In [2]:

```
import numpy as np
from imageio import imread
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.signal import convolve2d

car = imread("../images/car.png", as_gray=True)
F = np.fft.fft(car[100])
M = len(F)
N = len(car)
sinus = lambda i, u: np.sin(2*np.pi*u*i/M)
cosinus = lambda i, u: np.cos(2*np.pi*u*i/M)

## Obs: Koden er for illustrasjon, og kan inneholde bugs
#
def erosjon(f, S):
    n,m = S.shape
    N,M = f.shape
    padded = np.pad(f, (n//2, m//2), mode="constant")
    ut = np.ones(f.shape)
    hit = np.sum(np.sum(S))

    for x in range(0, N):
        for y in range(0, M):
            i = 0; j = 0
            while i < n and j < m and ut[x,y] == 1:
                if S[i,j] == 1 and padded[x+i,y+j] == 0:
                    ut[x,y] = 0
                j += 1
                if j == m:
                    i += 1
                    j = 0

    return ut

## Obs: Koden er for illustrasjon, og kan inneholde bugs
#
def dilatasjon(f, S):
    n,m = S.shape
    N,M = f.shape
    padded = np.pad(f, (n//2, m//2))
    ut = np.zeros(f.shape)
```

```
    for x in range(0, N):
        for y in range(0, M):
            res = padded[x:x+n,y:y+m] * S
            ut[x,y] = 1 if np.sum(np.sum(res)) >= 1 else 0
    return ut
```

Litt om forrige forelesning

Det som skal skje:

- Fourier analyse eksempel
- Konvolusjonsteoremet
- Eksempel: Høypass

- Morfologi
- Operatorene
- Hit-or-miss eksempel

Forrige gang lærte vi HVA Fourier er

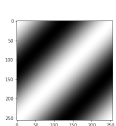
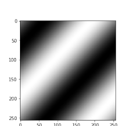
DFT:

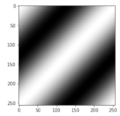
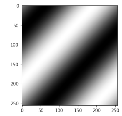
$$F(u,v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) * e^{-2\pi j(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Invers DFT:

$$f(x,y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u,v) e^{2\pi j(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

Eller, sagt på en annen måte:

$f = \sum_{u=0}^{M} \sum_{v=0}^{N} A_{cos} *$  $+ A_{sin} *$ 

$F(u, v) = sum\Big($  *  $\Big), sum\Big($  *  $\Big)$

Denne gangen: Hva vi kan BRUKE den til

... i INF2310. Fourier dukker opp over alt

Analyse eksempel: Bilineær Stalone

Bilder handler mye om frekvenser, og i INF2310 kan vi koble dette til

- Rayleighs teorem, og Nyquist
- Kantdeteksjon
- Støyreduksjon
- Med mer

Det er derfor fint å ha en måte å kunne analysere frekvenser i en matrise (bilde/filter).

Eksempel

I oblig 1 så vi på Sylvester Stalone, og en resampling av ham. Den bilineære Stalone er veldig blurry:

