

In [226]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from imageio import imread

# Laget for illustrasjon, ikke fullt fungerende
# Bedre, og fungerende, implementasjon i løsningshint 12
class Aritmetisk:

    def _encode(self, sequence, length_of_compression, sequences_nr):
        compression = np.zeros(sequences_nr)

        for j in range(sequences_nr):
            c_i = 1
            start = 0
            for i in range(length_of_compression):
                a_i = int(np.round(sequence[j*length_of_compression + i]))
                start += self.interval[a_i]*c_i
                c_i = self.p[int(a_i)]*c_i
            # Here, a number in the interval should be chosen with the smallest bit-length
            # This code does't do that and is likely therefore defunct
            compression[j] = start
            #print(start, start+c_i)

        return compression

    def encode(self, sequence, length_of_compression):
        # We need the number of sequences to be compressed to be integers
        assert len(sequence)%length_of_compression == 0
        self.length_of_compression = length_of_compression

        sequences_nr = int(len(sequence)/length_of_compression)

        self.p = np.zeros(256)
```

```

    for x in sequence:
        self.p[int(np.round(x))] += 1
    self.p = self.p/len(sequence)

    c = np.zeros(256)
    c[0] = 0
    for i in range(len(self.p)):
        c[i] = c[i-1] + self.p[i-1]
    self.interval = {i:c[i] for i in range(len(c)) if self.p[i] != 0}
    #print(self.interval)

    return self._encode(sequence, length_of_compression, sequences_nr)

def decode(self, sequence):
    decompressed = list()

    for numb in sequence:

        start = 0
        c_i = 1
        for i in range(self.length_of_compression):
            a_i = 0
            for intens in self.interval:
                if numb >= start+(self.interval[intens]*c_i):
                    :
                        a_i = intens
                    start += self.interval[a_i]*c_i
                    c_i = self.p[a_i]*c_i
                    decompressed.append(a_i)

