MOWNIT

Podsumowanie zagadnień interpolacji i aproksymacji

Mikołaj Klimek

Metody obliczania dokładności

N = 1000

f(x) – badana funkcja

w(x) – wyliczony wielomian interpolujący

Pierwsza metoda mierzenia dokładności : $D_1 = \max_{i=1\dots n} |f(x_i) - w(x_i)|$

Druga metoda mierzenia dokładności : $D_2 = \frac{\sum_{N}^{i=1}(f(x_i) - w(x_i))^2}{N}$

Wykorzystywane technologie

Program służący do przeprowadzania obliczeń został napisany w języku Python 3.9.0 z wykorzystaniem dodatkowych bibliotek:

- numpy
- matplotlib.pyplot
- math

Badana funkcja

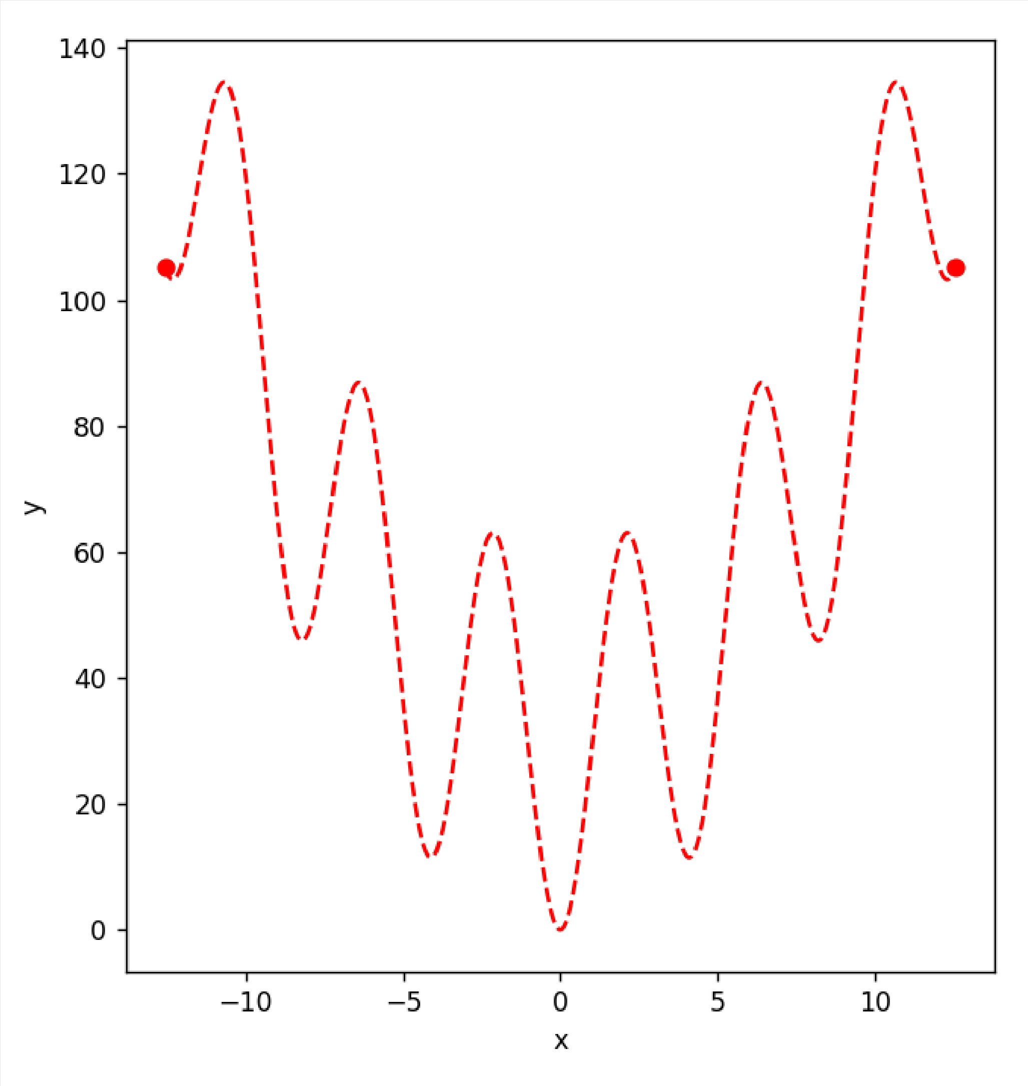
$$f(x) = 10\,m + \frac{x^2}{k} - 10\,m\cos(kx)$$

Dla parametrów k = 1.5, m = 3

$$f(x) = 30 + \frac{x^2}{1.5} - 30\cos(1.5x)$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}\,x + 45\sin(1.5x)$$

W każdym przypadku funkcja badana była na przedziale [-4pi, 4pi]



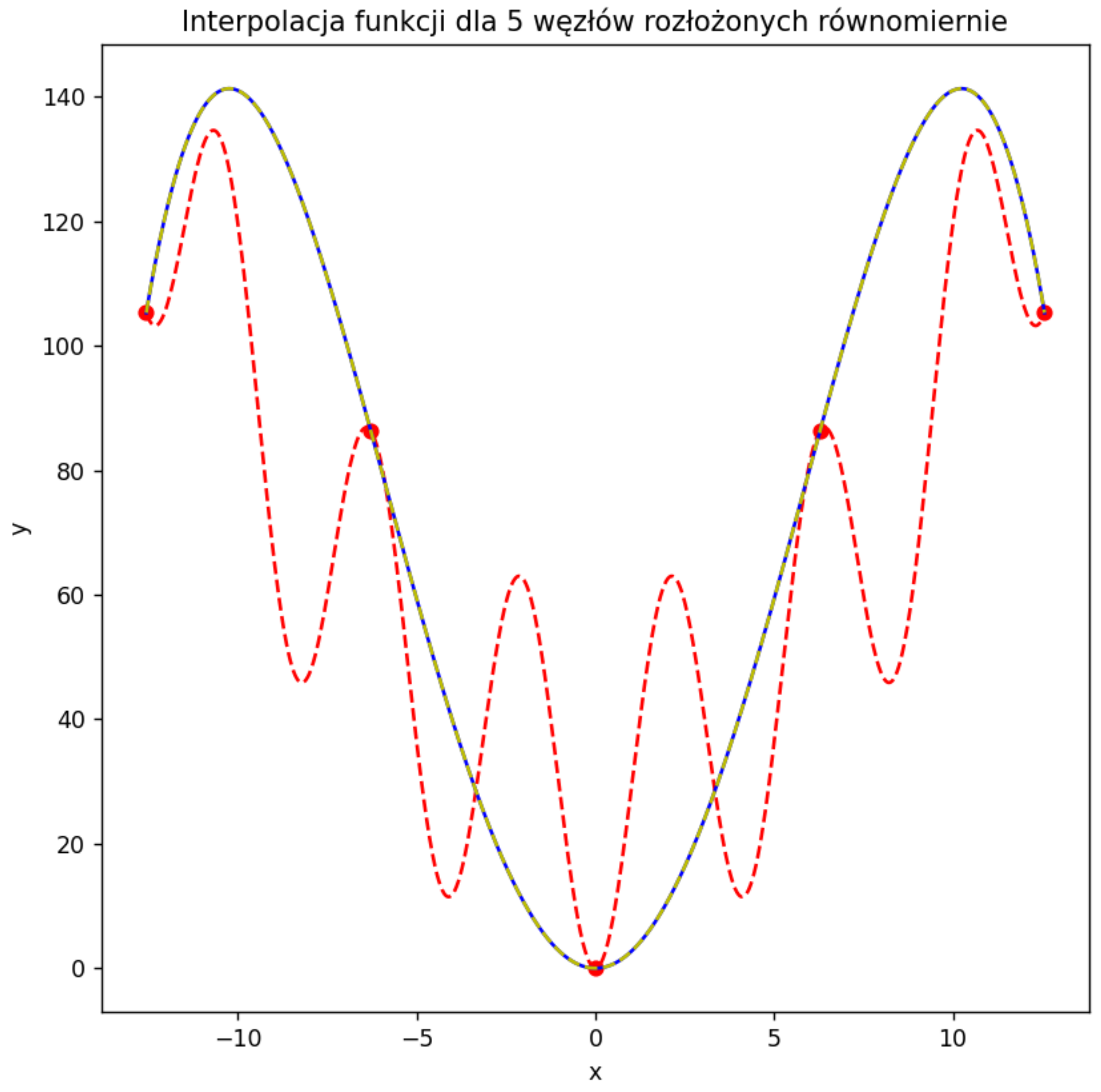
Wielomiany interpolujące według zagadnienia Lagrange’a

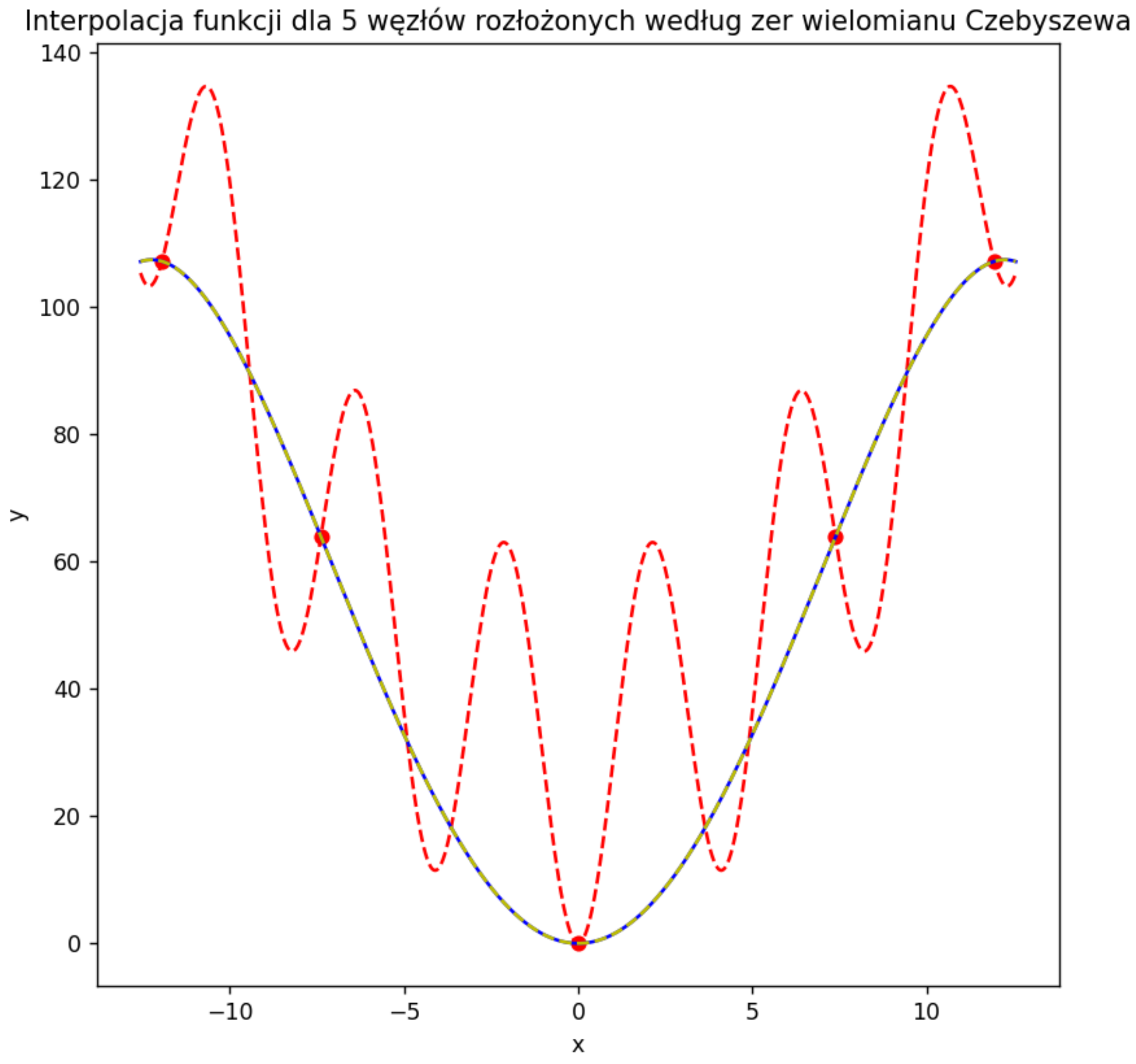
- - - - - - oryginalna funkcja

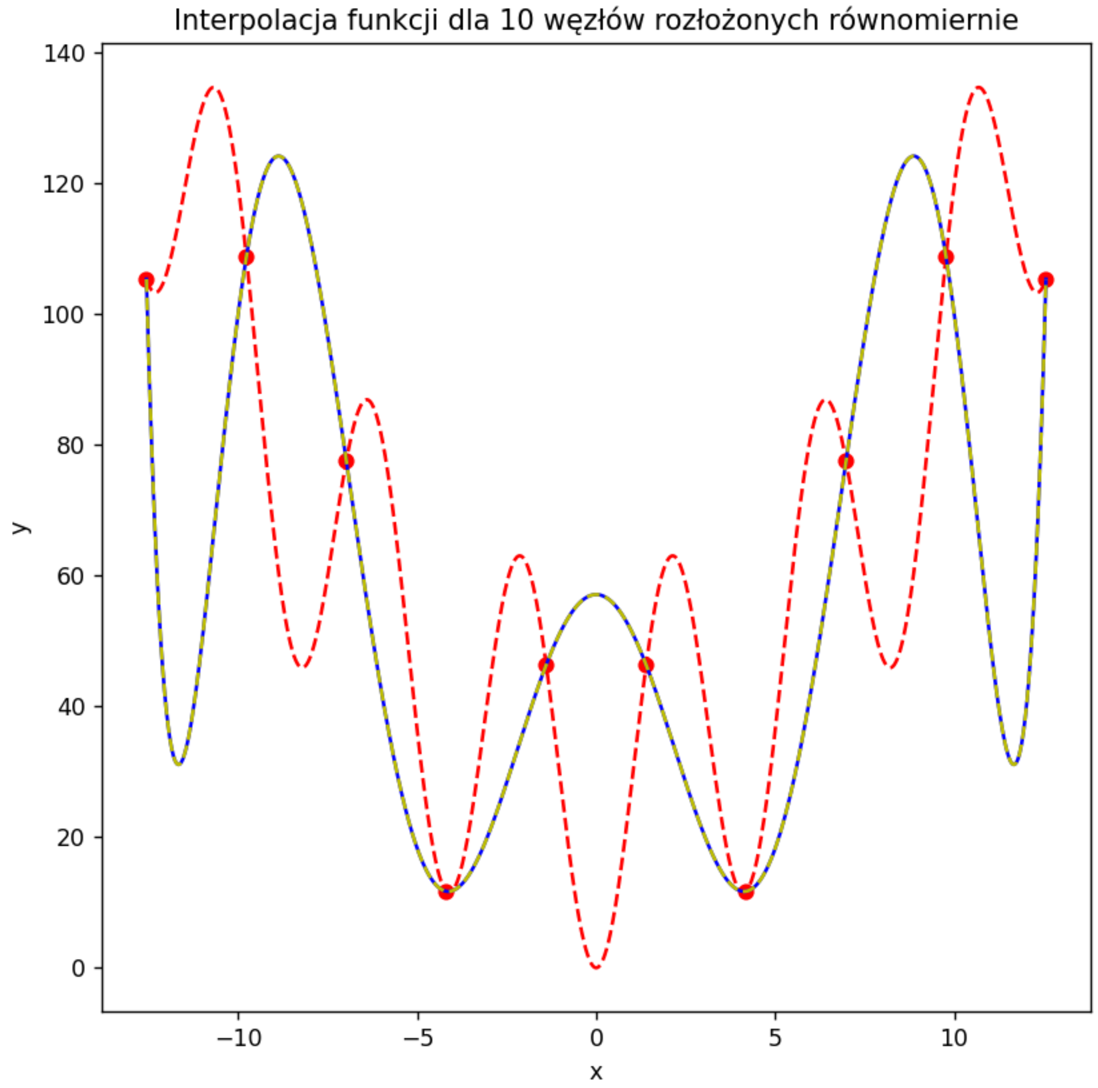
- - - - - - wielomian interpolujący w postaci Newtona

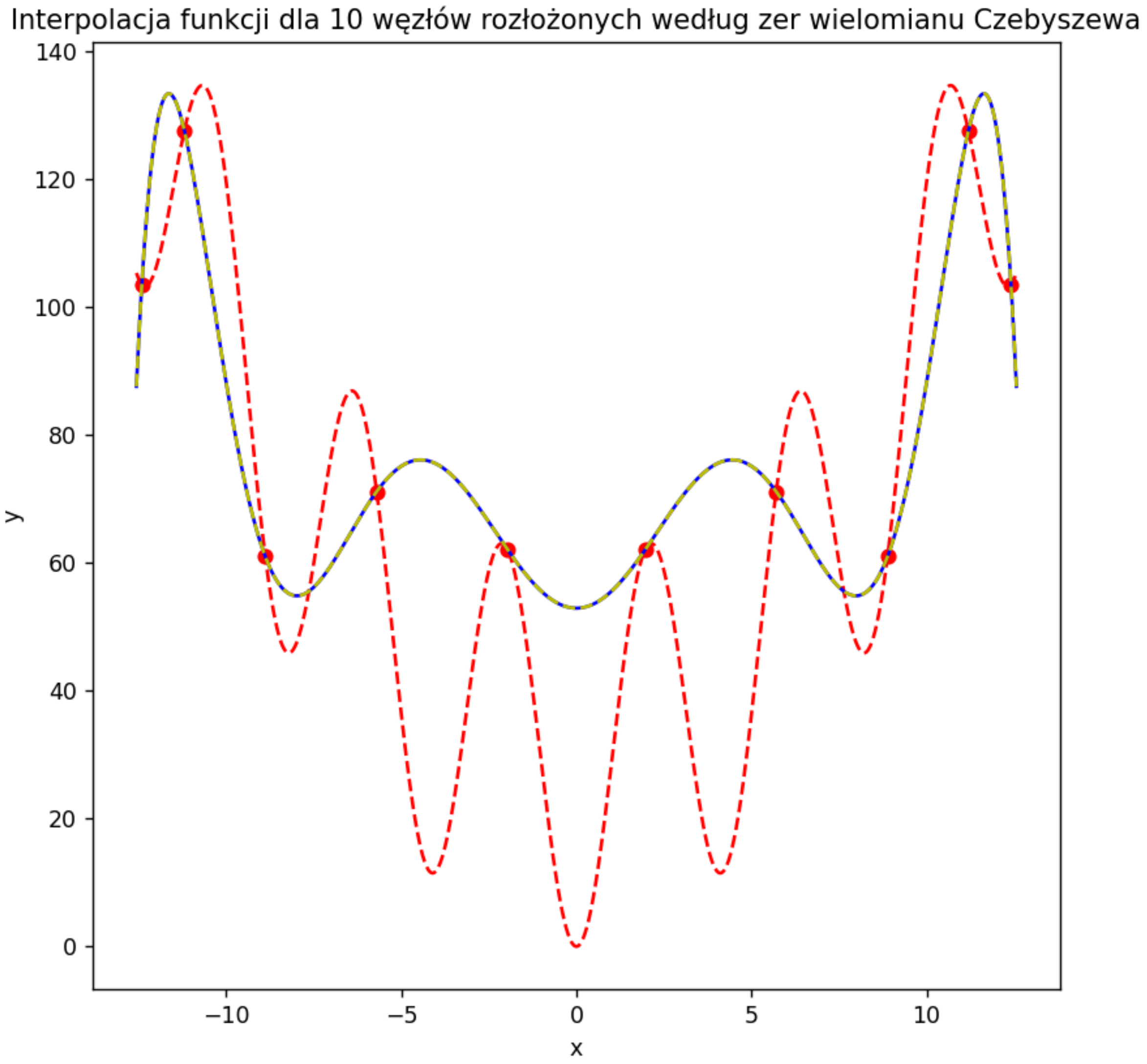
______ wielomian interpolujący w postaci Lagrange’a

