

POLYTOPE DES ABSORBANTS DANS UNE CLASSE DE GRAPHE A SEUIL

Ali Ridha MAHJOUR

I.M.A.G., B.P. 53X, 38041 Grenoble, Cedex, France

A graph G is defined to be *domishold* (Benzaken and Hammer (1978)) if there exist real positive numbers associated to their vertices so that a set of vertices is *dominating* if and only if the sum of the corresponding weights exceeds a certain threshold b .

In this paper, we characterize the polytope of the dominants in this class of graphs, using a polynomial algorithm to find a minimum weight dominating set.

1. Introduction

Soit $G = (X, E)$ un graphe à n sommets, simple, non orienté, sans boucle, dont X représente l'ensemble des sommets, E celui des arêtes. Un ensemble $A \subseteq X$ est dit absorbant si tout sommet de $X - A$ est adjacent à au moins un sommet de A .

On peut associer à chaque absorbant A de G son vecteur représentatif x^A dans $\{0, 1\}^n$ ($x_i^A = 1$ si $i \in A$, 0 sinon). En considérant chacun de ces vecteurs comme un point de R^n , on peut définir l'enveloppe convexe $P(G)$ de ces absorbants qu'on appellera *polytope des absorbants de G* .

Il est en effet souvent intéressant de caractériser des structures combinatoires par l'enveloppe convexe de ses vecteurs représentatifs (cf. les travaux d'Edmonds sur les couplages, de Fulkerson sur les graphes parfaits, de Chvatal, Uhry et Boulala sur les stables dans un graphe série parallèle). Ceci, à notre connaissance, n'a jamais été fait sur les absorbants d'une classe de graphes non triviale. De plus, cette caractérisation est souvent liée à des algorithmes de reconnaissance et d'optimisation polynomiaux.

Dans cet article, nous caractérisons le polytope $P(G)$ dans la classe des graphes absorbants à seuils définie par Benzaken et Hammer [1] et, pour ce faire, nous donnons un algorithme polynomial en $O(n)$ de construction d'un absorbant de poids minimum dans un tel graphe, alors que ce problème est NP-complet dans le cas général.

Définition 1 (Benzaken et Hammer [1]). Soit $G = (X, E)$ un graphe fini, sans boucle, simple, non orienté, $X = \{1, 2, \dots, n\}$, G est dit *absorbant à seuil* s'il

existe des poids $a_i \geq 0$ associés aux sommets de G et un seuil $b \geq 0$ tel que $A \subseteq X$ est un absorbant (ou dominant) de G si et seulement si $\sum_{i \in A} a_i \geq b$.

Parmi les caractérisations des graphes absorbants à seuil ([1]), nous utiliserons essentiellement la suivante.

Théorème 1. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *G est absorbant à seuil.*
 - (2) *G peut se ramener à un graphe réduit à un sommet en enchaînant un nombre fini de fois les opérations suivantes (cf. Fig. 1):*
- ϕ_1 : *Supprimer un sommet isolé.*
 - ϕ_2 : *Supprimer un sommet universel (sommets adjacents à tous les autres sommets).*
 - ϕ_3 : *Supprimer une paire de pôles (deux sommets non liés entre eux, mais adjacents à tous les autres sommets).*

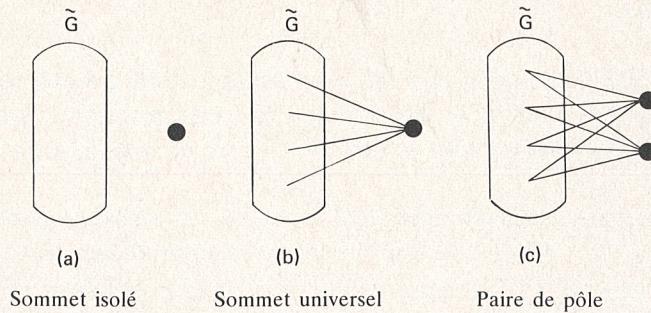


Fig. 1. \tilde{G} est le graphe restant après avoir fait l'une des opérations ϕ_1 , ϕ_2 ou ϕ_3 .

