

# THESE

*présentée à*

**L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**  
*et à*  
**L'Institut National Polytechnique de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3ème Cycle**  
Mathématiques appliquées  
option recherche opérationnelle

*par*

**MAHJOUB Ali Ridha**



- I. RESOLUTION D'UN PROBLEME DE REGULATION  
DE TRAFIC.
- II. POLYTOPE DES ABSORBANTS D'UN GRAPHE A SEUIL.



Thèse soutenue le 2 juin 1981 devant la commission d'examen.

**M. SAKAROVITCH**

Président

**C. BENZAKEN**

**P.H. FARGIER**

**F. ROBERT**

**J.P. UHRY**

**M. BEN AHMED**

Examinateurs

Invité



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Monsieur Gabriel CAU : Président  
Monsieur Joseph KLEIN : Vice-Président

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

### PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	AMBLARD Pierre	Clinique de dermatologie
	ARNAUD Paul	Chimie
	ARVIEU Robert	I.S.N.
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale A
	BEAUDOING André	Clinique de pédiatrie et puériculture
	BELORIZKY Elie	Physique
	BARNARD Alain	Mathématiques pures
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
	BEZES Henri	Clinique chirurgicale et traumatologie
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques pures
	BOLLIET Louis	Informatique (I.U.T. B)
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologie
	BONNET-EYMARD Joseph	Clinique hépato-gastro-entérologie
Mme	BONNIER Marie-Jeanne	Chimie générale
MM.	BOUCHERLE André	Chimie et toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques appliquées
	BOUTET DE MONVEL Louis	Mathématiques pures
	BRAVARD Yves	Géographie
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologique
	CALAS François	Anatomie
	CARLIER Georges	Biologie végétale
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie

.../...

MM.	CAU Gabriel	Médecine légale et toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques pures
	CHARACHON Robert	Clinique ot-rhino-laryngologique
	CHATEAU Robert	Clinique de neurologie
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COEUR André	Pharmacie clinique et chimie analytique
	COUDERC Pierre	Anatomie pathologique
	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DELORMAS Pierre	Pneumophysiologie
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DODU Jacques	Mécanique appliquée (I.U.T. I)
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie *
	FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALVANI Octave	Mathématiques pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques pures
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIRAUD Pierre	Géologie
	JANIN Bernard	Géographie
	KAHANE André	Physique générale
	KLEIN Joseph	Mathématiques pures
	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
Mme	LAJZEROWICZ Janine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LE ROY Philippe	Mécanique (I.U.T. I)

		3
MM.	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques pures
MM.	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Clinique cardiaque
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MAZARE Yves	Clinique Médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie
	MICOUD Max	Clinique maladies infectieuses
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEGRE Robert	Mécanique
	NOZIERES Philippe	Spectrométrie physique
	OZENDA Paul	Botanique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques pures
	PEBAY-PEYROULY Jean-Claude	Physique
	PERRET Jean	Séméiologie médicale (neurologie)
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REVOL Michel	Urologie
	RINALDI Renaud	Physique
	DE ROUGEMONT Jacques	Neuro-Chirurgie
	SARRAZIN Roger	Clinique chirurgicale B
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique (I.U.T. I)
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	VAILLANT François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique nucléaire
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
MM.	VERAIN André	Physique biophysique
	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale

## PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	CRABBE Pierre	CERMO
	SUNIER Jules	Physique

## PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mlle	AGNIUS-DELORS Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Gilbert	Géographie
	BENZAKEN Claude	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BILLET Jean	Géographie
	BOUCHET Yves	Anatomie
	BRUGEL Lucien	Energétique (I.U.T. I)
	BUISSON René	Physique (I.U.T. I)
	BUTEL Jean	Orthopédie
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique (I.U.T. I)
	DELOBEL Claude	M.I.A.G.
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	GAUTRON René	Chimie
	GIDON Paul	Géologie et minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	JOLY Jean-René	Mathématiques pures
	JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	KRAKOWIACK Sacha	Mathématiques appliquées
	KUHN Gérard	Physique (I.U.T. I)
	LUU DUC Cuong	Chimie organique - pharmacie
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. I)
Mme	MINIER Colette	Physique (I.U.T. I)

.../...

MM.	PELMONT Jean	Biochimie
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
Mlle	PIERY Yvette	Physiologie animale
MM.	RAYNAUD Hervé	M.I.A.G.
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	RICHARD Lucien	Biologie végétale
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale
MM.	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	VIALON Pierre	Géologie
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées

#### MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

MM.	ARMAND Yves	Chimie (I.U.T. I)
	BACHELOT Yvan	Endocrinologie
	BARGE Michel	Neuro-chirurgie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
Mme	BERIEL Hélène	Pharmacodynamie
MM.	BOST Michel	Pédiatrie
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BRODEAU François	Mathématiques (I.U.T. B) (Personne étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	BERNARD Pierre	Gynécologie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHARDON Michel	Géographie
	CHERADAME Hervé	Chimie papetière
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
	CONTAMIN Charles	Chirurgie thoracique et cardio-vasculaire
	CORDONNER Daniel	Néphrologie
	COULOMB Max	Radiologie
	CROUZET Guy	Radiologie

MM.	CYROT Michel	Physique du solide
	DENIS Bernard	Cardiologie
	DOUCE Roland	Physiologie végétale
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	FAURE Gilbert	Urologie
	GAUTIER Robert	Chirurgie générale
	GIDON Maurice	Géologie
	GROS Yves	Physique (I.U.T. I)
	GUIGNIER Michel	Thérapeutique
	GUITTON Jacques	Chimie
	HICTER Pierre	Chimie
	JALBERT Pierre	Histologie
	JUNIEN-LAVILLAVROY Claude	O.R.L.
	KOLODIE Lucien	Hématologie
	LE NOC Pierre	Bactériologie-virologie
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et médecine préventive
	MALLION Jean-Michel	Médecine du travail
	MARECHAL Jean	Mécanique (I.U.T. I)
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MASSOT Christian	Médecine interne
	NEMOZ Alain	Thermodynamique
	NOUGARET Marcel	Automatique (I.U.T. I)
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	PEFFEN René	Métallurgie (I.U.T. I)
	PERRIER Guy	Géophysique-glaciologie
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
	RACHALL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RAMBAUD Pierre	Pédiatrie
	RAPHAEL Bernard	Stomatologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Bactériologie (pharmacie)
MM.	ROBERT Jean-Bernard	Chimie-physique
	ROMIER Guy	Mathématiques (I.U.T. B) (Personnalité étrangère habilitée à être directeur de thèse)
	SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées

MM.	SCHAERER René	Cancérologie
Mme	SEIGLE-MURANDI Françoise	Crytogramie
MM.	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologie
	STUTZ Pierre	Mécanique
	VROUSOS Constantin	Radiologie

## MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	DEVINE Roderick	Spectro Physique
	KANEKO Akira	Mathématiques pures
	JOHNSON Thomas	Mathématiques appliquées
	RAY Tuhina	Physique

**MAITRE DE CONFERENCES DELEGUE**

M. : ROCHAT Jacques Hygiène et hydrologie (pharmacie)

Fait à Saint Martin d'Hères, novembre 1977



# INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1979-1980

Président : M. Philippe TRAYNARD

Vice-Présidents : M. Georges LESPINARD

M. René PAUTHENET

## PROFESSEURS DES UNIVERSITES

MM.	ANCEAU François	Informatique fondamentale et appliquée
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BESSON Jean	Chimie Minérale
	BLIMAN Samuel	Electronique
	BLOCH Daniel	Physique du Solide - Cristallographie
	BOIS Philippe	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Génie Chimique
	BONNIER Etienne	Métallurgie
	BOUVARD Maurice	Génie Mécanique
	BRISSONNEAU Pierre	Physique des Matériaux
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CHARTIER Germain	Electronique
	CHERADAME Hervé	Chimie Physique Macromoléculaires
Mme	CHERUY Arlette	Automatique
MM.	CHIAVERINA Jean	Biologie, Biochimie, Agronomie
	COHEN Joseph	Electronique
	COUMES André	Electronique
	DURAND Francis	Métallurgie
	DURAND Jean-Louis	Physique Nucléaire et Corpusculaire
	FELICI Noël	Electrotechnique
	FOULARD Claude	Automatique
	GUYOT Pierre	Métallurgie Physique
	IVANES Marcel	Electrotechnique
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide - Cristallographie
	LACOUME Jean-Louis	Géographie - Traitement du Signal
	LANCIA Roland	Electronique - Automatique
	LESIEUR Marcel	Mécanique
	LESPINARD Georges	Mécanique
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire Corpusculaire
	MOREAU René	Mécanique
	MORET Roger	Physique Nucléaire Corpusculaire
	PARIAUD Jean-Charles	Chimie - Physique
	PAUTHENET René	Physique du Solide - Cristallographie
	PERRET René	Automatique

.../...

MM.	PERRET Robert	Electrotechnique
	PIAU Jean-Michel	Mécanique
	PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
	POLOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	POUPOT Christian	Electronique - Automatique
	RAMEAU Jean-Jacques	Chimie
	ROBERT André	Chimie Appliquée et des matériaux
	ROBERT François	Analyse numérique
	SABONNADIERE Jean-Claude	Electrotechnique
Mme	SAUCIER Gabrielle	Informatique fondamentale et appliquée
M.	SOHM Jean-Claude	Chimie - Physique
Mme	SCHLENKER Claire	Physique du Solide - Cristallographie
MM.	TRAYNARD Philippe	Chimie - Physique
	VEILLON Gérard	Informatique fondamentale et appliquée
	ZADWORNY François	Electronique

**CHERCHEURS DU C.N.R.S. (Directeur et Maître de Recherche)**

M.	FRUCHART Robert	Directeur de Recherche
MM.	ANSARA Ibrahîm	Maître de Recherche
	BRONOEL Guy	Maître de Recherche
	CARRE René	Maître de Recherche
	DAVID René	Maître de Recherche
	DRIOLE Jean	Maître de Recherche
	KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
	KLEITZ Michel	Maître de Recherche
	LANDAU Ioan-Doré	Maître de Recherche
	MERMET Jean	Maître de Recherche
	MUNIER Jacques	Maître de Recherche

**Personnalités habilitées à diriger des travaux de recherche (décision du Conseil Scientifique)**

**E.N.S.E.E.G.**

MM.	ALLIBERT Michel	
	BERNARD Claude	
	CAILLET Marcel	
Mme	CHATILLON Catherine	
MM.	COULON Michel	
	HAMMOU Abdelkader	
	JOUD Jean-Charles	
	RAVAINÉ Denis	
	SAINFORT	C.E.N.G.

.../...

MM. SARRAZIN Pierre  
SOUQUET Jean-Louis  
TOUZAIN Philippe  
URBAIN Georges

Laboratoire des Ultra-Réfractaires ODEILLO

**E.N.S.M.E.E.**

MM. BISCONDI Michel  
BOOS Jean-Yves  
GUILHOT Bernard  
KOBILANSKI André  
LALAUZE René  
LANCELOT François  
LE COZE Jean  
LESBATS Pierre  
SOUSTELLE Michel  
THEVENOT François  
THOMAS Gérard  
TRAN MINH Canh  
DRIVER Julian  
RIEU Jean

**E.N.S.E.R.G.**

MM. BOREL Joseph  
CHEHIKIAN Alain  
VIKTOROVITCH Pierre

**E.N.S.I.E.G.**

MM. BORNARD Guy  
DESCHIZEAUX Pierre  
GLANGEAUD François  
JAUSSAUD Pierre  
Mme JOURDAIN Geneviève  
MM. LEJEUNE Gérard  
PERARD Jacques

**E.N.S.H.G.**

M. DELHAYE Jean-Marc

**E.N.S.I.M.A.G.**

MM. COURTIN Jacques  
LATOMBE Jean-Claude  
LUCAS Michel  
VERDILLON André



وَمَا أُوتِينَاكُلَّهُ لَا قِيلَّا

"ET ON NE VOUS A APPORTÉ QUE PEU DE SCIENCE"

CORAN

A mes parents  
A ma femme



Je remercie vivement Monsieur Michel SAKAROVITCH de m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir accepté de présider le Jury de cette thèse.

Je remercie également MM. Claude BENZAKEN, François ROBERT et Paul Henri FARGIER pour l'honneur qu'ils me font en participant au Jury.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Jean-Pierre UHRY pour son soutien, sa bienveillance, sa disponibilité et sa patience au cours de l'élaboration de ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur Jean FONLUPT pour l'aide, les commentaires et les suggestions qu'il m'a apportées dans ce travail.

Je remercie Monsieur Mohamed BEN AHMED, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Tunis, pour m'avoir initié à la Recherche Opérationnelle.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à MM. Benard RAPACCHI et Gilles KUNTZ pour leur précieuse collaboration durant la partie expérimentale de ce travail.

Je remercie aussi la Société ALMA d'avoir mis à ma disposition son micro-ordinateur APPLE II.

J'adresse mes remerciements à Monsieur Eric TERRIER et Madame Najiba SBIHI qui ont eu la gentillesse de corriger certains manuscrits de cette thèse et pour leurs encouragements pendant ce travail.

A tous les membres de l'équipe de Recherche Opérationnelle, j'exprime ma sincère sympathie pour leur collaboration fructueuse.

Enfin, je remercie Madame NEUMANN et Madame SUMNER qui ont effectué avec compétence et amabilité la frappe de cette thèse ainsi que les membres du service de reprographie pour l'excellente finalité de leur travail.