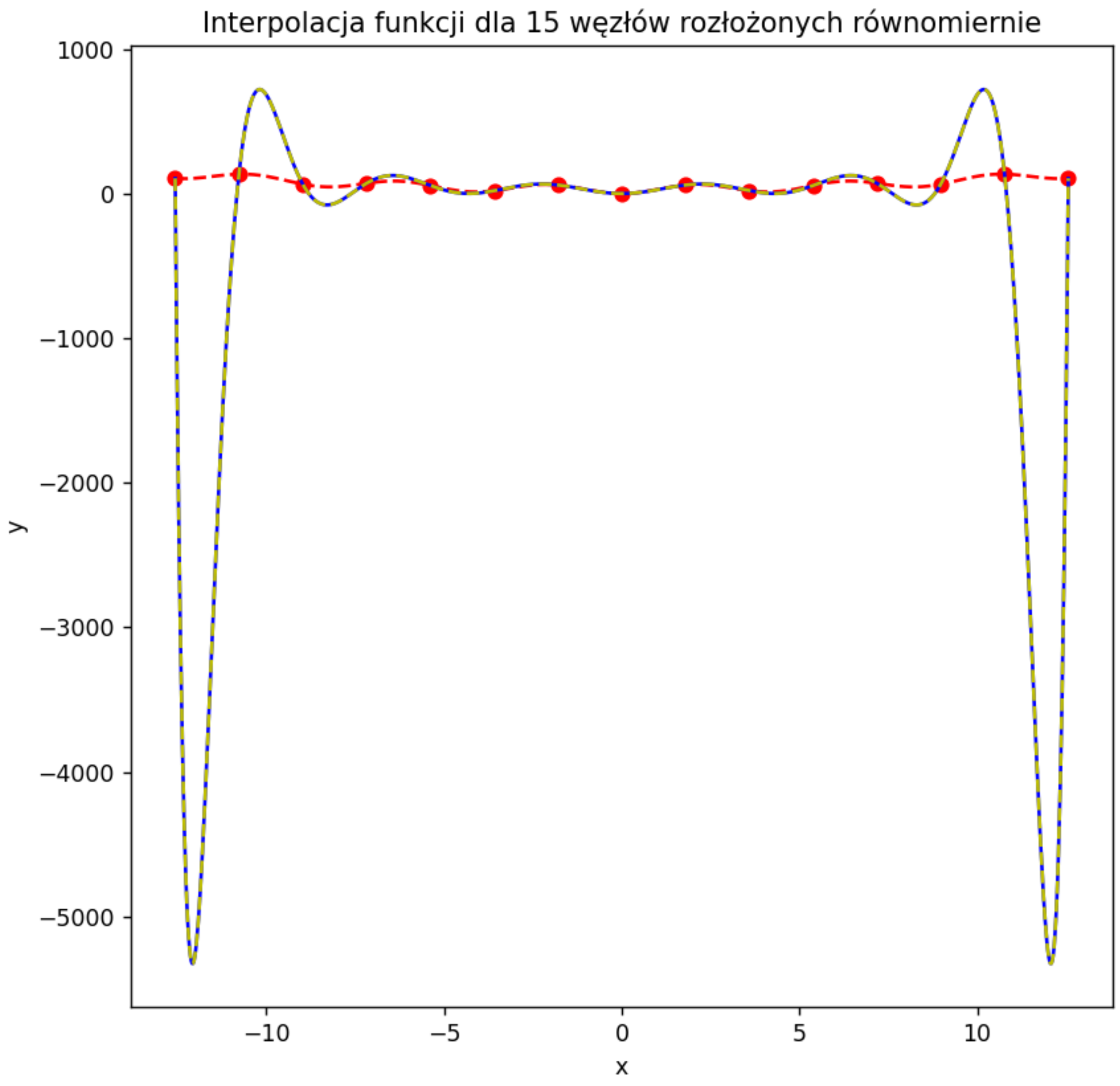
W czasie przeprowadzania badań porównywane były wielomiany aproksymujące uzyskane zarówno w przypadku, gdy węzły w przedziale rozłożone były równomiernie, jak i wtedy, gdy punkty ze znanymi wartościami rozłożone były według zer wielomiany Czebyszewa

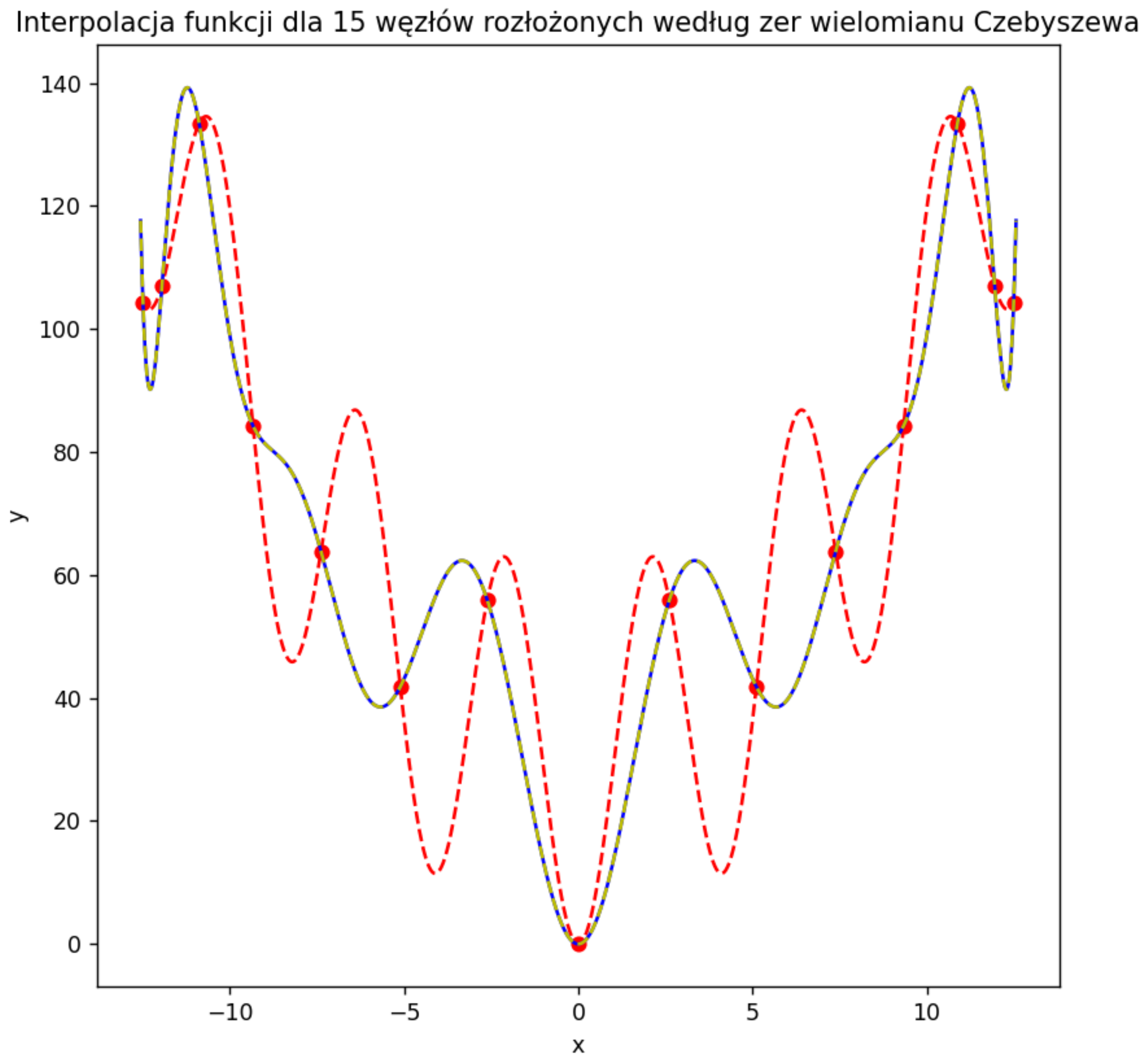

Interpolacja funkcji dla 5 węzłów rozłożonych równomiernie
y
x


Interpolacja funkcji dla 5 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x


Interpolacja funkcji dla 10 węzłów rozłożonych równomiernie
y
x
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10


Interpolacja funkcji dla 10 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10


Interpolacja funkcji dla 15 węzłów rozłożonych równomiernie
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
y
−10
−5
0
5
10
x


Interpolacja funkcji dla 15 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x

Najważniejsze wnioski

- Niezależnie od tego, czy do znalezienia wielomianu interpolującego wykorzystamy metodę Lagrange’a czy Newtona, w obydwu przypadkach otrzymamy taki sam wielomian
- Dla małych ilości węzłów (=<10) dokładność wielomianów interpolujących obliczonych z wykorzystaniem węzłów rozłożonych równomiernie i węzłów odpowiadającym zerom wielomianu Czebyszewa nie różnią się od siebie znacząco
- Dla wielomianów wyliczonych przy użyciu 11, 13, 15 i 20 równomiernie rozłożonych węzłów widoczny jest efekt Rungego – w pobliżu końców przedziału wartość gwałtownie odstaje od wartości wielomianu, co sprawia, że błąd dokładności jest bardzo duży
- Jednocześnie dla takiej samej ilości węzłów, ale przy rozłożeniu ich według zer wielomianu Czebyszewa, efekt Rungego nie występuje, a dokładność zwiększa się

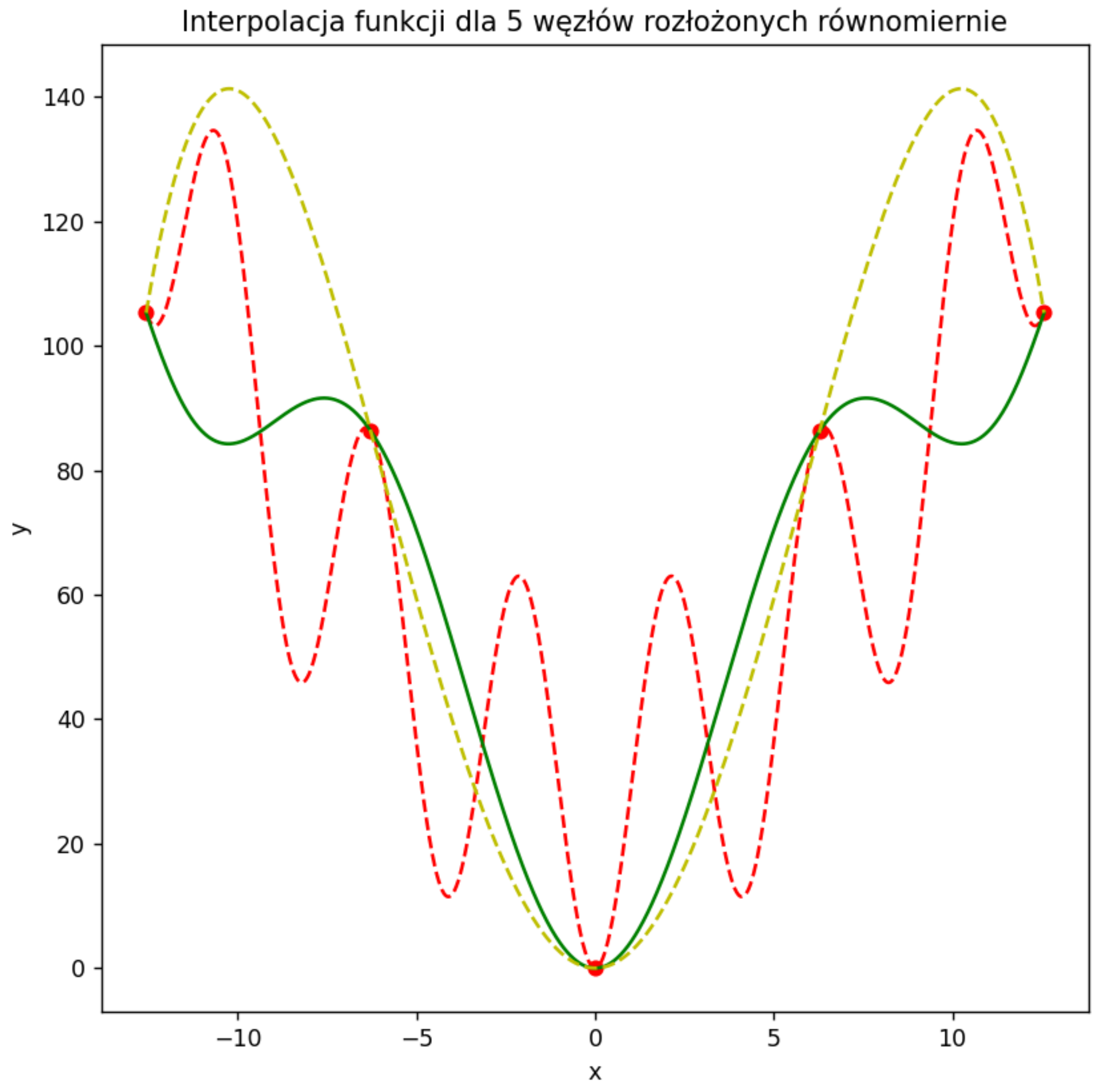
Porównanie wielomianów interpolujących dla zagadnienia Lagrange’a i Hermite’a

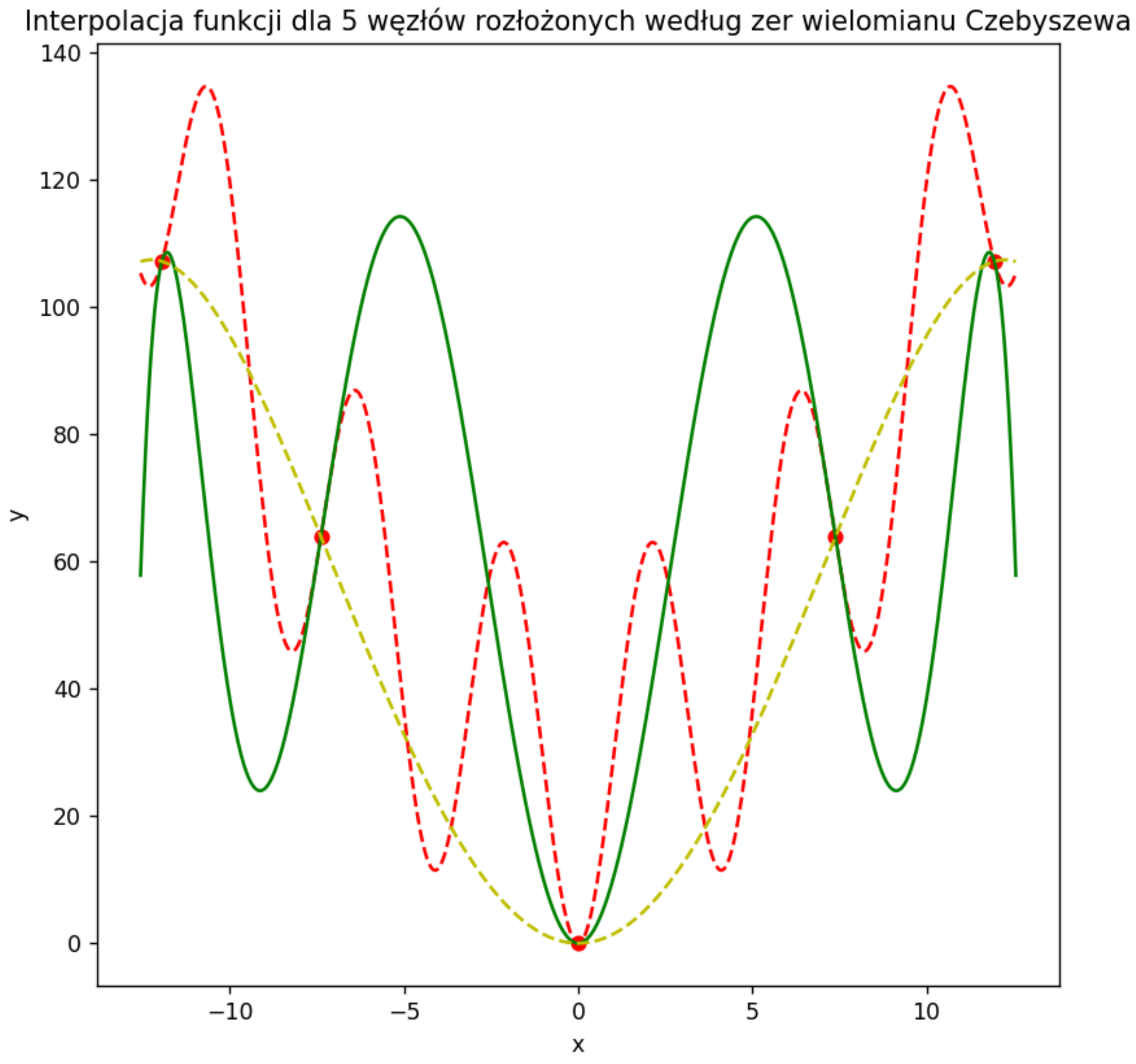
- - - - - - oryginalna funkcja

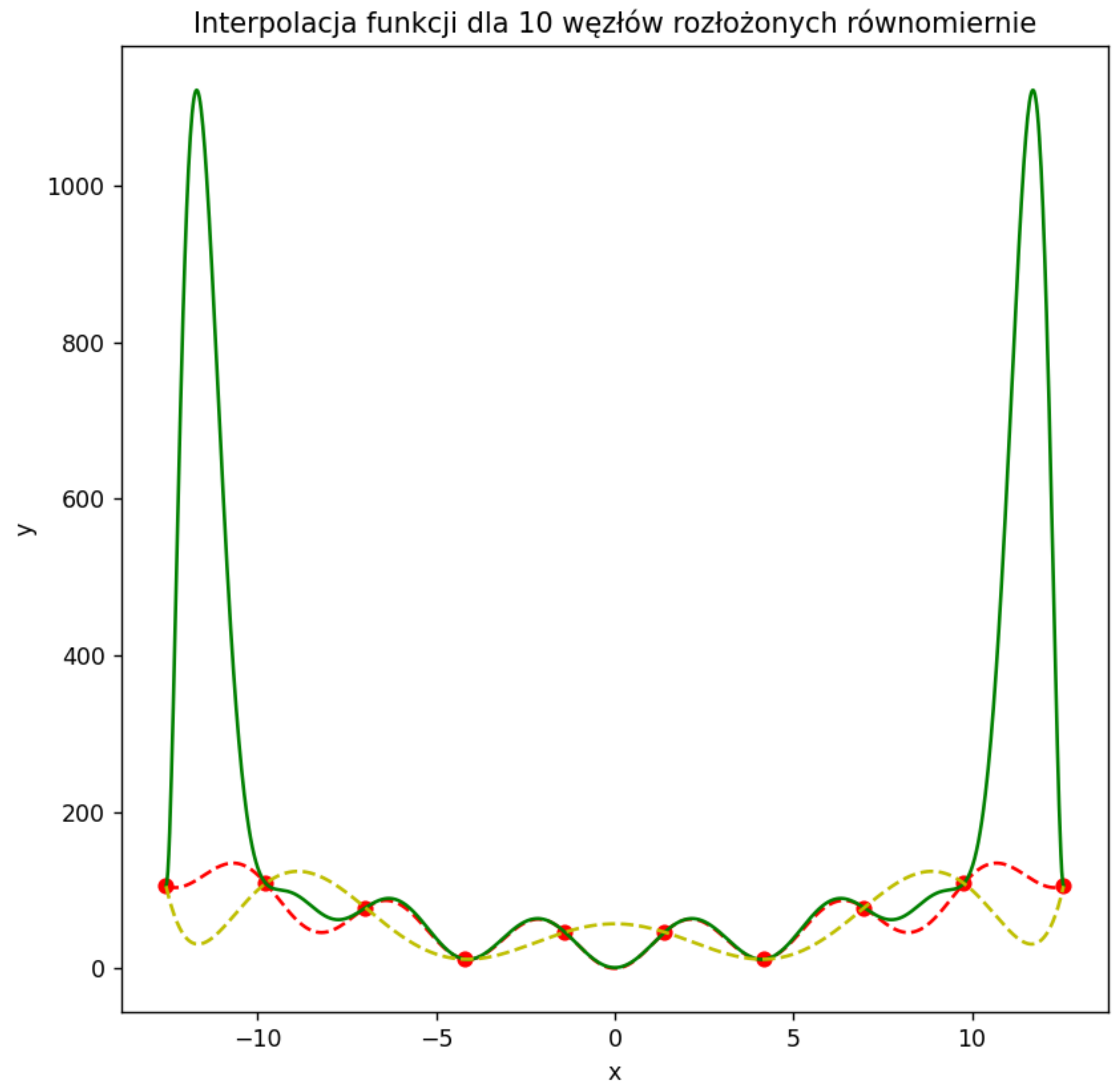
- - - - - - wielomian interpolujący dla zagadnienia Lagrange’a