    return decompressed

a = Aritmetisk()
compressed = a.encode([1,2,3,3,2, 6,3,2,5,2], 10)
decomp = a.decode(compressed)
print(compressed, decomp)

```

[0.03774632] [1, 2, 3, 3, 2, 6, 3, 2, 5, 2]

Litt om forrige forelesning: Kompresjon og koding I

Det som skal skje:

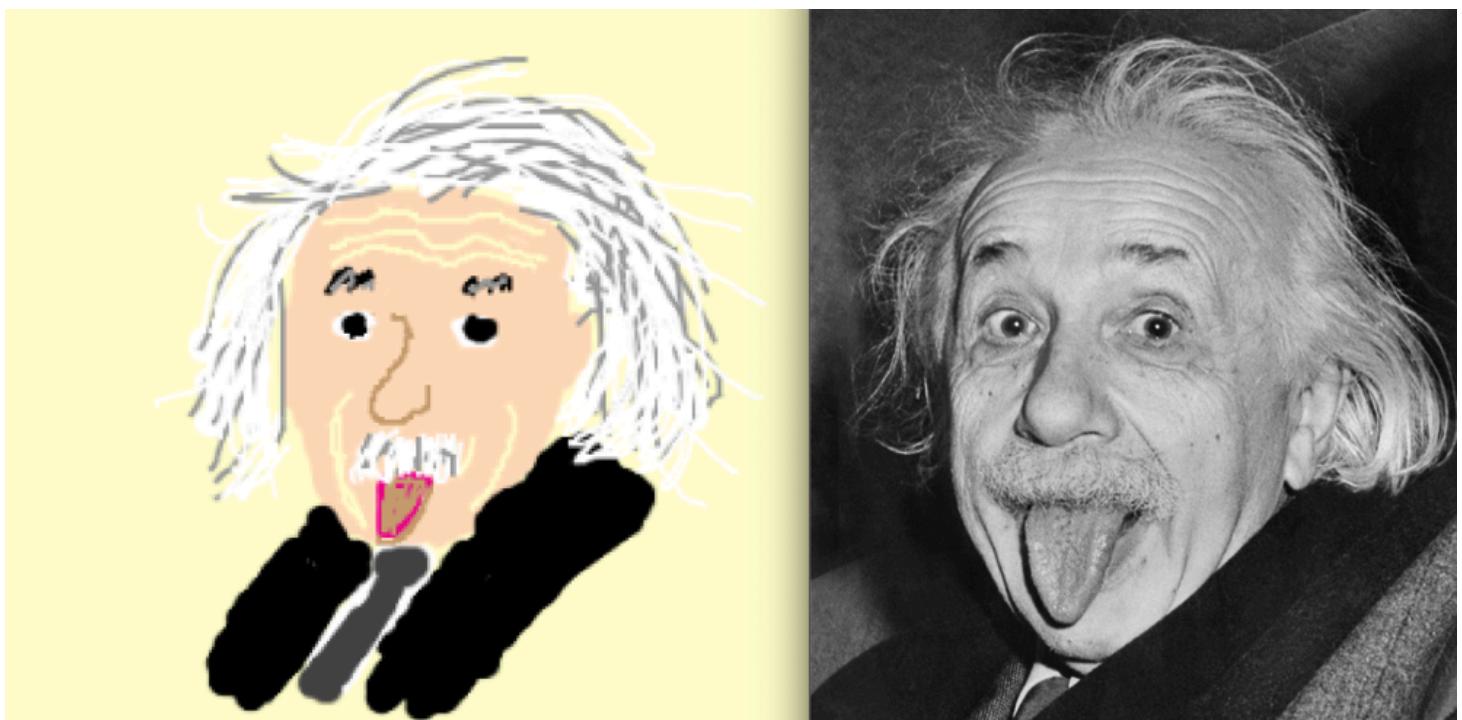
- Entropi og redundans
- Huffman
- Shannon-Fano
- Aritmetisk
- JPEG: Oblig 2 parafrase

Å forstå entropi

Ikke tenk termodynamikk, dette er hentet fra kommunikasjonsteknologi!

Entropi er et mål på hvor mye informasjon en beskjed faktisk inneholder.

Litt intuitivt kan vi spør: Hvilket bilde inneholder mest informasjon?



Det er forholdsvis lett å se at Einstein 1 har mindre informasjon enn Einstein 2. I bildebehandling kan vi være matematiske i denne oppfatningen, gjennom entropi.

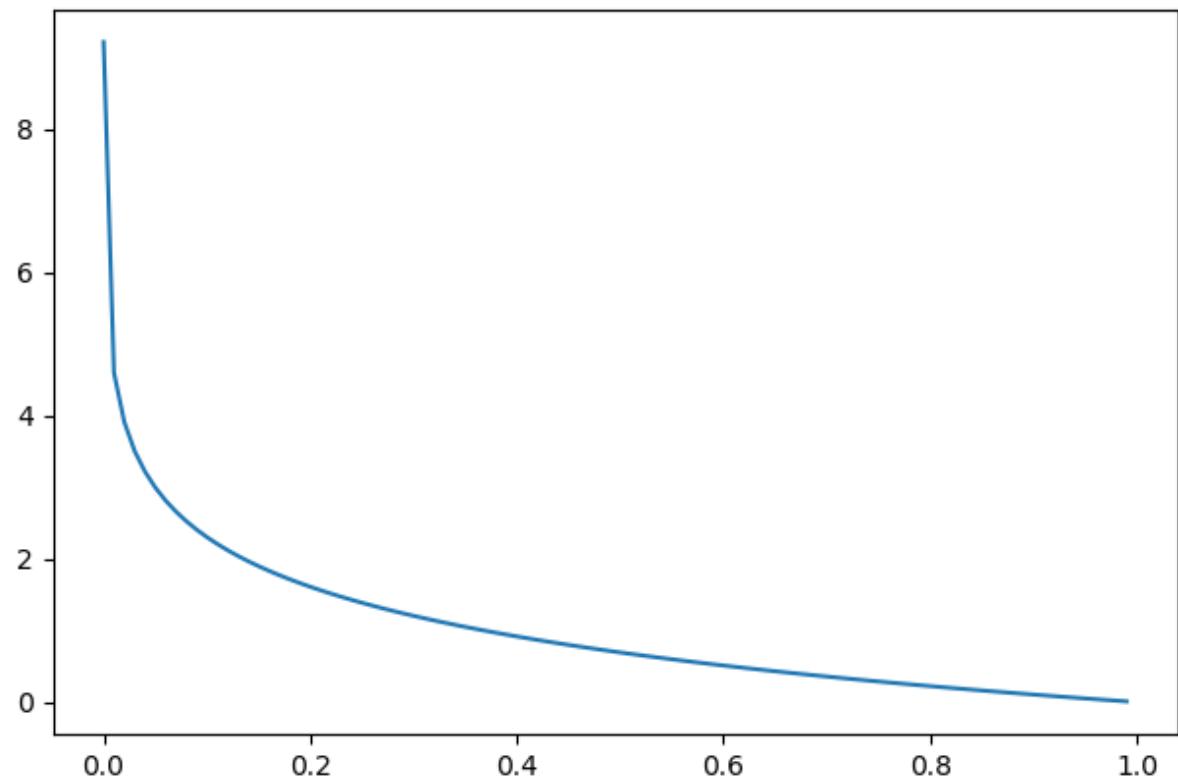
Og husk: Informasjon er et matematisk begrep som kvantifiserer hvor overraskende / uventet en melding er

Om du scannet bildet piksel for piksel, hvor overrasket blir du over den neste pikselen du ser?

For hver melding / symbol / intensitet i gjelder dette:

$$\text{info}_i = \log_2 \frac{1}{p[i]}$$

Informasjon i en melding avhenger av sannsynligheten for at den inntreffer



Så nå kan vi regne ut gjennomsnittlig informasjon i en melding / tekst / bilde:

NB: Det står log, men det skal være log2.

(SHANNON)
 INFORMATION
 CONTENT OF \square_A = $\log \frac{1}{P(\square_A)}$

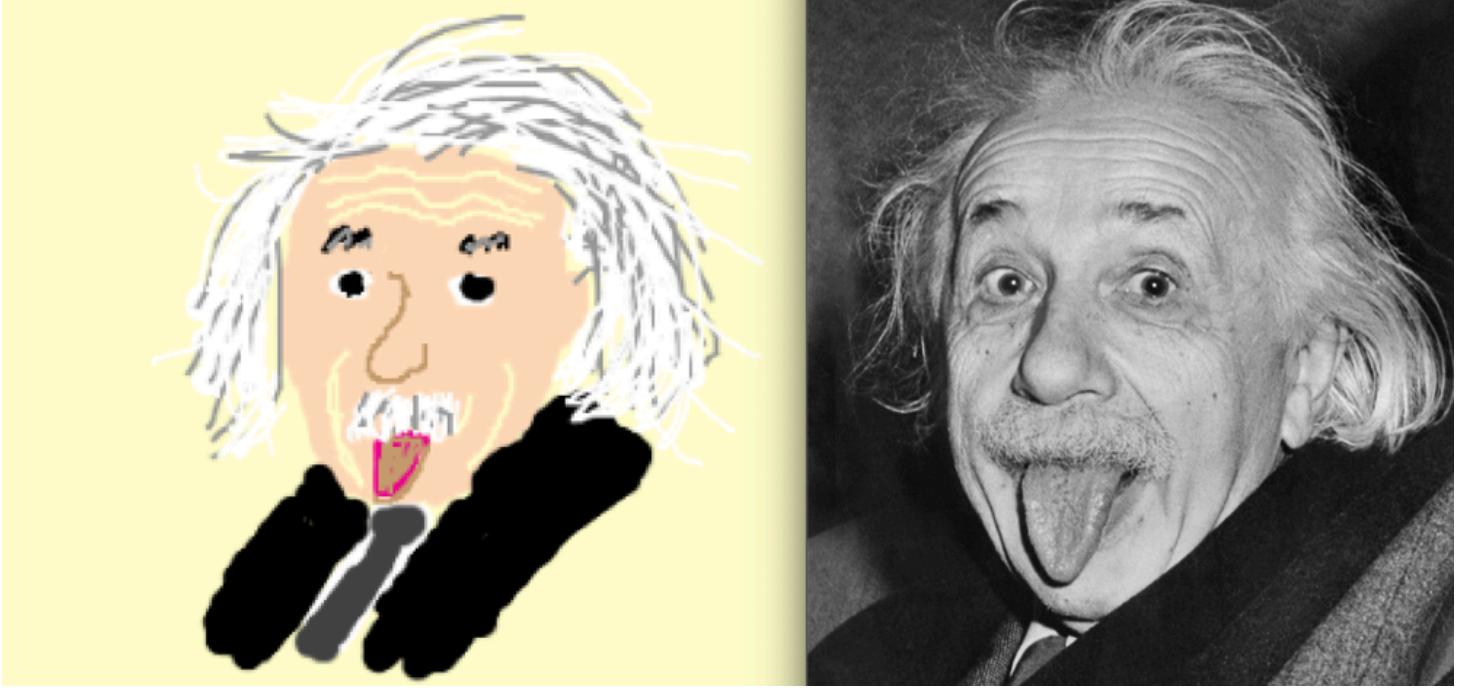
"AVERAGE INFORMATION" =

$$P(\square_A) \cdot \log \frac{1}{P(\square_A)} + P(\square_B) \cdot \log \frac{1}{P(\square_B)} + P(\square_C) \cdot \log \frac{1}{P(\square_C)}$$

$$= \sum_{x \in \{A, B, C\}} P(x) \cdot \log \frac{1}{P(x)} = \text{THE ENTROPY OF THE ENSEMBLE } \{A, B, C\}.$$

Og dette kan vi bruke til å uttrykke det vi så i de to bildene helt på starten:

Tegnet-Albert	Albert
Entropi	2.866 7.5



Interessant, men hva skal vi med det?

Entropien vår forteller oss at måten vi representerer den tegnede Albert på er altfor voldsom for hvor lite informasjon den faktisk har i seg. Representasjonen er *redundant*, og vi kan kode symbolene slik at gjennomsnittlig bit-lengde er nærmest entropien, UTEN å miste noe informasjon.

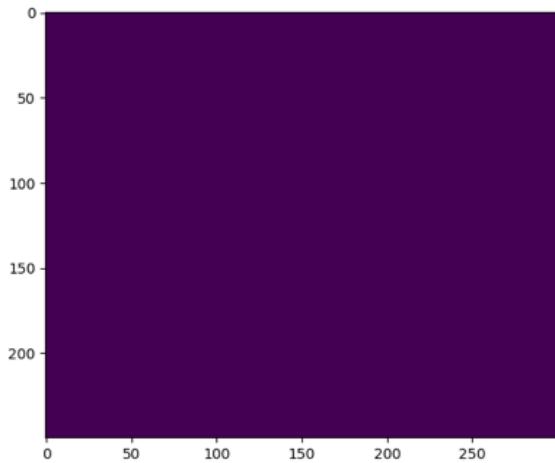
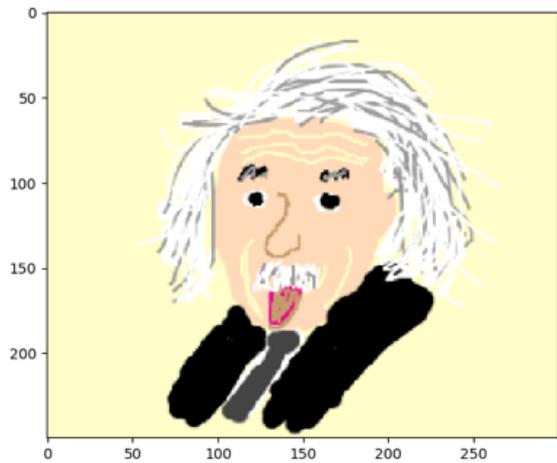
Nytt fagbegrep: Redundans!

Det finnes mange former for redundans, men jeg vil vise 2:

- Intersampel redundans
- Psykovisuell redundans

Intersampel redundans:

Hva har disse to bildene til felles?



Det lilla bildet kunne vært representert som bredde, høyde, lilla, og ingen informasjon ville vært tapt.

Psykovisuell redundans:

Et av disse bildene er komprimert til en $\frac{1}{8}$ av den andres størrelse. Kan du se hvilket?



Hva med nå?



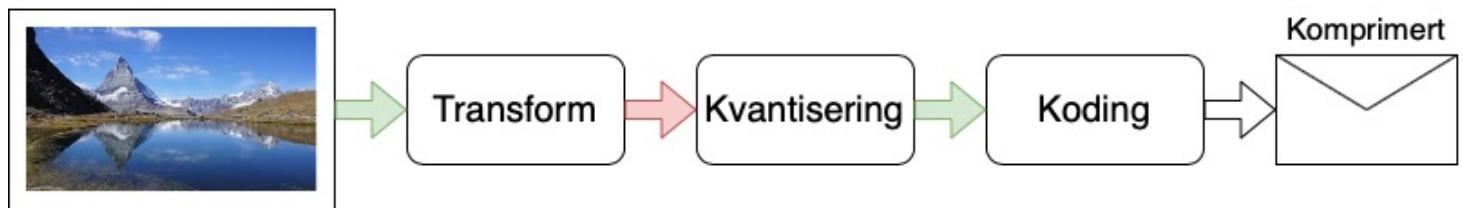
JPEG i oblig 2 bruker dette!

Kompressjonsmetoder

Vi skal snakke om 4 denne gangen:

- Huffman
- Shannon-Fano
- Aritmetisk
- JPEG

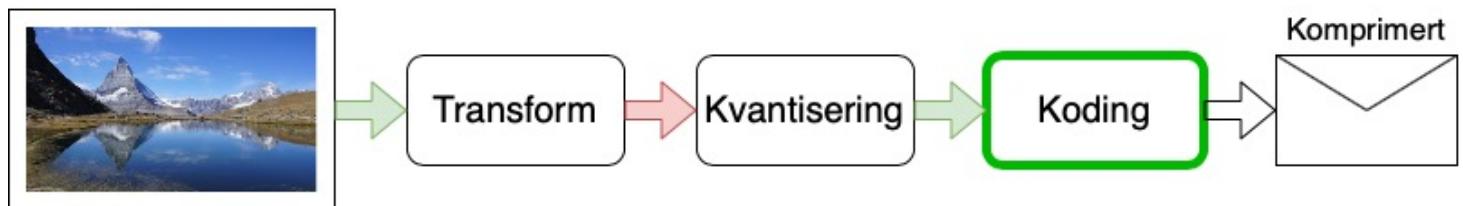
Jeg vil også vise at kompresjon ofte er en 3-stegs prosess:



Og jeg vil uttrykke hvilket steg vi er på, og også hvilken redundans vi reduserer.

Huffman: Eksempel

Vi vil redusere **koding redundans**. Alle symbol / intensiteter blir representert med 8 bit i et bilde, men om hele bildet er svart og hvitt, er det overkill å kode det slik.



Huffman spesialiserer på å bruke variabel lengde på symboler / intensiteter.

Eksempel



In [218]:

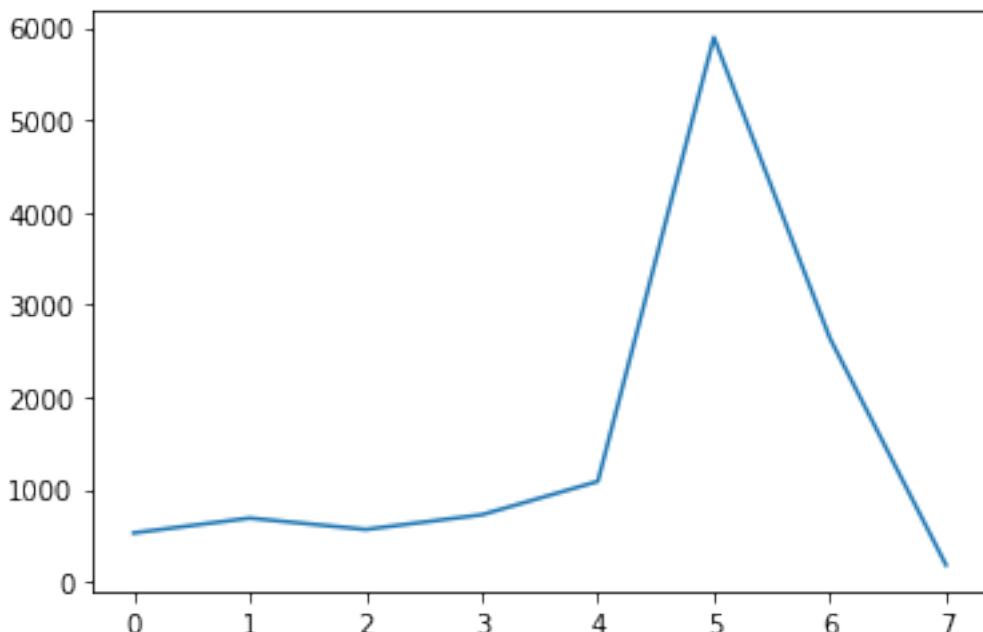
```
cow = imread("tiny_cow.jpg", as_gray=True) // (2**8-3))
p = np.zeros(2**3)
for i in cow.ravel():
    p[int(i)] += 1