Ali Ridha MAHJOUR



## TABLE DES MATIERES

	Pages
AVANT PROPOS .....	1
<b>I - RESOLUTION D'UN PROBLEME DE REGULATION DE TRAFIC</b>	
INTRODUCTION .....	5
1 - MODELISATION DU PROBLEME $\mathcal{P}$ .....	7
1-1 - Principe de Wardrop .....	7
1-2 - Temps de parcours .....	8
1-3 - Exemple d'affectation de Wardrop .....	9
1-4 - Modèle de Wardrop .....	11
1-5 - Interprétation de la solution primaire-duale du problème de l'affectation de coût minimum .....	14
1-6 - Régulation selon Wardrop .....	15
1-7 - Formulation mathématique du problème $P$ .....	16
1-8 - Deux exemples de régulation .....	17
2 - ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{P}$ DANS LE CAS D'UNE SEULE ORIGINE-DESTINATION .....	25
2-1 - Formulation théorique .....	25
2-2 - Deux méthodes de régulation .....	27
2-2-1 - Méthodes des coupes .....	28
2-2-2 - Méthode de séparation et évaluation progressive .....	31
3 - ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{P}$ DANS LE CAS DE PLUSIEURS ORIGINES ET UNE DESTINATION .....	45
Introduction .....	45

## Pages

3-1 - Formulation théorique .....	46
3-2 - Exemple de régulation .....	57
3-3 - Méthode de séparation et évaluation progressive .....	61
<b>4 - ETUDE EXPERIMENTALE .....</b>	<b>73</b>
4-1 - L'organigramme du programme .....	73
4-2 - Expérimentation .....	75
<b>5 - CAS DU CORRIDOR .....</b>	<b>87</b>
Introduction .....	87
5-1 - Modèle du Corridor .....	89
5-2 - Les deux méthodes proposées par PAYNE et THOMPSON .....	93
5-3 - Sous l'hypothèse $H_0$ , l'autoroute ne supporte pas de pénalités .....	100
5-4 - Affectation du plus près au plus loin ...	111
5-5 - Exemple de Payne et Thompson .....	120
5-6 - La régulation du plus près au plus loin n'est pas toujours optimale .....	124
CONCLUSION .....	127
REFERENCE .....	129

**II - POLYTOPE DES ABSORBANTS D'UN GRAPHE A SEUIL**

INTRODUCTION .....	125
<b>1 - PRELIMINAIRES .....</b>	<b>135</b>
<b>2 - ALGORITHME DE RESOLUTION DE <math>P(G, C)</math> .....</b>	<b>138</b>
2-1 - Algorithme .....	138
2-2 - Justification .....	139
2-3 - Exemples .....	139
<b>3 - POLYTOPE DES ABSORBANTS D'UN GRAPHE ABSORBANT A SEUIL .....</b>	<b>140</b>
REFERENCES .....	149

## AVANT PROPOS

Notre travail se compose de deux parties :

Dans la première partie, nous avons étudié un problème de régulation de circulation, qui nous a été soumis par l'Institut de Recherche des Transports :

Sur un réseau routier circule un trafic entre plusieurs origines et plusieurs destinations. Toutes les caractéristiques du réseau ainsi que les données de trafic sont supposées constantes dans le temps (cas statique).

Sachant que les usagers de ce réseau s'affectent suivant le principe de Wardrop, comment alors en abaissant éventuellement les capacités réelles des arcs du réseau, peut-on minimiser le temps total passé par tous les usagers de ce réseau.

Cette méthode est apparemment paradoxale, mais il est bien connu des ingénieurs de trafic et des usagers que la restriction des capacités de certaines voies permet d'améliorer la fluidité du trafic et diminuer le temps total passé par les usagers dans le réseau, essentiellement dans la régulation des accès d'une autoroute.

Dans cette partie, nous donnons une formulation mathématique du problème.

Nous étudions ce problème, plus particulièrement dans le cas où le réseau comporte plusieurs origines et une destination (resp. une origine et plusieurs destinations) et nous proposons un modèle dont la solution fournit une politique de régulation optimale, que nous avons testée sur des exemples simples.

Nous étudions le problème également dans le cas du corridor et nous donnons, dans ce cas, une heuristique de régulation qui, dans certaines conditions, est optimale.

Dans la deuxième partie, nous étudions les absorbants d'une classe de graphes définies par C. BENZAKEN et P.L. HAMMER "Les graphes absorbants à seuil" : un graphe  $G$  est dit absorbant à seuil si on peut associer des réels positifs à ses sommets de telle manière qu'un ensemble de sommets de  $G$  soit un absorbant si et seulement si la somme des poids correspondant aux éléments de cet ensemble dépasse un certain seuil  $b$ .

En représentant chaque absorbant, comme un sommet de l'hypercube, nous caractérisons le polytope des absorbants dans cette classe de graphes à seuil à l'aide d'un algorithme polynomial de recherche d'un absorbant de poids minimum.

Il peut paraître surprenant de traiter de deux sujets d'apparence aussi distincte dans une même thèse, même si l'algorithmique constitue le trait d'union de ces travaux.

En fait, il s'agit là d'une particularité intéressante de la pratique de la Recherche Opérationnelle à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble qui cherche toujours à maintenir le double aspect pratique et théorique de cette discipline et dont cette thèse se veut un exemple.

I - RESOLUTION D'UN PROBLÈME  
DE REGULATION DE TRAFIC



## INTRODUCTION

Parmi toutes les manières d'envisager une régulation du trafic circulant sur un réseau routier, une des plus intéressantes semble être la suivante :

Considérons un réseau routier constitué de noeuds et de tronçons, chaque tronçon ayant une capacité maximum d'écoulement. Sur ce réseau circule un trafic entre plusieurs origines et plusieurs destinations. Nous supposons que chaque usager de ce réseau choisit l'itinéraire de coût minimum, et qu'il possède une connaissance parfaite de la charge de trafic sur le réseau, ce qui conduit à une affectation obéissant au principe de Wardrop. Comment alors, en abaissant éventuellement les capacités réelles des arcs du réseau, peut-on minimiser le temps total passé par tous les usagers de ce réseau ?

L'intérêt de l'étude de cette régulation qui nous a été proposée par P.H. FARGIER, est de laisser à chaque usager de s'affecter individuellement au meilleur coût ressenti par lui.

Notons que le problème de régulation a été étudié par ailleurs (parmi les nombreuses références voir [1], [2], [3], [5], [6]). Les auteurs de ces études supposent que le flux de trafic entre chaque origine et destination varie dans le temps. On dit alors que le problème est dynamique.

Notre étude se place dans les hypothèses suivantes :

- 1°. Toutes les caractéristiques du réseau ainsi que les données de trafic sont supposées constantes dans le temps (cas statique).

2°. Nous utiliserons un modèle d'affectation de trafic particulièrement simple afin de pouvoir interpréter simplement les résultats obtenus et mettre en oeuvre des algorithmes efficaces.

Dans le paragraphe 1, nous donnerons une formulation mathématique de ce problème de régulation que nous désignerons dans la suite par  $\mathcal{P}$ . Nous montrerons que le modèle auquel nous aboutissons s'interprète comme un problème d'optimisation faisant intervenir une fonction quadratique. Ceci montrera la difficulté du problème qui ne peut se résoudre dans le cas général que par des méthodes adaptées (Méthode Branch and Bound, méthode des Coupes).

Deux exemples de régulation, illustrant ces difficultés, sont donnés à la fin de ce Chapitre.

Dans le chapître 2, nous étudions le problème  $\mathcal{P}$  dans le cas d'une origine et une destination, afin de montrer que même alors, le problème reste difficile. Nous proposons dans ce chapître les deux méthodes de résolutions indiquées ci-dessus.

Dans le chapître 3, nous étudions le problème pour plusieurs origines et une destination. Nous proposons la méthode "Branch and Bound" pour résoudre le problème  $\mathcal{P}$  dans ce cas.

L'obiet du Chapitre 4 est une étude expérimentale faite dans le cas d'une origine et une destination.

Enfin, dans le Chapitre 5, nous étudions le problème  $\mathcal{P}$  dans le cas du corridor. A la fin de ce chapitre, nous présentons un exemple de régulation traité par PAYNE et THOMPSON dans [14] et nous montrons que les solutions données par les deux méthodes proposées dans [14] sont en réalité les mêmes.

## CHAPITRE 1

### MODELISATION DU PROBLEME $\mathcal{P}$

On considère un réseau routier  $R = (V, U)$  où  $V$  est l'ensemble des noeuds (ou sommets) et  $U$  est l'ensemble des tronçons (ou arcs) comportant plusieurs origines et plusieurs destinations. On appelle liaison, un couple formé d'une origine et d'une destination. On supposera que sur le réseau  $R$  existent  $K$  liaisons notées  $(k)$  ;  $k = 1, \dots, K$ . Un trafic d'intensité donnée  $q_k$  constante s'écoule entre l'origine  $O_k$  et la destination  $D_k$  de  $(k)$ . On notera  $x(e, k)$  la partie de ce trafic qui circule sur l'arc  $e$ .

#### 1-1 - Principe de Wardrop (1952)

Le principe de Wardrop s'énonce comme suit :

"Chaque usager possède une connaissance parfaite de la charge du trafic dans le réseau, et pour se rendre de son origine à sa destination, il choisit l'itinéraire de coût minimum".

Il en résulte qu'à l'équilibre, deux itinéraires quelconques d'une même liaison  $(k)$  utilisés par le trafic, doivent avoir des coûts égaux et ne dépassent pas les coûts des itinéraires non utilisés de la même liaison, car sinon le principe ne serait pas vérifié.

Ainsi le principe de Wardrop peut s'énoncer de la manière suivante :

"Pour toute liaison  $(k)$ , les coûts des itinéraires (de  $O_k$  à  $D_k$ ) utilisés par le trafic sont tous égaux et ne dépassent pas les coûts des itinéraires non utilisés".

C'est plutôt, sous cette forme que le principe de Wardrop est connu sous le nom "principe d'égalité de temps de parcours" (the principle of equal travel time) et qu'on utilisera dans tout le reste de ce travail.

### 1-2 - Temps de parcours

Nous supposerons dans toute cette étude que les coûts ressentis se réduisent au temps réel de parcours. Sur un arc quelconque non saturé ce temps de parcours est constant et ne dépend pas de la charge de cet arc. Autrement dit, si un arc  $e$  est non saturé, alors le temps de parcours sur cet arc est égal à son temps à vide qu'on notera  $t(e)$ . Mais si l'arc  $e$  est saturé, alors dans ce cas une congestion peut se créer sur l'arc et les usagers peuvent passer sur cet arc un temps d'encombrement supplémentaire qu'on notera  $b(e)$ .

Soit  $\tau(e)$  le temps réel de parcours sur l'arc  $e$ .  
Alors on a

$$\tau(e) = t(e) + b(e) \quad (1)$$

La variation de  $\tau(e)$  en fonction du trafic est donnée ci-dessous par la figure (1)

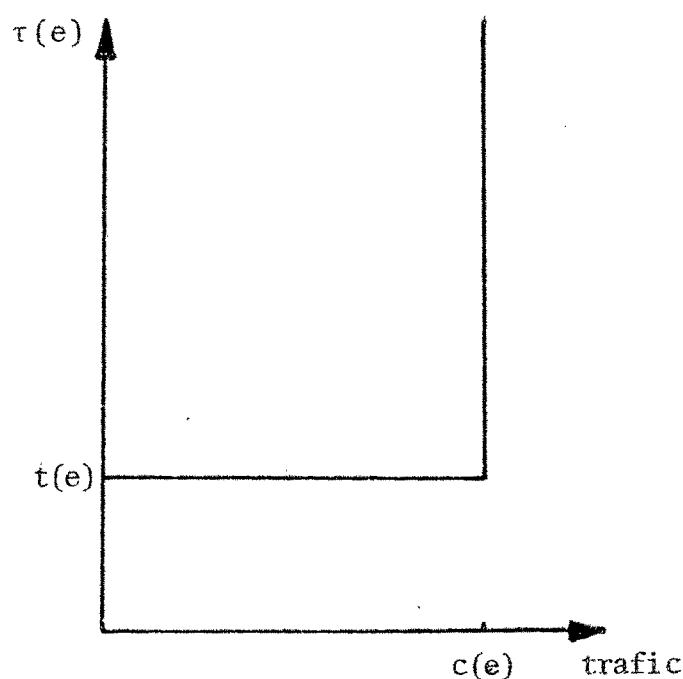


Fig. 1

Le coût total passé par les usagers dans le réseau est donc :

$$T = \sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} (t(e) + b(e)) x(e, k) \quad (2)$$

Cette hypothèse, bien que très simplificatrice, nous paraît conserver l'essentiel du phénomène que nous voulons étudier. Il est bien connu qu'un léger accroissement du trafic peut créer des congestions sur le réseau et faire ressentir aux usagers une augmentation importante de leurs temps de parcours. Le problème étudié est de chercher comment il faut déplacer ces congestions pour que le temps total passé par les usagers soit minimum.

### 1-3 - Exemple d'affectation de Wardrop

On considère le cas d'un réseau avec une seule origine-destination et deux itinéraires parallèles et distincts de coût à vide 5 et 10 et de même capacité égale à 50 (Fig. (2)). L'intensité du trafic est constante et égale à 100.