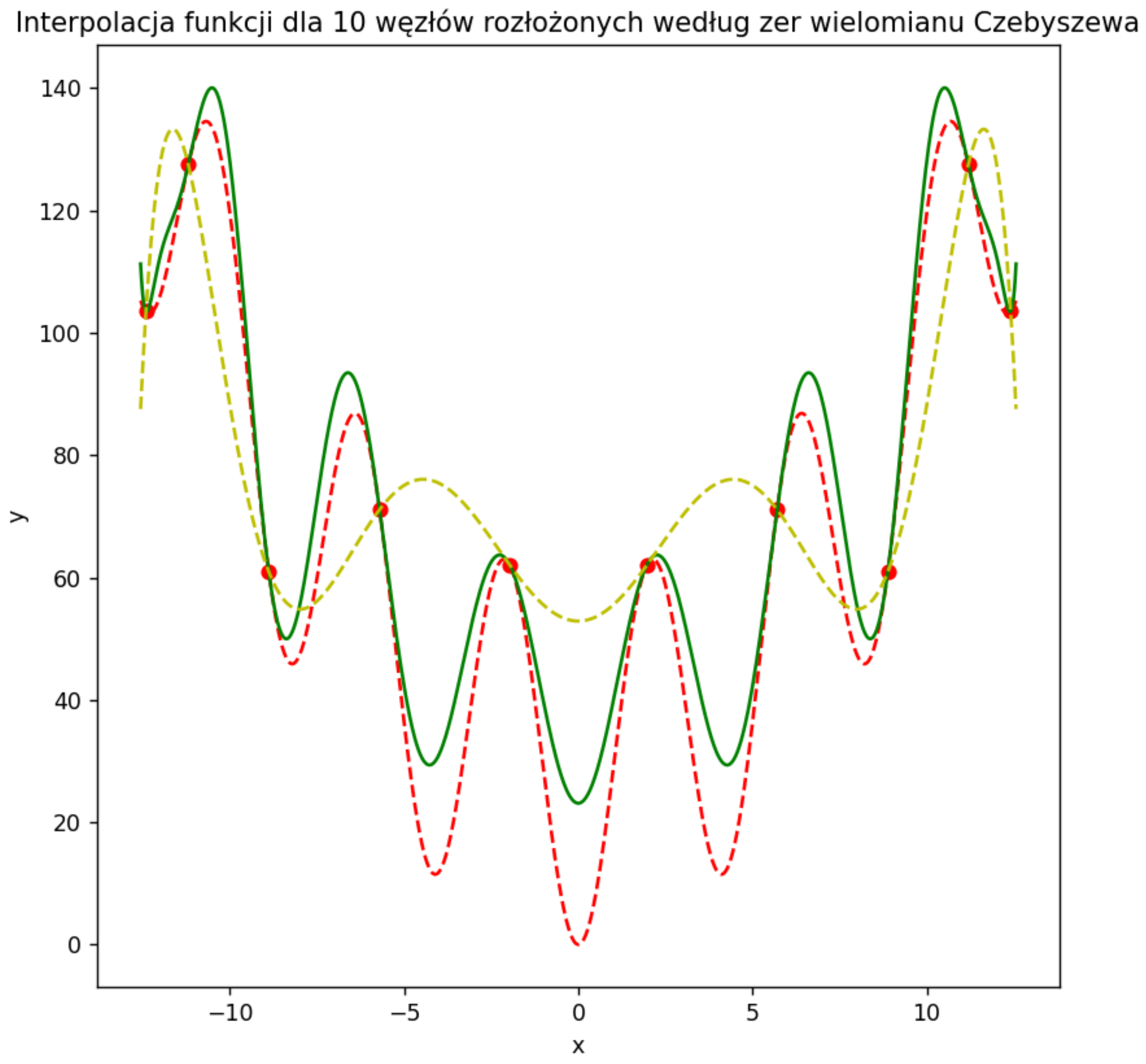
wielomian interpolujący dla zagadnienia Hermita

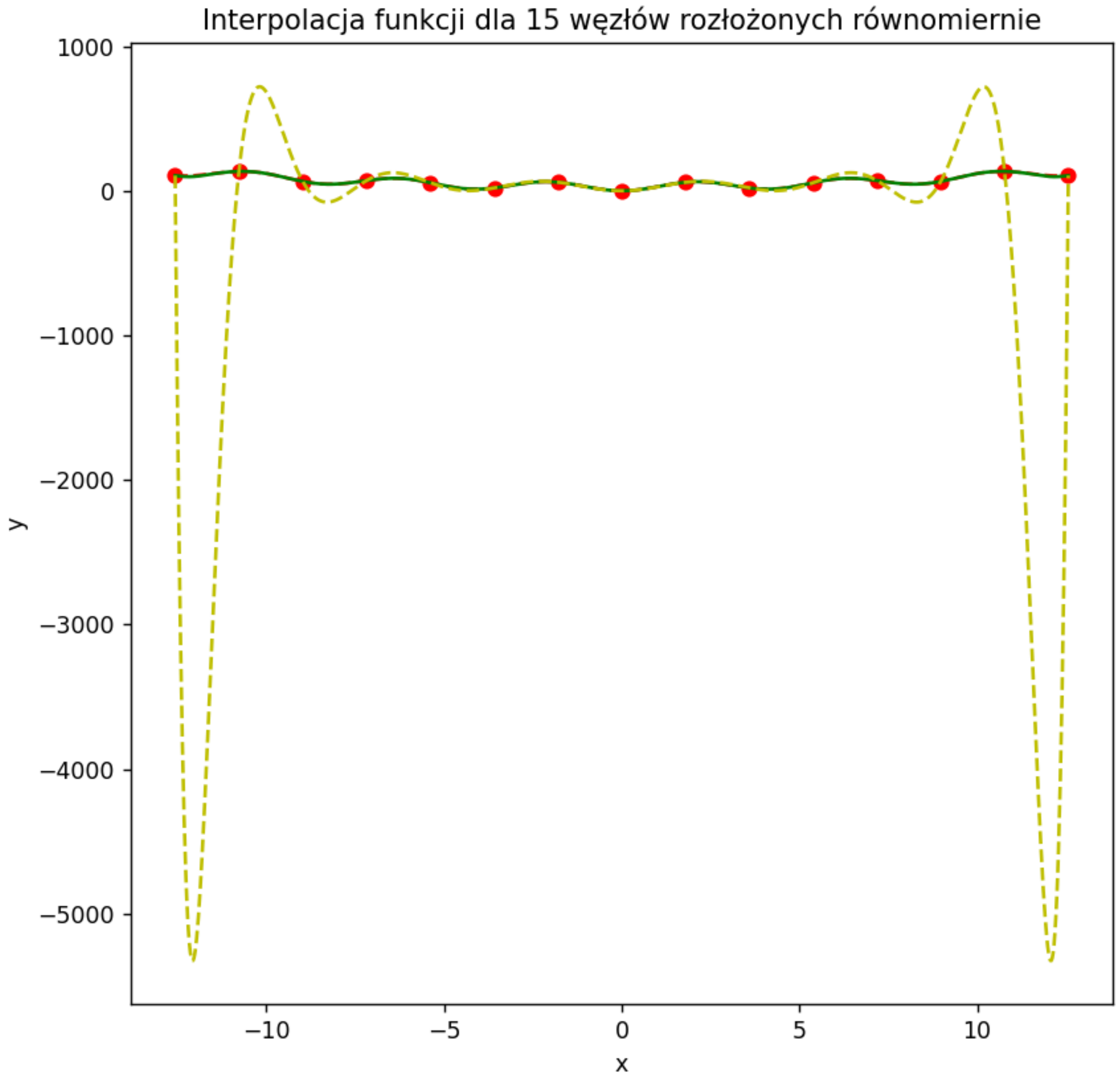
W czasie przeprowadzania badań porównywane były wielomiany aproksymujące uzyskane zarówno w przypadku, gdy węzły w przedziale rozłożone były równomiernie, jak i wtedy, gdy punkty ze znanymi wartościami rozłożone były według zer wielomiany Czebyszewa

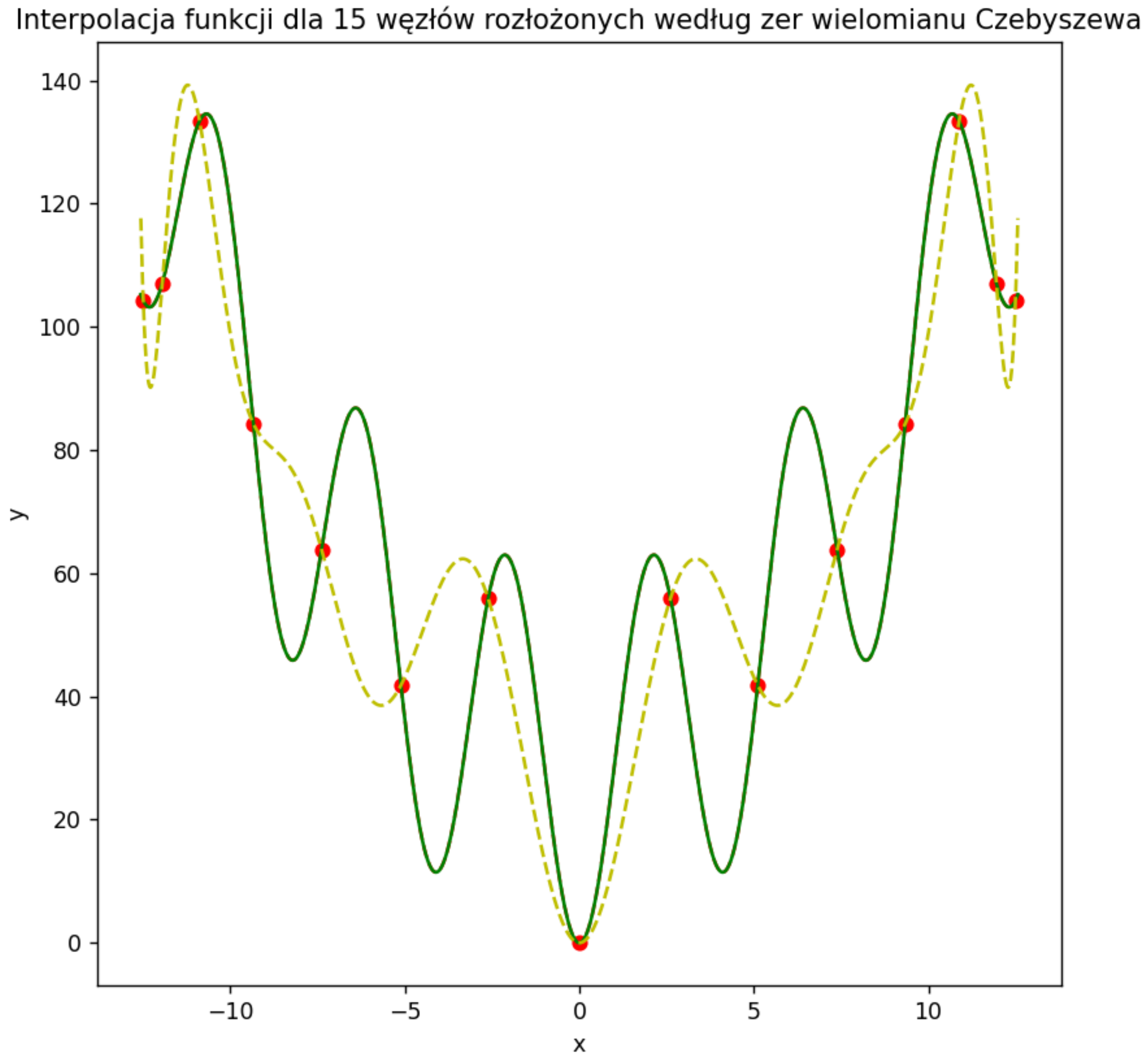

Interpolacja funkcji dla 5 węzłów rozłożonych równomiernie
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10
x
y

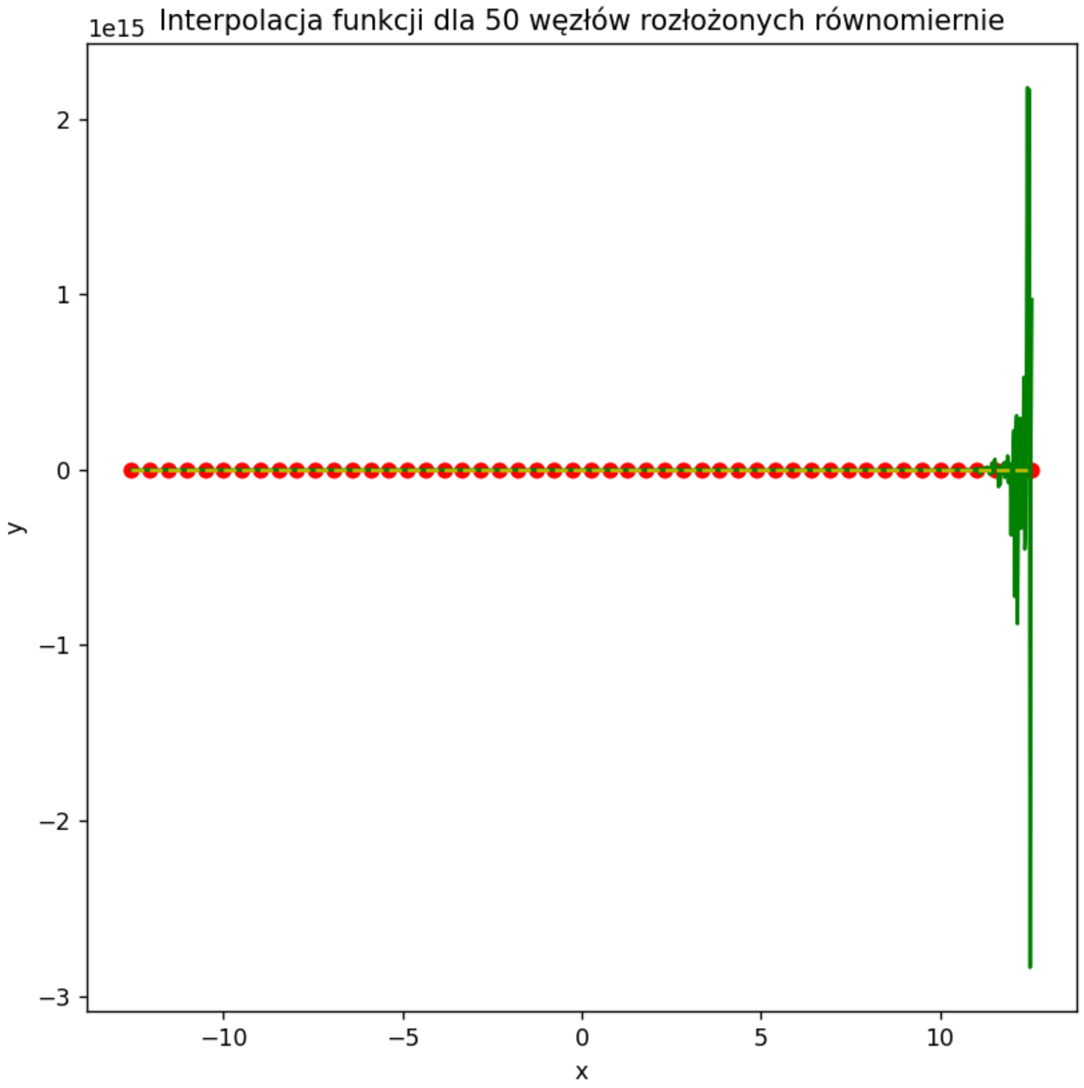

Interpolacja funkcji dla 5 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10
x
y

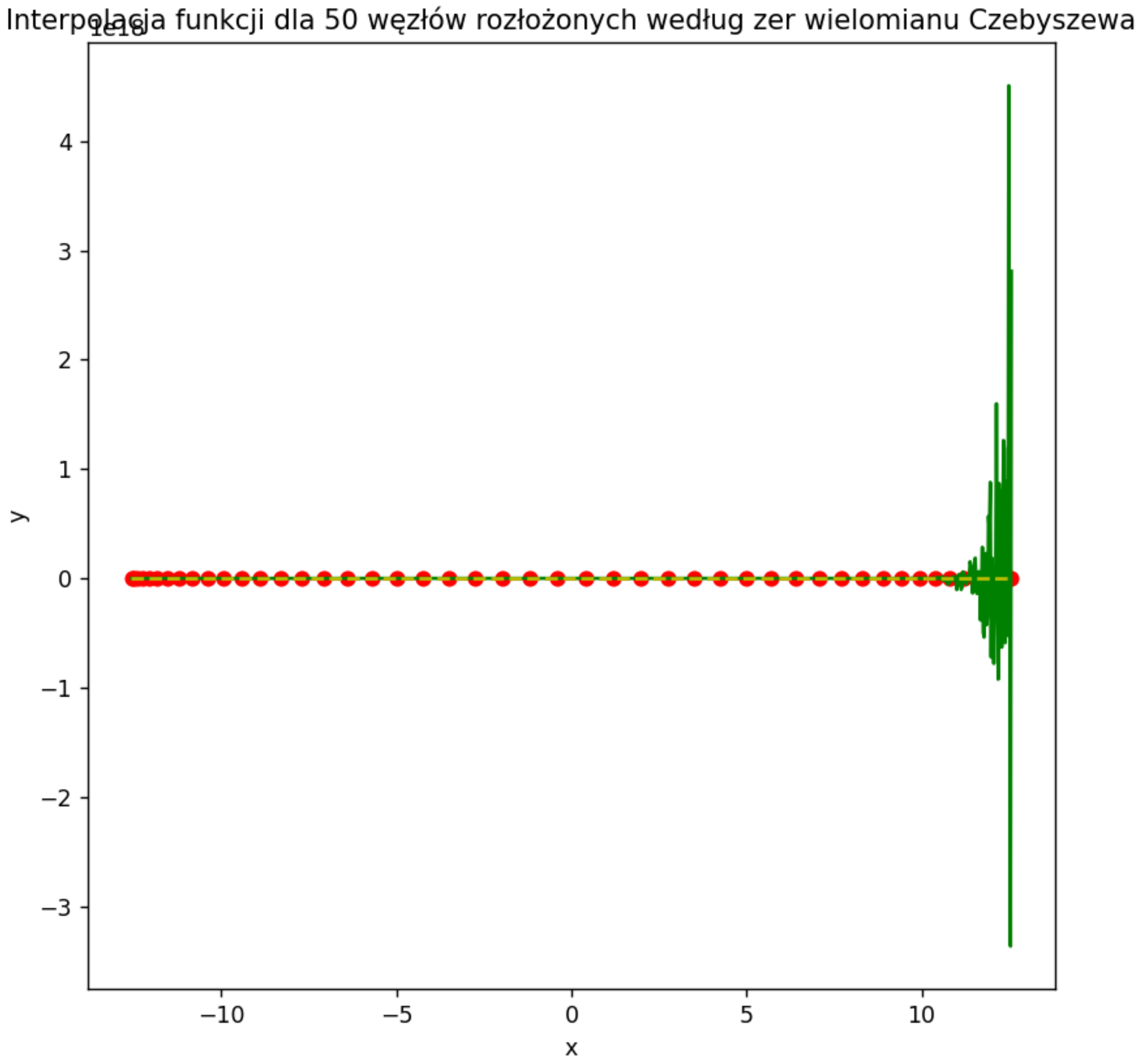

Interpolacja funkcji dla 10 węzłów rozłożonych równomiernie
y
x
1000
800
600
400
200
0
−10
−5
0
5
10


Interpolacja funkcji dla 10 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10