plt.plot(p)
print(p)

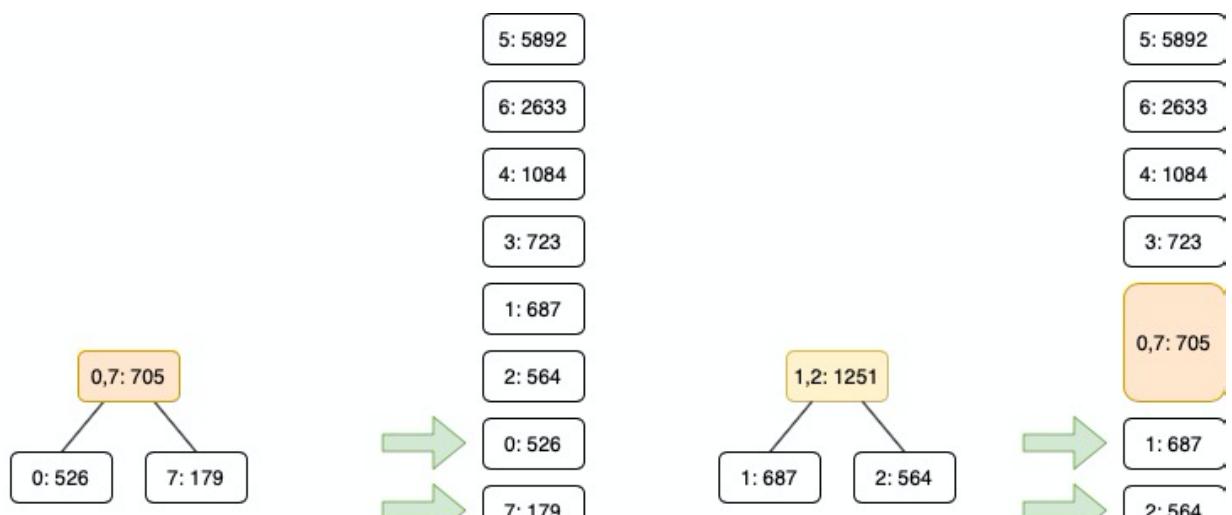
print("Filstørrelse:", np.sum(p*3), "bits")
```

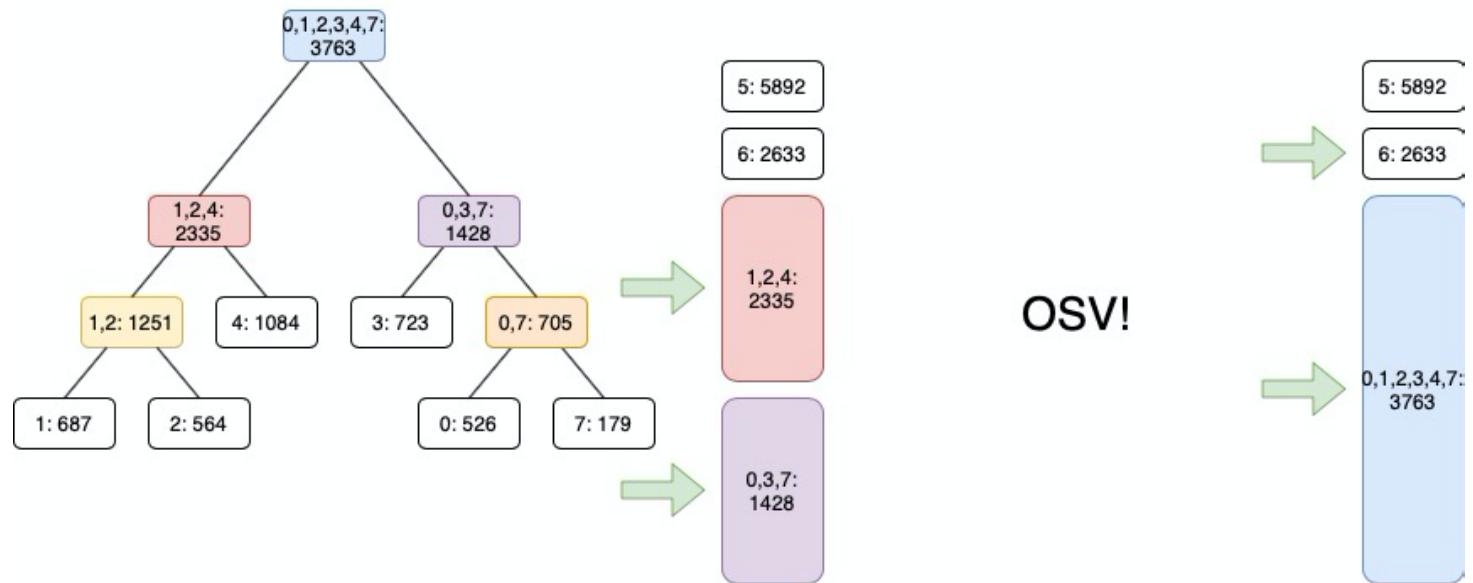
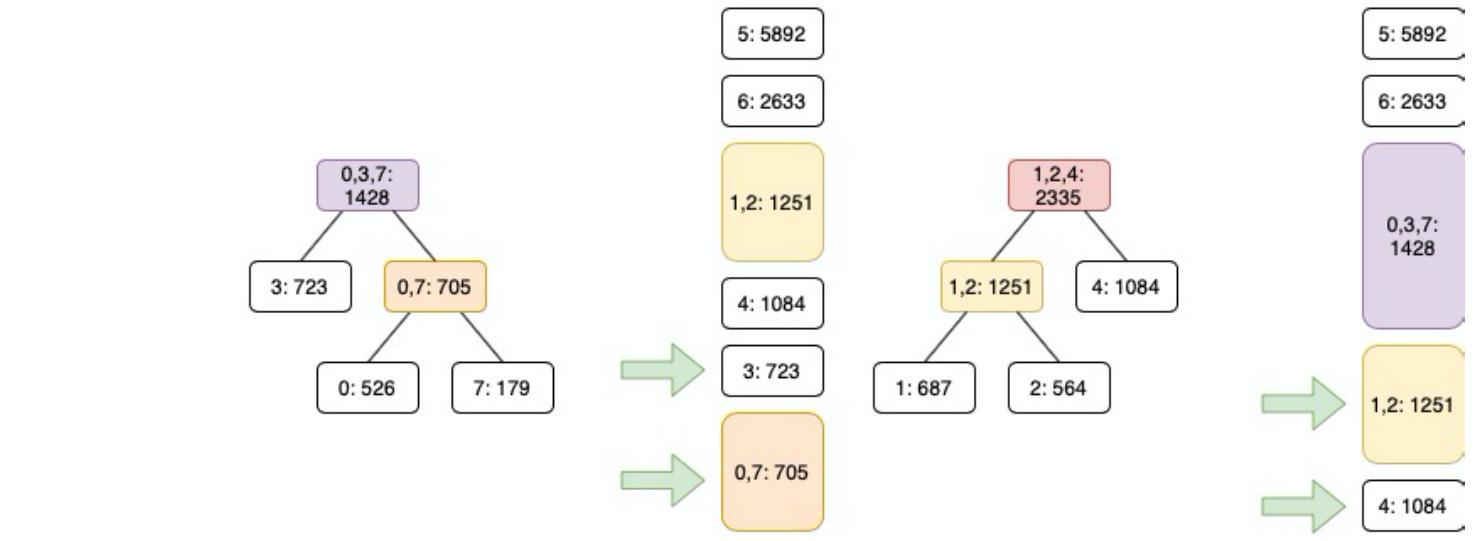
[526. 687. 564. 723. 1084. 5892. 2633. 179.]

Filstørrelse: 36864.0 bits

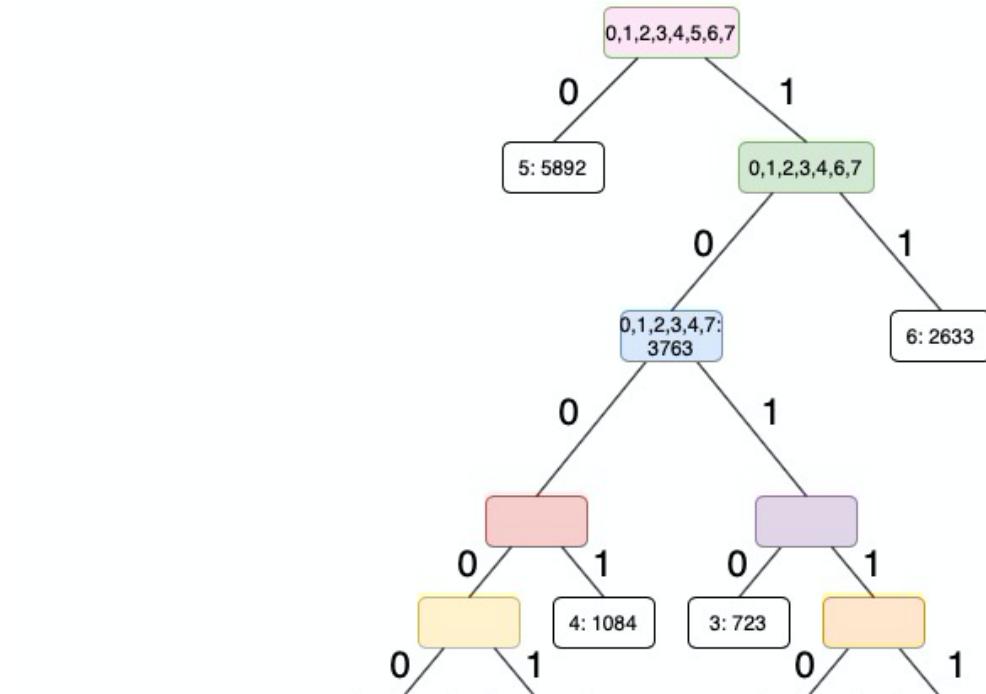


Steg 1: Gro et tre





OSV!



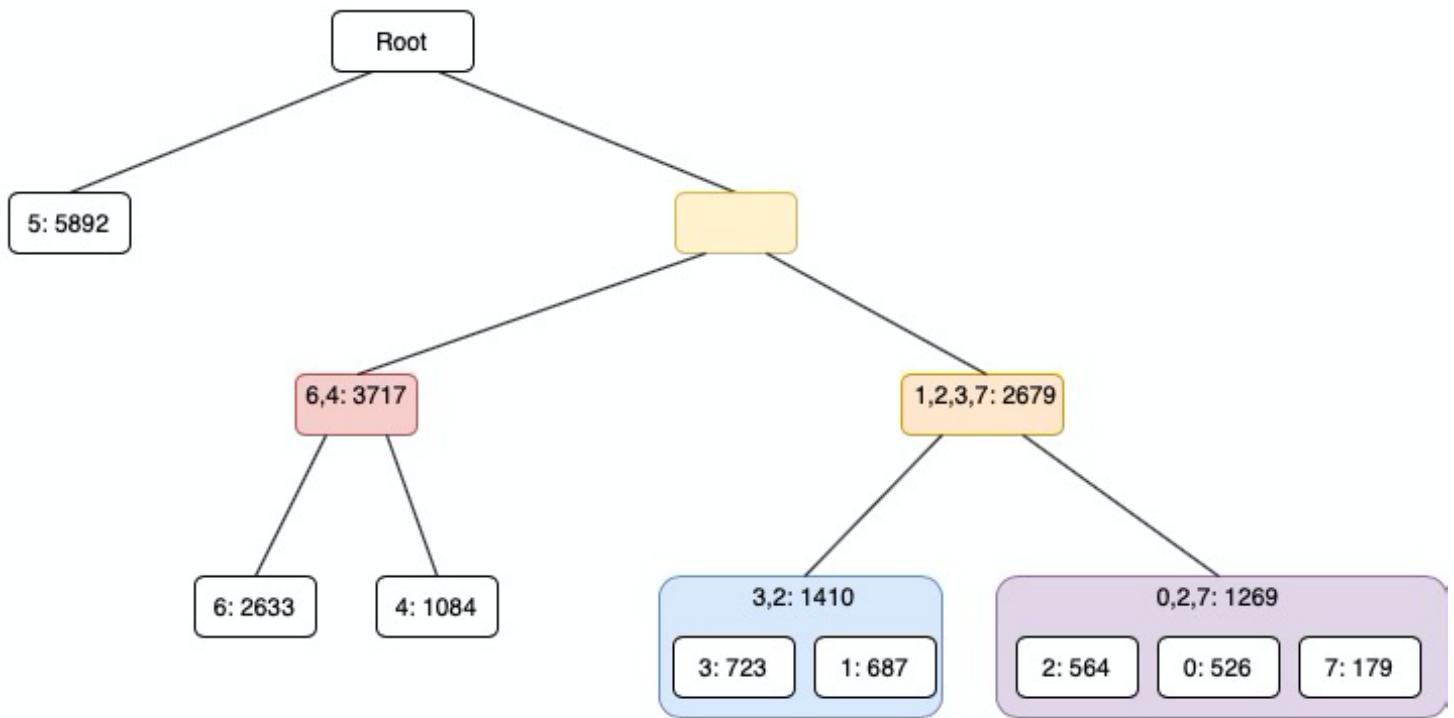
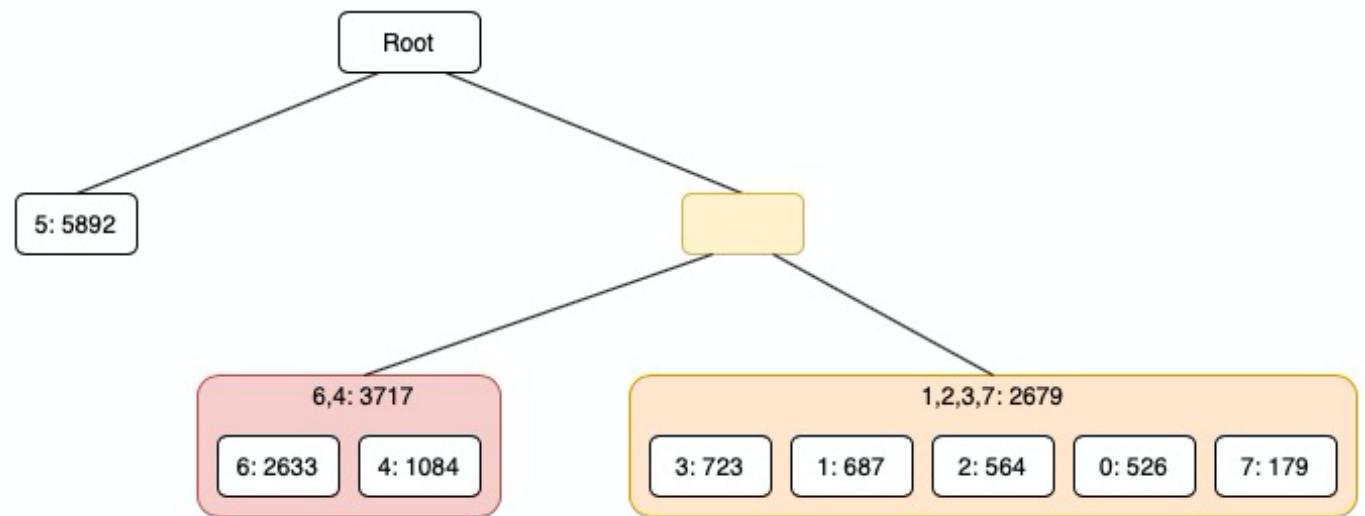
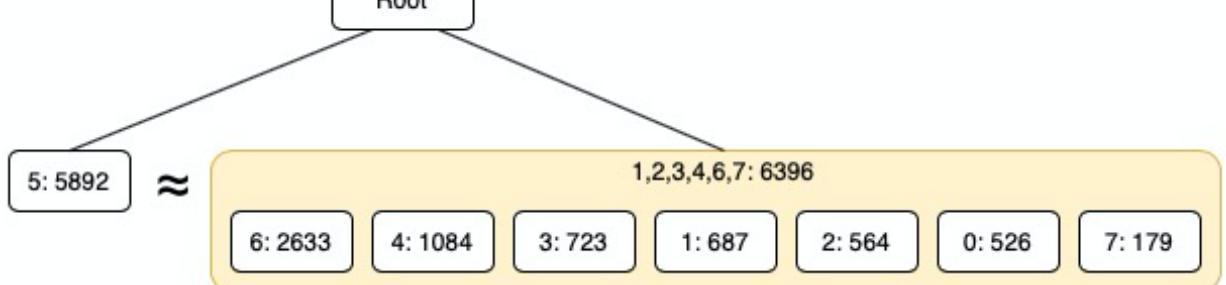
Steg 2: Kodebok

Intensitet	Kode	Bitlengde
0	10110	5
1	10000	5
2	10001	5
3	1010	4
4	1001	4
5	0	1
6	11	2
7	10111	5