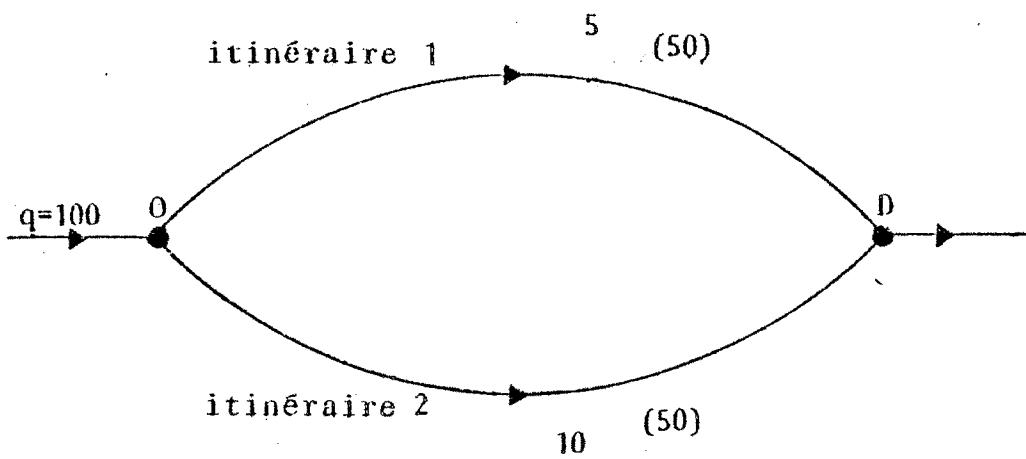


Fig.2

A l'équilibre de Wardrop, le trafic se trouve réparti entre les deux itinéraires qui auront un coût égal à 10. En effet, les usagers commencent par emprunter l'itinéraire 1 qui est de coût "à vide" minimum, mais vu la restriction de la capacité, 50 usagers sont obligés d'emprunter l'itinéraire 2. Or dans la pratique, si il n'existe pas un système autoritaire d'affectation en 0, ces usagers ne changent d'itinéraire que lorsque le coût sur l'itinéraire 1 devient égal à 10 (i.e. égal au coût de l'itinéraire 2).

Ceci peut s'interpréter de la manière suivante :

Une file d'attente se forme sur l'itinéraire 1 et elle croît jusqu'à atteindre une longueur telle que le temps nécessaire pour la traverser soit égal à 5 (différence des coûts entre les deux itinéraires) qui est le coût d'encombrement que doit passer les usagers sur cet itinéraire.

Le temps total passé par les usagers dans le réseau est donc :

$$\tau = 100 \times 10 = 1000$$

L'affectation de coût minimum dans ce cas est la même que celle de Wardrop (50 usagers empruntent l'itinéraire 1 et 50 usagers empruntent l'itinéraire 2), mais dans ce cas, vu que les usagers sont obligés de s'affecter d'une façon autoritaire, la circulation sur l'itinéraire 1 (et l'itinéraire 2) demeure fluide et le temps de parcours sur cet itinéraire reste égal à 5.

Le temps total passé par les usagers dans cette affectation est

$$T = 50 \times 10 + 50 \times 5 = 750$$

#### 1-4 - Modèle de Wardrop

A l'équilibre de Wardrop, la répartition du trafic doit, d'une part définir un flot dans le réseau et vérifie d'autre part le principe d'égalité de temps de parcours donné ci-dessus.

On désigne par  $\Pi(i, k) - \Pi(O_k, k)$  le temps nécessaire à un usager pour se rendre de l'origine  $O_k$  de la liaison (k) au noeud i.

Donc à l'état d'équilibre, le coût d'un itinéraire utilisé par le trafic dans une liaison k est égal à

$$\Pi(D_k, k) - \Pi(O_k, k)$$

et le temps total passé dans le réseau peut s'écrire aussi

$$\tau = \sum_{k=1, \dots, K} (\Pi(D_k, k) - \Pi(O_k, k)) q_k$$

On notera  $c(e)$  la capacité de l'arc e,  $I(e)$  (resp.  $T(e)$ ) son extrémité initiale (resp. terminale).

Lemme : L'équilibre de Wardrop est défini par l'ensemble des contraintes W suivant :

$$W \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e/i=T(e)} x(e,k) - \sum_{e/i=I(e)} x(e,k) = \begin{cases} -q_k & \text{si } i = 0_k \\ 0 & \text{si } i \neq 0_k, D_k \\ q_k & \text{si } i = D_k \end{cases} \quad \forall i \in V \quad (4) \\ \sum_{k=1}^K x(e,k) \leq c(e) \quad \forall e \in U \quad (5) \\ \Pi(j,k) - \Pi(i,k) \leq t(e) + b(e) \quad \forall e = (i,j) \quad (6) \\ \forall k = 1, \dots, K \\ \sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} (t(e) + b(e)) x(e,k) = \sum_{k=1, \dots, K} (\Pi(D_k, k) - \Pi(0_k, k)) q_k \quad (7) \\ x(e,k) \geq 0 \quad \forall e \in U \\ b(e) \geq 0 \quad \forall i \in V \\ \Pi(i,k) \leq 0 \quad \forall k = 1, \dots, \end{array} \right.$$

avec la condition supplémentaire

$$\sum_{k=1, \dots, K} x(e,k) < c(e) \Rightarrow b(e) = 0 \quad (8)$$

#### Démonstration :

- Les contraintes (4) et (5) imposent la conservation des flots dans le réseau.
- A l'équilibre les contraintes (6) sont bien vérifiées, car s'il existe un arc  $e = (i,j)$ , tel que  $\Pi(j,k) > \Pi(i,k) + t(e) + b(e)$ , alors le chemin de  $0_k$  à  $j$  formé par le chemin de  $0_k$  à  $i$  de coût  $\Pi(i,k)$  et l'arc  $e$  aura un coût strictement inférieur à  $\Pi(j,k)$ , ce qui contredit le principe de Wardrop.

- L'équation (7) est vérifiée à partir de (2) et (3).
- La condition (8) vient du fait qu'à l'équilibre, seuls les arcs saturés peuvent supporter des temps d'encombrement.

Pour démontrer le lemme, il reste à montrer que pour une solution  $(X, \Pi, b)$  de  $W$ ,  $X = (x(e, k))$ ,  $\Pi = (\Pi(i, k))$  et  $b = (b(e))$ , on a :

$$x(e, k) > 0 \Rightarrow \Pi(j, k) - \Pi(i, k) = t(e) + b(e) \text{ pour } e = (i, j) \quad (1)$$

Car alors, pour deux itinéraires quelconques  $\ell_1$  et  $\ell_2$  utilisés par le trafic entre l'origine  $O_k$  et la destination  $D_k$ , on aura

$$\Pi(D_k, k) - \Pi(O_k, k) = \sum_{e \in \ell_1} b(e) + t(e) = \sum_{e' \in \ell_2} b(e') + t(e')$$

donc  $\ell_1$  et  $\ell_2$  sont de coûts égaux et d'après les contraintes (6), les coûts ne dépassent pas les coûts des itinéraires non utilisés puisque

$$\Pi(D_k, k) - \Pi(O_k, k) \leq \sum_{e \in \ell} b(e) + t(e) \quad \text{pour tout itinéraire } \ell \text{ de } O_k \text{ à } D_k$$

Par conséquent le principe de Wardrop est vérifié.

A partir des contraintes (6) on peut écrire :

$$\sum_{\substack{e \in \ell \\ e = (i, j)}} (\Pi(j, k) - \Pi(i, k)) x(e, k) \leq \sum_{\substack{e \in \ell \\ x(e, k) > 0}} (t(e) + b(e)) x(e, k)$$

donc

$$\sum_{k=1}^K (\Pi(D_k, k) - \Pi(O_k, k)) q_k \leq \sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} (t(e) + b(e)) x(e, k)$$

Cette dernière inéquation est vérifiée à égalité dans (7). La condition (9) est donc bien satisfaite.

1-5 - Interprétation de la solution Primale-Duale du problème de l'affectation de coût minimum

L'affectation de coût minimum est donnée par la solution du programme (P) suivant :

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e/i=T(e)} x(e,k) - \sum_{e/i=I(e)} x(e,k) = \begin{cases} -q_k & \text{si } i = 0_k \\ 0 & \text{si } i \neq 0_k, D_k \\ q_k & \text{si } i = D_k \end{cases} \quad \forall i \in V \\ \sum_{k=1}^K x(e,k) \leq C(e) \quad \forall e \in U \\ x(e,k) \geq 0 \quad \forall e \in U, \forall k = 1, \dots, K \\ \text{Min} \sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} t(e) x(e,k) \end{array} \right.$$

En associant aux premières contraintes de (P) les variables duales  $\pi(i,k)$  et aux deuxièmes les variables duales  $b(e)$ , le dual de (P) s'écrit

$$(D) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(j,k) - \pi(i,k) \leq t(e) + b(e) \\ b(e) \leq 0 \quad \forall e \in U \\ \pi(i,k) \geq 0 \quad \forall i \in V, \forall k = 1, \dots, K \\ \text{Max} \sum_{k=1}^K (\pi(D_k, k) - \pi(0_k, k)) q_k - \sum_{e \in U} b(e) c(e) \end{array} \right.$$

D'après la condition (8), l'équation (7) du système W peut s'écrire

$$\sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} t(e) x(e,k) + \sum_{e \in U} b(e) c(e) = \sum_{k=1, \dots, K} (\pi(D_k, k) - \pi(0_k, k)) q_k \quad (9)$$

Ce qui représente l'égalité des fonctions objectives de (P) et (D)

Ainsi le modèle n'est rien d'autre que l'ensemble des contraintes de (P) et de son dual (D) vérifiés avec égalités des fonctions objections.

Théorème : Un vecteur  $(x, \Pi, b)$  est solution de W si et seulement si, il est une solution primale-duale optimale de (P) et (D)..

Donc on peut interpréter toute solution de Wardrop comme une solution primale-duale optimale du problème de l'affectation de coût minimum et réciproquement.

Le théorème précédent montre que les trafics donnés par l'affectation de coût minimum (optimum collectif) sont les mêmes que les trafics que supporte le réseau quand les usagers s'affectent suivant le principe de Wardrop (optimum individuel).

Bien que les deux affectations soient les mêmes, une différence subsiste entre elles : le coût total passé par les usagers dans le réseau. Dans le premier cas, chaque usager est supposé être affecté autoritairement, donc la circulation sur le réseau demeure fluide et les usagers dans ce cas n'auront pas à supporter de temps d'encombrement. Le coût total est donc bien :

$$T = \sum_{e \in U} \sum_{k=1, \dots, K} t(e) x(e, k)$$

#### 1-6 - Régulation selon Wardrop

Il est bien connu par les ingénieurs de trafic que l'abaissement des capacités de certaines voies de circulation peut déplacer les congestions sur ces voies et améliorer l'écoulement du trafic dans le réseau et par conséquent diminuer le temps total de parcours des usagers.

Notre étude a pour objectif de donner un modèle de régulation du trafic par restriction de capacité en supposant que le trafic s'affecte toujours dans le réseau selon le principe de Wardrop.

Définition :

On appellera régulation selon Wardrop, un abaissement des capacités réelles de certains arcs du réseau afin de minimiser le temps total de parcours  $\tau$  dans le réseau sachant que les usagers s'affectent sur le réseau modifié selon le principe de Wardrop.

Remarque 1

D'après le théorème 1, les quantités  $x(e, k)$  dans l'expression de  $\tau$  ne sont donc rien d'autres que les solutions du problème de l'affectation de coût minimum sur le réseau modifié.

1-7 - Formulation mathématique du problème  $\mathcal{P}$

On sait, d'après le lemme 1, que pour un système de capacité  $C = (C(e), e \in U)$  donné, seuls les arcs saturés, dans l'affectation selon Wardrop, sont susceptibles de supporter des temps d'encombrement (qu'on appelle pénalités). Or d'après la définition précédente, vu la possibilité de restreindre les capacités du réseau, pour déterminer une régulation selon Wardrop alors on peut considérer que la capacité d'un arc  $e$  du réseau est variable entre 0 et  $C(e)$  et par conséquent, on peut supposer que pour une affectation quelconque du trafic, les capacités des arcs du réseau sont égales aux trafics donnés par cette affectation. Ainsi tous les arcs peuvent être saturés et chaque arc est susceptible de supporter une pénalité.

Dans ce cas, on peut donc omettre la condition (8) du lemme 1, et une solution de Wardrop n'est rien d'autre qu'une solution du système W.

D'où le théorème suivant :

Théorème 2 : Le problème  $\mathcal{P}$  est équivalent au problème (PD) suivant :

$$(PD) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x, \Pi, b) \in W \\ \text{tq } \tau \text{ est minimum} \end{array} \right.$$

Le problème (PD) est un programme qui n'est pas, en général, convexe ; en effet, l'équation (7) du système W est une fonction quadratique non convexe. Elle est linéaire en b (quand X est fixe) et linéaire en X (quand b est fixe). Ceci montre la difficulté du problème  $\mathcal{P}$  qu'on ne peut résoudre que par des méthodes adaptées (méthode Branch and Bound, méthodes des Coupes). Celles-ci seront présentées au Chapitre 2.

#### Remarque 2

Une hypothèse, couramment faite dans la pratique, est de supposer que les régulations ne modifient pas les affectations.