Interpolacja funkcji dla 15 węzłów rozłożonych równomiernie
1000
0
−1000
−2000
−3000
−4000
−5000
y
−10
−5
0
5
10
x


Interpolacja funkcji dla 15 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x


Interpolacja funkcji dla 50 węzłów rozłożonych równomiernie
1e15
2
1
0
−1
−2
−3
y
−10
−5
0
5
10
x


Interpolacja funkcji dla 50 węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
1e18
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
y
−10
−5
0
5
10
x

Najważniejsze wnioski

- Dla niewielkiej ilości węzłów, wielomiany uzyskane przy pomocy metody Hermita lepiej oddają kształt rzeczywistej funkcji, jednak błędy obliczane za pomocą obydwu sposobów w przypadku metody Hermita są zauważalnie większe
- Przy korzystaniu z metody Hermita i węzłów rozłożonych równomiernie efekt Rungego widoczny jest już przy 8 węzłach, podczas gdy w metodzie Lagrange’a występował on dopiero przy użyciu 11 węzłów
- Dla 15, 18 i 25 węzłów rozłożonych równomiernie wielomian uzyskany metodą Hermita jest dobrze dopasowany do rzeczywistej funkcji, a w przypadku metody Lagrange’a widoczny jest efekt Rungego
- Dla dużej ilości (50) węzłów, niezależnie od ich rozłożenia, w przypadku korzystania z metody Hermita widoczne są bardzo duże błędy w pobliżu końca przedziału

Wielomiany interpolujące funkcjami sklejanymi (3. stopień - zmienne warunki brzegowe)

\- - - - - - - oryginalna funkcja

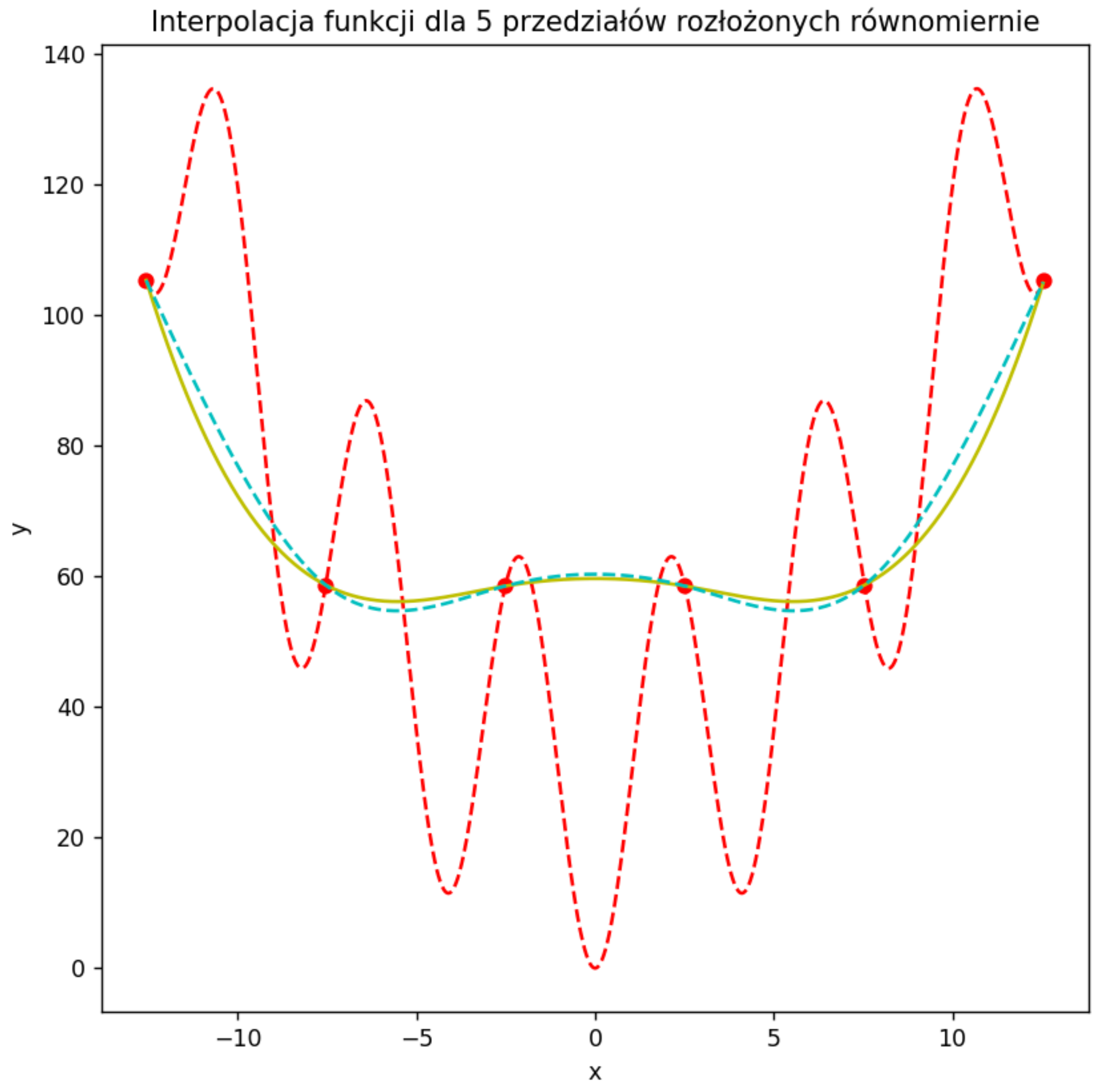
funkcja obliczona za pomocą warunku brzegowego Not-a-knot

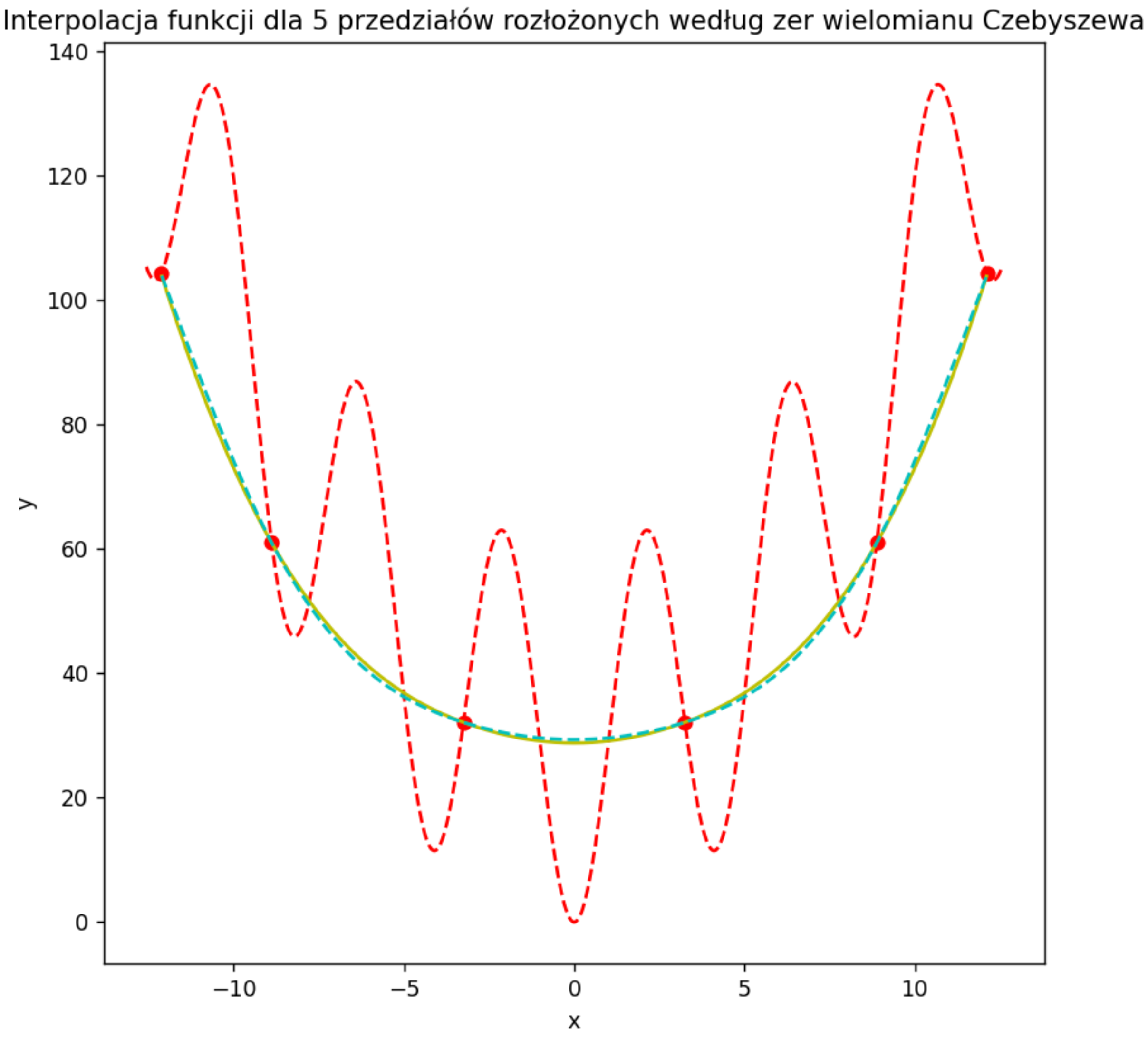
(trzecia pochodna funkcji cząstkowych jest taka sama w przypadku pierwszego i drugiego, oraz w przypadku ostatniego i przedostatniego przedziału)

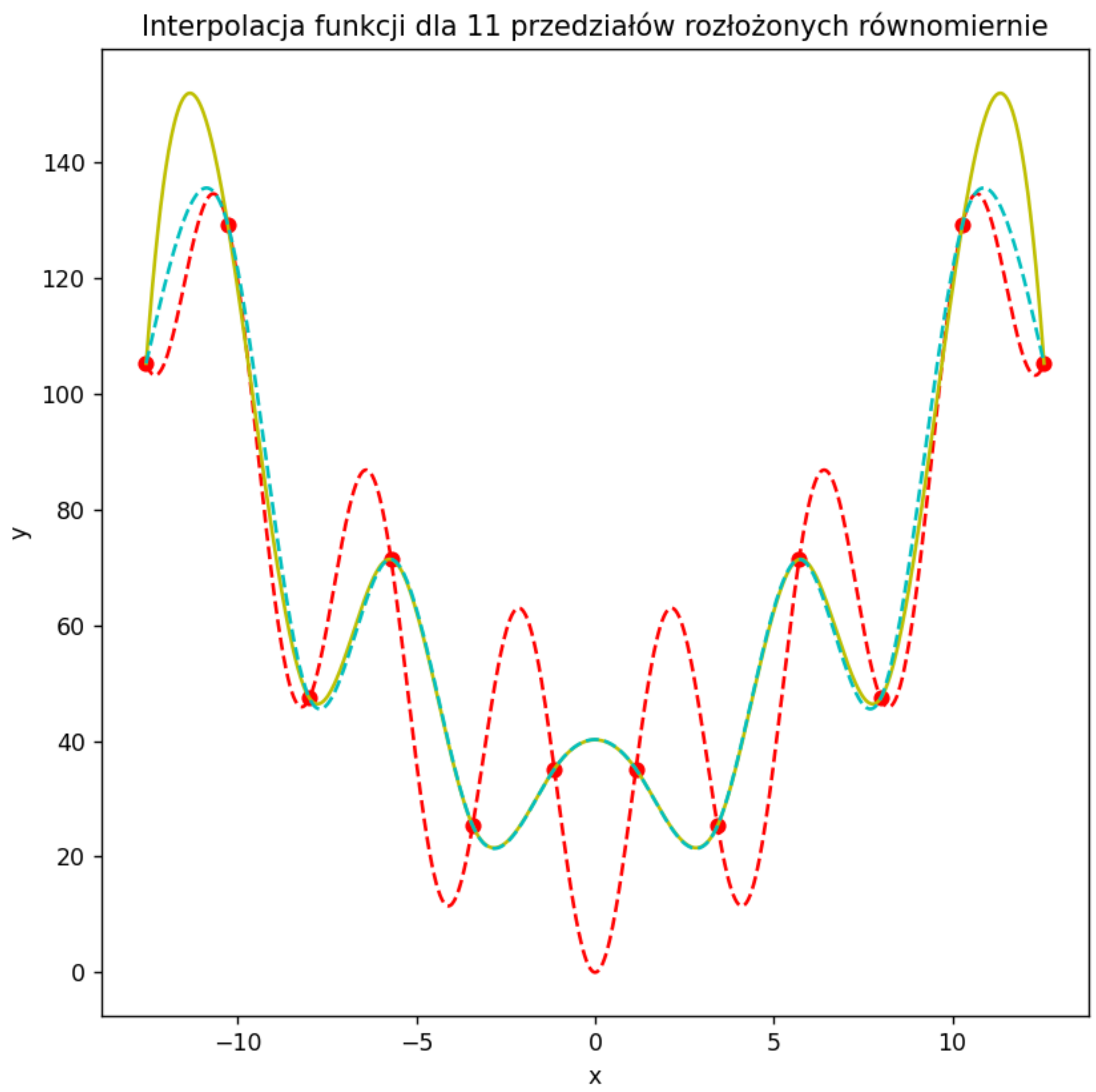
\- - - - - - - - funkcja obliczona za pomocą warunku Natural Spline

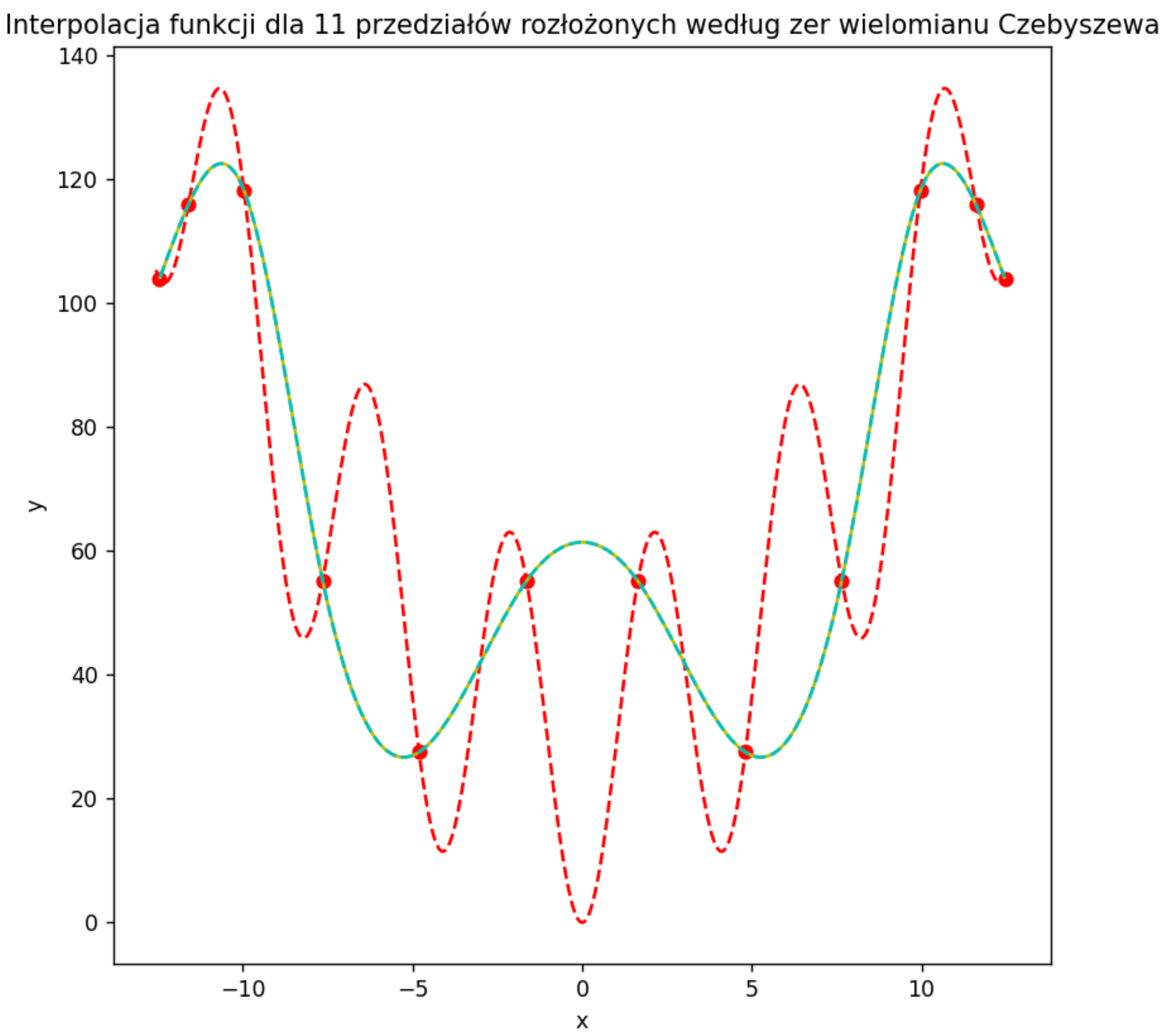
(druga pochodna funkcji na pierwszym i ostatnim przedziale jest równa 0)

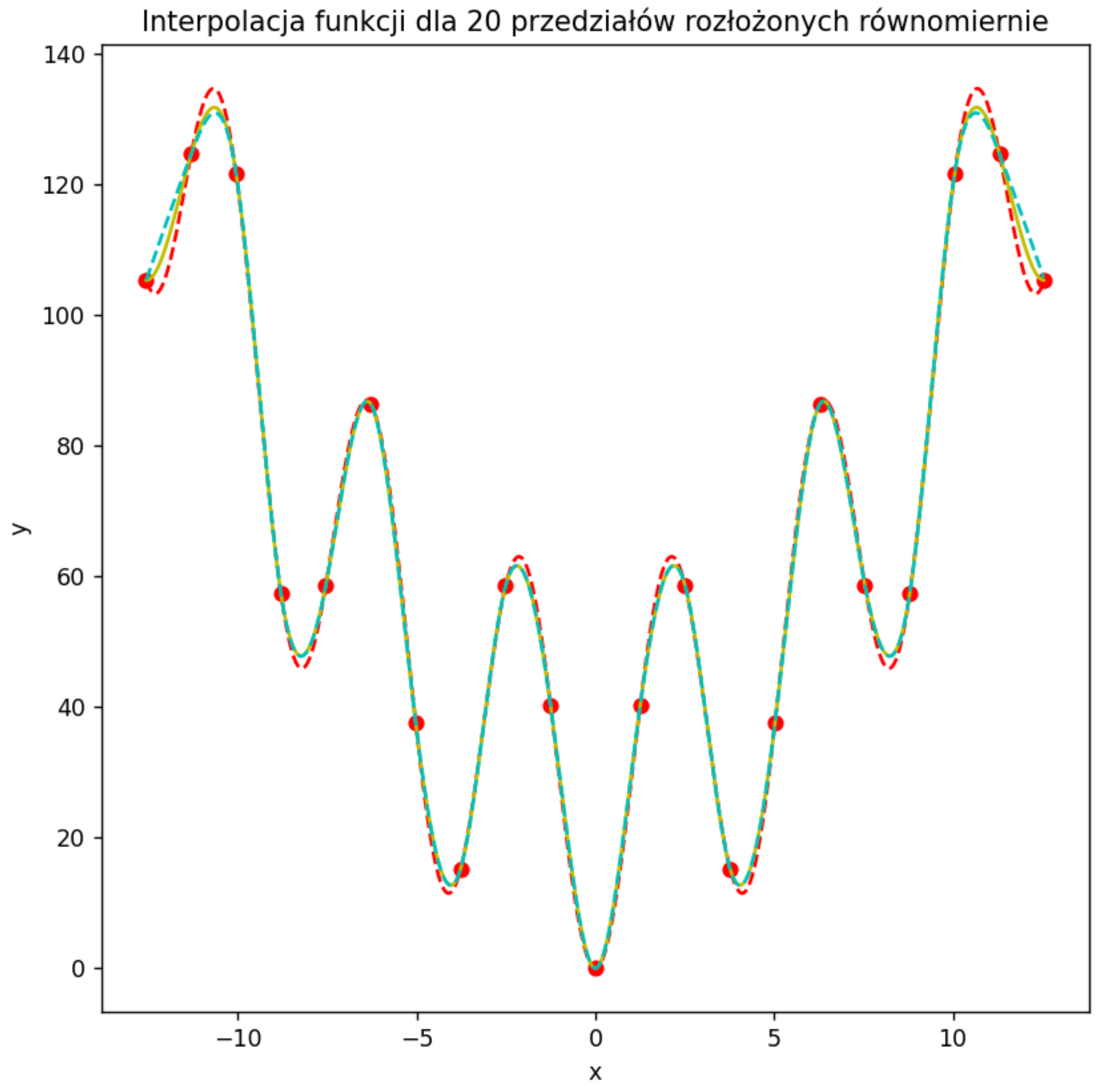
W czasie przeprowadzania badań porównywane były wielomiany aproksymujące uzyskane zarówno w przypadku, gdy węzły w przedziale rozłożone były równomiernie, jak i wtedy, gdy punkty ze znanymi wartościami rozłożone były według zer wielomiany Czebyszewa