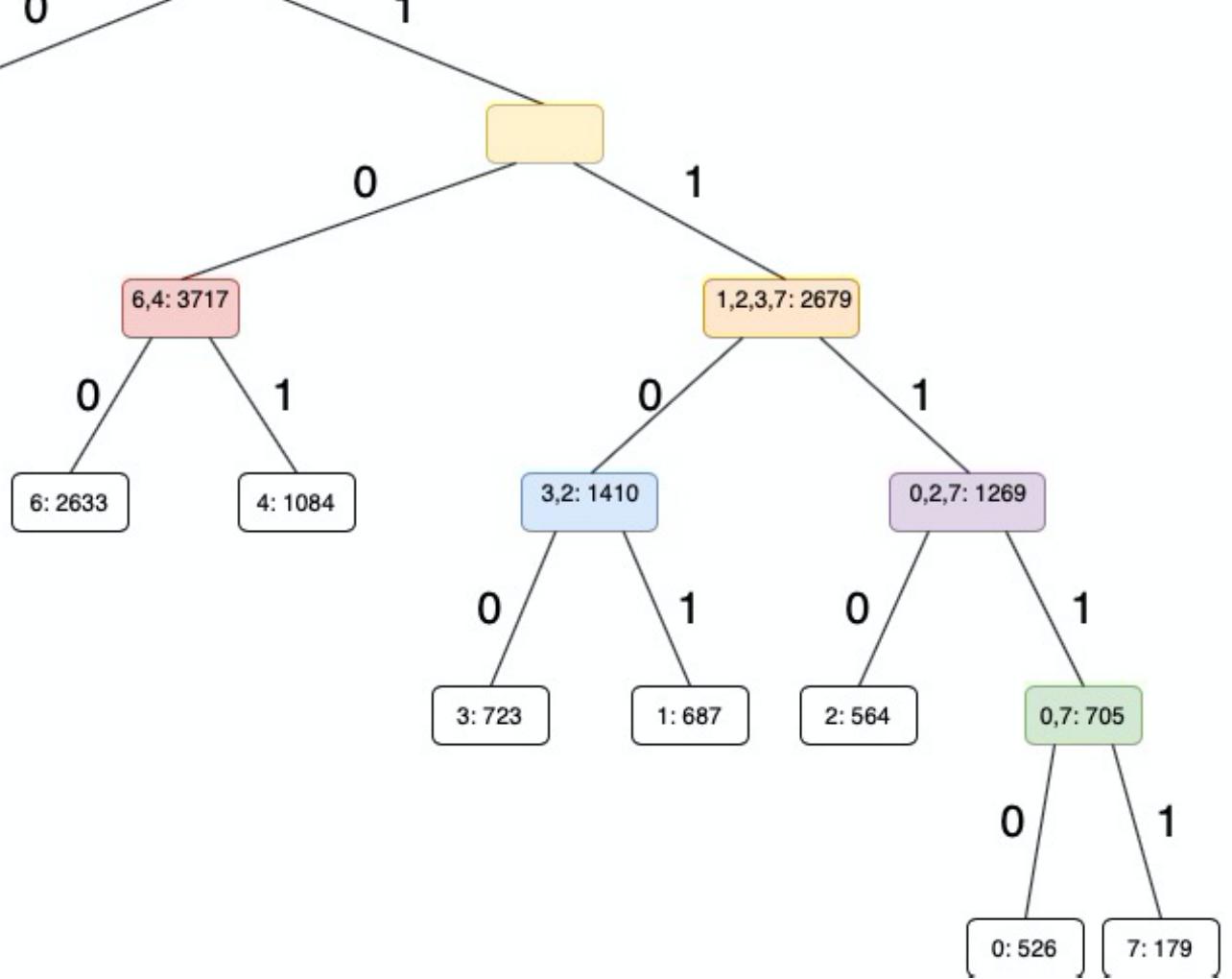
Shannon-Fano

Veldig likt! Samme kompresjonsteg og reduserer også koding redundans.

Steg 1: Gro et tre



OSV!



Steg 2: Kodebok

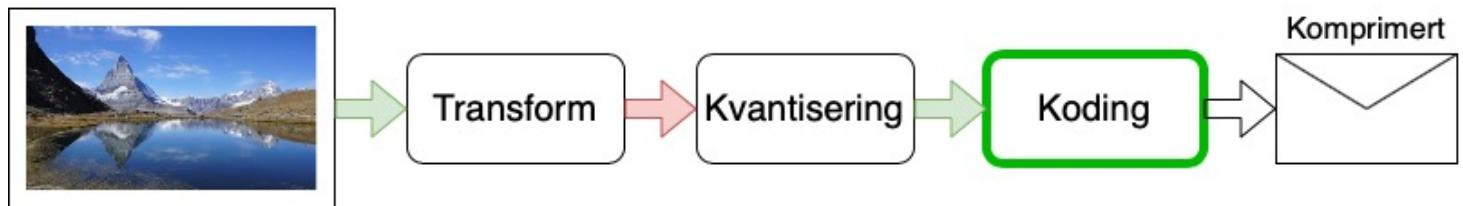
Intensitet	Kode	Bitlengde
0	11110	5
1	1101	4
2	1110	4
3	1100	4
4	101	3
5	0	1
6	100	3
7	11111	5

Hvem vant?

Ny kodelengde vil bli $\text{histogram}[i] * \text{bit_lengde}_i$ for hver intensitet:

	Representasjonslengde	Bitlengde
Huffman	28166.0 bits	2.292155
Shannon-Fano	28464.0 bits	2.316406
Entropi	27700.7984439388	2.254297

Aritmetisk kodding



Veldig imponerende teori: En bit-sekvens kan representeres som **ett** desimaltall.