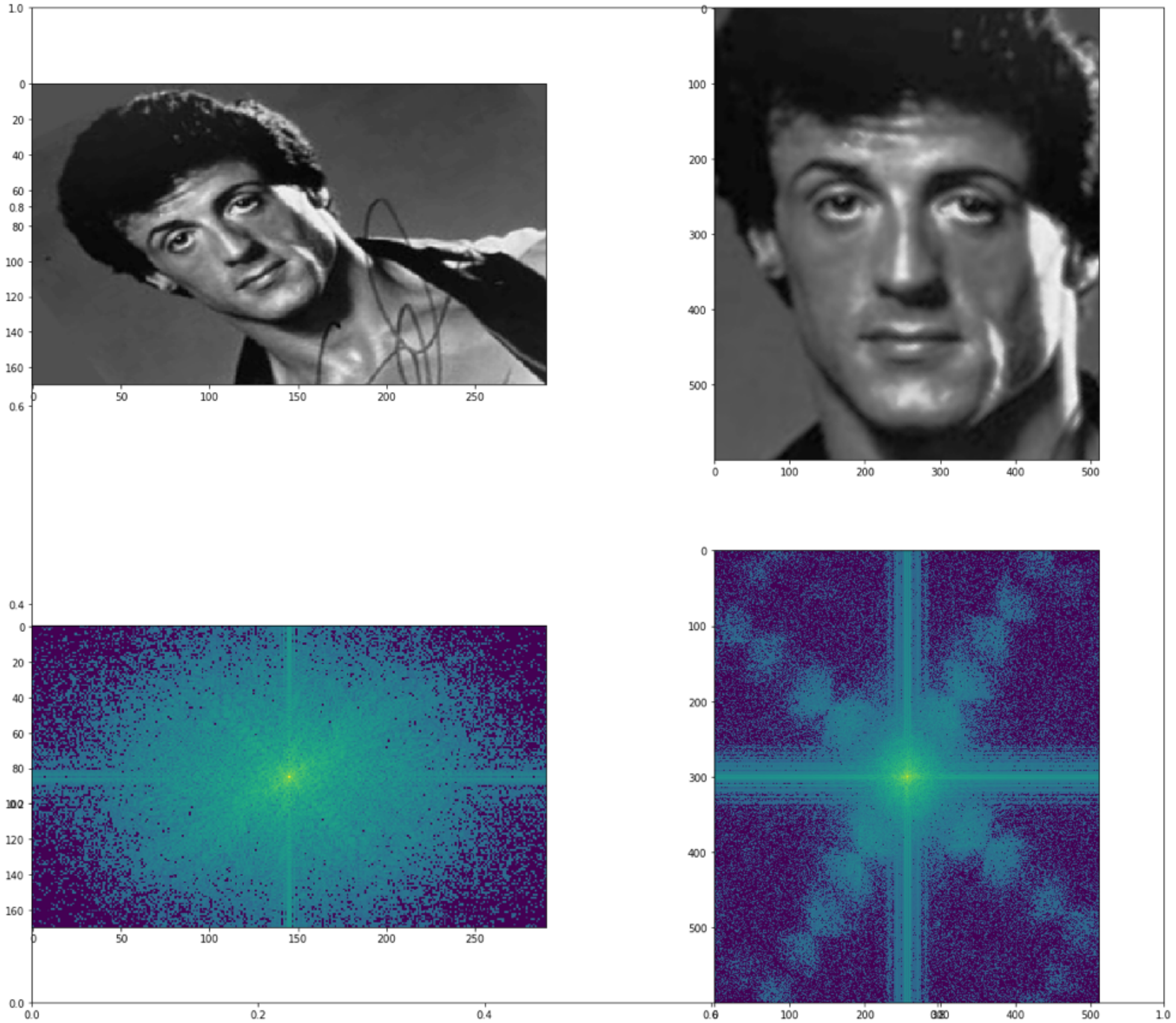
Om vi ser på Fourier spekteret for originalen versus den bilineære:

In [205]:

```
stal = imread("portrett.png", as_gray=True)
bi_stal = imread("bilinear_stalone.png", as_gray=True)

fft_stal = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(stal))
fft_bi = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(bi_stal))

for x in range(fft_stal.shape[1]):
    for y in range(fft_stal.shape[0]):
        if abs(fft_stal[y,x]) < 150: fft_stal[y,x] = 0 # Setter lavere bidrag til 0 for å illustrere

for x in range(fft_bi.shape[1]):
    for y in range(fft_bi.shape[0]):
        if abs(fft_bi[y,x]) < 150: fft_bi[y,x] = 0 # Setter lavere bidrag til 0 for å illustrere

fig, _ = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 18)); fig.add_subplot(2,2,1); plt.imshow(stal, cmap="gray"); fig.add_subplot(2,2,2); plt.imshow(bi_stal, cmap="gray"); fig.add_subplot(2,2,3); plt.imshow(np.log(np.abs(fft_stal)+1)); fig.add_subplot(2,2,4); plt.imshow(np.log(np.abs(fft_bi)+1))
```

Out[205]:

<matplotlib.image.AxesImage at 0x1c40906750>



kan vi analysere at vi ikke har fått noen flere frekvenser ved resampling (som forventet). Bildet ser blurry ut fordi vi mangler høye frekvenser, men har forsøkt å fylle igjen pikslene likevel.