Interpolacja funkcji dla 5 przedziałów rozłożonych równomiernie
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x

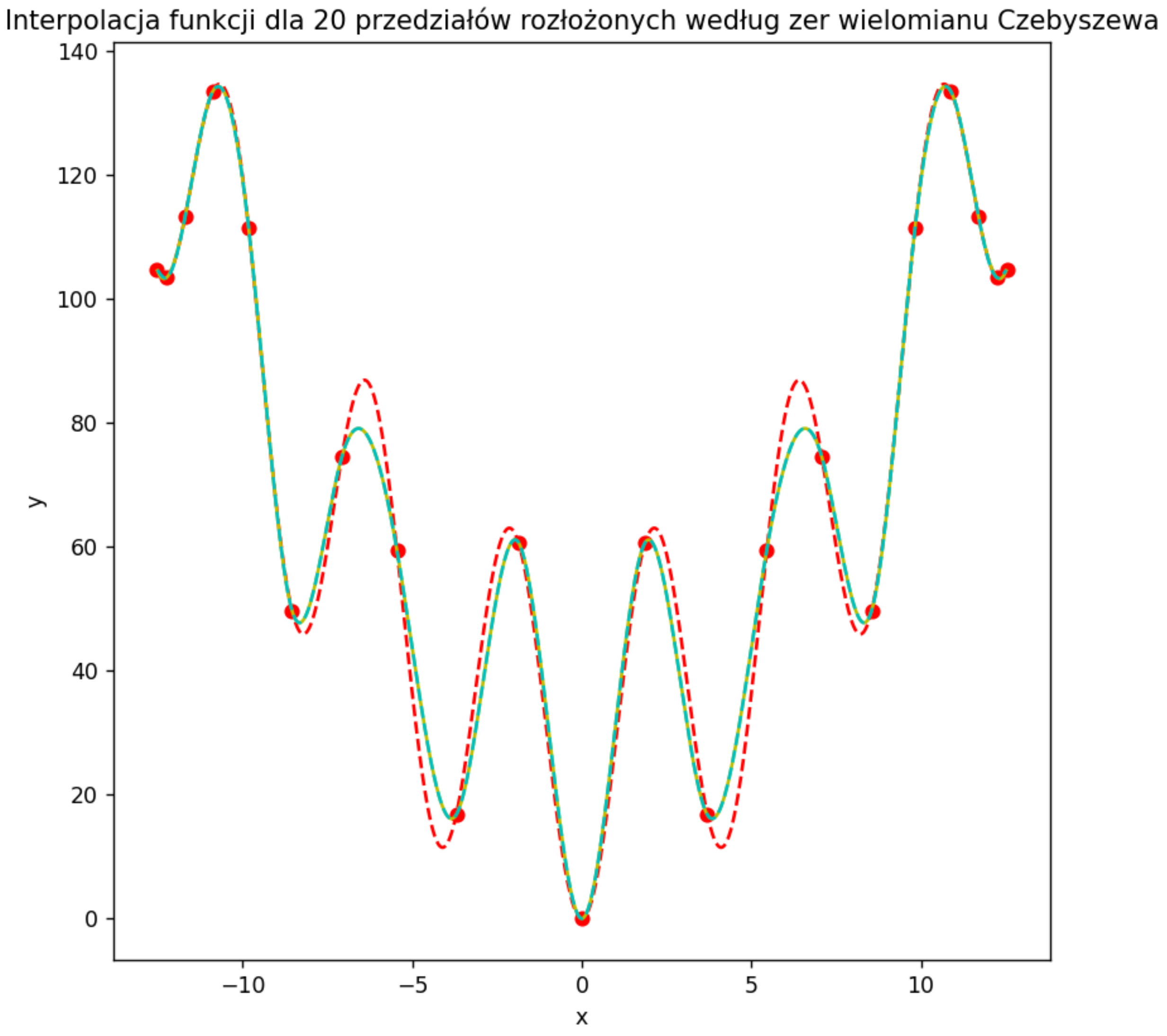

Interpolacja funkcji dla 5 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x


Interpolacja funkcji dla 11 przedziałów rozłożonych równomiernie
y
x
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10


Interpolacja funkcji dla 11 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x
140
120
100
80
60
40
20
0
−10
−5
0
5
10



Interpolacja funkcji dla 20 przedziałów rozłożonych równomiernie
y
x



Interpolacja funkcji dla 20 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x

Wielomiany interpolujące funkcjami sklejanymi (2. stopień - zmienne warunki brzegowe)

\- - - - - - - oryginalna funkcja

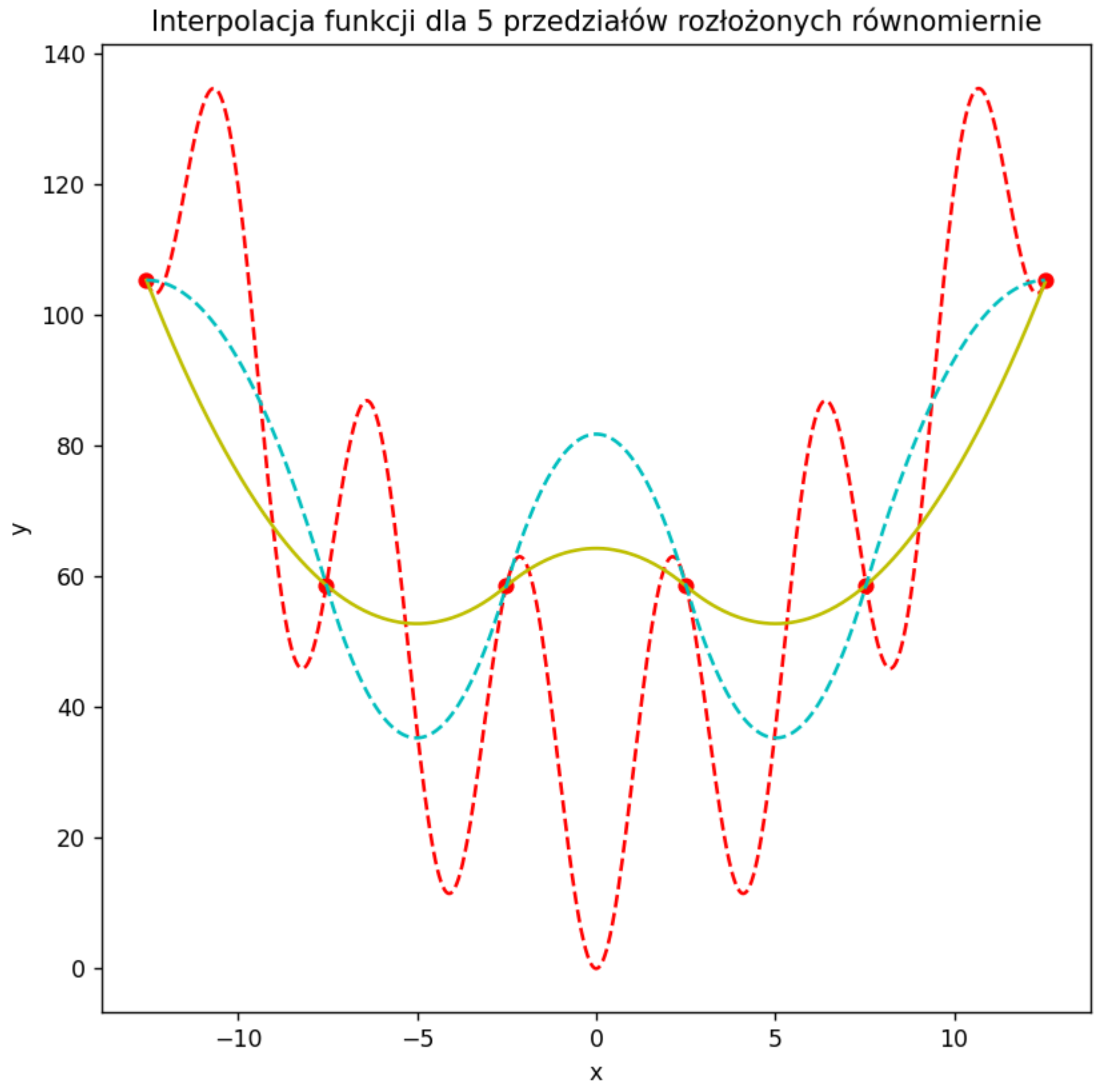
funkcja obliczona za pomocą warunku brzegowego Not-a-knot

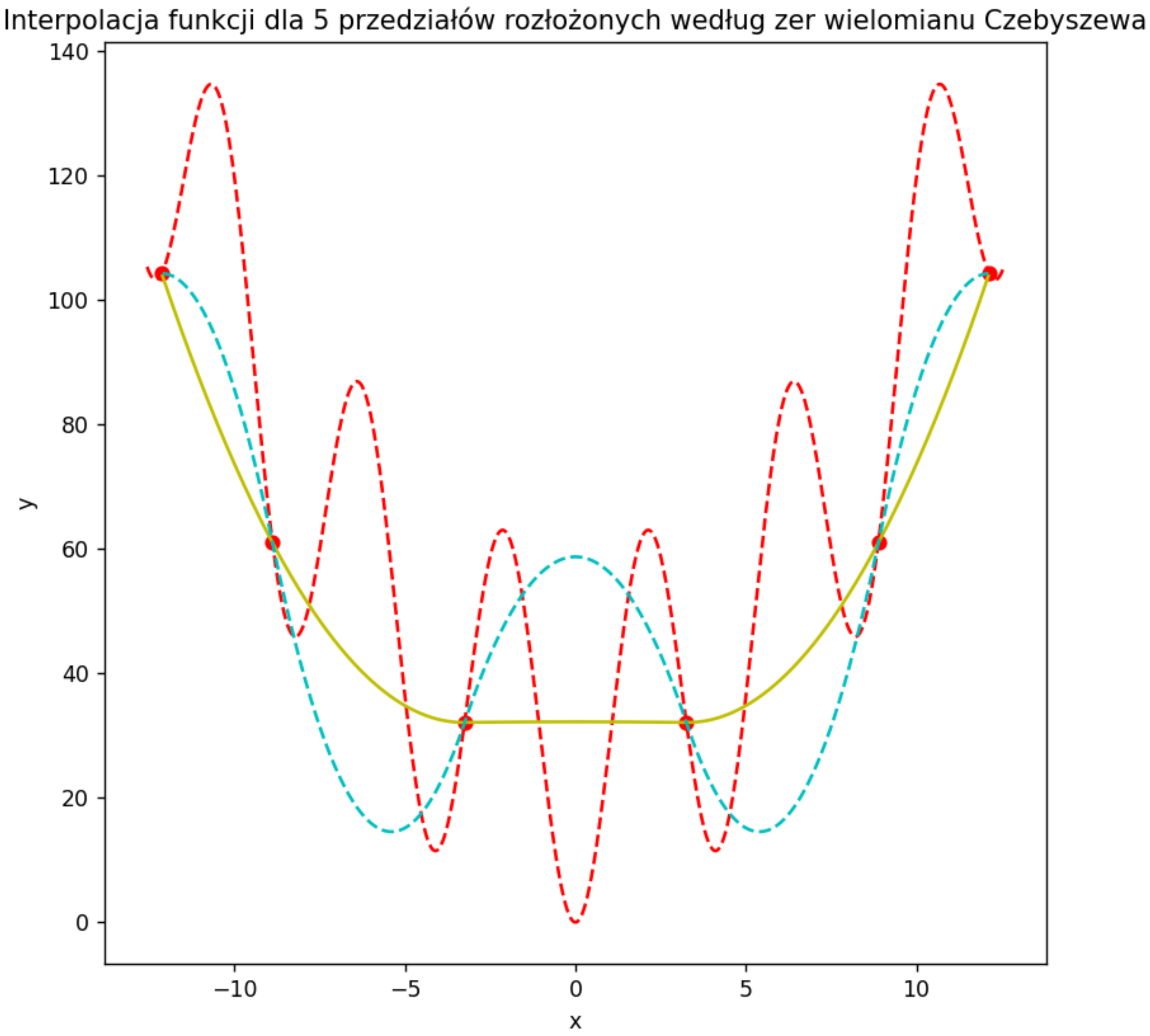
(druga pochodna funkcji cząstkowych jest taka sama w przypadku pierwszego i drugiego przedziału)

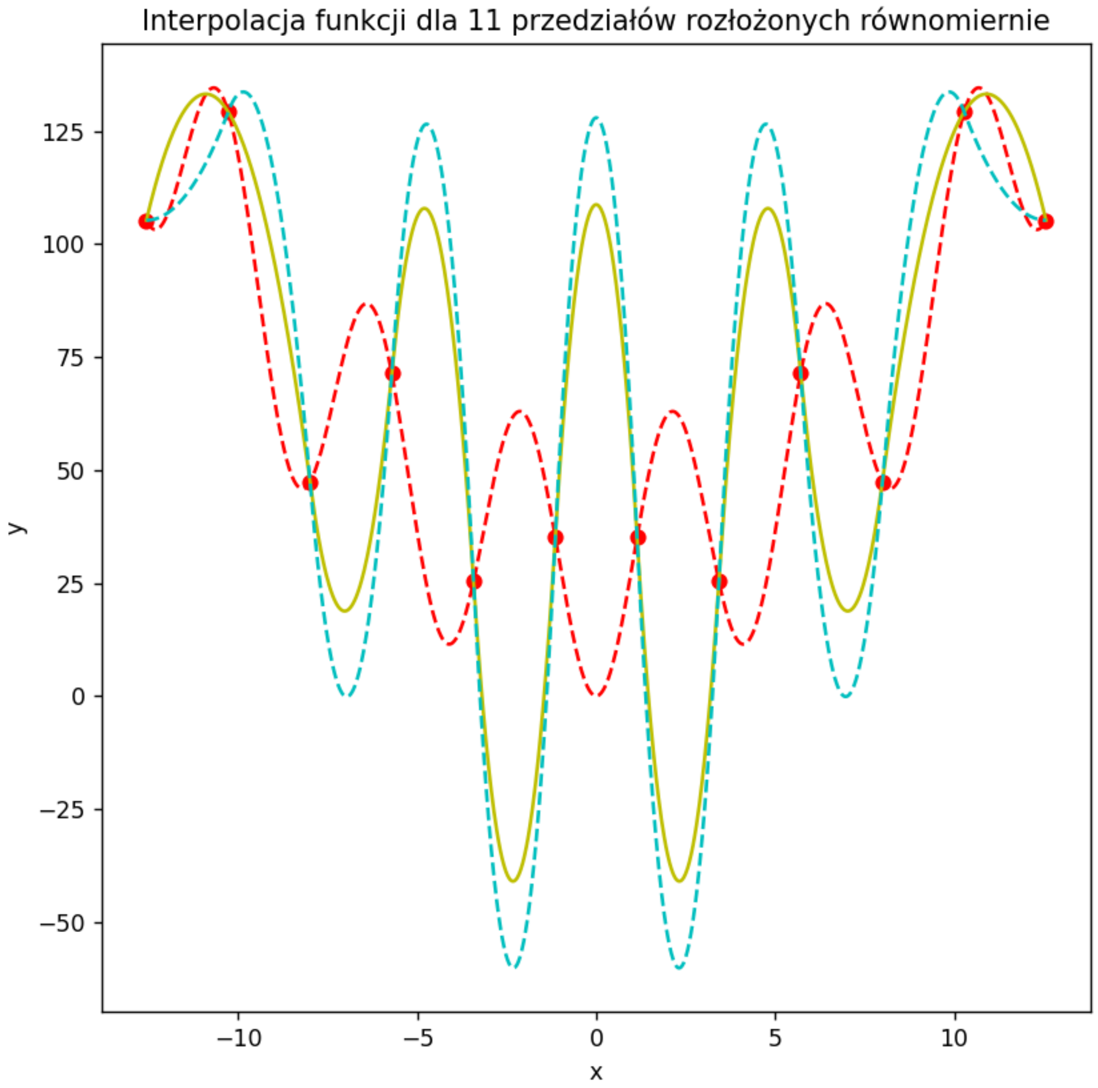
\- - - - - - - - funkcja obliczona za pomocą warunku Natural Spline

(pierwsza pochodna funkcji na pierwszym przedziale jest równa 0)

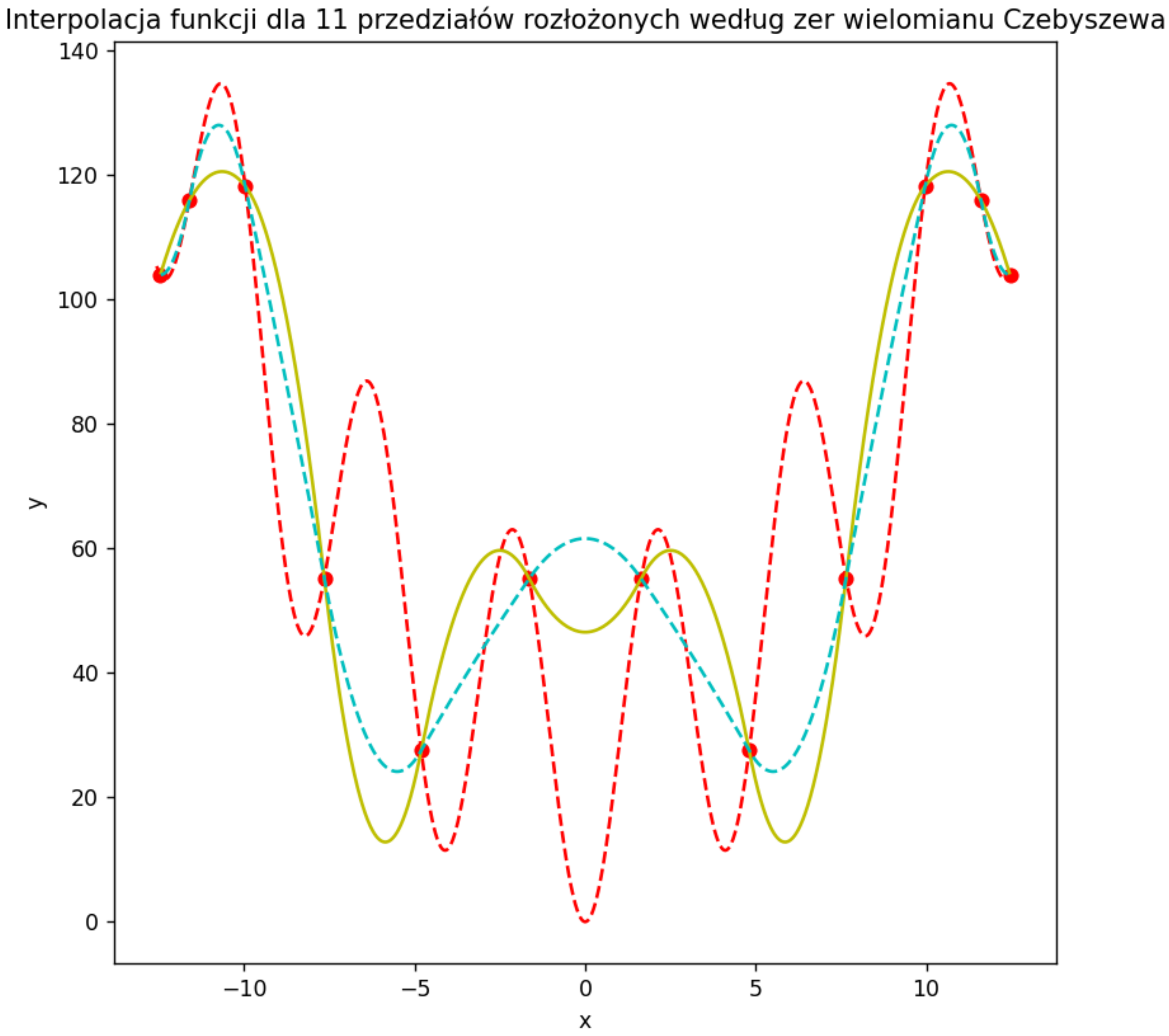
W czasie przeprowadzania badań porównywane były wielomiany aproksymujące uzyskane zarówno w przypadku, gdy węzły w przedziale rozłożone były równomiernie, jak i wtedy, gdy punkty ze znanymi wartościami rozłożone były według zer wielomiany Czebyszewa