Sous cette hypothèse, trouver la régulation optimale revient dans le modèle proposé à

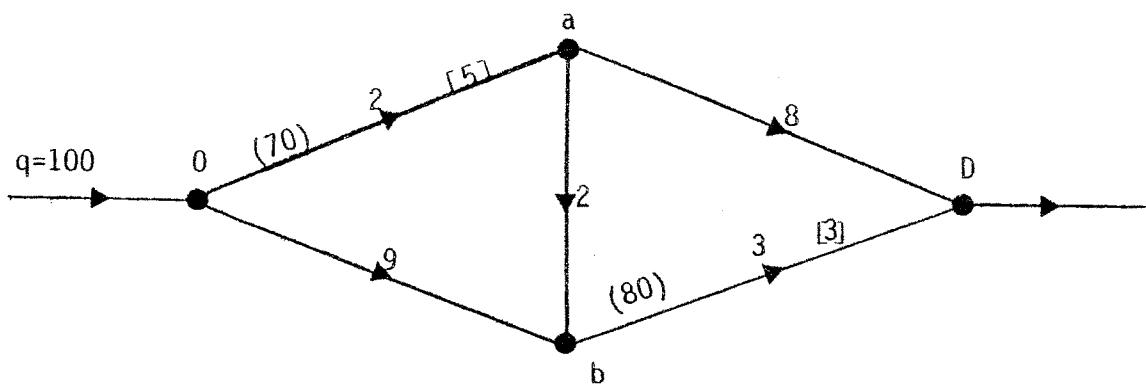
- Trouver le trafic, solution optimale de (P)
- Résoudre le programme linéaire en  $(\Pi, b)$  obtenu en fixant X dans le programme (PD).

#### 1-8 - Deux exemples de régulation

Comme nous l'avons déjà signalé, le problème de régulation (selon Wardrop) se pose même dans le cas d'une seule origine-destination et donne lieu à des paradoxes illustrés par les exemples suivants :

##### - Exemple 1

On peut avoir intérêt à réguler sans que l'affectation sur le réseau change. En effet, considérons le réseau r suivant (Fig. 3) comportant une origine O et une destination D.



[.] temps d'encombrement  
(.) capacité

Fig. 3

Les arcs sont munis des coûts constants  $t(0,a) = 2$ ,  $t(0,b) = 9$ ,  $t(a,D) = 8$ ,  $t(b,D) = 3$ . Les capacités des arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$  sont respectivement 70 et 80. Les autres capacités sont supposées infinies. Le débit de ce réseau est constant et égal à 100.

Ce réseau comporte trois itinéraires.:

- $(0,a,D)$  (1)
- $(0,a,b,D)$  (2)
- $(0,b,D)$  (3)

En l'absence de toute régulation, le trafic s'auto-répartit en respectant le principe de Wardrop (ce qui correspond à l'affectation de coût minimum) comme suit :

30	empruntent	l'itinéraire	(3)
50	"	"	(2)
20	"	"	(1)

Etant donnée la contrainte de capacité sur l'arc  $(0,a)$ , 30 usagers sont obligés d'emprunter l'itinéraire (3) (qui est de coût maximum). La réserve de capacité sur l'itinéraire le plus rapide (2) (de coût minimum) ne peut absorber que 50 usagers, 20 usagers se trouvent donc obligés de dévier vers l'itinéraire (1) qui est pour eux l'itinéraire de coût minimum. Cette affectation conduit à la saturation des arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$ , dégrade la qualité de circulation sur les itinéraires qui les utilisent, et fait ressentir un coût d'encombrement supplémentaire.

On peut donc considérer que le temps réel de parcours sur l'arc  $(0,a)$  (resp.  $(b,D)$ ) se compose :

- d'un temps de parcours à vide  $t(0,a)$  (resp.  $t(b,D)$ ).
- d'un temps d'encombrement  $b(0,a)$  (resp.  $b(b,D)$ ).

Les temps d'encombrement de ces arcs sont déterminés de telle manière que le principe d'égalité des temps de parcours sur les itinéraires utilisés soit vérifié. (principe de Wardrop) (i.e. les itinéraires utilisés ont le même coût de parcours, les itinéraires non utilisés ont un coût supérieur).

Il vient donc :

$$\begin{aligned} b(0,a) &= 5 \\ b(b,D) &= 3 \end{aligned}$$

Deux files d'attente se forment donc sur les tronçons  $(0,a)$  et  $(b,D)$ , ce qui oblige les usagers qui utilisent le tronçon  $(0,a)$  (resp.  $b,D)$  de passer un temps supplémentaire égal à 5 (resp. à 3) sur celui-ci. Le temps de parcours réel est donc 15 sur chaque itinéraire et le temps total (temps de parcours à vide plus temps d'encombrement) perdu par tous les usagers dans le réseau sera :

$$T = \sum_e (t(e)+b(e))x(e) = 15 \times 100 = 1500.$$

Le temps passé par les usagers dans l'affectation de coût minimum est

$$T = \sum_e t(e)x(e) = 910$$

Rappelons que ce coût est la valeur minimum du programme linéaire (P) et correspond au coût ressenti par une affectation autoritaire des usagers.

Si on réduit la capacité de l'arc  $(a,b)$  à 50, les arcs  $(0,a)$ ,  $(a,b)$ ,  $(b,D)$  seront munis respectivement des capacités 70, 50, 80 ; les autres capacités restant infinies (Fig. 4.).

L'affectation du trafic respectant le principe de Wardrop (qui correspond à l'affectation de coût minimum) dans le réseau muni du nouveau système de capacité ne change pas.

On a encore :

30 empruntent l'itinéraire (3)

50 " " (2)

20 " " (1)

Les tronçons  $(0,a)$ ,  $(a,b)$ ,  $(b,D)$  se trouvent dans ce cas à la saturation. Les itinéraires (1), (2), (3) (qui utilisent les arcs) sont donc susceptibles de supporter un coût d'encombrement supplémentaire. Les temps d'encombrement sur les tronçons saturés sont déterminés de telle manière que le principe de Wardrop soit vérifié et le temps total  $\tau$  passé dans le réseau dans ce cas soit minimum.

Il en résulte :

$$b(0,a) = 2$$

$$b(a,b) = 3$$

$$b(b,D) = 0$$

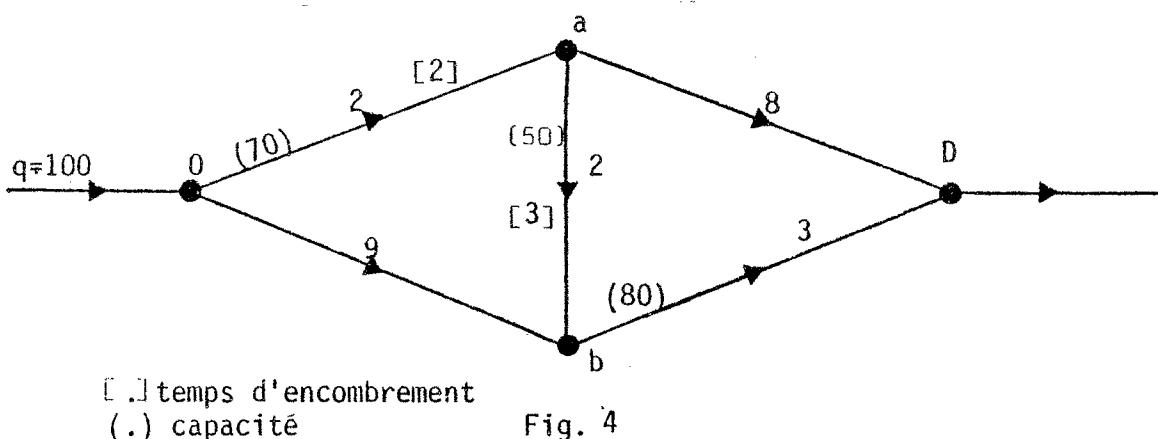


Fig. 4

Quand on limite le débit d'entrée du trafic sur l'arc  $(a,b)$ , en abaissant sa capacité à 50, on ne change pas l'affectation du trafic, mais on fait déplacer sur l'arc  $(a,b)$  la file d'attente qui s'est formée au début sur l'arc  $(b,D)$ . Dans ce cas on ne crée aucune congestion sur l'arc  $(b,D)$ . La circulation sur l'itinéraire  $(0,b,D)$  demeure fluide, par contre, deux files d'attente se forment sur les tronçons  $(0,a)$  et  $(a,b)$ . Les usagers qui utilisent le tronçon  $(0,a)$  (resp.  $(a,b)$ ) perdent un temps supplémentaire égal à 2 (resp. à 3).

Le temps de parcours réel sera donc 12 sur chaque itinéraire et le temps total réel sera  $\tau = 12 \times 100 = 1200$ . Le temps total dans l'affectation de coût minimum reste  $T = 910$ . Puisque cette affectation n'a pas changé. Un gain de 300 unités de temps est donc réalisé après la régulation.

Puisque 30 usagers au moins sont obligés d'emprunter l'itinéraire (0,b,D) de coût égal à 12, dans la solution optimale de ce problème de régulation le temps réel de parcours (selon Wardrop) sur chaque itinéraire utilisé sera supérieur ou égal à 12.

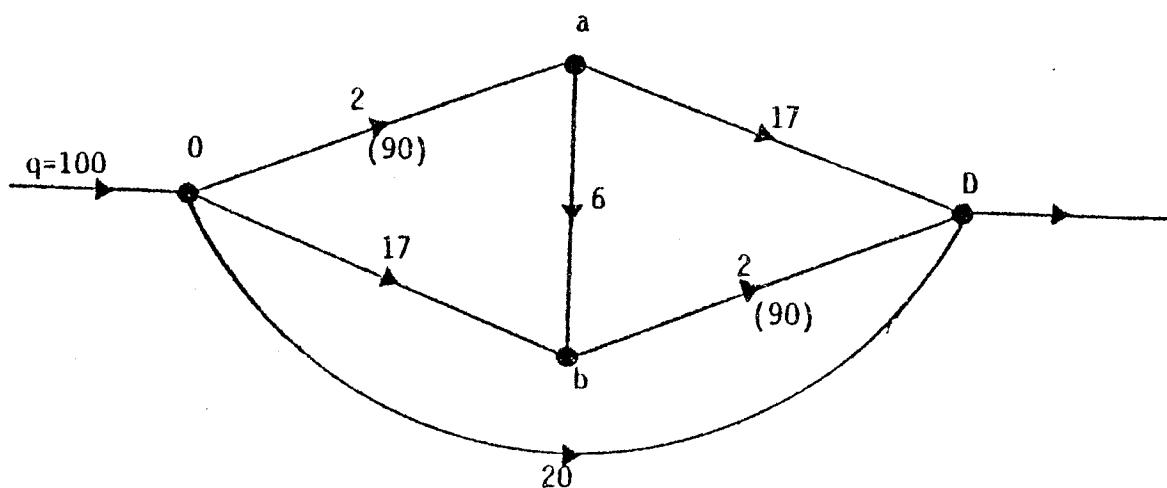
Par conséquent la régulation effectuée est optimale.

Dans l'exemple 1 l'affectation du trafic n'a pas changé après la régulation. Cette propriété n'est pas toujours vraie comme le montre l'exemple suivant.

#### - Exemple 2

Cet exemple correspond au cas (fictif ?) où la construction d'une voie rapide entre deux sommets a et b dégrade la qualité globale du trafic au lieu de l'améliorer, comme le "bon sens" le laisse croire. La régulation imposerait alors de fermer la voie rapide à la circulation des usagers.

On considère le réseau R suivant comportant une origine 0 et une destination D. (Fig. 5).



(.) capacité

Fig. 5

Les arcs de ce réseau sont munis des coûts  $t(0,a) = 2$ ,  $t(0,b) = 17$ ,  $t(a,b) = 6$ ,  $t(b,D) = 2$ ,  $t(a,D) = 17$ ,  $t(0,D) = 20$ . Les capacités des arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$  sont égales à 90, les autres capacités sont supposées infinies. Ce réseau comporte quatre itinéraires :

- (0,a,D) (1)
- (0,b,D) (2)
- (0,a,b,D) (3)
- (0,D) (4)

En l'absence de régulation, la distribution des usagers selon le principe de Wardrop (qui correspond à l'affection de coût minimum) se fait comme suit :

90 empruntent l'itinéraire (3)  
10 " " (4)

Cette affectation s'interprète de la manière suivante : les usagers commencent par emprunter l'itinéraire le plus rapide (3) (de coût minimum), mais quand ce dernier arrive à la saturation, les deux itinéraires (1) et (2) se trouvent ainsi saturés. (Puisque les arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$  le sont). Donc l'accès à ces itinéraires de coût juste supérieur n'est plus possible. Les 10 usagers qui restent sont ainsi obligés de dévier vers l'itinéraire (4) qui est de coût maximum.

La saturation des arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$  charge les itinéraires qui utilisent ces arcs d'un coût d'encombrement supplémentaire.

Pour vérifier dans ce cas le principe de Wardrop, on doit munir chacun des arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$  d'un coût supplémentaire.

Ceci s'interprète de la même manière que précédemment :

Deux files d'attente se forment sur les arcs  $(0,a)$  et  $(b,D)$ , augmentant ainsi leur coût d'encombrement.

Par conséquent, les usagers qui utilisent l'itinéraire (3) sont obligés de passer sur celui-ci un temps supplémentaire égal à 10.

Le temps réel de parcours est donc 20 sur chacun des itinéraires utilisés (1) et (4), et par suite le temps total passé par l'ensemble des usagers est  $\tau = 20 \times 100 = 2000$  (le temps total passé dans l'affectation de coût minimum est  $T = 1100$ ).