Konvolusjonsteoremet

$$f * h = fourier^{-1}(F \odot H)$$

... ish. Det er en grunn til at regelen er skrevet mer presist i slidsene, og det kommer dere til å få sett i oblig 2.

Eksempel: Høypass

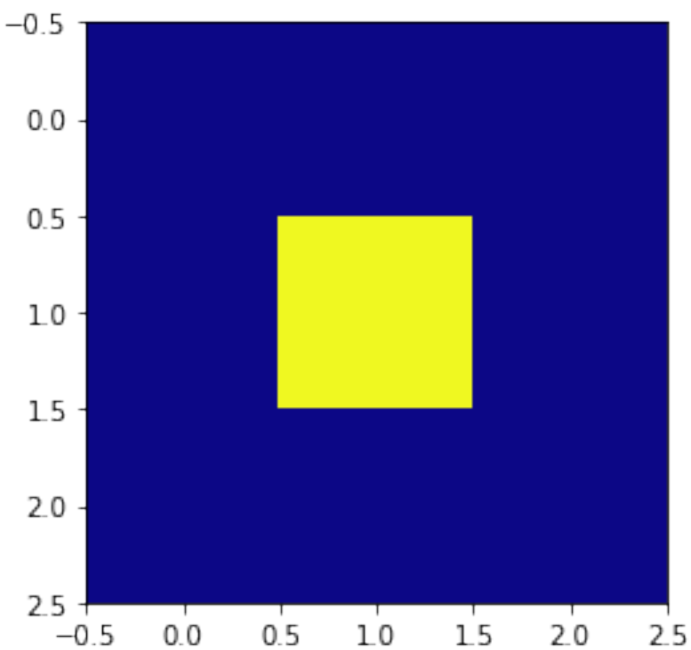
Jeg vil høypassfiltrere car.png. Da tenker jeg at vi bør gjøre en konvolusjon med et Laplace filter:

In [5]:

```
laplace = np.array([[-1, -1, -1],
                    [-1, 8, -1],
                    [-1, -1, -1]])
plt.imshow(laplace, cmap="plasma")
```

Out[5]:

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1c2159f750>
```

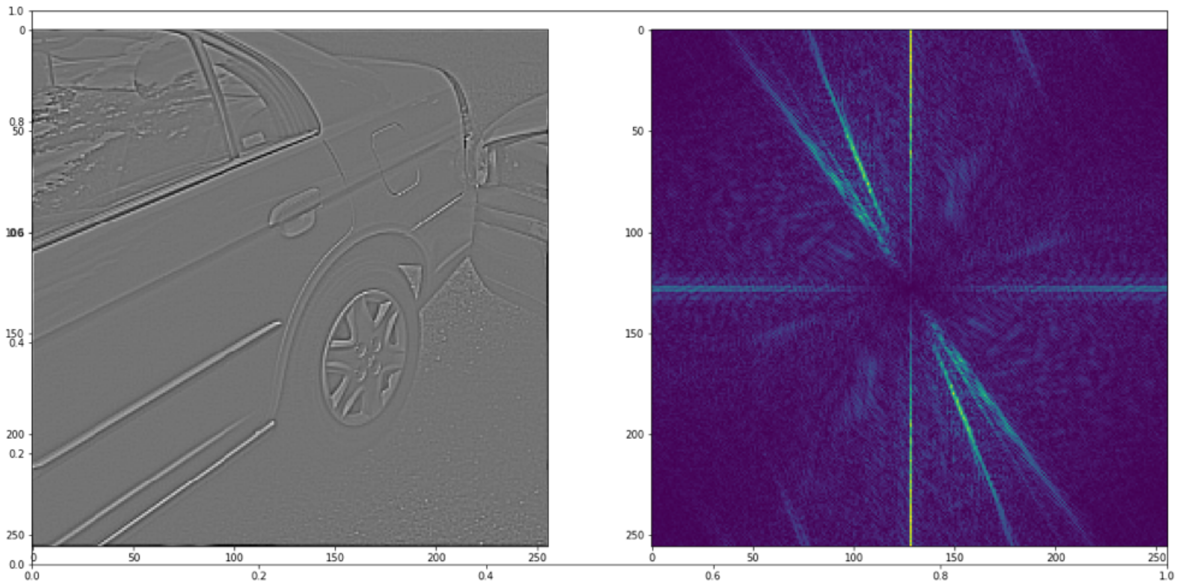


In [6]:

```
car_high_conv = convolve2d(car, laplace, "same", "wrap")
car_high_conv_fft = np.fft.fftshift(np.fft.fft2(car_high_conv))

f, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 10)); f.add_subplot(1,
2,1); plt.imshow(car_high_conv, cmap="gray"); f.add_subplot(1,2,
2); plt.imshow(np.abs(car_high_conv_fft))
```

Out[6]:

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x10dc2cd10>
```



Flott, men vi ville se om vi kunne gjøre det via konvolusjonsteoremet!

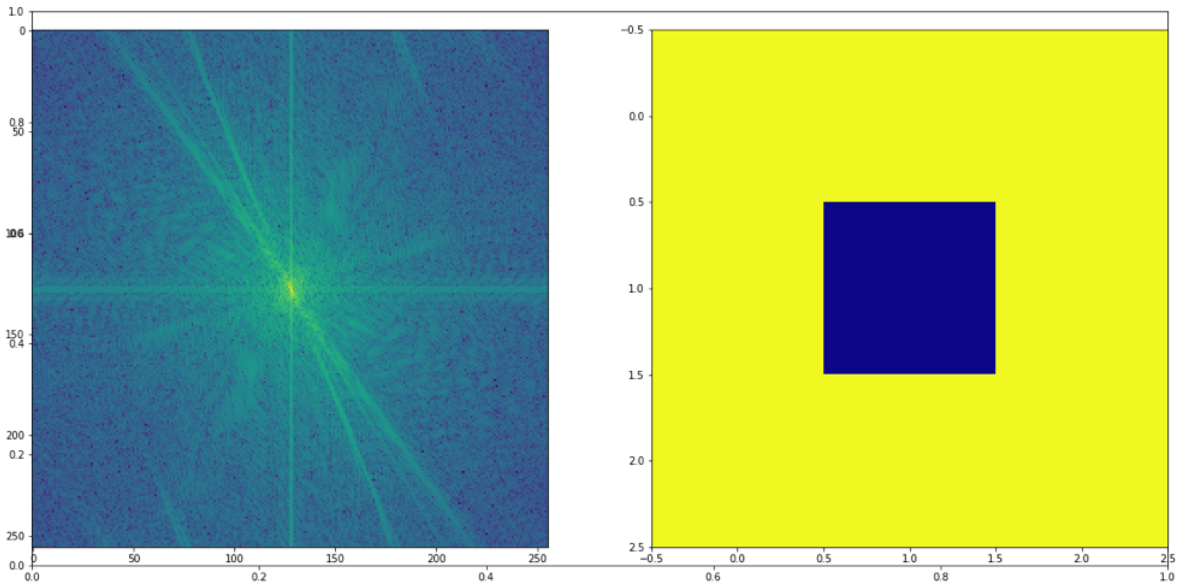
Vi vet at Fourier av car og laplace multiplisert med hverandre burde gi det samme som dette, så la oss prøve. Først, fft av laplace:

In [7]:

```
lap_fft = np.fft.fft2(laplace)
car_fft = np.fft.fft2(car)

f, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 10)); f.add_subplot(1,
2,1); plt.imshow(np.log(1+np.abs(np.fft.fftshift(car_fft)))) ;f.
add_subplot(1,2,2); plt.imshow(np.abs(np.fft.fftshift(lap_fft)),
cmap="plasma")
```