Remarque 1. L'opération ϕ_1 va définir des étapes dans le ‘démontage’ de G . Chaque étape consiste à supprimer des sommets universels et des paires de pôle adjacents à un sommet qui, par la suite, devient un sommet isolé. Autrement dit, il s’agit dans chaque étape d’enchaîner des opérations de type ϕ_2 ou ϕ_3 suivies d'une opération de type ϕ_1 .

Soit n_1 le nombre d'opérations de type ϕ_1 , à faire, pour ramener G à un sommet. On numérottera $n_1 + 1$ ce sommet, et i le sommet isolé définissant la i ème opération ϕ_1 . Pour tout sommet $j \neq n_1 + 1$, on notera V_j l'ensemble des sommets de G qui sont adjacents à j et $V_{n_1+1} = X - \{1, \dots, n_1\}$.

D'après ce qui précède, on peut représenter G par le schéma symbolique de la Fig. 2.

≥ 0 tel que
 $\in A$ $a_i \geq b$.
utiliserons

un nombre
les autres
eux, mais

On posera dans la suite $W_k = V_k - V_{k-1}$, $1 \leq k \leq n_1$.

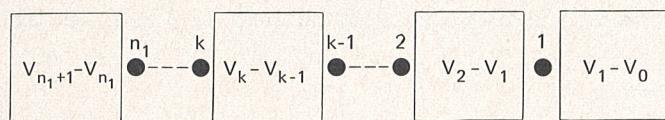


Fig. 2. $V_k - V_{k-1} = \{i \mid i \in V_k \text{ et } i \notin V_{k-1}\}$ et $V_0 = \emptyset$.

Remarque 2. Dans la suite on considère le sommet $n_1 + 1$ comme un sommet universel dans W_{n_1+1} .

Soit $C = (C_1, \dots, C_n)$ un vecteur de R^n . On désignera par $P(G, C)$ le problème de la recherche d'un absorbant A_0 de G tel que $\sum_{i \in A_0} C_i$ soit minimum (on dit que A_0 est de poids minimum dans G). Dans ce qui suit, nous allons donner un algorithme de résolution de $P(G, C)$ qui exige seulement un nombre d'opérations élémentaires proportionnel à n . Pour ce faire on peut supposer que $C_i \geq 0$ pour $i \in X$, car les sommets ayant des poids négatifs appartiennent forcément à A_0 .

2. Algorithme de résolution de $P(G, C)$

2.1. Algorithme

On notera $(V_k)_u$ et $(W_k)_u$ (resp. $(V_k)_p$ et $(W_k)_p$) les ensembles de sommets universels (resp. paires de pôles) de V_k et W_k . Pour $k = 1, \dots, n_1 + 1$, soit p_k (resp. u_k) un sommet de $(W_k)_p$ (resp. $(V_k)_u$) tel que $C_{p_k} = \min\{C_i \mid i \in (W_k)_p\}$ (resp. $C_{u_k} = \min\{C_i \mid i \in (V_k)_u\}$). Soient i_k^* et j^* respectivement les sommets tels que

$$C_{i_k^*} = \min\{C_i \mid i = k, \dots, n_1\}$$

et

$$C_{j^*} = \min\{C_i \mid i \in \{p_1, \dots, p_{n_1+1}, u_1, \dots, u_{n_1+1}\}\}$$

et soit k_0 tel que $j^* \in W_{k_0+1}$.

D'après les notations précédentes, l'absorbant A_0 de poids minimum parmi les absorbants suivants est solution de $P(G, C)$:

- (a) $\{1, 2, \dots, r-1, P_r, j^*\}$, $r = 1, \dots, k_0$,
- (b) $\{1, 2, \dots, r-1, u_r\}$, $r = 1, \dots, k_0 + 1$,
- (c) $\{1, 2, \dots, r-1, P_r, i_r^*\}$, $r = 1, \dots, k_0$,
- (d) $\{1, 2, \dots, k_0, P_{k_0+1}, s\}$,

où s est un sommet tel que

$$C_s = \min\{C_i \mid i \in \{(W_{k_0+1})_p - \{P_{k_0+1}\} \cup (V_{n_1+1} - V_{k_0+1}) \cup \{i^*_{k_0+1}\}\}\}$$

2.2. Justification

Soit A_0 une solution de $P(G, C)$, et soit r le plus petit entier compris entre 1 et k_0 (s'il existe) tel que $A_0 \cap W_r \neq \emptyset$.