Reduserer definitivt **koding redundans**.

Eksempel

Sekvens:

[1, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 3, 1, 2]

[1,2,3,2,3,3,1,3,1,2]

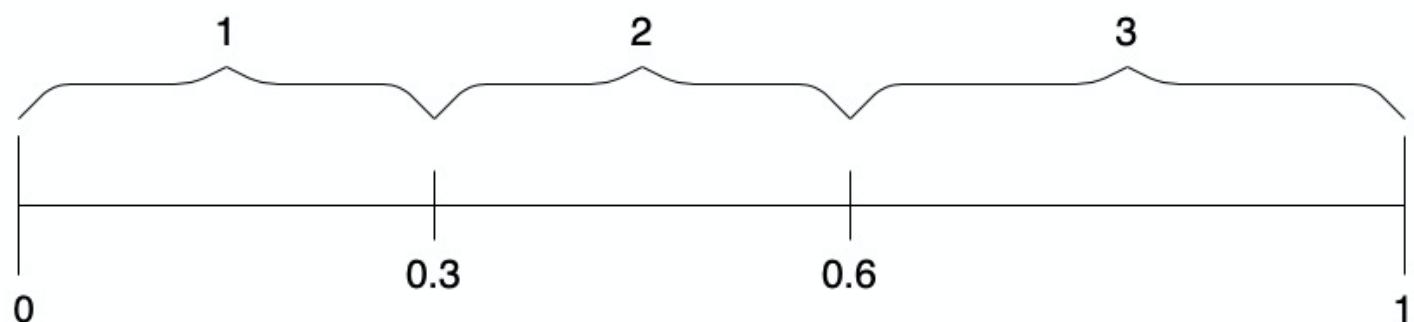
Histogram

[3,3,4]

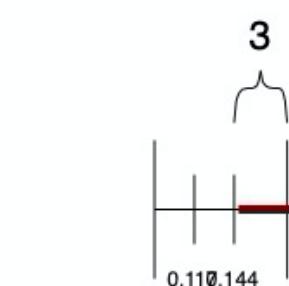
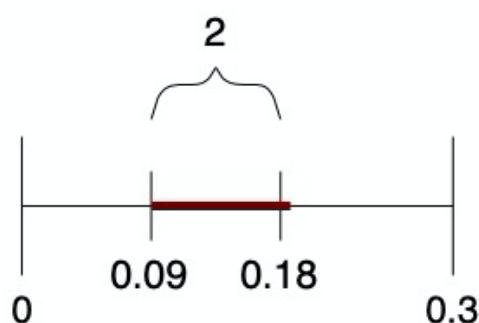
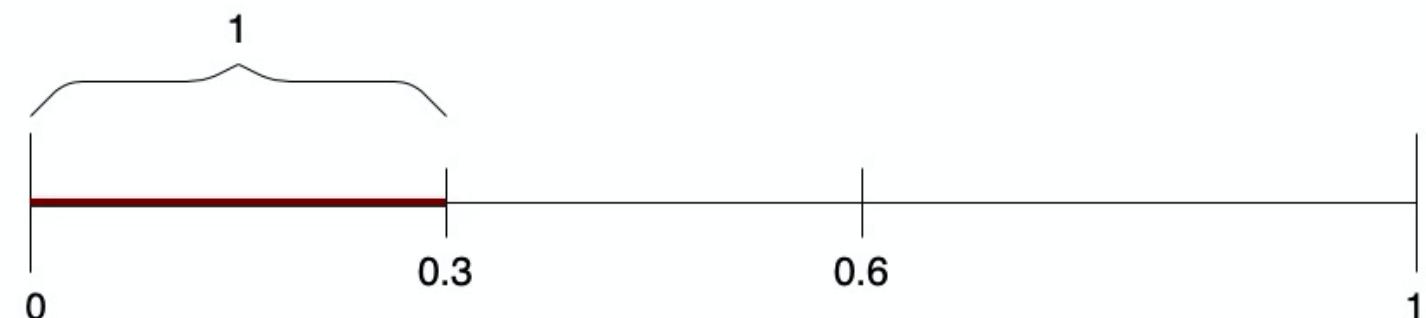
Normalisert

[0.3,0.3,0.4]

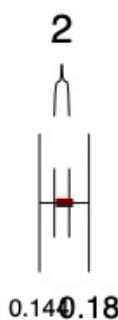
Intervall



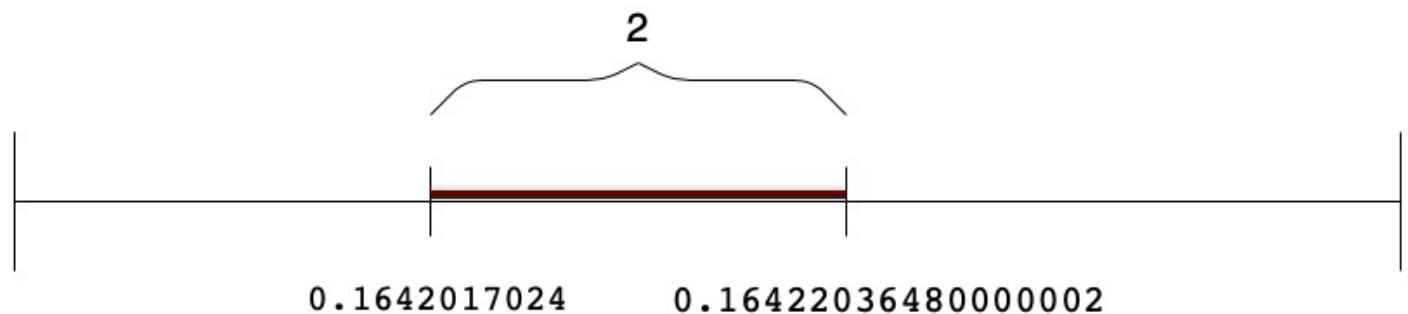
Algoritme start



0.09 0.18



OSV!



Et tall fra dette intervallet er svaret vårt

In [243]:

```
sek = [1,2,3,2,3,3,1,3,1,2]
a = Aritmetisk()
compressed = a.encode(sek, len(sek))
reconstruct = a.decode(compressed)
print("Komprimert:", compressed[0])
print("Rekonstruert:", reconstruct)
```

Komprimert: 0.1642017024

Rekonstruert: [1, 2, 3, 2, 3, 3, 1, 3, 1, 2]

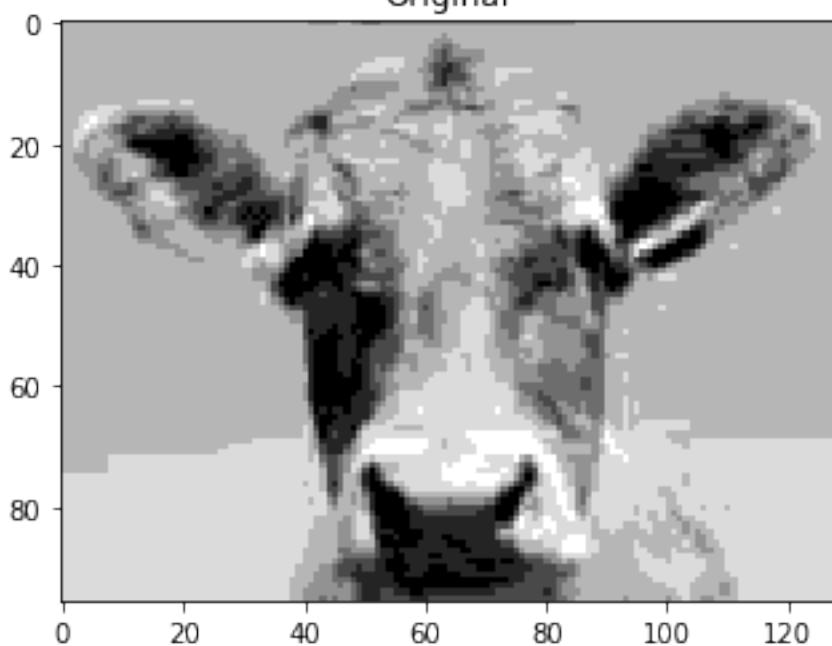
Under var et eksempel på aritmetisk koding som førte til tap, der årsaken muligens er at et ikke-optimalt tall hadde blitt valgt fra intervallet. Man burde ikke velge et vilkårlig tall, man burde ta et tall med minst mulig bit-representasjon.

In [248]:

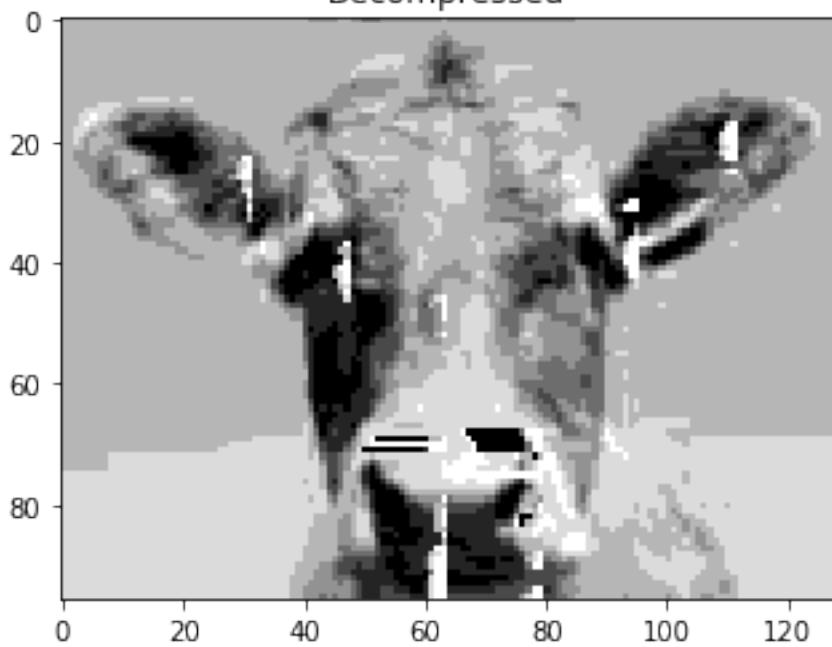
```
cow_int = cow.astype(int)
compressed = a.encode(cow_int.ravel(), int(cow_int.shape[1]/8))
decomp = a.decode(compressed)