Out[7]:

```
<matplotlib.image.AxesImage at 0x1c203ab950>
```



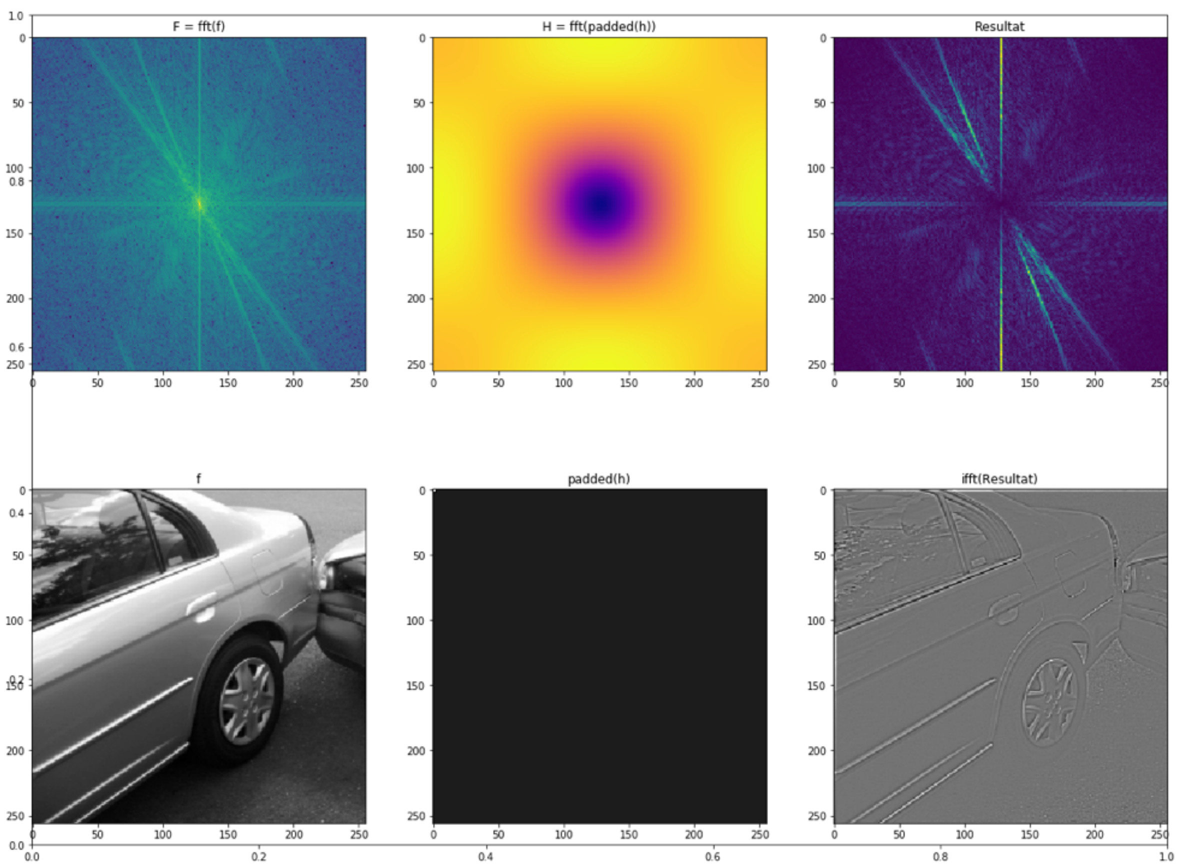
Her vil ikke dimensjonene fungere, H bildet er for lite. Vi må padde h:

In [9]:

```
padded = np.zeros((N,M))
for i in range(laplace.shape[0]):
    for j in range(laplace.shape[1]):
        padded[i,j] = laplace[i,j]
lap_fft_pad = np.fft.fft2(laplace, (N, M))
resultat = car_fft*lap_fft_pad

f, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 15)); f.add_subplot(2,
3,1) ; plt.imshow(np.log(1+np.abs(np.fft.fftshift(car_fft)))); p
lt.title("F = fft(f)"); f.add_subplot(2,3,2); plt.imshow(np.log(
1+np.abs(np.fft.fftshift(lap_fft_pad))), cmap="plasma"); plt.tit
le("H = fft(padded(h))"); f.add_subplot(2,3,3); plt.imshow(np.ab
s(np.fft.fftshift(resultat))); plt.title("Resultat"); f.add_subp
lot(2,3,4); plt.imshow(car, cmap="gray"); plt.title("f"); f.add_
subplot(2,3,5); plt.imshow(padded, cmap="gray"); plt.title("padd
ed(h)"); f.add_subplot(2,3,6); plt.imshow(np.real(np.fft.ifft2(r
esultat)), cmap="gray"); plt.title("ifft(Resultat)")
```