(1) r existe.

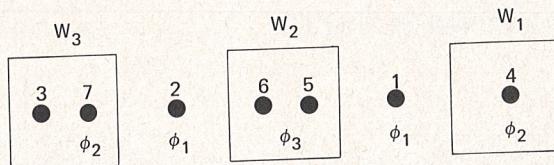
Donc $\{1, 2, \dots, r-1\} \subset A_0$. Si $A_0 \cap (W_r)_u \neq \emptyset$ alors $A_0 = \{1, 2, \dots, r-1, u_r\}$, sinon, il existe $i \neq p_r$ tel que $A_0 = \{1, 2, \dots, r-1, p_r, i\}$, donc $i \in \{i^*_r, j\}$.

(2) r n'existe pas.

Donc $A_0 \cap W_{k_0} = \emptyset$ et par suite $\{1, 2, \dots, k_0\} \subset A_0$. D'après la définition de j^* , il existe dans ce cas, un absorbant A_0 de poids minimum tel que $A_0 \cap W_{k_0+1} \neq \emptyset$, donc $A_0 = \{1, 2, \dots, k_0, u_{k_0+1}\}$ ou bien $A_0 = \{1, 2, \dots, k_0, p_{k_0+1}, s\}$.

2.3. Exemple

Soit G le graphe ci-dessous (Fig. 3), défini par l'enchaînement des opérations $\phi_2, \phi_1, \phi_3, \phi_1, \phi_2$.



Représentation schématique de G .

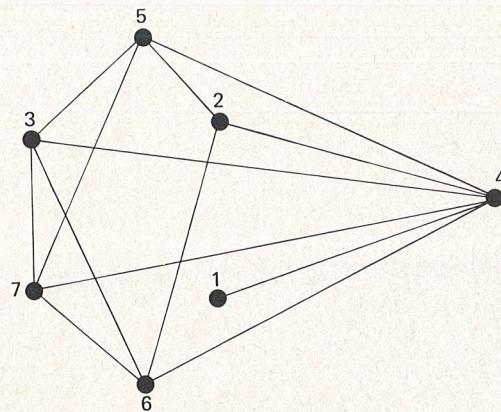


Fig. 3.

On affecte aux sommets de G les poids $C_1 = 2$, $C_2 = 3$, $C_3 = 12$, $C_4 = 20$, $C_5 = 8$, $C_6 = 16$, $C_7 = 4$. D'après l'algorithme, un absorbant A_0 de poids minimum dans G est parmi les absorbants $\{4\}$, $\{1, 5, 7\}$, $\{1, 5, 2\}$, $\{1, 2, 7\}$ donc $A_0 = \{1, 2, 7\}$ de poids 9.

{}}}

ors entre 1 et

 $\dots, r-1, u_r\}$,
 $\{i_r^*, j\}$.éfinition de j^* ,
 $A_0 \cap W_{k_0+1} \neq \emptyset$,

des opérations

3. Polytope des absorbants d'un graphe absorbant à seuil

3.1. Une famille de facette de $P(G)$

Lemme 1. Si G n'a pas de sommets isolés (i.e., $V_1 \neq \emptyset$), alors $P(G)$ est de pleine dimension.

Démonstration. Si $V_1 \neq \emptyset$, les ensembles $X - \{i\}$, $i = 1, \dots, n$ et l'ensemble X lui-même forment une famille de $n + 1$ absorbants affinement indépendants.

Remarque 3. Pour caractériser $P(G)$, on supposera, sans perte de généralité, que G n'a pas de sommets isolés.