Interpolacja funkcji dla 5 przedziałów rozłożonych równomiernie
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x

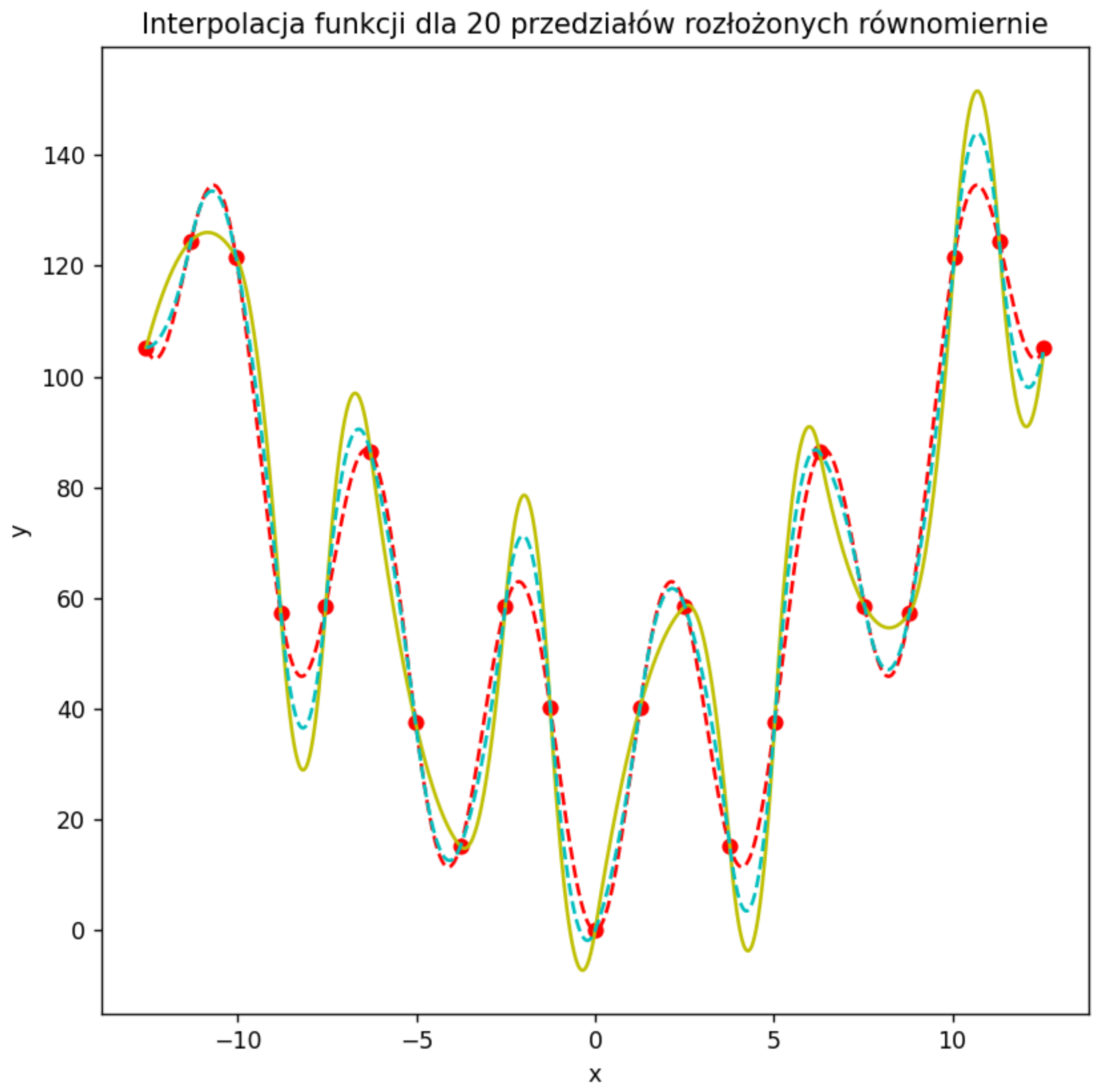

Interpolacja funkcji dla 5 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x



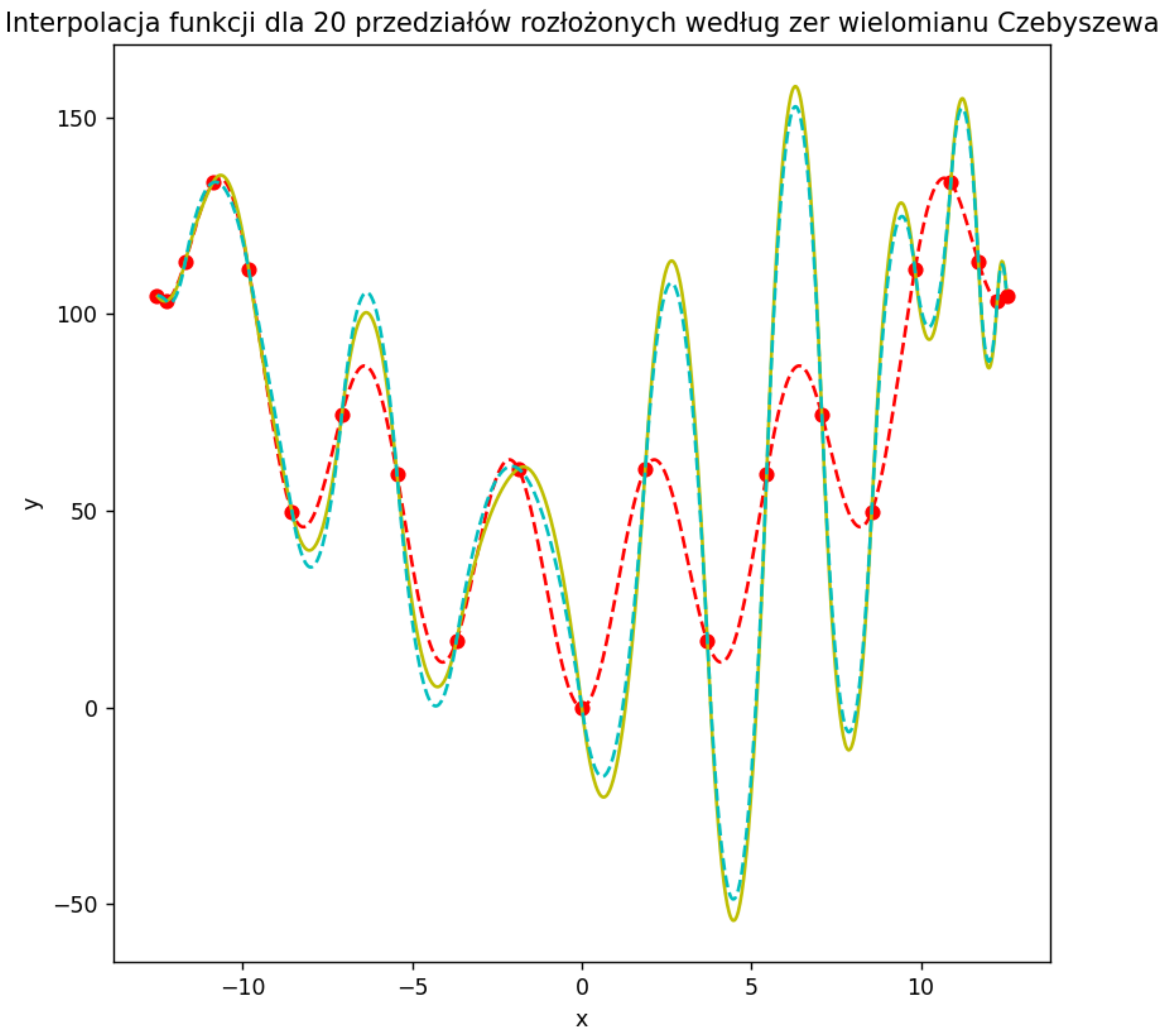
Interpolacja funkcji dla 11 przedziałów rozłożonych równomiernie
125
100
75
50
25
0
−25
−50
y
−10
−5
0
5
10
x



Interpolacja funkcji dla 11 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
140
120
100
80
60
40
20
0
y
−10
−5
0
5
10
x



Interpolacja funkcji dla 20 przedziałów rozłożonych równomiernie
y
x



Interpolacja funkcji dla 20 przedziałów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa
y
x

Najważniejsze wnioski

- Większa liczba przedziałów sprawia, że błędy pomiędzy obliczoną funkcją sklejaną, a rzeczywistym wielomianem są coraz mniejsze
- Funkcje sklejane trzeciego stopnia charakteryzują się większą dokładnością niż funkcje drugiego stopnia
- Wybór warunków brzegowych ma wpływ na uzyskaną funkcję sklejaną, co jest widoczne zwłaszcza w przypadku mniejszej liczby przedziałów
- Żaden ze zbadanych warunków brzegowych nie daje jednoznacznie dokładniejszych wyników niż drugi
- Nawet przy dużej ilości przedziałów rozłożonych równomiernie nie występuje efekt Rungego, a zastosowanie węzłów rozłożonych według zer wielomianu Czebyszewa nie zwiększa dokładności wyliczonej funkcji
- W przypadku funkcji sklejanych drugiego stopnia stosujemy warunek brzegowy tylko na jednym końcu, a nie jak w przypadku funkcji trzeciego stopnia na dwóch, dlatego niektóre z uzyskanych funkcji sklejanych nie są symetryczne podczas gdy funkcja dla której przeprowadzane są obliczenia jest parzysta

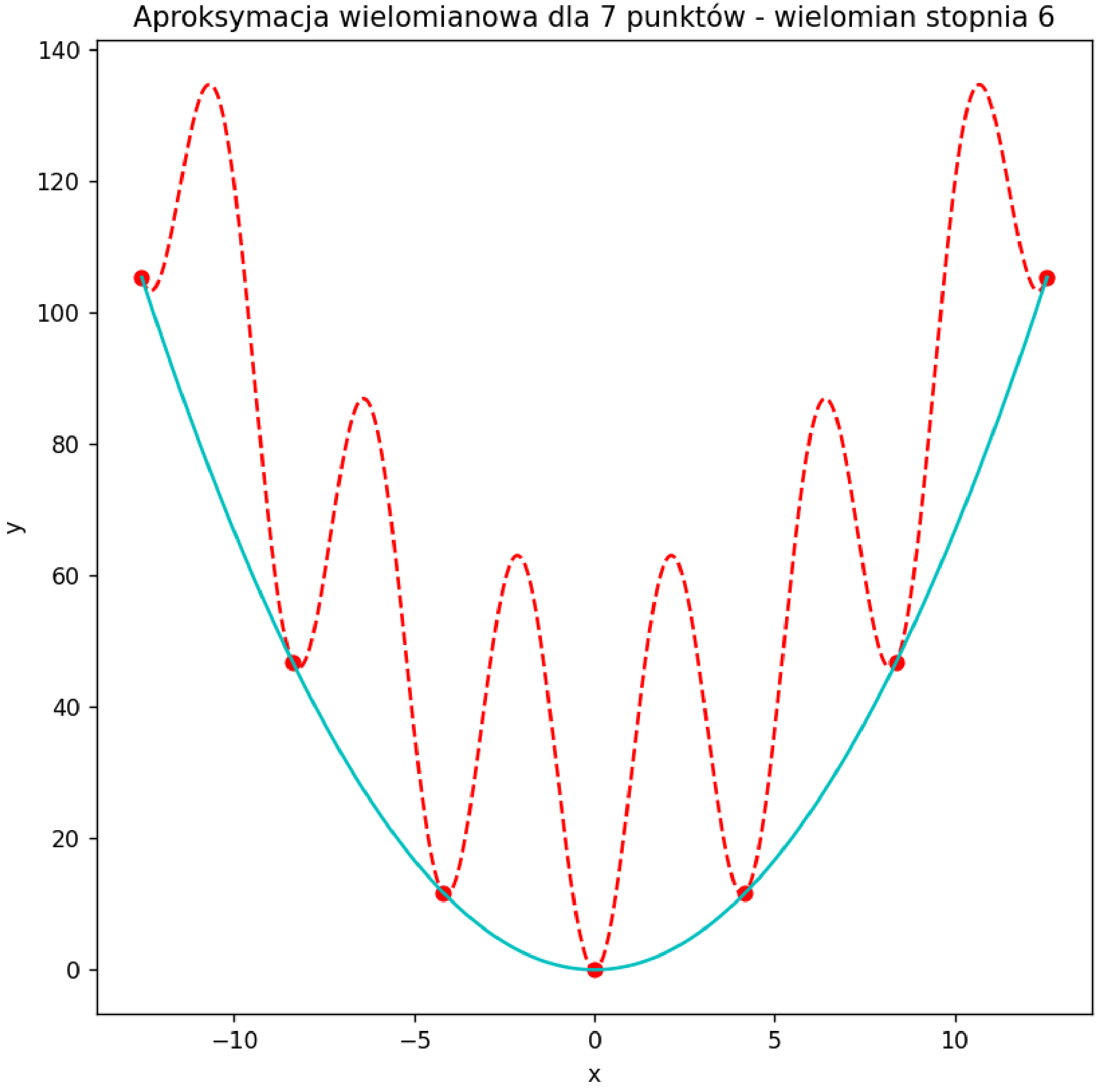
Aproksymacja wielomianowa

\- - - - - - oryginalna funkcja

_______ wielomian aproksymujący dla podanych parametrów

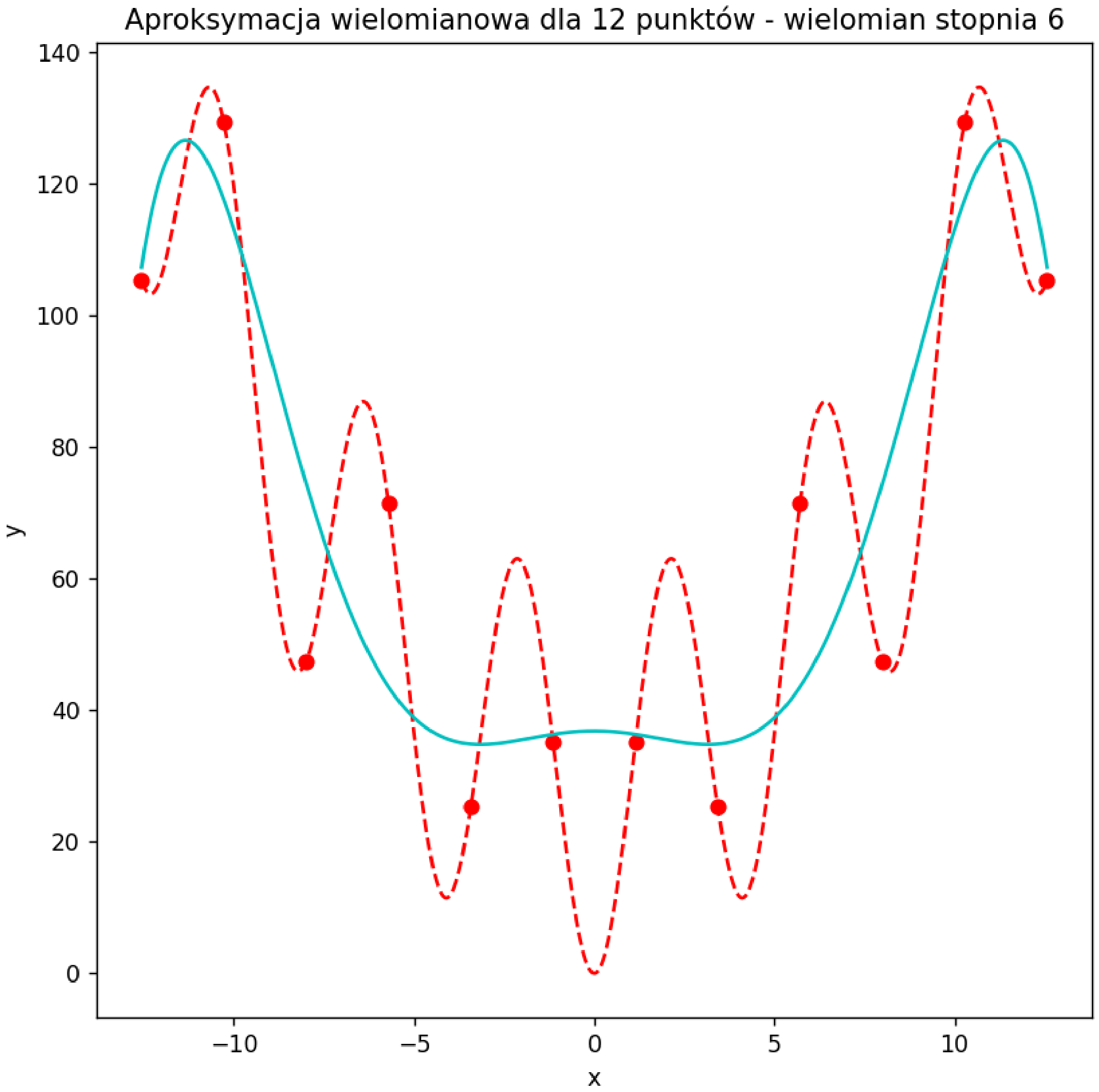
Program przyjmuje liczbę węzłów, które ma wykorzystać (n), oraz stopień wielomianu (m), który ma przybliżać tą funkcję