Une régulation peut ici être réalisée en supprimant le tronçons (a,b) (i.e. en abaissant la capacité de (a,b) à 0) de façon à obliger les usagers de s'auto-répartir sur les itinéraires (1) et (2). En effet, en abaissant la capacité de (a,b) à 0, on supprime le tronçon (a,b) du réseau. Dans le réseau modifié les itinéraires (1) et (2) sont chacun muni du coût minimum 19.

La réserve de capacité des itinéraires (1) et (2) qui peut absorber toute la demande, permet à la circulation les empruntant de demeurer fluide : aucune congestion ne se forme sur les tronçons. Le coût de parcours réel est donc 19 sur chaque itinéraire et le temps total perdu par l'ensemble des usagers dans le réseau est 1900. (Il est égal au temps total passé dans l'affectation de coût minimum dans le réseau modifié). Cette affectation est optimale "au sens de Wardrop". Un gain de 100 unité de temps est donc réalisé après régulation.



## CHAPITRE 2

### ETUDE DU PROBLEME S DANS LE CAS D'UNE SEULE ORIGINE-DESTINATION

#### 2.1 - Formulation théorique

D'après 1.7, le problème S se formule comme suit :

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \sum_{e/i=T(e)} x(e) - \sum_{e/i=I(e)} x(e) = \end{array} \right\} \begin{array}{ll} -q & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, D \\ q & \text{si } i = D \end{array} \\ \forall i \in V \\ x(e) \leq c(e) \\ \forall e \in U \\ \pi(j) - \pi(i) \leq t(e) + b(e) & e = (i, j) \\ \sum (t(e) + b(e))x(e) = (\pi(D) - \pi(0))q \\ \min(\pi(D) - \pi(0))q \\ \left. \begin{array}{l} x(e) \geq 0 \\ b(e) \geq 0 \\ \pi(i) \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{ll} \forall e \in U \\ \forall i \in V \end{array} \end{array} \right\} \text{(PD)}$$

où  $q$  est le débit du trafic dans le réseau  $R = (V, U)$  comportant une origine 0 et une destination D.  $x(e)$  est la partie de ce trafic empruntant l'arc e.

Sur l'exemple 1, on peut remarquer que les coûts des arcs du plus long chemin (i.e. le chemin de coût maximum) utilisé n'ont pas augmenté après la régulation. Cette propriété reste toujours vraie comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1

Pour une affectation donnée du trafic, il existe un système  $b = (b(e), e \in U)$  qui vérifie le principe de Wardrop tel que  $b(e) = 0$  pour tout arc  $e$  appartenant à un itinéraire utilisé de 0 à D de coût maximum.

Ce théorème montre que pour une affectation donnée fixe du trafic, on peut toujours trouver un système de régulation de telle manière qu'aucune file d'attente ne se forme sur les arcs d'un plus long chemin utilisé par le trafic dans cette affectation.

Démonstration :

Soit  $\ell_0$  un itinéraire utilisé de 0 à D de coût maximum.

A tout sommet  $i$  on associe un potentiel  $\pi(i)$  égal à la longueur du plus long chemin utilisé de 0 à  $i$ .

Si un tel chemin n'existe pas, on pose  $\pi(i) = \infty$

Pour tout arc  $e = (i, j)$  on pose :

$$b(e) = \pi(j) - \pi(i) - t(e) \text{ si } e \text{ est utilisé}$$

$$e = (i, j)$$

$= \infty$  sinon

Le système  $b = (b(e), e \in U)$  vérifie le principe de Wardrop.

On a :

$$b(e) = 0 \quad \forall e \in \ell_0$$

car'il existe  $e_0 = (i_0, j_0) \in \ell_0$  tel que  $b(e_0) > 0$  on aura  $\pi(j_0) > \pi(i_0) + t(e_0)$  ce qui contredit le fait que  $\ell_0$  est de coût maximum.

C.Q.F.D.

Ainsi, pour une affectation donnée, le temps total réel passé dans le système selon le principe de Wardrop est :

$$\boxed{\tau = T q}$$

où  $T$  = longueur du plus long chemin utilisé par cette affectation.

$q$  = débit du trafic.

Par conséquent, le problème  $\mathcal{P}$  de régulation (qui est de minimiser  $\tau$ ) peut se ramener à minimiser la longueur  $T$  du plus long chemin utilisé, ce qui s'énonce comme suit :

Corollaire :

Dans le cas d'une origine et une destination le problème  $\mathcal{P}$  se ramène à la détermination d'un réseau partiel qui écoule le trafic et dont le plus long chemin est le plus court possible.

Remarque 1

Le théorème 2 reste encore vrai dans le cas de plusieurs origines et une destination.

## 2.2 - Deux méthodes de résolution

Dans ce qui suit on propose deux méthodes de résolution du problème. Dans la première on formule le problème  $\mathcal{P}$  sous forme d'un programme mathématique dont la fonction objectif est concave, puis on le résoud par la méthode des coupes proposée par Zwart [10]. La deuxième méthode est une procédure de séparation et évaluation progressive "Branch and Bound" basée sur le Corollaire du théorème 2.

### 2.2.1. - Méthode des coupes

Le programme (PD) est équivalent au programme (PDN) suivant :

$$(PDN) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{e/i=T(e)} x(e) - \sum_{e/I=I(e)} x(e) = \begin{cases} -q & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0, D \\ q & \text{si } i = D \end{cases} \\ 0 \leq x(e) \leq c(e) \\ \pi(j) - \pi(i) \leq t(e) + b(e) \quad \forall e = (i, j) \\ b(e) \geq 0 \quad \forall e \in U \\ \pi(i) \geq 0 \quad \forall i \in V \\ W = \min_e \sum_e (t(e) + b(e))x(e) + N(\sum_e (t(e) + b(e))x(e) - (\pi(D) - \pi(0))q) \end{array} \right.$$

où  $N$  est un réel "suffisamment" grand.

A l'optimum de (PDN) on aura

$$\sum_e (t(e) + b(e))x(e) = (\pi(D) - \pi(0))q$$

Lorsqu'on fixe  $(\pi, b) \in E$ ,  $\pi = (\pi(i), i \in V)$ ,  $b = (b(e), e \in U)$ , le programme (PDN) se ramène à un programme d'affectation de coût minimum dont la fonction objectif atteint un minimum  $W$ , fonction de  $\pi$  et  $b$ . Notons  $W(\pi, b)$  cette nouvelle fonction.

#### Lemme 1

$W(\pi, b)$  est concave  
(simple à vérifier)

Le programme (PDN) peut s'écrire :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min W(\pi, b) \\ tq(\pi, b) \in E \end{array} \right.$$

Remarque 2

Du fait que les vecteurs  $\pi$  et  $b$  peuvent être majorés, le polyèdre  $E$  est borné.

On sait qu'il existe une solution optimale globale de (1,1) qui est un sommet extrême de  $E$ .

La méthode des coupes consiste à aller d'un optimum local à un autre en améliorant à chaque pas la valeur de la fonction objectif.

Supposons avoir déterminé à l'itération  $j$  un optimum local  $(\pi_j, b_j)$ , on construit alors une suite croissante (au sens de l'inclusion) de compacts  $E_{ji}$  emboîtés  $i=1, \dots$ , tels que :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min W(\pi, b) = W(\pi_j, b_j) \\ (\pi, b) \in E_{ji} \end{array} \right.$$

S'il existe un indice  $i$  tel que  $E \subset E_{ji}$  alors  $(\pi_j, b_j)$  est une solution optimale globale de (1,1). Sinon, il existe  $(\bar{\pi}, \bar{b}) \in E$  et  $(\bar{\pi}, \bar{b}) \notin E_{ji} \forall i$ .

Deux cas sont alors possibles :

- a) soit  $W(\bar{\pi}, \bar{b}) \geq W(\pi_j, b_j)$ , on construit alors un nouveau compact  $E_{ji+1}$  satisfaisant (1,2) et contenant  $(\bar{\pi}, \bar{b})$ ,  $E_{ji+1}$  sera par exemple l'enveloppe convexe de  $(\bar{\pi}, \bar{b})$  et  $E_{ji}$ .
- b) soit  $W(\bar{\pi}, \bar{b}) < W(\pi_j, b_j)$  et on détermine un nouvel optimum local  $(\pi_{j+1}, b_{j+1})$  sommet extrême de  $E$ , tel que  $W(\pi_{j+1}, b_{j+1}) < W(\pi_j, b_j)$ . On commence donc une nouvelle itération ( $j+1$ ).

Le nombre de points extrêmes du polyèdre est fini : on peut montrer de plus que  $V(\pi_j, b_j) \in E$ , à l'étape a), après un nombre fini  $n$  de pas, ou bien  $E \subset E_{jn}$  où bien il existe  $(\bar{\pi}, \bar{b}) \in E$  et  $(\bar{\pi}, \bar{b}) \in E_{jn}$  tel que  $W(\bar{\pi}, \bar{b}) < W(\pi_j, b_j)$ . La procédure est donc finie.

Remarque 3 : On a intérêt à choisir pour N la plus petite valeur possible assurant que l'équation :

$$\sum_e (t(e) + b(e)) x(e) = (\pi(D) + \pi(0))q$$

est vérifiée.

Remarque 4 : Cette méthode reste valable dans le cas de plusieurs origines et plusieurs destinations.

## 2.2.2 - Méthode de séparation et évaluation progressive

### 2.2.2.1 - Description générale

Les méthodes d'énumération partielle ("SEP" ou "Branch and Bound") sont couramment utilisées pour la résolution effective de la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire. Nous utilisons cette technique pour achever la résolution complète du problème  $\mathcal{P}$ , en nous appuyant sur le Corollaire du Théorème 1.

Par ce corollaire on se ramène à la construction d'un réseau partiel  $R^*$  réalisable (par lequel passe un flot réalisable) et dont le plus long chemin est le plus court possible. Soit  $T^*$  la longueur de ce chemin.

Donnons tout d'abord l'idée générale de l'algorithme en décrivant les deux premiers pas :

On commence par ordonner les arcs du réseau initial  $e_1, e_2, \dots, e_m$  par la relation  $i < j$  si et seulement si le plus court chemin entre 0 et D passant par  $e_i$  est inférieur ou égal au plus court chemin entre 0 et D passant par  $e_j$ . Soient  $T(e_i)$  et  $T(e_j)$  les longueurs respectives de ces chemins.

$$e_1, e_2, \dots, e_m$$

$$T(e_1) \leq T(e_2) \leq \dots \leq T(e_m)$$

Puis on introduit les arcs précédents, suivant leur indice croissant jusqu'à ce qu'on ait obtenu un premier réseau  $R_0$  réalisable.

Soit  $L_0 = (e_{o_1}, e_{o_2}, \dots, e_{o_k})$  le plus long chemin de ce réseau. On notera  $T_{PL_0}$  la longueur de ce chemin et  $T_{PC_0}$  la longueur du plus court chemin passant par le dernier arc introduit.

On a  $T_{PC_0} \leq T^* \leq T_{PL_0}$

Si  $T_{PC_0} = T_{PL_0}$  l'optimum est atteint,  $R^* = R_0$  et  $T^* = T_{PL_0}$ . Sinon  $L_0$  peut ne pas faire parti de  $R^*$  auquel cas il existe au moins un arc  $e_{o_i}$  de  $L_0$  ne figurant pas dans  $R^*$ , il faut entamer alors une séparation.

Cette séparation consiste à partitionner l'ensemble  $S_0$  des réseaux réalisables en  $k$  sous-ensembles  $S_{o_1}, S_{o_2}, \dots, S_{o_k}$ :

$S_{o_1}$  est l'ensemble des réseaux réalisables ne contenant pas l'arc  $e_{o_1}$

$S_{o_2}$  est l'ensemble des réseaux réalisables contenant l'arc  $e_{o_1}$  et ne contenant pas l'arc  $e_{o_2}$

$S_{o_3}$  est l'ensemble des réseaux réalisables contenant les arcs  $e_{o_1}$  et  $e_{o_2}$  et ne contenant pas l'arc  $e_{o_2}$

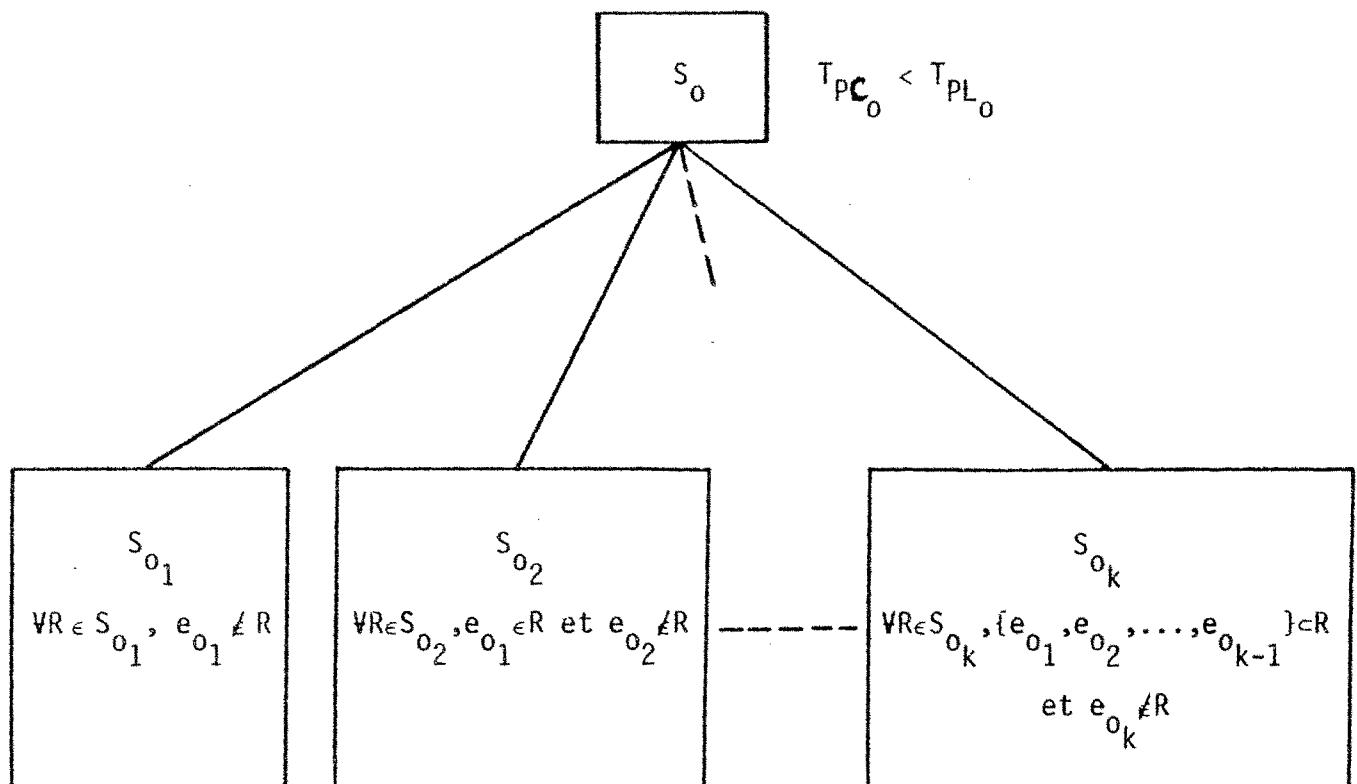
⋮

$S_{o_k}$  est l'ensemble des réseaux réalisables contenant les arcs  $e_{o_1}, e_{o_2}, \dots, e_{o_{k-1}}$  et ne contenant pas l'arc  $e_{o_k}$ .