Définition 2. L'inéquation $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \alpha_0$, $\alpha_i \in R$, $\forall i$, est dite facette (face de dimension $n - 1$) de $P(G)$ si et seulement si

(1) elle est valide pour tout absorbant de G ;

(2) il existe n absorbants affinement indépendants vérifiant cette inéquation avec égalité.

Lemme 2. Pour tout sommet $i \in X$, la contrainte $x_i \leq 1$ définit une facette de $P(G)$.

Démonstration. D'une part, la contrainte $x_i \leq 1$ est satisfaite par tous les absorbants, d'autre part les n absorbants suivants $X, X - \{1\}, \dots, X - \{i-1\}$, $X - \{i+1\}, \dots, X - \{n\}$ sont affinement indépendants et vérifient la contrainte avec égalité.

3.2. Le polytope $P(G)$

3.2.1

Théorème 2. Le polytope $P(G)$ est défini par les inégalités suivantes :

$$Q \left\{ \begin{array}{l} (1 - \delta_{n_1+1,i})x_i + \sum_{j \in V_i} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, n_1 + 1, \\ \quad i \in (W_k)_p, \quad k = 1, \dots, n_1 + 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$Q \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=k+1}^{n_1} x_i + (j-k+2) \sum_{i \in V_k \cup (W_{k+1})_u} x_i + \sum_{t=k}^{j-1} (j+1-t) \sum_{i \in (W_{t+1})_p \cup (W_{t+2})_u} x_i \\ \quad + \sum_{i \in (V_{n_1+1} - V_{j+1}) \cup (W_{j+1})_p} x_i \geq j-k+2, \quad 0 \leq k \leq j \leq n_1, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$Q \left\{ \begin{array}{l} x_i \leq 1 \quad \forall i \in X, \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in X, \end{array} \right. \quad (3)$$

où

$$\delta_{n_1+1,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1 + 1 = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que les contraintes (1), (3) et (4) sont satisfaites pour tout absorbant du graphe G . Pour une contrainte (C) de type (2), définie par j, k tels que $0 \leq k \leq j \leq n_1$, on considère un absorbant A de G .

Si $A \cap (V_k \cup (W_{k+1})_u) \neq \emptyset$, alors (C) est vérifiée, sinon soit $t_0, k \leq t_0 \leq n_1$, le plus petit entier tel que $A \cap V_{t_0} = \emptyset$ et $A \cap V_{t_0+1} \neq \emptyset$, donc $\{1, 2, \dots, t_0\} \subset A$. Suivant que $t_0 \leq j$ ou $t_0 > j$ on peut voir facilement que la contrainte (C) est bien vérifiée.

Remarque 4. Les contraintes de type (1) et (2) correspondantes respectivement à $i = n_1 + 1$, et (k, j) tel que $k = j = n_1$, sont les mêmes.

3.2.2. Démonstration du Théorème 2

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que les points extrêmes du polytope Q représentent tous des absorbants de G . Pour ce faire, considérons le programme linéaire suivant:

$$P_G = \left\{ \begin{array}{l} X \in Q, \\ \min CX, \quad C \in R^n. \end{array} \right.$$

On sait que pour tout point extrême de Q , il existe un vecteur C tel que ce point soit solution optimale unique de P_G . Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout système de poids $C = (C_1, \dots, C_n) \in R^n$, sur les sommets de G , il existe une solution optimale de P_G qui est le vecteur représentatif d'un absorbant de G . Pour cela, nous montrons que pour tout absorbant A_0 de poids

(1)

minimum dans G et de vecteur représentatif x^{A_0} , donné par l'algorithme précédent, il existe une solution y^{A_0} du dual D_G de P_G qui vérifie avec x^{A_0} les conditions du théorème des écarts complémentaires.

Puisque on a supposé $C_i \geq 0, \forall i \in X$, on peut omettre les contraintes (3).

A une contrainte de type (1), correspondant à un sommet i (isolé ou appartenant à une paire de pôle), on associe la variable duale y_i , et à une contrainte de type (2) définie par les entiers k, j on associe la variable duale $\varepsilon_{k,j}$.