Węzły rozłożone równomiernie, chyba, że podano inaczej



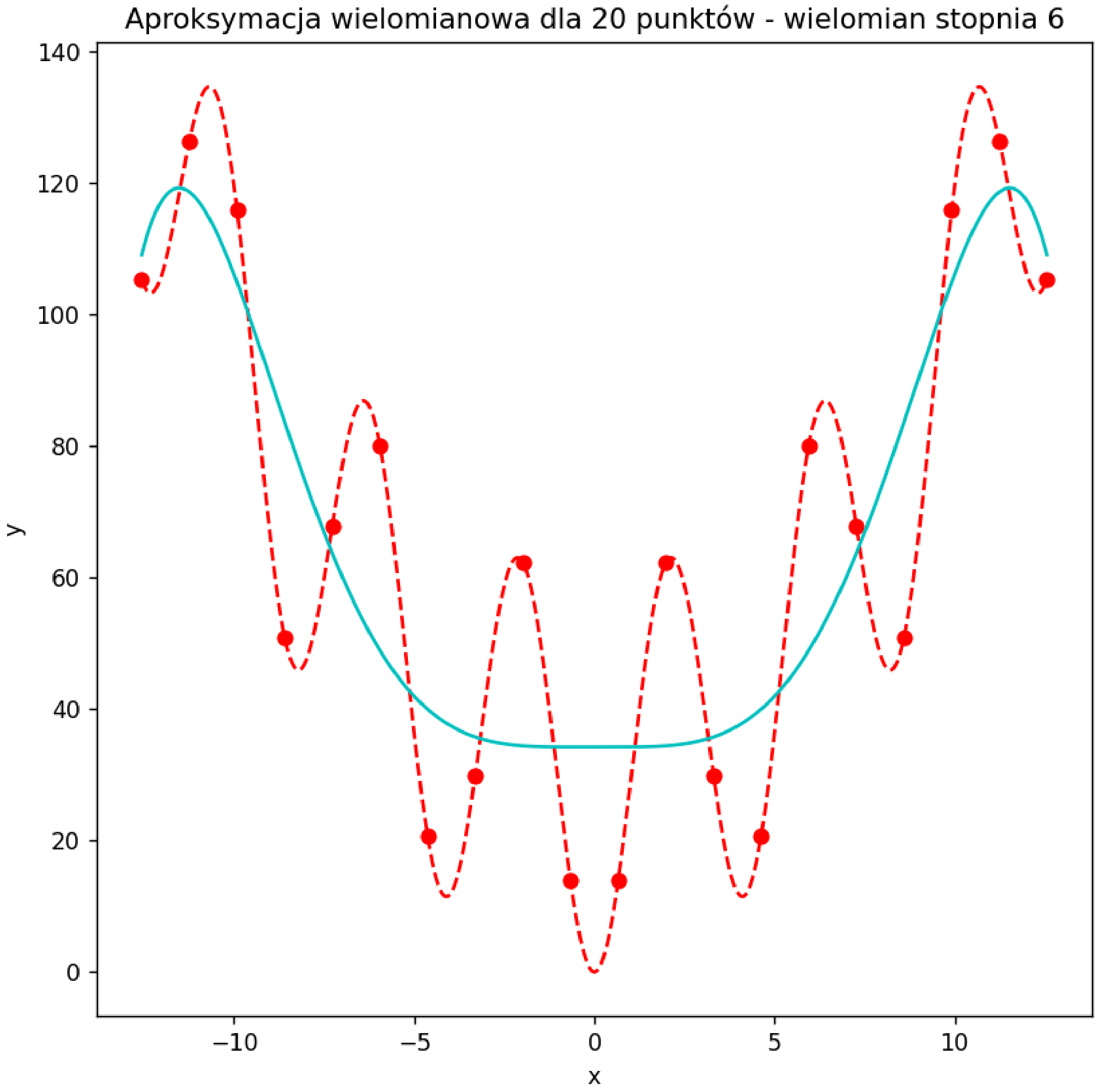
Maksymalna różnica : 59.99866494451862

Uśredniony kwadrat błędu : 1348650.0000000752



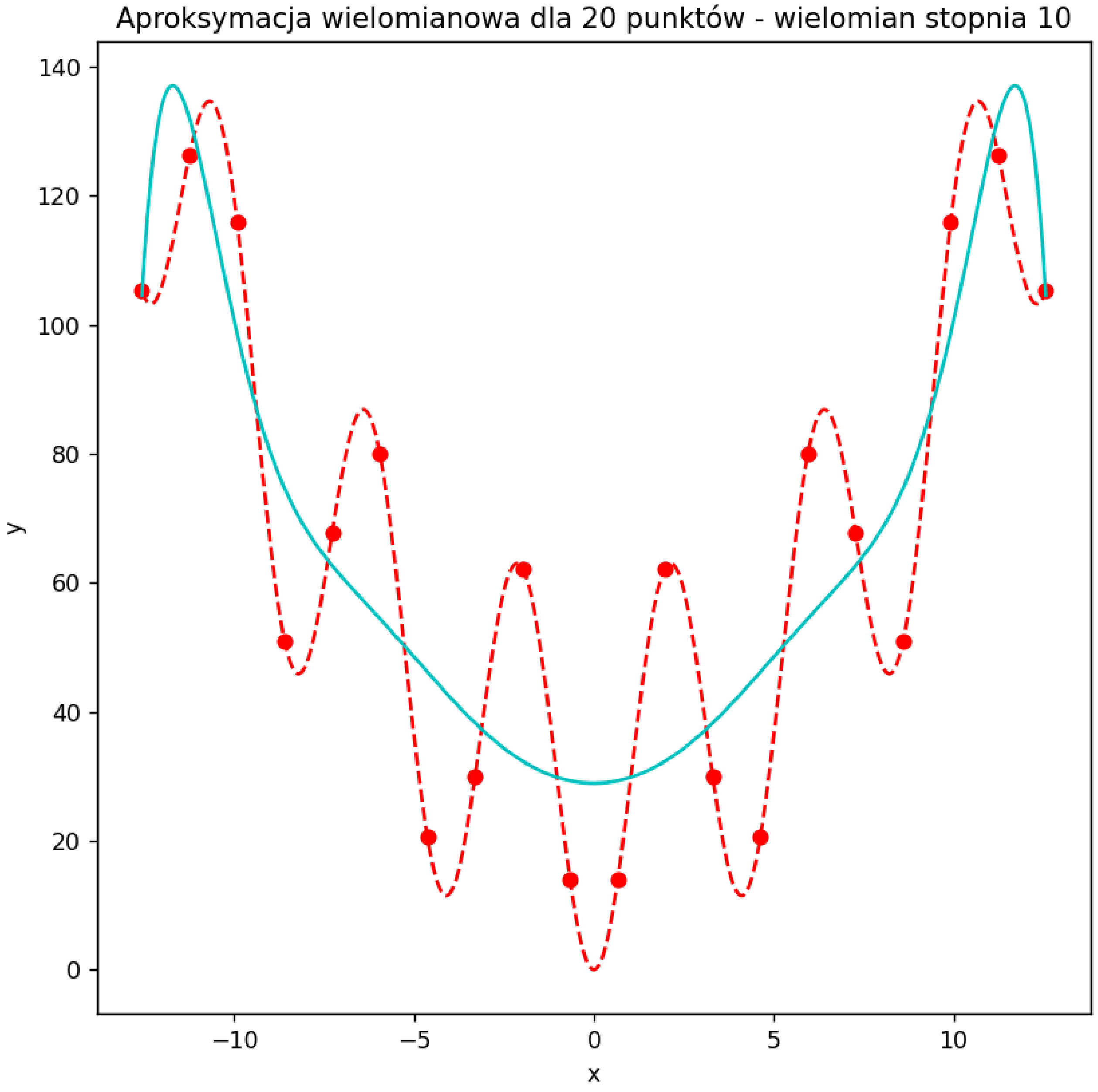
Maksymalna różnica : 37.413642510116134

Uśredniony kwadrat błędu : 434073.6381607095



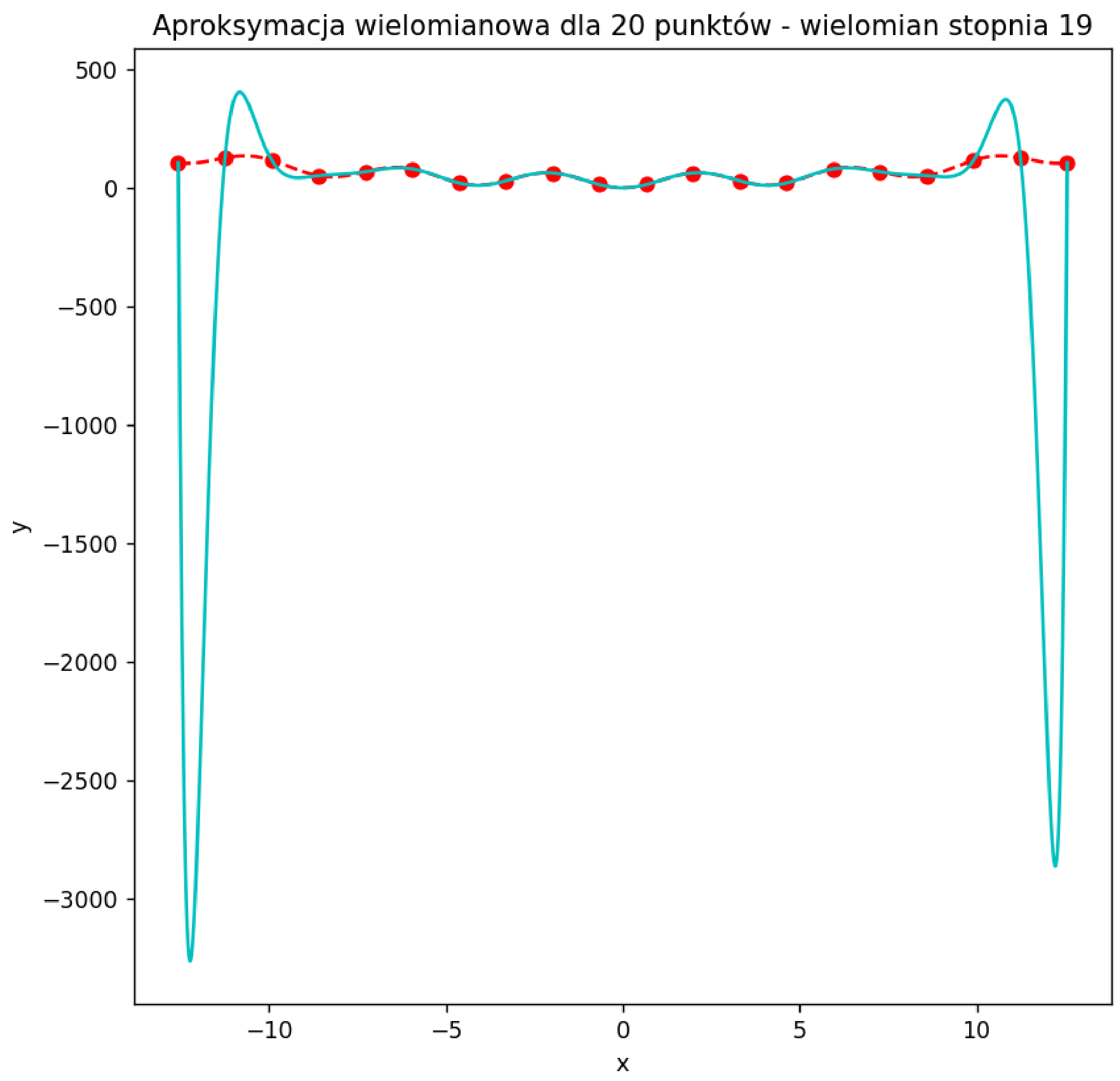
Maksymalna różnica :
34.33374925557985

Uśredniony kwadrat błędu :
415149.48287658935



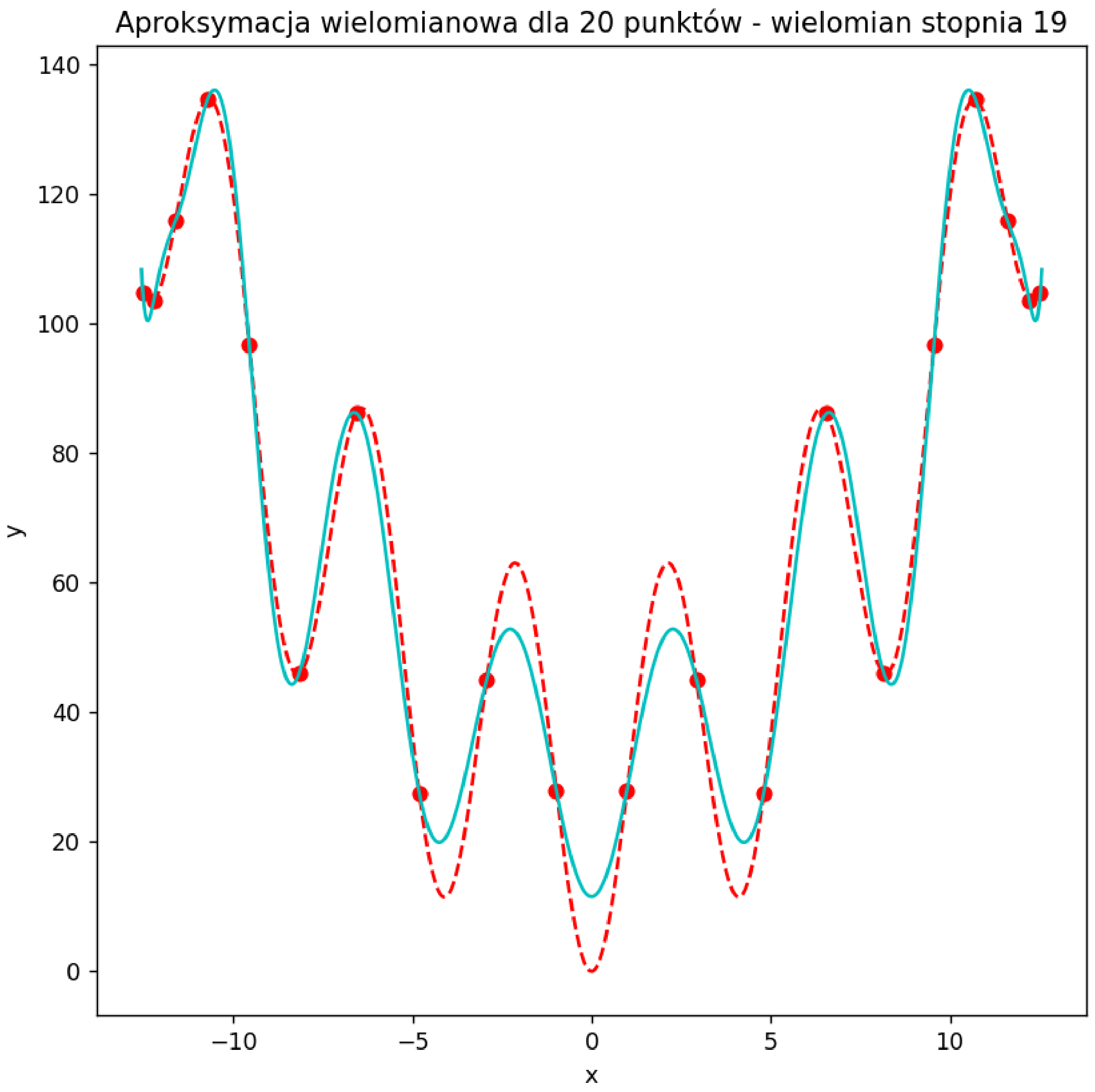
Maksymalna różnica :
31.689474815704095

Uśredniony kwadrat błędu :
399157.86347904784



Maksymalna różnica :
3365.4010427966637

Uśredniony kwadrat błędu :
428558423.07906246



Węzły rozłożone według zer wielomianu Czebyszewa

Maksymalna różnica : 11.540378473403264

Uśredniony kwadrat błędu : 32509.606791976526

Najważniejsze wnioski

- Dla ustalonego stopnia wielomianu (m = 6) na początku zwiększanie liczby węzłów (od 7 do 20) przynosi zauważalną poprawę dokładności, jednak powyżej tej wartości zysk ze stosowania większej ilości punktów jest niewielki
- W przypadku ustalonej na 20 liczby punktów i zwiększaniu stopnia wielomianu, również początkowo obserwujemy zwiększanie się dokładności uzyskanej funkcji, jednak różnice dokładności wielomianów od stopnia 2 do stopnia 10 nie są przesadnie duże
- Wraz ze zbliżaniem się stopnia wielomianu do 20 w otrzymywanej funkcji aproksymującej widoczny zaczyna być efekt Rungego (w pobliżu końca przedziałów pojawiają się znaczne błędy), który można jednak wyeliminować zastępując równomierny rozkład węzłów, rozkładem według zer wielomianu Czebyszewa

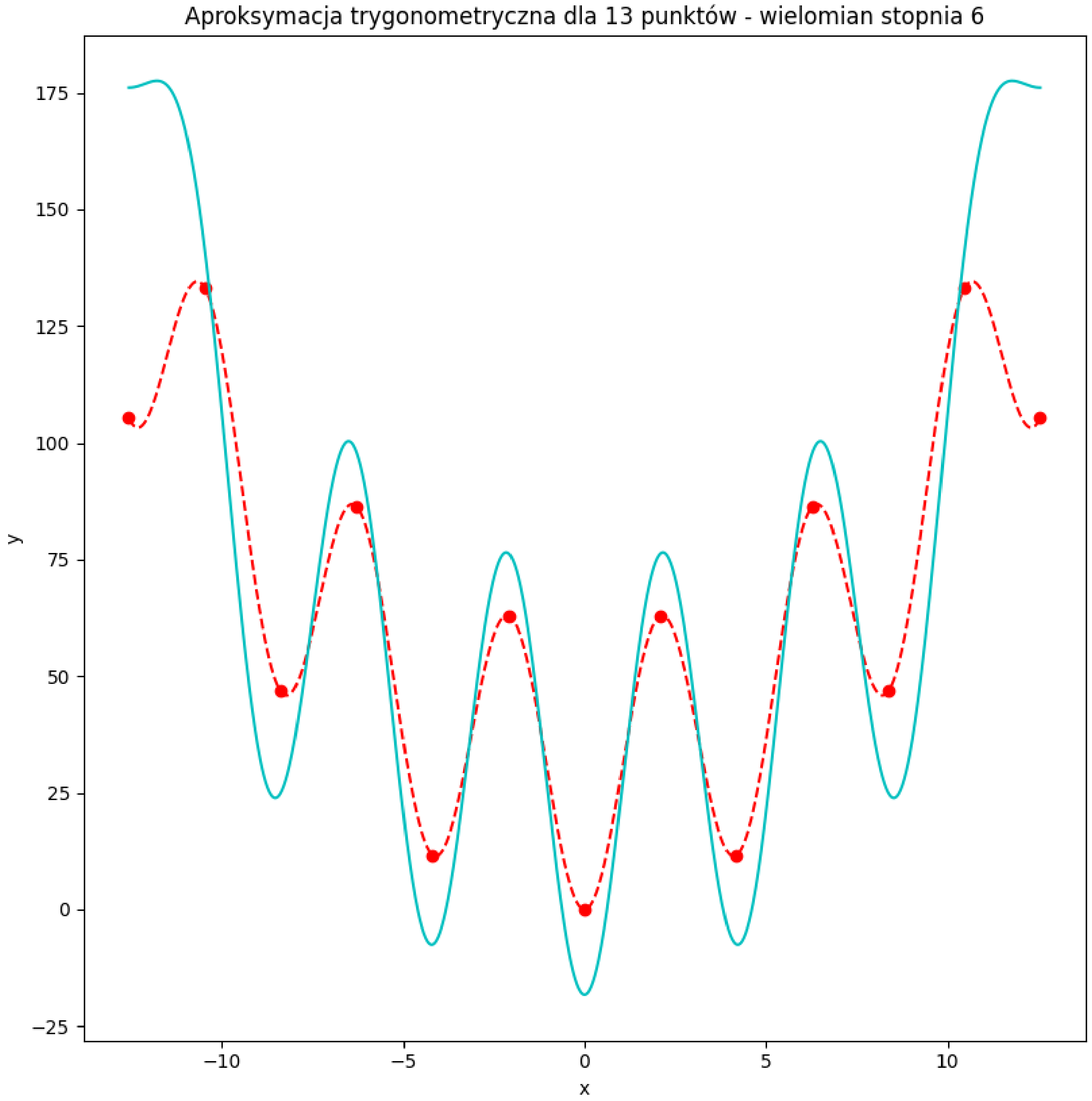
Aproksymacja trygonometryczna

\- - - - - -　　oryginalna funkcja

_______　　wielomian aproksymujący dla podanych parametrów

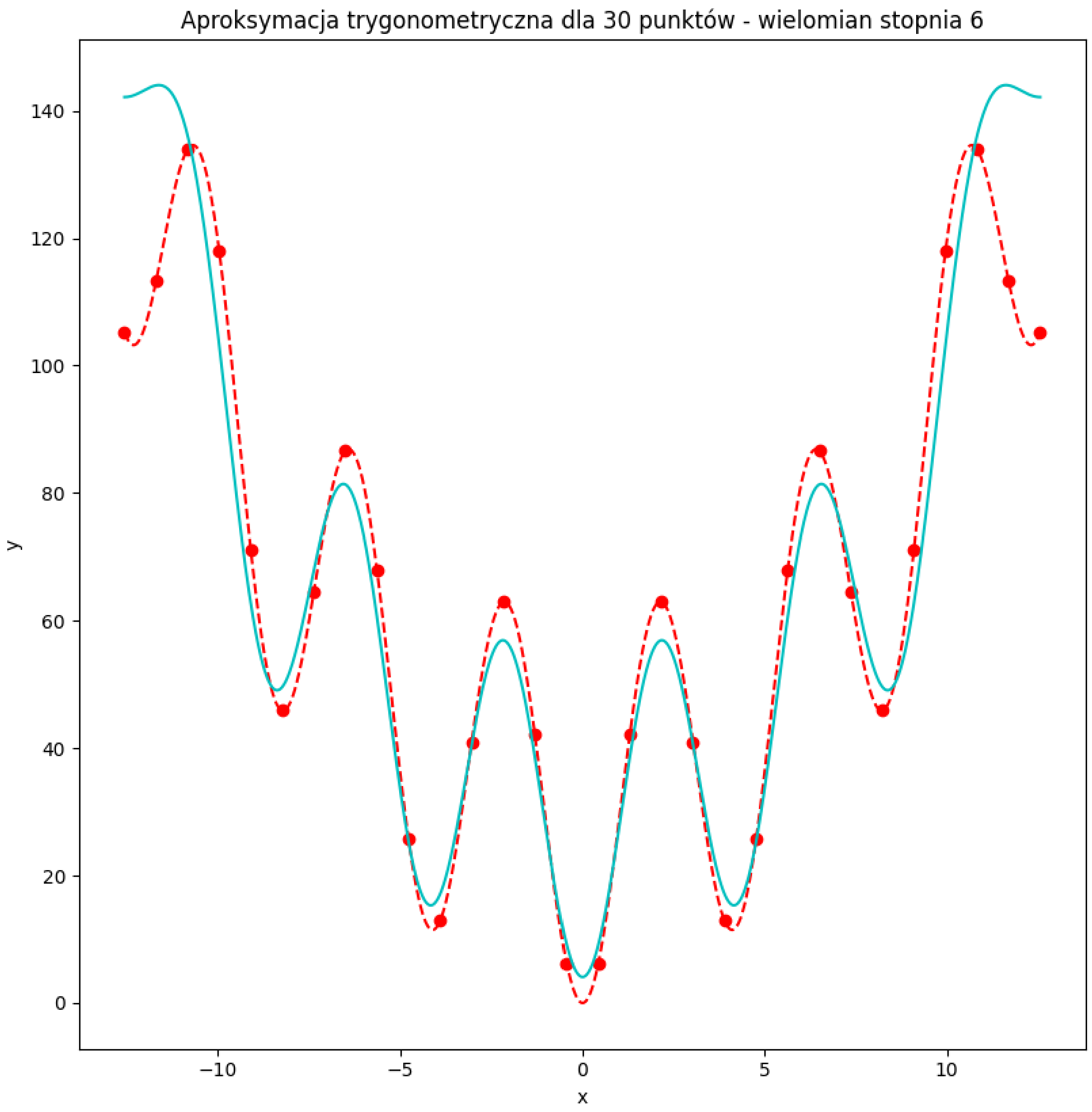
Program przyjmuje liczbę węzłów, które ma wykorzystać (n), oraz stopień wielomianu (m), który ma przybliżać tą funkcję