Il est clair que les ensembles  $S_{o_j}$  sont disjoints deux à deux.

On appellera "arcs obligés" les arcs devant faire parti des réseaux réalisables et "arcs interdits" les arcs ne devant pas en faire parti.

Cette première itération peut être schématisée par l'arborescence ci-dessous :



où R est un réseau réalisable

Figure 6

Chaque sous-ensemble  $S_{o_j}$  (sommet pendant de l'arborescence) est donc caractérisé par un ensemble d'arcs obligés  $O_{o_j} = \{e_{o_1}, e_{o_2}, \dots, e_{o_{j-1}}\}$  auquel s'ajoutent des arcs dits de raccourci et un ensemble d'arcs interdits  $I_{o_j} = \{e_{o_j}\}$  auquel s'ajoutent des arcs dits fantômes.

Ces sous-ensembles étant déterminés, on construit à partir de chacun d'eux un réseau  $R_{o_j}$  réalisable de la même manière que  $R_o$ , c'est à dire, on considère les arcs du réseau initial non obligés et non interdits dans  $S_{o_j}$  et on les ordonne par une relation d'ordre analogue à celle du début de la procédure (voir justification de l'algorithme).

$R_{o_j}$  est alors construit comme  $R_o$ . On obtient ainsi les réseaux  $R_{o_1}, R_{o_2}, \dots, R_{o_k}$  affectés chacun de deux valeurs  $T_{PC_{o_j}}$  et  $T_{PL_{o_j}}$ , respectivement borne inférieure et borne supérieure de  $T^*$  dans l'ensemble des solutions  $S_{o_j}$ . ( $T_{PC_{o_j}}$  est la longueur du plus court chemin associé au dernier arc introduit au cours de la construction de  $R_{o_j}$ ,  $T_{PL_{o_j}}$  est la longueur du plus long chemin).

Soient

$$T_{PL}^2 = \inf_{j=1, \dots, k} \{T_{PL_{o_j}}, T_{PL_{o_j}}\}$$

$$T_{PC}^2 = \inf_{j=1, \dots, k} \{T_{PC_{o_j}}\}$$

Si  $T_{PC}^2 \geq T_{PL}^2$ , l'optimum est atteint et  $R^*$  est le réseau dont le plus long chemin est  $T_{PL}^2$ ,  $T^* = T_{PL}^2$ .

Sinon on entame une nouvelle séparation à partir du sommet  $S_{o_j}$  tel que

$$T_{PC_{o_j}} = T_{PC}^2.$$

Pour pouvoir donner l'algorithme dans toute sa généralité, nous avons besoin de quelques résultats et définitions préliminaires.

#### 2.2.2.2 - Résultats et définitions préliminaires

Proposition : Un réseau optimal  $R^*$  ne contient pas de circuits.

En effet supposons que  $R^*$  contienne un circuit  $C = (e_1, e_2, \dots, e_r)$  tel que  $x(e_i) > 0 \quad \forall i$ .

Soit  $e_j$  un arc du circuit tel que  $x(e_j) = \inf_{e_i \in C} x(e_i)$ .

Considérons le flot  $x'$  défini par :

$$x'(e_i) = x(e_i) \quad \text{si } e_i \notin C$$

$$x'(e_i) = x(e_i) + x(e_j) \quad \text{si } e_i \in C$$

$x'$  est bien un flot réalisable dans  $R^* - \{e_j\}$  et ce dernier est sans circuit.

Définition 1 : Un arc  $(a,b)$  non obligé (et non interdit) est dit "arc de raccourci" associé à un ensemble d'arc obligé  $O$ , s'il existe un chemin  $C$  entre  $a$  et  $b$  (Fig. 7) tel que :

$$\forall e \in C, e \in O$$

et

$$t(C) = \sum_{e \in C} t(e) \geq t(a,b)$$

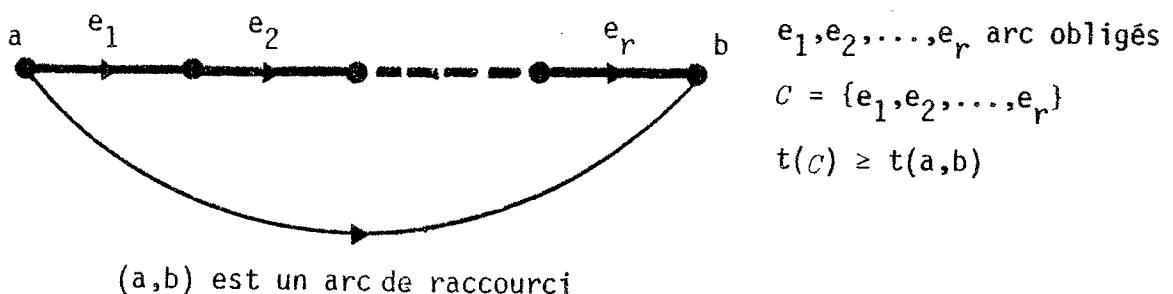


Figure 7

Définition 2 : Un arc non obligé est dit "arc fantôme" associé à un ensemble d'arcs obligé  $O$  s'il crée un circuit avec des arcs de  $O$  (Fig. 8).

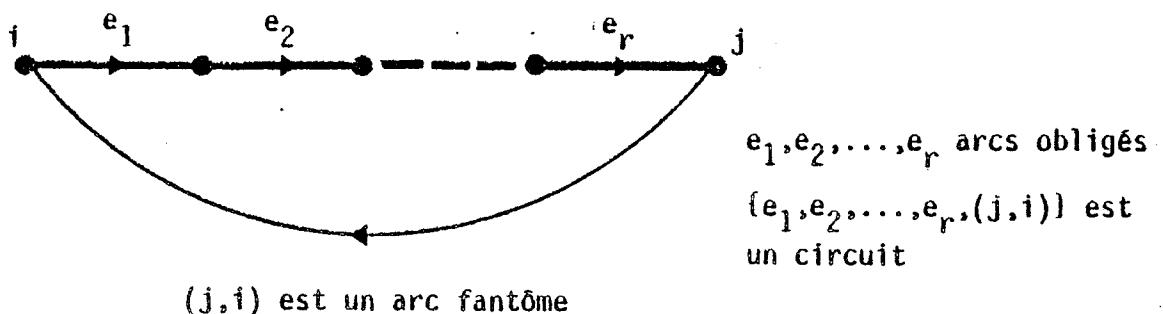


Figure 8

Notation : On notera  $R(\sigma)$  (resp.  $F(\sigma)$ ) l'ensemble des arcs de raccourci (resp. des arcs fantômes) associés à  $\sigma$ .

Lemme 2 : Les arcs de raccourci associés à un ensemble d'arcs obligés  $\sigma_i$  peuvent être considérés comme des arcs obligés.

Démonstration : Soit  $\sigma_i$  un ensemble d'arcs obligés tel que  $\sigma_i \in R^*$ . Soit  $c$  un chemin entre deux sommets  $a$  et  $b$  tel que

$$\begin{aligned} & \forall e \in c, e \in \sigma_i && (4) \\ & t(c) \geq t(a, b) \end{aligned}$$

D'après (4), un plus long chemin dans  $R^*$  peut toujours ne pas passer par l'arc  $(a, b)$ . Il peut emprunter à sa place (quand c'est nécessaire) le chemin  $c$ .

Un plus long chemin dans  $R^*$  est donc indépendant des arcs de raccourci, on ne risque donc pas d'augmenter sa longueur si on introduit tous les arcs de raccourci dans  $R^*$  (i.e. on les rend tous obligés). On a plutôt intérêt de le faire puisque on accélère de cette façon la détermination de  $R^*$ .

Par conséquent, on peut augmenter le coût de l'arc  $(a, b)$  à  $t(c)$  (i.e.  $t(a, b) := t(c)$ ) sans dégrader la solution optimale.

Lemme 3 : Les arcs fantômes associés à un ensemble d'arcs obligés  $O_i$  peuvent être considérés comme des arcs interdits.

Démonstration : Soit  $O_i$  un ensemble d'arcs obligés tel que  $O_i \subset R^*$ . On sait que  $R^*$  est un réseau sans circuit, donc un arc fantôme associé à  $O_i$  ne peut pas en faire parti (d'après la définition d'un arc fantôme). On peut donc le considérer comme interdit.

### 2-2-2-3 - Evaluation

Pour évaluer les arcs non obligés (et non interdits) sur chaque sommet  $S_j$ , on utilise la procédure suivante :

- Associer à tout arc de raccourci  $(a,b)$  ( $(a,b) \in R(O_i)$ ) un nouveau coût  $t(a,b) = t(C)$

où  $C$  est le plus long chemin d'arcs obligés qui lie les deux sommets  $a$  et  $b$ .

- Pour tout arc  $e$  ( $e \notin O_i$ ,  $e \notin I_i$ ), déterminer le plus court chemin de  $O$  à  $D$ , passant par  $e$ , dans le réseau modifié.

Soit  $T_i(e)$  la longueur de ce chemin  $T_i(e)$  est l'évaluation associée à l'arc  $e$ .

### 2.2.2.4 - Algorithme

#### (0) Initialisation

$S_0 = S_o$  l'ensemble des solutions réalisables (réseaux réalisables) caractérisées par l'ensemble d'arcs obligés  $O_0 = \emptyset$  et l'ensemble d'arcs interdits  $I_0 = \emptyset$ .

$S_0$  est un sommet pendant<sup>(\*)</sup> unique.

(1) Pour chaque sommet pendant  $S_j$  (défini par le couple  $(O_j, I_j)$  d'arcs obligés et d'arcs interdits) faire

(1.1) Si  $O_j$  contient un circuit poser

$$T_{PC_j} = +\infty, \quad T_{PL_j} = +\infty$$

(1.2) (1.2.1) Ordonner les arcs non obligés et non interdits

$\{e \in U / e \notin O_j \text{ et } e \notin I_j\}$   $e_1, e_2, \dots, e_n$  par la relation d'ordre  
 $j < k \iff T_j(e_j) \leq T_j(e_k)$

(1.2.2) Ajouter aux arcs obligés  $O_j$ , les arcs ordonnés à l'étape (1.2.1) suivant leur indice croissant jusqu'à ce qu'on obtienne un réseau  $R_j$  réalisable.

Soit  $e_d$  le dernier arc introduit dans la construction de  $R_j$ .

---

(\*) Un sommet est dit pendant s'il n'est pas encore séparé.

### (1.2.3) Déterminer les valeurs

$$T_{PC_i} = T_i(e_d)$$

$$T_{PL_i} = \begin{cases} \text{Longueur d'un plus long chemin } L_i \text{ dans } R_i \text{ si } R_i \\ \text{est sans circuit} \\ +\infty \quad \text{sinon} \end{cases}$$

(1.3) Si  $S_i$  inf sommet pendant  $T_{PC_i}$   $\geq$   $S_j$  inf quelconque  $T_{PL_j}$  STOP  
 (pendant et non pendant)

Sinon aller en (2).

(2) (2.1) Déterminer le sommet pendant  $S_i$  tel que

Soient  $L_{i_0}$  un plus long chemin dans  $R_{i_0}$  (si  $R_{i_0}$  contient un circuit  $C$ ,  $L_{i_0}$  sera le circuit  $C$  auquel on ajoute un chemin quelconque de  $O$  à  $C$  et un autre de  $C$  à  $D$ ) et  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$  les arcs non obligés de  $L_{i_0}$ .