Le dual D_G s'écrit:

(3)

(4)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i + \sum_{j \in (V_1)_p} y_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq i-1 \\ k \leq j \leq n_1}} \varepsilon_{k,j} \leq C_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_1, \\ \sum_{i=h}^{n_1} y_i + \sum_{j \in (V_{n_1+1})_p} y_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq j \leq h-2 \\ h-1 \leq j \leq n_1}} \varepsilon_{k,j} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq h-2 \\ h-1 \leq j \leq n_1}} (j-h+3)\varepsilon_{k,j} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$+ \sum_{h-1 \leq k \leq j \leq n_1} (j-k+2)\varepsilon_{k,j} \leq C_u, \quad \text{pour } u \in (W_h)_u \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} D_G \quad \sum_{i=h}^{n_1+1} y_i + \sum_{j \neq p^*} y_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq j \leq h-1 \\ h \leq j \leq n_1}} \varepsilon_{k,j} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq h-1 \\ h \leq j \leq n_1}} (j-h+2)\varepsilon_{k,j} \\ + \sum_{h \leq k \leq j \leq n_1} (j-k+2)\varepsilon_{k,j} \leq C_p, \quad \text{pour } p \text{ tq } (p, p^*) \text{ est une} \\ \text{paire de pôle de } (W_h), \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} y_i \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, n_1\} \cup (V_{n_1+1})_p, \\ \varepsilon_{k,j} \geq 0, \quad 0 \leq k \leq j \leq n_1, \end{array} \right. \quad (8)$$

$$\max \left(\sum_{i=1}^{n_1+1} y_i + \sum_{j \in (V_{n_1+1})_p} y_j + \sum_{0 \leq k \leq j \leq n_1} (j-k+2)\varepsilon_{k,j} \right).$$

Soit $P(A_0)$ le poids d'un absorbant A_0 , solution de $P(G, C)$, alors d'après l'algorithme précédent, il existe $r, 1 \leq r \leq k_0 + 1$, tel que:

$$P(A_0) \geq C_{j^*} + C_1 + C_2 + \dots + C_{r-1},$$

et

$$P(A_0) \leq C_{j^*} + C_1 + C_2 + \dots + C_{k_0} + C_s.$$

Donc, il existe $t, r-1 \leq t \leq k_0$, tel que

$$P(A_0) = C_{j^*} + C_1 + C_2 + \dots + C_t + \delta \quad \text{avec } 0 \leq \delta \leq C_{t+1}.$$

D'où le lemme suivant.

Lemme 3. Si A_0 est solution de $P(G, C)$, alors il existe $t, r-1 \leq t \leq k_0$, et un réel $\delta, 0 \leq \delta \leq C_{t+1}$, tel que

$$P(A_0) = C_{j^*} + C_1 + C_2 + \cdots + C_t + \delta. \quad (9)$$

Soit

$$C_i^* = \min\{C_i, \dots, C_{k_0}, C_0\}, \quad i = 1, \dots, k_0, \quad (10)$$

avec $C_0^* = 0$, $C_{k_0+1}^* = C_0$, où $C_0 = \min\{C_{j^*}, C_{k_0+1}, \dots, C_{n_1}\}$.

Nous avons $C_i^* \leq C_{i+1}^*$ pour $i = 1, \dots, k_0$. Alors, si A_0 est solution de $P(G, C)$ et de poids donné par la relation (9), il en résulte:

$$C_h + C_{h+1} + \cdots + C_t + C_{j^*} + \delta \leq C_{p_h} + C_h^*, \quad (11)$$

$$C_h + C_{h+1} + \cdots + C_t + C_{j^*} + \delta \leq C_{u_h}, \quad \text{pour } h \text{ tq, } 1 \leq h \leq t,$$

et si

$$t = k_0, \quad \delta \leq C_s. \quad (12)$$

p_h et u_h sont déjà définis dans l'algorithme au Section 2.1. Soit i_0 tel que

$$\begin{cases} 0 \leq i_0 \leq t, & \text{si } 0 \leq \delta \leq C_{t+1}^* \text{ et } C_{i_0}^* \leq \delta \leq C_{i_0+1}^*, \\ i_0 = t+1, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme 4. Si $P(A_0) = C_{j^*} + C_1 + C_2 + \cdots + C_t + \delta$ avec $r-1 \leq t \leq k_0$ et $0 \leq \delta \leq C_{t+1}^*$, alors