plt.imshow(cow_int, cmap="gray")
plt.title("Original")
plt.figure()
plt.imshow(np.array(decomp).reshape(cow_int.shape), cmap="gray")
plt.title("Decompressed")
None
```

Original



Decompressed



JPEG: Oblig 2 parafrase

Steg 1:

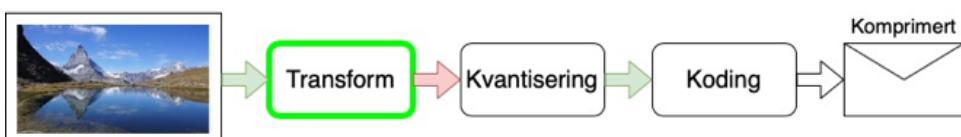
Last inn bilde



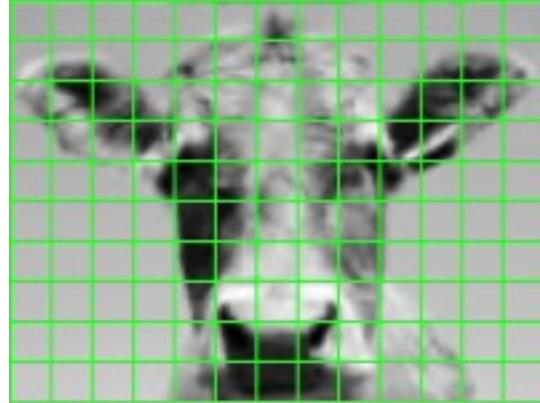
Steg 2:

Trekk fra 128

Steg 3:

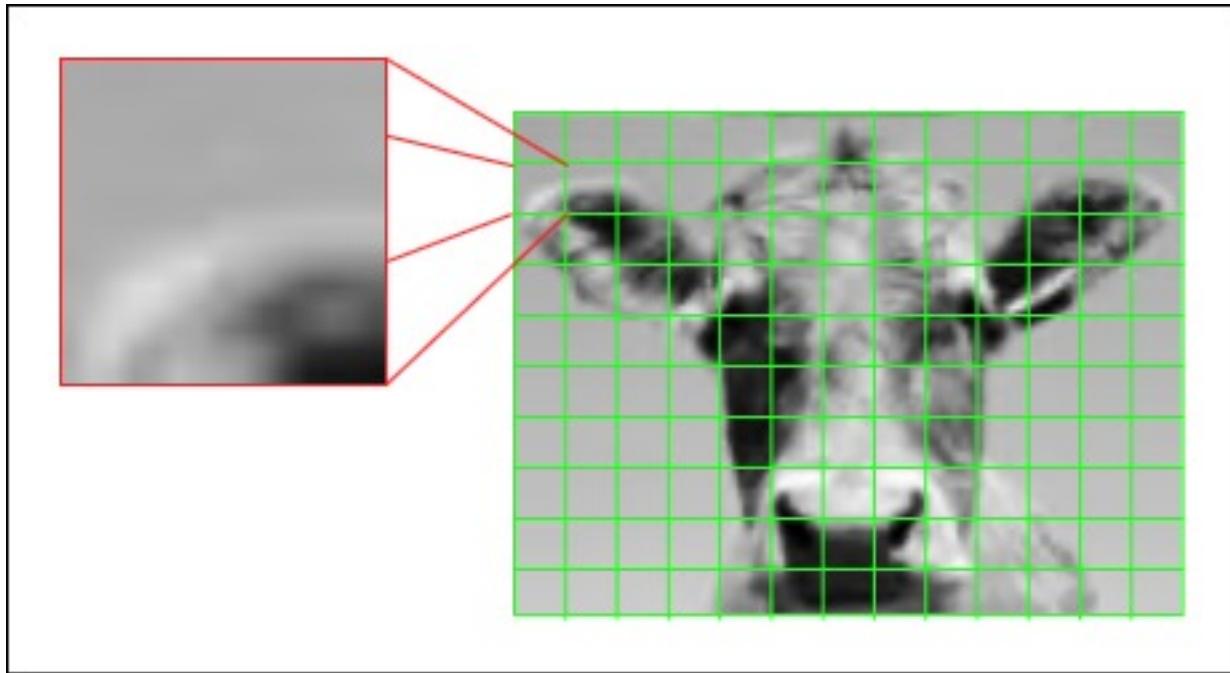


Del opp i 8x8 blokker



Påfør 2D DCT på **hver** blokk:

$$F(u, v) = \frac{1}{4}c(u)c(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cos\left(\frac{(2x+1)u\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)v\pi}{16}\right)$$
$$c(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ if } a == 0 \text{ else } 1$$



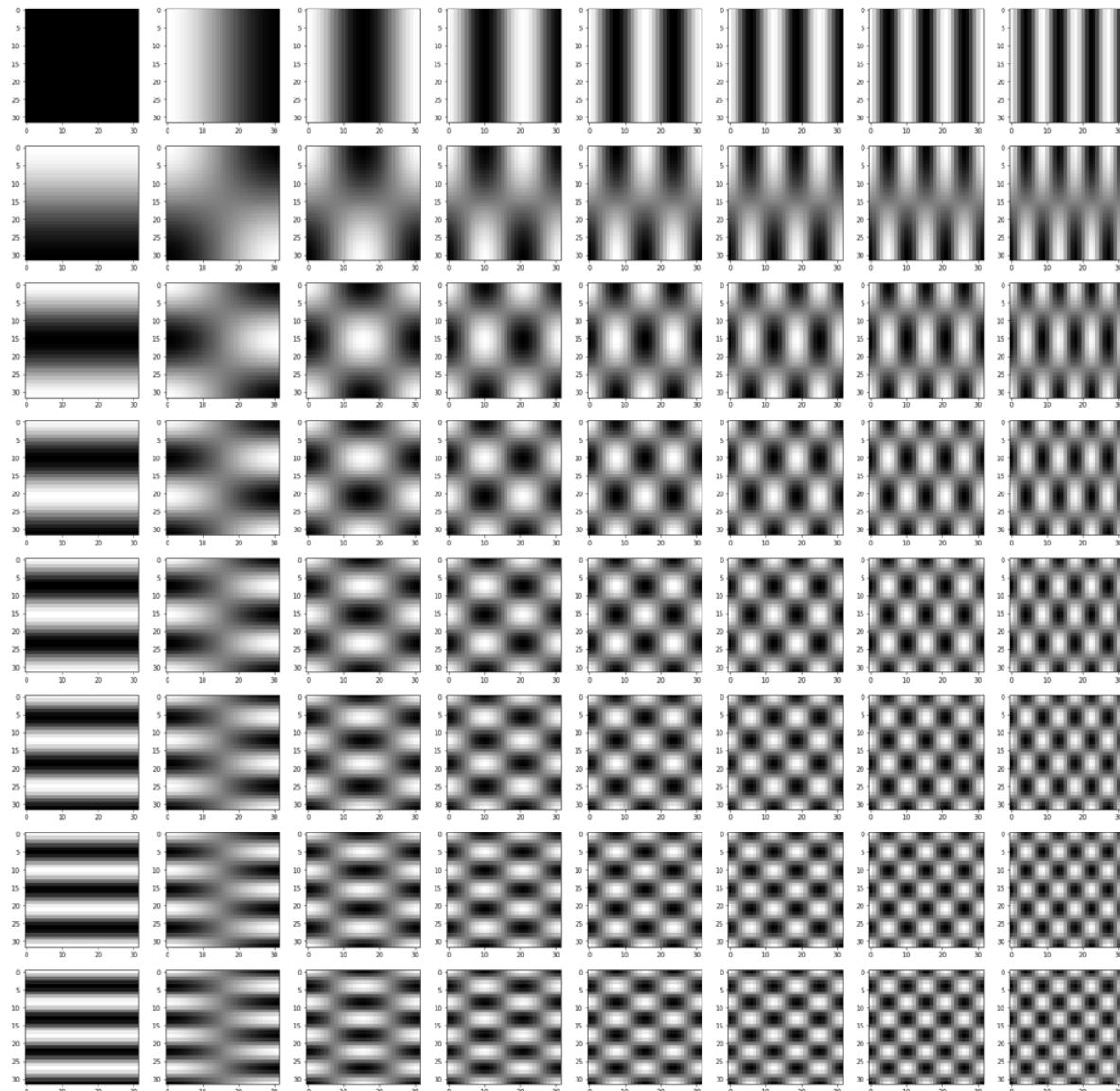
$$\text{Blokk}(u, v) = \frac{1}{4}c(u)c(v)\text{sum}\left(\begin{array}{c} \text{[Pixel from block]} * \\ \text{[8x8 DCT Basis Function Matrix]} \end{array} \right)$$

In [247]:

```
sampling = 32
```

```
cosinus = lambda x,u : np.cos( (2*x + 1)*u*np.pi / (sampling+sampling) )
cos_bilde = lambda u, v: [[ cosinus(x,u)*cosinus(y,v) for x in range(sampling)] for y in range(sampling)]

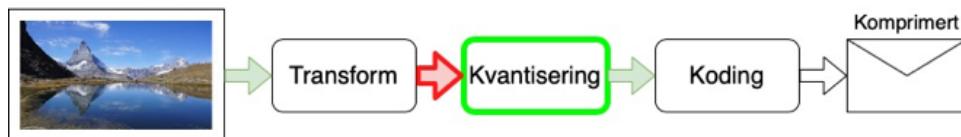
fig = plt.figure(figsize=(30,30))
for u in range(8):
    for v in range(8):
        cos_uv = cos_bilde(u,v)
        fig.add_subplot(8,8,1+(u+v*8))
        plt.imshow(cos_uv, cmap="gray")
plt.show()
```



Steg 4: Ikke faktisk en del av JPEG-algoritme, men en del av oblig

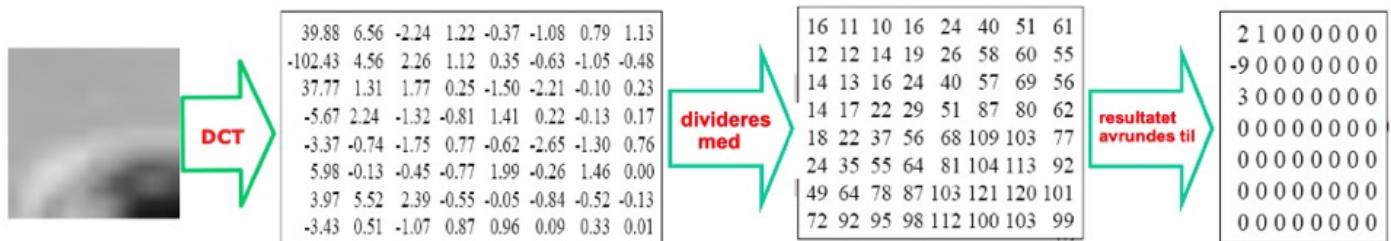
Rekonstruer med IDCT og +128 Test: Er før og etter lik? Da har du nok gjort det rett

Steg 5:



Fjerner: **Psykovisuell redundans**, i form av høye frekvenser

Del blokkene på qQ og rund av:



Steg 6:

Ting dere IKKE skal gjøre, men som er en del av JPEG:

1. Indeks 0,0 (DC-komponenten) skal tas ut av hver blokk
2. De resterende 63 pikslene i hver blokk skal bli representert mer kompakt
3. DC-komponentene skal også transformeres til mer kompakt
4. De kompakte representasjonene skal entropi-kodes (Huffman, Aritmetisk)

Det DERE skal: Regn ut

1. Entropi
2. Lagringsplass basert på entropi
3. Kompressjonsrate

Steg 7:

Rekonstruer, og lagre til fil.

Bruk funksjonen på

$$q = [0.1, 0.5, 2, 8, 32]$$

Og svar på tekstsvarene!

Se forelesningen når den kommer ut! Lykke til med oblig :)

Bildene brukte:



Dag Langmyhrs bilde fra forelesningen hans i IN1020 31. August 2017 om
Digital Representasjon,
<https://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN1020/h17/timeplan/index.html#FOR>

$$\text{Information Content of } \square = -\log \frac{1}{P(\square)}$$
$$P(\square) \log \frac{1}{P(\square)} + P(\square) \log \frac{1}{P(\square)} + P(\square) \log \frac{1}{P(\square)}$$
$$= \sum_{x \in \{A, B, C\}} P(x) \cdot \log \frac{1}{P(x)} = \text{THE ENTROPY OF THE SOURCE! A, B, C}.$$



Found at <https://drawception.com/game/CanbezjpKP/a-reference-nobody-will-get/>, September 2nd, 2012
Artist: <https://drawception.com/player/201808/sarah5322/>