Le sommet  $S_i$  étant défini par

*O* ensemble d'arcs obligés

$I_j$  ensemble d'arcs interdits

(2.2) Séparer  $S_{i_0}$  en  $k$  sommets pendents  $S_{i_0j}$ ,  $j = 1, \dots, k$  caractérisés par les couples  $(o_{i_0j}, I_{i_0j})$   $j = 1, \dots, k$  d'arc obligés et d'arcs interdits tels que

$$o_{i_0 j} = o_{i_0} \cup \{e_1, \dots, e_{j-1}\}$$

$$I_{i_0,j} = I_{i_0} \cup \{e_j\}$$

### (2.3) Déterminer

$R(\theta_{i_0 j}), F(\theta_{i_0 j})$  pour  $j = 1, \dots, k$

$$O_{i_0j} = O_{i_0j} \cup R(O_{i_0j})$$

$$I_{i_0j} = I_{i_0j} \cup F(o_{i_0j})$$

Chaque nouveau sommet pendant  $S_{i_0j}$  est défini par le couple  $(O_{i_0j}, I_{i_0j})$ .

Aller en (1).

#### 2.2.2.5 - Justification de l'algorithme

On rappelle qu'un sommet  $S_i$  défini par

$O_i$  = ensemble d'arcs obligés

$I_i$  = ensemble d'arcs interdits

correspond à l'ensemble des réseaux réalisables contenant l'ensemble  $O_i$  et ne contenant aucun arc de l'ensemble  $I_i$ .

$$S_i = \{R / O_i \subset R \text{ et } R \cap I_i = \emptyset\}$$

où  $R$  est un réseau réalisable.

A l'étape (1.1), si  $O_i$  contient un circuit alors  $O_i \notin R^*$  (car  $R^*$  est sans circuit) et d'après ce qui précède  $R^* \notin S_i$ .

On a intérêt donc dans ce cas de cesser de développer la branche contenant le sommet  $S_i$  (en posant  $T_{PC_i} = +\infty$ ,  $T_{PL_i} = +\infty$ ).

$S_i$  reste toujours un sommet pendant.

A l'étape (1.2), on détermine une borne inférieure  $T_{PC_i}$  et une borne supérieure  $T_{PL_i}$  de  $T^*$  quand on considère que  $R^*$  est un réseau de  $S_i$ .

En effet

Lemme 4 : Si  $R^* \in S_i$  alors  $T_{PC_i} \leq T^*$ .

Démonstration : Le sommet  $S_i$  est défini par le couple  $(O_i, I_i)$  d'arcs obligés et d'arcs interdits.

$R^* \in S_i$  entraîne  $O_i \subset R^*$ .

$T_{PC_i} = T_i(e_d)$  où  $e_d$  est le dernier arc introduit dans la construction de  $R_i$ .

Supposons que  $T^* < T_{PC_i}$ .

Donc  $\forall e \in R^* - O_i$ ,  $T_i(e) \leq T^*$

Alors  $\forall e \in R^* - O_i$ ,  $T_i(e) < T_{PC_i}$  (1)

Dans la construction du réseau réalisable  $R_j$ , on introduit les arcs un par un par ordre croissant des valeurs  $T_j(e)$ ; par conséquent, d'après (1), tous les arcs de  $R^* - e_j$  auraient été introduits dans cette construction avant l'arc  $e_d$  donc  $R^* \subset R_j - e_d$ .

$R^*$  est réalisable, mais  $R_j - e_d$  ne l'est pas (puisque  $e_d$  est le dernier arc introduit dans la construction de  $R_j$ , d'où la contradiction).

Remarque : Les bornes  $T_{PC_j}$  forment une suite croissante sur chaque branche de séparation.

L'algorithme se termine à l'étape (1,3).

Pour chaque itération on notera

$$T_{PC}^k = \inf_{S_j} T_{PC_j}$$

(pendant)

$$T_{PL}^k = \inf_{S_j} T_{PL_j}$$

(quelconque)

On notera que la suite  $T_{PC}^k$  (resp.  $T_{PL}^k$ ) est croissante (resp. décroissante).

Dans l'algorithme, on teste toujours l'optimalité à l'étape (1,3).

Si à une itération  $k$  donnée on a

$$T_{PC}^k \geq T_{PL}^k$$

alors on est à l'optimum.

En effet, soit  $S_{j*}$  le sommet tel que  $T_{PL}^k = T_{PL_{j*}}$ , alors le réseau optimal  $R^*$  correspond au réseau  $R_{j*}$  dont le plus long chemin est de longueur  $T_{PL_{j*}}$ .

Ainsi  $T^* = T_{PL_{j*}}$ .

Supposons que  $R_{j*}$  ne soit pas le réseau optimal cherché, c'est à dire  $T^* < T_{PL_{j*}}$ . (

Alors quel que soit le plus long chemin  $L_j$  de longueur  $T_{PL_j}$ ,  $L_j \notin R^*$  (i.e. il existe toujours au moins un arc de  $L_j$  n'appartenant pas à  $R^*$ ). Donc il existe toujours un sommet pendant  $S_j$  tel que  $R^* \in S_j$ .

( $S_j$  est l'ensemble des graphes réalisables contenant l'ensemble d'arcs obligés  $\sigma_j$  et ne contenant aucun arc de  $I_j$ ,  $S_j$  est muni des bornes  $T_{PC,j}$ ,  $T_{PL,j}$ ).

D'après le lemme précédent on a

$$T_{PC,j} \leq T^*$$

or

$$T_{PC,j} \geq T_{PC}^k$$

et

$$T_{PC}^k \geq T_{PL,i}^*$$

Alors

$$T_{PC,j} \geq T_{PL,i}^*$$

et

$$T^* \geq T_{PL,i}^* \quad \text{Contradiction avec (2).}$$

#### Justification de la stratégie de séparation

Lemme 5 : Si à une itération  $k$  on a :

$$T_{PC}^k < T_{PL}^k$$

alors

$$T_{PC}^k \leq T^*$$

En effet, supposons que  $T_{PC}^k > T^*$ . (3)

Si  $T_{PC}^k < T_{PL}^k$  alors d'après l'algorithme, on doit passer à l'étape (2) et faire une autre itération jusqu'à ce qu'on arrive à satisfaire (à l'itération  $k_0$ )

$$\frac{T_{TC}^{k_0}}{T_{PL}^{k_0}} \geq \frac{T_{PC}^{k_0}}{T_{PL}^{k_0}}$$

Pour chaque sommet  $S_i$  exploré dans une itération  $j$ ,  $j > k$  on a

$$T_{PL,i} \geq T_{PC,i} \geq T_{PC}^k$$

Il vient

$$\frac{T_{PL}^{k_0}}{T_{PC}^{k_0}} \geq \frac{T_{PL}^k}{T_{PC}^k}$$

et par suite, d'après (3), on aura

$$\frac{T_{PL}^{k_0}}{T_{PL}^k} > T^*$$

Ceci contredit le fait que  $T^* = T_{PL}^{k_0}$ .

Par conséquent, la suite  $T_{PC}^k$  (resp.  $T_{PL}^k$ ) reste croissante (resp. décroissante) avec  $T_{PC}^k \leq T^* \leq T_{PL}^k \forall k < k_0$ .

Sauf à l'itération  $k_0$  on aura

$$T_{PC}^{k_0} \geq T_{PL}^{k_0} \geq T^*$$

Par suite si à une itération  $k$  on a :

$$T_{PC}^k < T_{PL}^k$$

on ne peut pas confirmer encore la détermination du réseau optimal  $R^*$ , ce qui oblige à entamer une nouvelle séparation (qui est décrite à l'étape (2) de l'algorithme).

Soit  $S_{i_0}$  le sommet tel que

$$T_{PC_{i_0}} = T_{PC}^k$$

$S_{i_0}$  est défini par  $(O_{i_0}, I_{i_0})$ .

$S_{i_0}$  sera choisi comme un noeud de séparation. Ceci exprime le fait qu'il est

possible que le réseau  $R_{i_0}$  (déterminé dans  $S_{i_0}$ ) ne soit pas optimal (i.e.

$R^* \neq R_{i_0}$  et  $L_{i_0} \notin R^*$  : un arc non obligé au moins de  $L_{i_0}$  n'appartiendra pas à  $R^*$ ).

Soient  $e_1, \dots, e_k$  les arcs non obligés de  $L_{i_0}$  : par conséquent, l'ensemble  $S_{i_0}$  peut être partitionné en  $k$  sous-ensemble  $S_{i_0j}$   $j = 1, \dots, k$ .

$S_{i_01}$  est l'ensemble des réseaux dans  $S_{i_0}$  ne contenant pas l'arc  $e_1$ .

$S_{i_02}$  est l'ensemble des réseaux dans  $S_{i_0}$  contenant l'arc  $e_1$  et ne contenant pas l'arc  $e_2$ .

⋮

$S_{i_0j}$  est l'ensemble des réseaux dans  $S_{i_0}$  contenant les arcs  $e_1, \dots, e_{j-1}$  et ne contenant pas l'arc  $e_j$ .

Il est clair que les sous-ensembles  $S_{i_0j}$  sont disjoints deux à deux. Chaque sous-ensemble  $S_{i_0j}$  est caractérisé par le couple  $(O_{i_0j}^0, I_{i_0j}^0)$  d'arcs obligés et d'arcs interdits tels que

$$O_{i_0j}^0 = O_{i_0} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_{j-1}\}$$

$$I_{i_0j}^0 = I_{i_0} \cup \{e_j\}$$

Cette caractérisation n'est pas définitive, on peut l'améliorer, ce qui permet de mieux localiser la solution optimale.

En effet, on peut considérer dans  $S_{i_0j}$  les arcs de raccourci (resp. les arcs fantômes) associés à  $O_{i_0j}^0$  comme des arcs obligés (resp. des arcs interdits)

Chaque sous-ensemble  $S_{i_0j}$  sera défini donc par le couple  $(O_{i_0j}, I_{i_0j})$  tel que

$$O_{i_0j} = O_{i_0j}^0 \cup R(O_{i_0j}^0)$$

$$I_{i_0j}^0 = I_{i_0j}^0 \cup F(O_{i_0j}^0)$$

On remarque qu'un ensemble  $O_i$  d'arcs obligés est toujours une arborescence de racine 0 ne contenant pas de chemins entre 0 et D.  $O_i$  ne réalise jamais un flot.

Chaque sommet pendant  $S_i$  étant défini par un couple  $(O_i, I_i)$  d'arcs obligés et d'arcs interdits, on retourne à l'étape (1).

### Application

En appliquant la méthode (SEP) aux deux exemples des pages 16 et 20, on aura dans chaque cas  $R^* = R_0$ .

#### Exemple 1 :

En associant à chaque arc  $e$  du réseau la longueur du plus court chemin entre 0 et D et passant par  $e$ , on aura :

$$T(0,a) = 7, \quad T(a,b) = 7, \quad T(b,D) = 7, \quad T(a,D) = 10, \quad T(0,b) = 12$$

d'où

$$T(0,a) \leq T(a,b) \leq T(b,D) \leq T(a,D) \leq T(0,b)$$

et par suite :

$$(0,a) < (a,b) < (b,D) < (a,D) < (0,b)$$

$$\underline{e_1} \quad \underline{e_2} \quad \underline{e_3} \quad \underline{e_4} \quad e_5$$

En introduisant les arcs suivant leur indice croissant on obtient :

$$R_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\} = R$$

d'où

$$L_0 = \{0, b, D\}$$

$$T_{PL_0} = 12$$

$$T_{PC_0} = T(e_5) = 12$$

$T_{PC_0} = T_{PL_0}$  on est donc à l'optimum

$$R^* = R_0$$

$$T^* = 12$$

#### Exemple 2 :

On a :

$$T(0,a) = 10, \quad T(a,b) = 10, \quad T(b,D) = 10$$

$$T(a,D) = 19, \quad T(0,b) = 19, \quad T(0,D) = 19$$

$$T(0,a) \leq T(a,b) \leq T(b,D) \leq T(R,D) \leq T(0,b) \leq T(0,D)$$

donc

$$(0,a) \leq (a,b) \leq (b,D) \leq (a,D) \leq (0,b) \leq (0,D)$$

$$e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_6$$

En introduisant les arcs suivant leur indice croissant, on obtient :

$$R_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

d'où

$$L_0 = \{0, a, D\}$$

$$T_{PL_0} = 19$$

$$T_{PC_0} = 19$$

$$TP_{C_0} = R_{PL_0} \text{ On est donc à l'optimum}$$

$$R^* = R_0$$

$$T^* = 19$$

## CHAPITRE 3

### ETUDE DU PROBLEME $\mathcal{P}$

#### DANS LE CAS DE PLUSIEURS ORIGINES ET UNE DESTINATION

#### INTRODUCTION

Dans cette partie, nous étudions le problème  $\mathcal{P}$  dans le cas où le réseau routier comporte plusieurs origines et une destination.

Nous montrons qu'on peut généraliser dans ce cas les résultats pour une origine et une destination.

En particulier le théorème fondamental du chapitre précédent (il existe toujours une régulation qui ne pénalise pas les itinéraires les plus longs) demeure valide.

On appelle "type de trafic" une composante du trafic qui circule entre une origine et une destination spécifiées.

Pour cela, nous donnons une formulation mathématique du problème  $\mathcal{P}$ , qui nous montre que tout le trafic qui circule dans le réseau peut être identifié à un seul type de trafic (c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire de distinguer le trafic par son origine).

Ceci permet de ramener la recherche d'une régulation optimale à la recherche d'un réseau partiel sans circuit.