Out[9]:

```
Text(0.5, 1.0, 'ifft(Resultat)')
```



Nå kan dere

- Designe filtre i frekvensdomenet
- Analysere filtre
- Gjøre konvolusjon i konstant tid (for en gitt bildestørrelse)

Morfologi

Vi jobber med binære bilder. 0 til 255 er nå 0 eller 1. Morfologi kan tenkes på som filtrering slik dere kjenner det, men med bare to filtre: Erosjon og dilatasjon

Erosjon

Vi sier bilde f erodert med naboskap / filter / strukturelement S:

$$f \ominus S$$

Dette betyr at om alt the gule i strukturelementet legges oppå 1-ere, får pikselen 1, else 0.

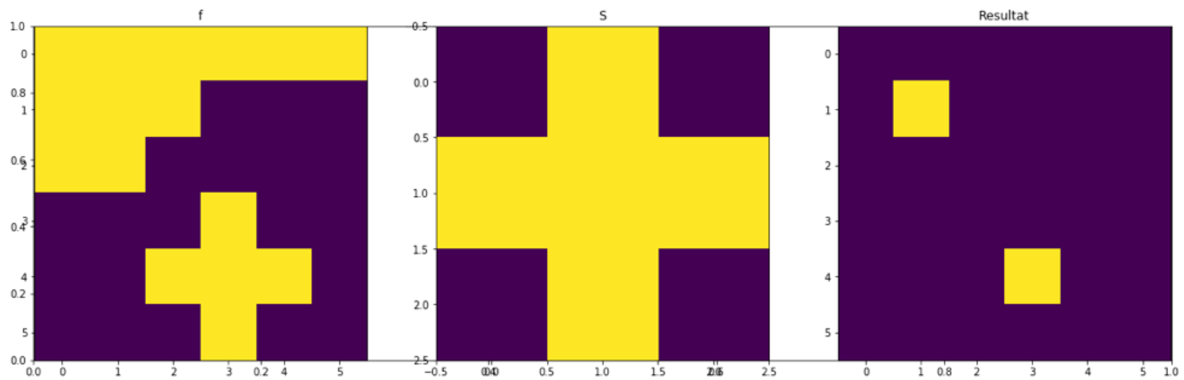
Eksempel:

In [206]:

```
S = np.array([[0,1,0],[1,1,1],[0,1,0]])
f = np.array([[1,1,1,1,1,1],[1,1,1,0,0,0],[1,1,0,0,0,0],[0,0,0,1
,0,0],[0,0,1,1,1,0],[0,0,0,1,0,0]])
res = erosjon(f, S)
fig, _ = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 6)); fig.add_subplot(
1,3,1); plt.imshow(f);plt.title("f"); fig.add_subplot(1,3,2); pl
t.imshow(S); plt.title("S");fig.add_subplot(1,3,3); plt.imshow(r
es); plt.title("Resultat")
```

Out[206]:

```
Text(0.5, 1.0, 'Resultat')
```



Dilatasjon

$$f \oplus S$$

Om strukturelementet TREFFER en 1, får pikselen 1, else 0.