Węzły rozłożone równomiernie



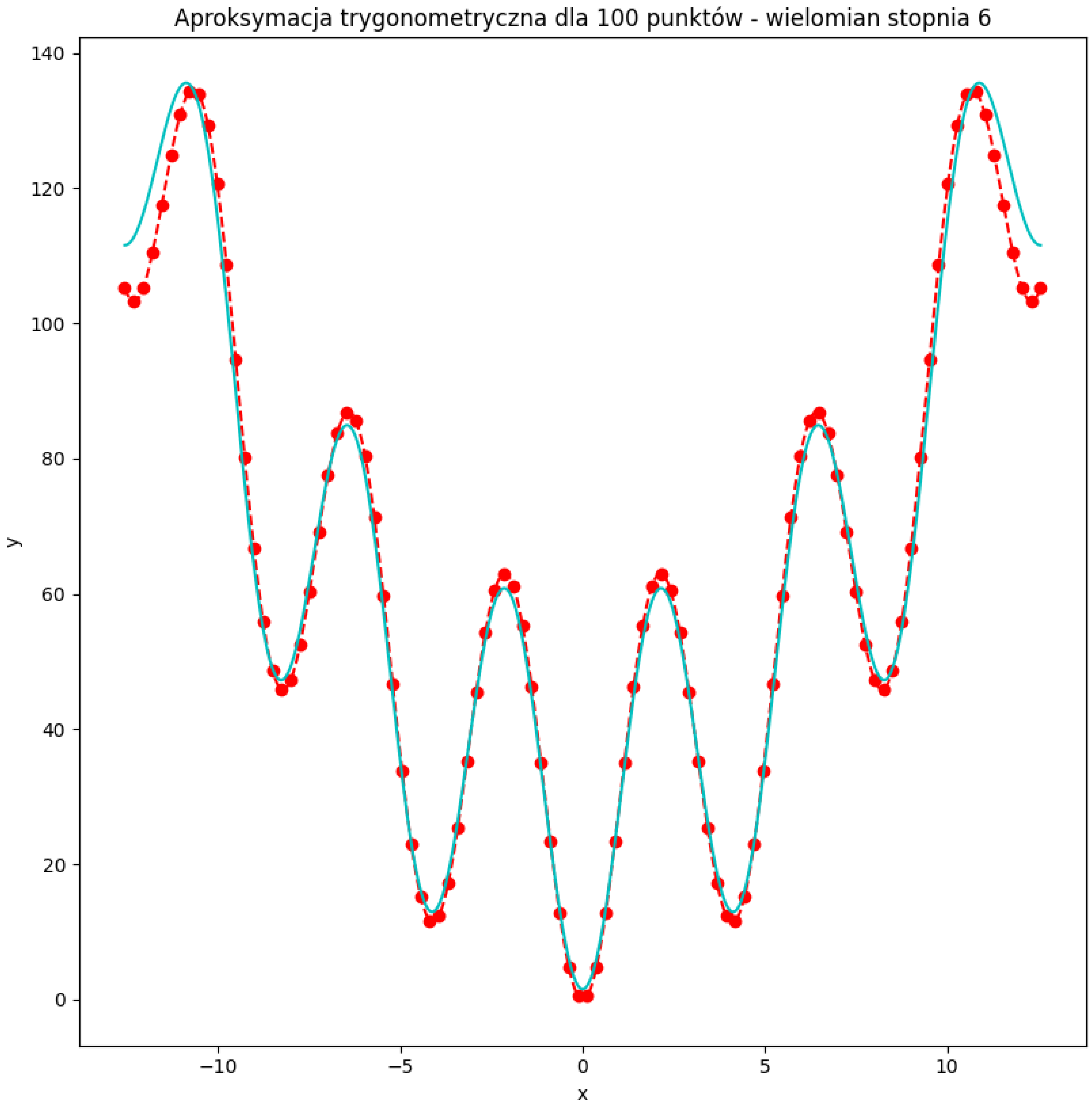
Maksymalna różnica :
73.23124259965029

Uśredniony kwadrat błędu :
716057.7332034073



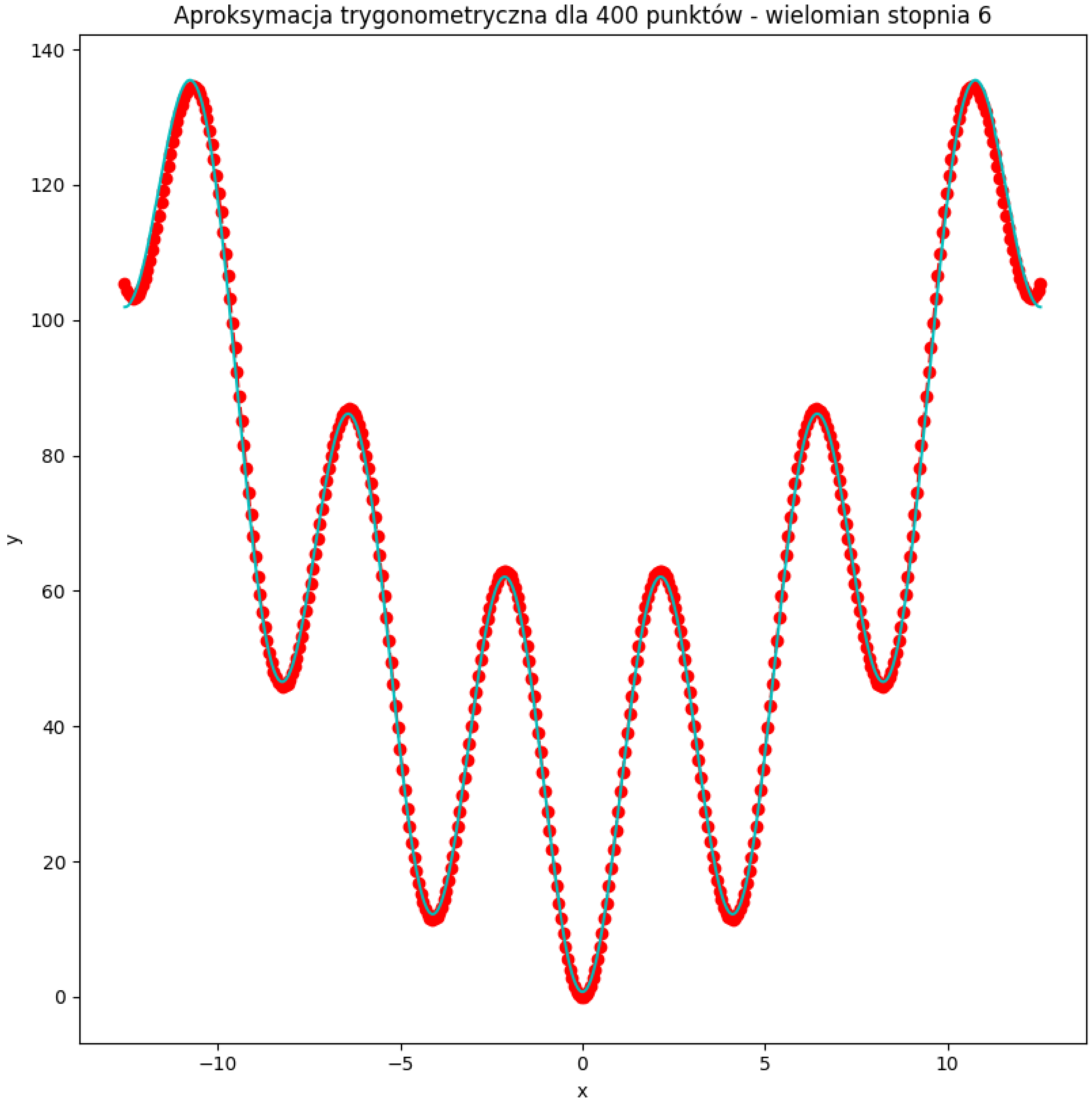
Maksymalna różnica : 39.22414673107387

Uśredniony kwadrat błędu : 152732.14228916832



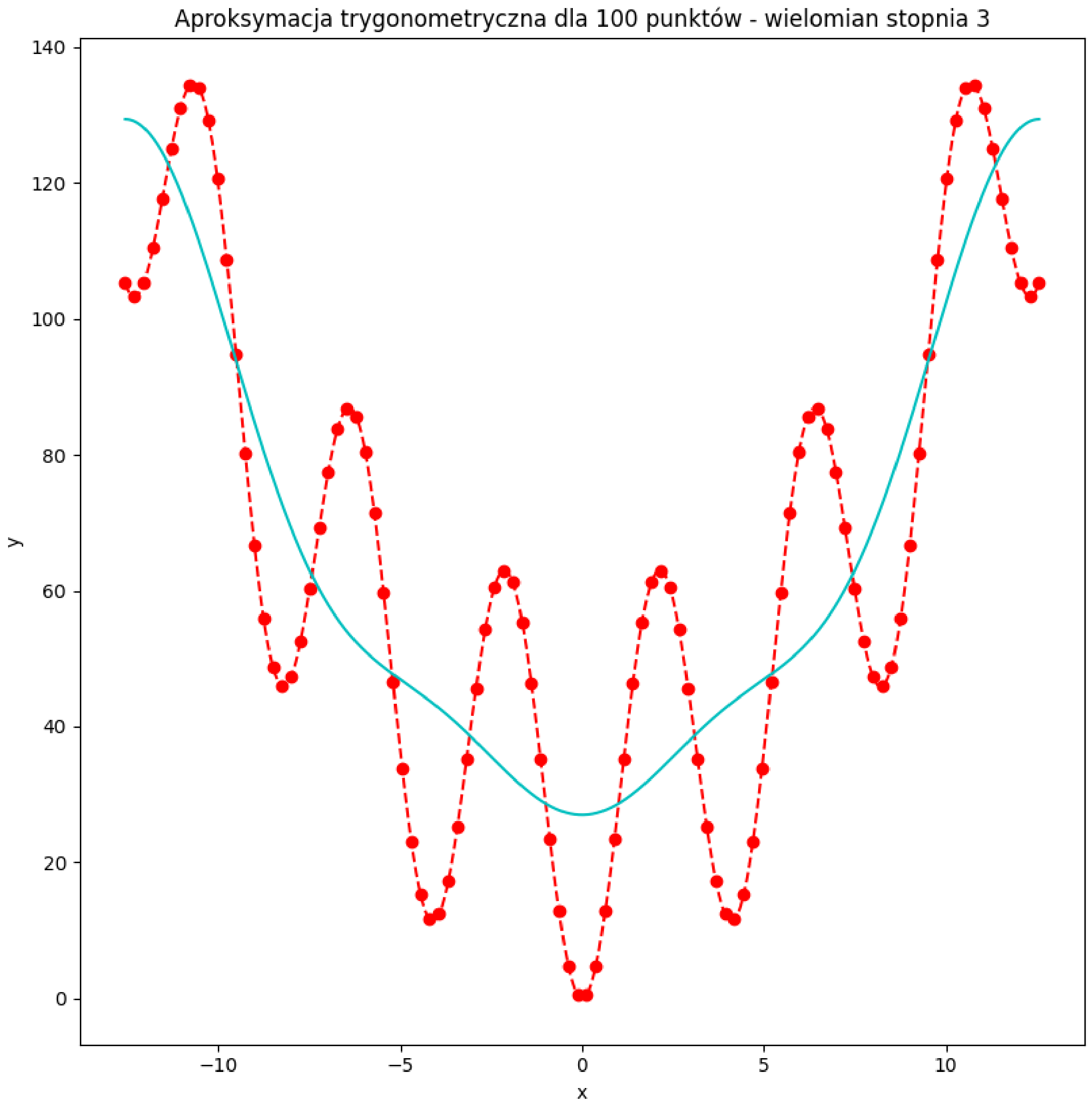
Maksymalna różnica :
11.097120416029242

Uśredniony kwadrat błędu :
14189.936466217414



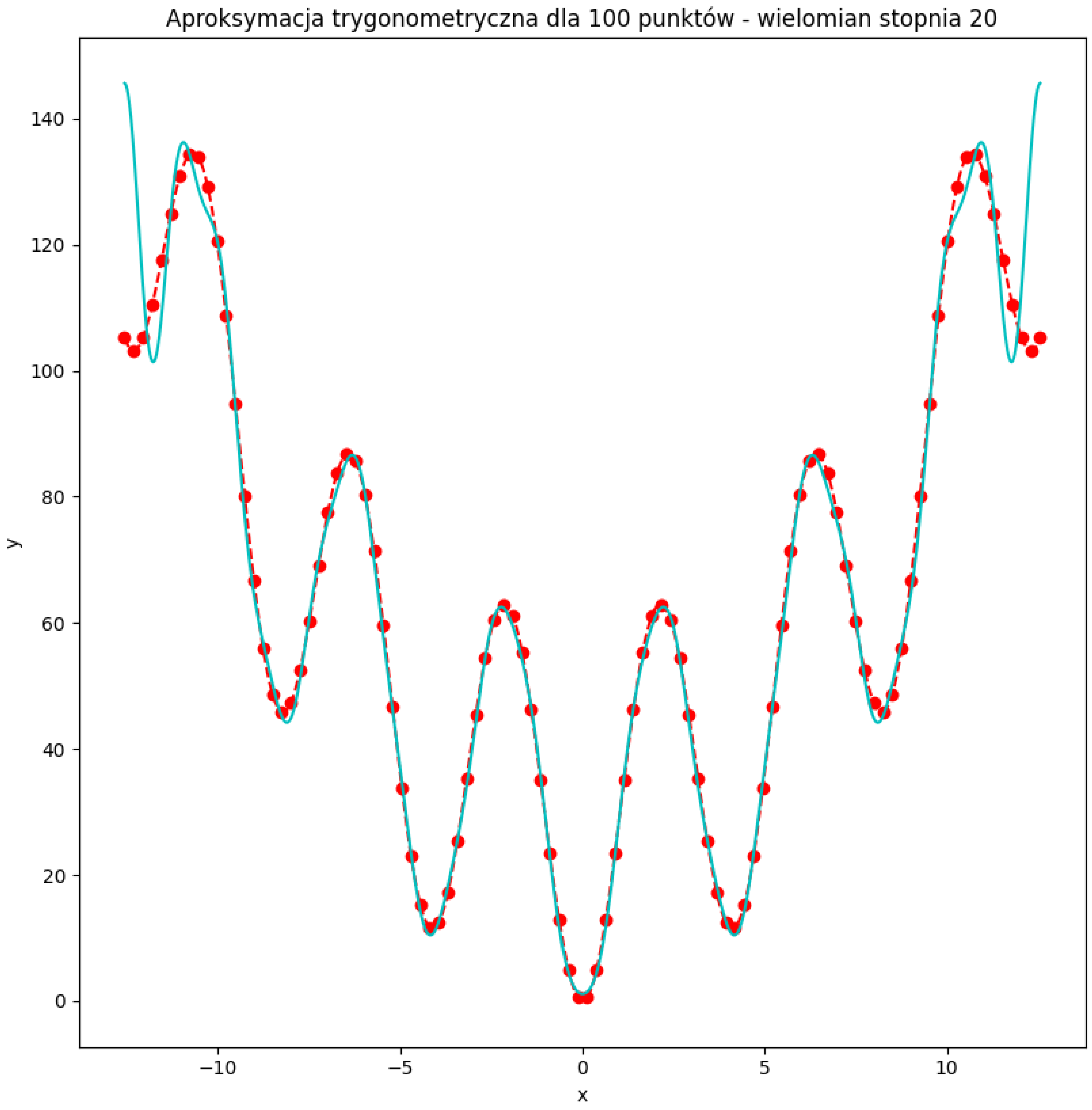
Maksymalna różnica : 3.9658271689904723

Uśredniony kwadrat błędu : 1910.522741692488



Maksymalna różnica :
33.536141546836916

Uśredniony kwadrat błędu :
427173.800664065



Maksymalna różnica :
40.64335716344243

Uśredniony kwadrat błędu :
46061.754340549196

Tabela pokazująca zależność maksymalnego błędu od ilości węzłów (n) i stopnia wielomianu (m)

m\n	25	50	75	100
1	44.84	42.19	41.33	40.90
2	38.52	35.18	34.78	34.66
3	44.95	35.2	34.09	33.53
4	55.98	38.86	33.29	31.9
5	66.08	44.65	37.68	34.22
6	47.9	22.57	14.77	11.1

Najważniejsze wnioski

- Kiedy znamy wartości dla stosunkowo niedużej liczby punktów (20 i mniej) i chcemy uzyskać wielomian tego samego stopnia, w przypadku omawianej funkcji dokładniejsze wyniki daje aproksymacja wielomianowa, jeśli jednak posiadamy wiedzę o dużo większej liczbie punktów (50 i więcej) znacznie dokładniejsze wyniki daje aproksymacja trygonometryczna.
- Dodatkowo w przypadku aproksymacji trygonometrycznej zwiększanie liczby węzłów przynosi wzrost dokładności obliczonej funkcji, nawet dla kilkuset węzłów, podczas gdy dla aproksymacji wielomianowej zwiększanie ilości węzłów już przy kilkudziesięciu punktach nie przekładało się na znaczne zwiększenie dokładności.
- Dla ustalonej na 100 liczby węzłów najdokładniejszy okazał się wielomian aproksymujący stopnia 6, dla mniejszych i większych stopni dokładność uzyskanych funkcji malała
- Dla dużych ilości węzłów, zbliżonych do maksymalnej wartości 2n+1 widoczne są duże błędy w pobliżu końców przedziałów