):
        function = Result.get_function(f)
        max_iterations = 10000000
        h = epsilon / 10
        for _ in range(max_iterations):
            y_b = y_a + h * function(a, y_a)
            if abs(a - b) < epsilon:
                return y_b
            a += h
            y_a = y_b

        raise ValueError("Max iterations exceeded")
```

Примеры работы программы:

1) Входные данные:
f = 1
epsilon = 0.0001
a = 0.0
y_a = 0.0
b = 1.0
Результат:
0.8414724712059914

2) Входные данные:
f = 2
epsilon = 0.0001
a = 1.0
y_a = 1.0
b = 2.0
Результат:
1.648721270700128

3) Входные данные:
f = 3
epsilon = 0.0001
a = 0.0
y_a = 2.0
b = 1.0
Результат:
0.0

4) Входные данные:
f = 4
epsilon = 0.0001
a = 0.0
y_a = 0.0
b = 1.0
Результат:
1.0

5) Входные данные:
f = 1
epsilon = 0.0001
a = 0.0
y_a = 0.0
b = 0.5
Результат:
0.479425538604203

Вывод:

Метод Эйлера — это численный метод первого порядка для решения дифференциальных уравнений первого порядка. Он основан на приближении решения прямой линией на каждом шаге интегрирования.

Преимущества:

- Легко понять и реализовать. Он не требует сложных вычислений или специальных знаний.
- Вычислительно эффективен. Он требует минимума операций для каждого шага интегрирования.
- Метод Эйлера основан на простой геометрической интерпретации, что делает его понятным для начинающих.
- Можно применять к широкому спектру ОДУ и задач Коши.

Недостатки:

- Ограниченная точность. Решение может быть значительно ошибочным, особенно при больших шагах интегрирования.
- Чувствителен к шуму в начальных условиях. Небольшие ошибки в начальных данных могут привести к значительным ошибкам в решении.
- Небольшие изменения в начальных условиях могут привести к экспоненциальному росту ошибки.
- Не подходит для решения сложных ОДУ или уравнений с большой чувствительностью к начальным условиям.

Сущность метода:

Разделить задачу на небольшие интервалы с фиксированным шагом h. Приблизить решение на каждом интервале прямой линией, соединяющей точку начала интервала с точкой, вычисленной по формуле:

$$y(n+1) = y(n) + h * f(x(n), y(n)),$$

где:
y(n) - значение функции в точке x(n).
f(x, y) - правая часть дифференциального уравнения.
h - шаг интегрирования.

Результаты запуска:

Анализ результатов зависит от конкретного дифференциального уравнения и используемых значений шага интегрирования.
Метод Эйлера обеспечивает приближенное решение дифференциального уравнения. Точность решения зависит от шага интегрирования: чем меньше шаг, тем точнее решение.

Сравнение с другими методами:

Существуют более точные численные методы, такие как:

- Метод Рунге-Кутты: более точный метод второго порядка.
- Метод Адамса: метод высокого порядка, который обеспечивает высокую точность при больших шагах интегрирования.

Метод Эйлера проигрывает этим методам в точности, но прост в реализации и не требует вычисления производных более высокого порядка.

Анализ применимости:

Метод Эйлера подходит для решения простых дифференциальных уравнений, где не требуется высокой точности. Не рекомендуется использовать его для решения сложных уравнений или уравнений с большой чувствительностью к начальным условиям.

Алгоритмическая сложность:

Метод Эйлера имеет линейную алгоритмическую сложность O(n), где n - количество шагов интегрирования. Это означает, что время выполнения метода пропорционально количеству шагов.

Анализ численной ошибки:

Численная ошибка метода Эйлера состоит из двух основных компонентов:

- Ошибка округления: возникает из-за ограниченной точности вычислений.
- Погрешность метода: возникает из-за приближенного характера метода.

Результат выполнения программы на платформе.
Тесты пройдены.

Assignment results

Score	Plagiarism
92.95 / 100	0%

Number	Status	Score
1	Success	24.975 / 25
2	Success	24.675 / 25
3	Success	24.725 / 25
4	Success	18.574999 / 25