$$y^{A_0} = \begin{cases} \varepsilon_{k,t} = C_{k+1}^* - C_k^*, & k = 0, 1, \dots, i_0 - 1, \\ \varepsilon_{i_0,t} = \delta - C_{i_0}^*, \\ \varepsilon_{i_0,t-1} = C_{i_0+1}^* - \delta, \\ \varepsilon_{k,t-1} = C_{k+1}^* - C_k^*, & k = i_0 + 1, \dots, t-1, \\ y_i = C_i - C_i^*, & i = 1, \dots, t, \\ (1 - \delta_{t,k_0})y_{t+1} + \delta_{t,k_0} y_{p_{k_0+1}^*} = \lambda(\delta - C_{t+1}^*), \\ y_{n_1+1} = C_{j^*} - \varepsilon, \\ y_i = \varepsilon_{k,j} = 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où

$$\delta_{t,k_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k_0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta > C_{t+1}^*, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\varepsilon = \sum_{0 \leq k \leq j \leq n_1} \varepsilon_{k,j}$$

est une solution réalisable du dual D_G .

(9)

Démonstration. Simple à vérifier à partir de (10), (11) et (12).

D'après les Lemmes 3 et 4, on déduit que pour tout absorbant A_0 solution de $P(G, C)$, on peut associer une solution réalisable y^{A_0} du dual D_G .

le $P(G, C)$

(11)

Lemme 5. Pour tout absorbant A_0 , solution de $P(G, C)$, déterminé par l'algorithme, x^{A_0} est une solution optimale de P_G .

(12)

Démonstration. Il est facile de vérifier que pour tout absorbant A_0 , de poids minimum proposé par l'algorithme, x^{A_0} vérifie avec y^{A_0} les conditions du théorème des écarts complémentaires.

(12)

Le Lemme 5 achève la démonstration du Théorème 2.

tel que

Exemple. On reprend le graphe G donné par la Fig. 3, le polytope $P(G)$ sera dans ce cas:

$$P(G) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_4 \geq 1, \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2, * \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 3, * \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 4, * \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 \geq 3. * \end{array} \right.$$

Les quatres contraintes marquées d'un astérisque sont redondantes, ce qui montre que les contraintes de type (2) ne sont pas toutes des facettes.

La solution optimale du dual D_G associée à l'absorbant de poids minimum A_0 est:

$$y^{A_0} = \begin{cases} y_3 = 1, \\ \varepsilon_{0,1} = 2, \\ \varepsilon_{1,1} = 1, \\ y_i = \varepsilon_{j,k} = 0, \text{ ailleurs.} \end{cases}$$

References

- [1] C. Benzaken and P.L. Hammer, Linear separation of dominating sets in graphs, *Discrete Math.* 3 (1978) 1–10.
- [2] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes* (Dunod, Paris, 1973).
- [3] M. Boulala and J.P. Uhry, Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle, *Discrete Math.* 27 (1979) 225–243.
- [4] V. Chvatal, On certain polytopes associated with graphs, *J. Comb. Theory* 18 (1975) 138–154.
- [5] M.W. Padberg, On the facial structure of set packing polyhedra, *Math. Programming* 5 (1973) 199–215.
- [6] U.N. Peled, Properties of facets of binary polytopes, *Discrete Math.* 1 (1977) 435–456.
- [7] G.L. Nemhauser and L.E. Trotter, Properties of vertex packing and independence system polyhedra, *Math. Programming* 5 (1974) 48–61.
- [8] G.L. Nemhauser and L.E. Trotter, Vertex packing structural properties and algorithms, *Math. Programming* 8 (1975) 232–248.
- [9] L.E. Trotter, A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra, *Discrete Math.* 12 (1975) 373–388.
- [10] L.A. Wolsey, Further facet generating procedures for vertex packing polytopes, *Math. Programming* 11 (1976) 158–163.