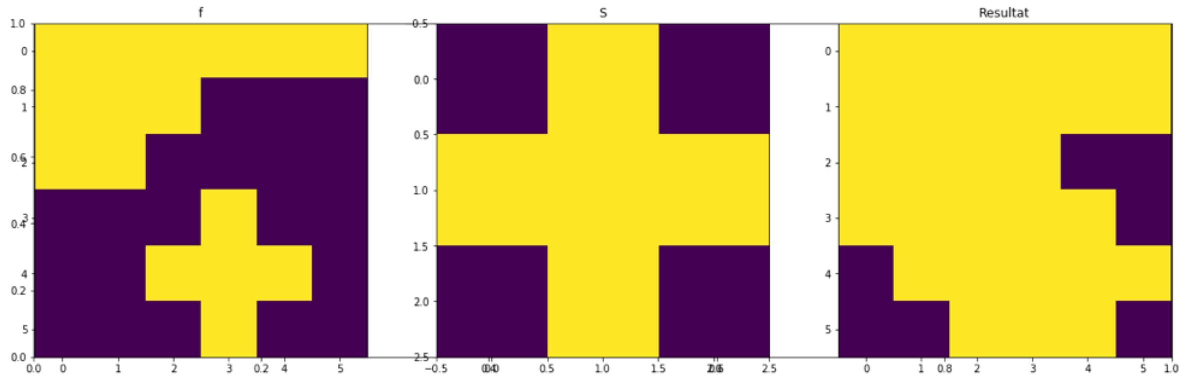
Eksempel:

In [207]:

```
res = dilatasjon(f, S)
fig, _ = plt.subplots(1, 1, figsize = (20, 6)); fig.add_subplot(1,3,1); plt.imshow(f);plt.title("f"); fig.add_subplot(1,3,2); plt.imshow(S); plt.title("S");fig.add_subplot(1,3,3); plt.imshow(res); plt.title("Resultat")
```

Out[207]:

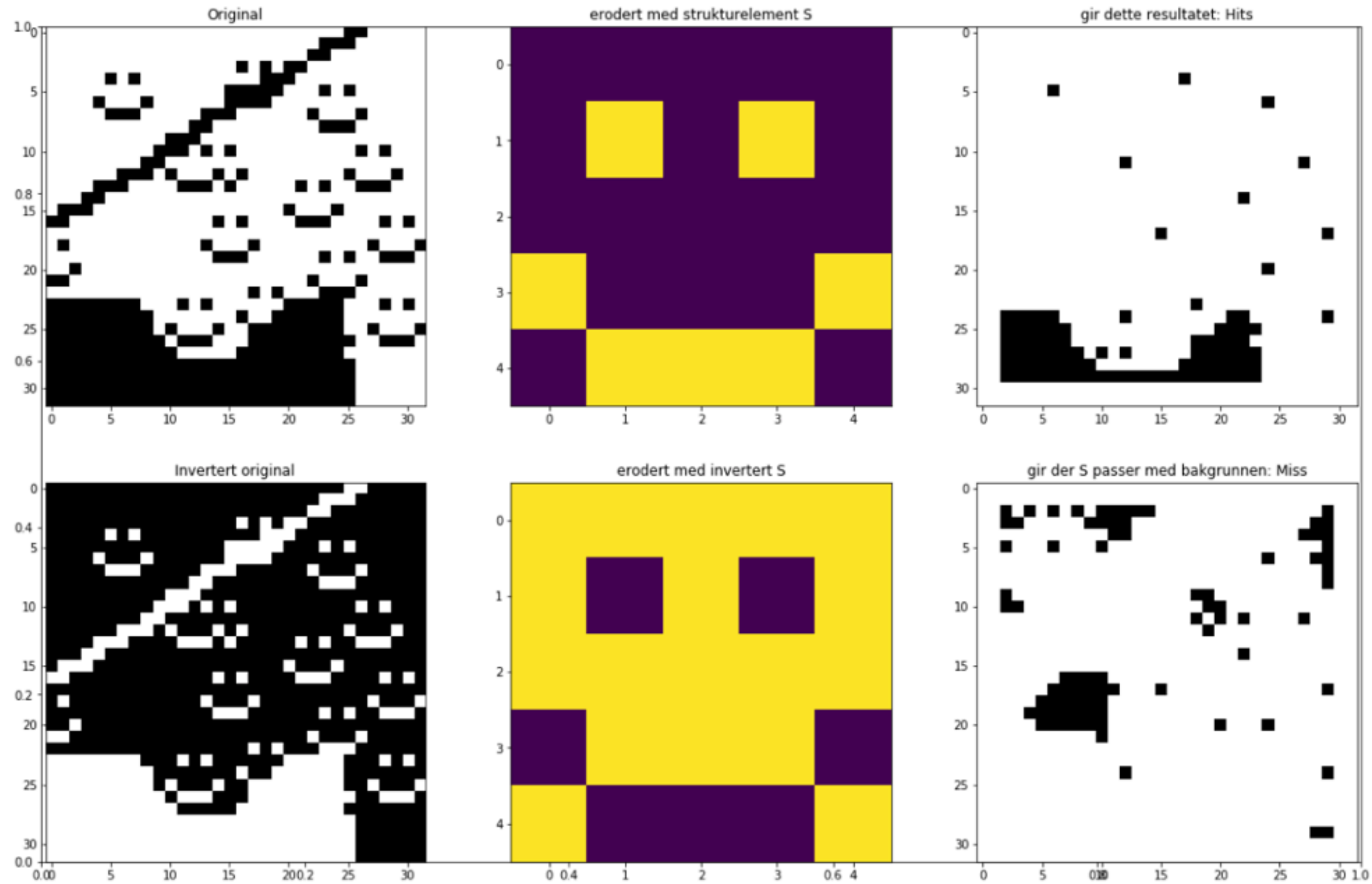
```
Text(0.5, 1.0, 'Resultat')
```

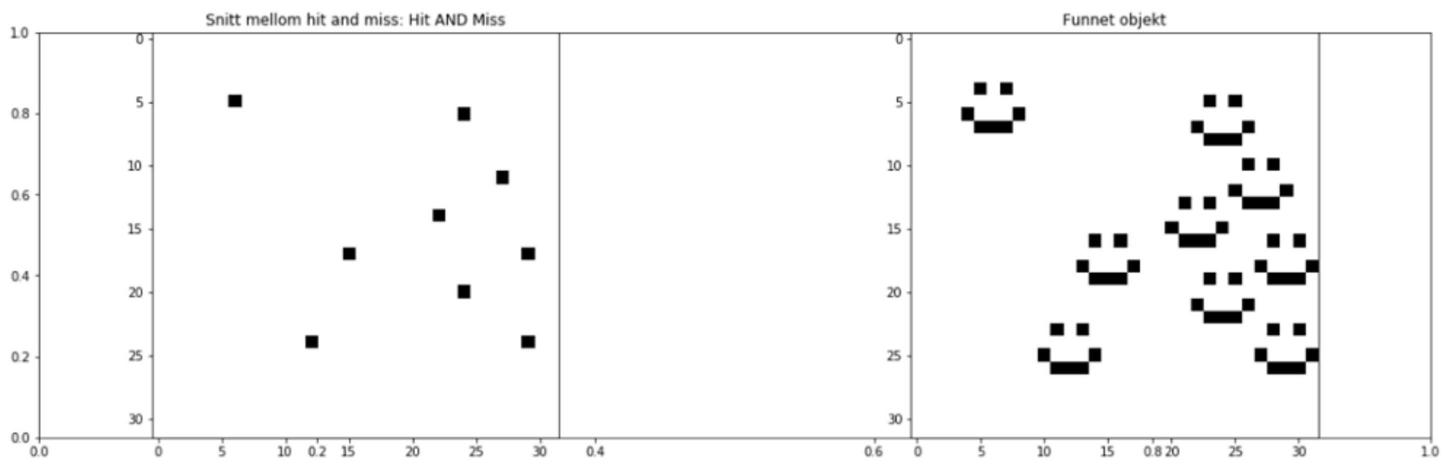


Eksempel på bruk: Hit-or-miss

Ved erosjon så vi at resultatet bare ble 1 hvis pikslene rundt så ut som strukturelementet selv. Vi kan bruke dette til å finne objekter i bildet

$$f \circledast S = \left(f \ominus S_1 \right) \bigcap \left(f^C \ominus S_1 \right)$$





Vi kunne ikke ta alt denne gangen:

Andre operasjoner med morfologi

- Tynning
- Åpning, lukking
- Fylle ut figurer
- Kant-deteksjon

Og det var det!