Pour cela, nous décrivons (§3) une procédure "Branch-and Bound" dont l'évaluation est différente de celle donnée au Chapitre 2, et repose assez naturellement sur l'affectation minimum.

Un exemple de régulation est donné au deuxième paragraphe.

### 3.1 FORMULATION THEORIQUE

Dans cette partie, on considère un réseau  $R = (V, U)$  comportant  $K$  origines  $O_1, O_2, \dots, O_K$ , et une destination  $D$ . Sur chaque liaison  $(k)$   $k = 1, \dots, K$ , d'origines  $O_k$  et de destination  $D$  circule un trafic d'intensité  $q_k$  supposée constante.

D'après 1.7, le problème  $\mathcal{P}$  se formule alors de la manière suivante :

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 (4,1) \quad \sum_{\substack{e/i=T(e) \\ e/i=I(e)}} x(e,k) - \sum_{\substack{e/i=T(e) \\ e/i=I(e)}} x(e,k) = \begin{cases} -q_k & \text{si } i = O_k \\ 0 & \text{si } i \neq O_k, D \\ q_k & \text{si } i = D \end{cases} \quad i \in V \\ 
 (4,2) \quad \sum_{k=1}^K x(e,k) \leq C(e) \\
 (4,3) \quad \pi(j,k) - \pi(i,k) \leq t(e) + b(e) \quad e = (i,j) \in U \\ 
 (4,4) \quad \sum_{e \in U} \sum_{k=1}^K (t(e) + b(e)) x(e,k) = \sum_{k=1}^K (\pi(D,k) - \pi(O_k,k)) q_k \\
 x(e,k) \geq 0 \quad e \in U \\
 b(e) \geq 0 \quad i \in V \\
 \pi(i,k) \leq 0 \quad k = 1, \dots, K \\
 \min_{k=1, \dots, K} \sum_{k=1}^K (\pi(D,k) - \pi(O_k,k)) q_k
 \end{array}
 \right.$$

Les variables  $x(e,k)$ ,  $b(e)$ ,  $c(e)$  ont été définies dans le Chapitre 1.

Dans ce cas, on interprétera  $\pi(i,k)$  comme l'opposé du temps nécessaire pour joindre  $i$  à  $D$  ( $\pi(D,k) = 0 \forall k$ )

Nous allons montrer que le problème de régulation  $\mathcal{P}$  (défini par PD) est équivalent au problème  $\mathcal{P}'$  défini par le programme PD' qui suit. Ce dernier correspond au réseau R avec un seul type de trafic (c'est à dire quand on ne distingue pas les trafics par leurs origines, sauf dans l'expression du coût ressenti).

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 \begin{aligned}
 \sum_{e/i=T(e)} x(e) - \sum_{e/i=I(e)} x(e) &= \begin{cases} -q_k & \text{si } i = 0_k \\ 0 & \text{si } i \neq 0_k, D \\ q_1 + \dots + q_K & \text{si } i = D \end{cases} \quad i \in V \\
 x(e) \leq C(e) & e \in U \\
 \pi(j) - \pi(i) \leq b(e) + t(e) & e = (i, j)
 \end{aligned} \\
 \\ 
 \text{PD'} \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{k=1, \dots, K} (\pi(D_k) - \pi(0_k)) q_k = \sum_{e \in U} (t(e) + b(e)) x(e) \\
 x(e) \geq 0 \quad e \in U \\
 \pi(i) \geq 0 \quad i \in V \\
 b(e) \geq 0 \quad e \in U
 \end{array} \right. \\
 \\ 
 \min_{k=1, \dots, K} \sum (\pi(D_k) - \pi(0_k)) q_k
 \end{array}
 \right.$$

$x(e)$  est la partie de trafic qui circule sur l'axe  $e$ .

Ceci est donné par le théorème suivant.

THEOREME 1 : Les programmes PD et PD' sont équivalents.

Démonstration :

Il suffit de montrer qu'à partir d'une solution réalisable du programme PD', il existe une solution réalisable du programme PD telle que les valeurs des fonctions objectives correspondantes sont égales.

Soit             $X = (x(e), e \in U)$   
                 $\pi = (\pi(i), i \in V)$   
                 $b = (b(e), e \in U)$

Une solution réalisable de PD'. Donc, entre chaque origine  $O_k$  et la destination D, circule un flot réalisable d'intensité  $q_k$ .

Soit  $x(e, k)$  la portion du trafic  $q_k$  qui circule sur l'arc  $e$ .

On a             $x(e) = \sum_{k=1, \dots, K} x(e, k)$

On pose         $\pi(i, k) = \pi(i) \quad i \in V$   
                     $k = 1, \dots, K$

Le vecteur       $X = (x(e, k), e \in U, k = 1, \dots, K)$   
                 $\pi = (\pi(i, k), i \in V, k = 1, \dots, K)$   
                 $b = (b(e), e \in U)$

est une solution réalisable du programme PD.

On a aussi :

$$\sum_{k=1, \dots, K} (\pi(D, k) - \pi(O_k)) q_k = \sum_{k=1, \dots, K} (\pi(D) - \pi(O'_k)) q_k$$

Les deux valeurs des fonctions objectives sont donc égales.

C. Q. F. D.

Dans le cas d'une origine et une destination, on a montré que pour une affectation donnée du trafic, on peut déterminer un système de régulation tel que les plus longs chemins utilisés de O à D ne sont pas pénalisés. Ce résultat reste encore vrai dans le cas de plusieurs origines et une destination. On montrera par le théorème suivant que pour une affectation donnée du trafic, les plus longs chemins utilisés d'une origine  $O_k$  à la destination D peuvent ne pas supporter de pénalités. Autrement dit, on peut toujours trouver un système de régulation qui laisse la circulation fluide sur les plus longs chemins de  $O_k$  à D.

THEOREME 2 : Pour une affectation donnée du trafic, il existe un système  $b = (b(e), e \in U)$  qui vérifie le principe de Wardrop, et tel que  $b(e) = 0$  pour tout arc e appartenant à un chemin utilisé d'une origine  $O_k$  à la destination D de coût maximum.

Démonstration :

Pour tout sommet  $i \in V$ , on détermine un potentiel  $\pi(i)$  égal à l'opposé de la longueur du plus long chemin utilisé de  $i$  à D. Si un tel chemin n'existe pas, on pose :  $\pi(i) = \infty$

Pour tout arc  $e = (i, j)$  on pose :

$$\begin{aligned} b(e) &= \pi(j) - \pi(i) - t(e) \text{ si } e \text{ est utilisé (4,5)} \\ &= \infty \text{ sinon} \end{aligned}$$

Le système  $b = (b(e), e \in U)$  vérifie le principe de Wardrop : les coûts des itinéraires utilisés par le trafic d'une origine  $O_K$  à la destination D sont égaux et ne dépassent pas les coûts des itinéraires non utilisés.

Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux itinéraires utilisés de  $O_K$  à D.

On a :

$$\sum_{e \in l_1} t(e) + b(e) = \sum_{e=(i,j) \in l_1} \pi(i) - \pi(j) = \pi(D) - \pi(O_K)$$

$$\sum_{e \in l_2} t(e) + b(e) = \sum_{e=(i,j) \in l_2} \pi(i) - \pi(j) = \pi(D) - \pi(O_K)$$

Par conséquent, les deux itinéraires  $l_1$  et  $l_2$  ont le même coût marginal égal à  $\pi(D) - \pi(O_K)$

D'après (4,5), on a :

$$\pi(j) - \pi(i) - t(e) \leq b(e)$$

ainsi :

$$\pi(j) - \pi(i) \leq b(e) + t(e)$$

donc, pour tout chemin l de  $O_K$  à D, on a :

$$\sum_{e=(i,j) \in l} \pi(j) - \pi(i) = \pi(D) - \pi(O_K) \leq \sum_{e \in l} b(e) + t(e)$$

Un chemin non utilisé de  $O_k$  à D a par conséquent un coût  $\geq \pi(D) - \pi(O_k)$

Le principe de Wardrop est donc vérifié.

Soit  $l_k$  un itinéraire utilisé de  $O_k$  à D, de coût maximum, alors on a :

$$b(e) = 0 \quad e \in l_k$$

Car s'il existe un arc  $e \in l_k$  tel que  $b(e) > 0$ , on aura :

$$\pi(j) - \pi(i) + t(e) > 0$$

donc

$$\pi(j) > \pi(i) + t(e)$$

Ceci contredit le fait que  $l_k$  est de coût maximum.

C. Q. F. D.

D'après le théorème précédent, pour une affectation donnée du trafic, il existe une régulation telle que le temps réel passé par l'ensemble des usagers dans le système selon le principe de Wardrop peut s'écrire :

$$\tau = \sum_{k=1, \dots, K} T_k q_k$$

où  $T_k$  est la longueur du plus long chemin utilisé par cette affectation de l'origine  $O_k$  à la destination D.

Par conséquent, le problème de régulation  $\mathcal{P}$  se ramène à la recherche d'une affectation optimale qui minimise  $\tau$ , ce qui s'énonce comme suit :

Corollaire :

Dans le cas de plusieurs origines et une destination, le problème  $\mathcal{P}$  se ramène à la détermination d'un réseau partiel  $R^*$  qui écoule le trafic et tel que

$$\tau = \sum_{k=1, \dots, K} T_k^* q_k$$

est minimum.

Où  $T_k^*$  est la longueur du plus long chemin dans  $R^*$  de  $O_k$  à  $D$ .

REMARQUE 1 : Le réseau optimal est sans circuit.  
(Dem. identique à celle du Chapitre 2).

REMARQUE 2 : Le théorème précédent n'est pas vrai dans le cas général de plusieurs origines et plusieurs destinations. Comme le montre l'exemple ci-dessous, dans la solution optimale, les plus longs chemins dans ce cas portent parfois des coûts d'encombrement.

On considère le réseau  $R$  suivant comportant deux origines  $O_1$ ,  $O_2$  et deux destinations  $D_1$ ,  $D_2$ :

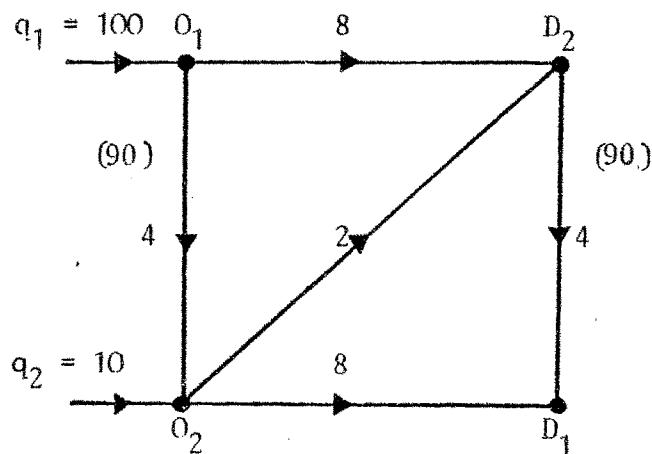


Fig. 9

Les arcs sont munis des coûts constants  
 $t(O_1, D_2) = 8$ ,  $t(O_1, O_2) = 4$ ,  $t(O_2, D_2) = 2$ ,  
 $t(D_2, D_1) = 4$ ,  $t(O_2, D_1) = 8$ . Les capacités  
des arcs  $(O_1, O_2)$  et  $(D_2, D_1)$  sont égales à  
90, les autres capacités sont supposées  
infinies. Les débits sont constants et  
donnés par :

$$q_1 = 100, \quad q_2 = 10.$$

Sur ce réseau existent deux liaisons (1)  
et (2).

La liaison (1) comporte les itinéraires

$$(O_1, O_2, D_1)$$

$$(O_1, D_2, D_1)$$

$$(O_1, O_2, D_2, D_1)$$

et la liaison (2) comporte seulement  
l'itinéraire  $(O_2, D_2)$ .

En l'absence de toute régulation le tra-  
fic s'auto-répartit en respectant le  
principe de Wardrop (ce qui correspond à  
l'affectation du coût minimum) comme suit :

- 10 empruntent l'itinéraire  $(O_2, D_2)$
- 80 empruntent l'itinéraire  $(O_1, O_2, D_2, D_1)$
- 10 empruntent l'itinéraire  $(O_1, D_2, D_1)$
- 10 empruntent l'itinéraire  $(O_1, O_2, D_1)$ .

Cette affectation peut s'interpréter de  
la manière suivante :

Le trafic  $q_2$  emprunte son itinéraire unique  $(O_2, D_2)$ . Vu la contrainte de capacité sur l'arc  $(O_1, O_2)$ , 10 usagers sont obligés d'emprunter l'itinéraire  $(O_1, D_2, D_1)$ . Les 90 qui restent commencent par emprunter l'itinéraire le plus rapide  $(O_1, O_2, D_2, D_1)$ , mais puisque la réserve de capacité de cet itinéraire ne peut absorber que 80 usagers, 10 usagers se trouvent donc obligés d'emprunter l'itinéraire  $(O_1, O_2, D_1)$ . Cette affectation conduit à la saturation des arcs  $(O_1, O_2)$  et  $(D_2, D_1)$  et crée sur ces arcs des coûts d'encombrement supplémentaires.

Ces coûts d'encombrement sont déterminés de telle manière que le principe de Wardrop soit vérifié (pour chaque liaison  $(k)$   $k = 1, 2, \dots, K$ , les coûts des itinéraires utilisés de  $O_k$  à  $D_k$  sont égaux et ne dépassent pas les coûts des itinéraires non utilisés).

On a donc :

$$b(D_2, D_1) = 2$$

$$b(O_1, O_2) = 2$$

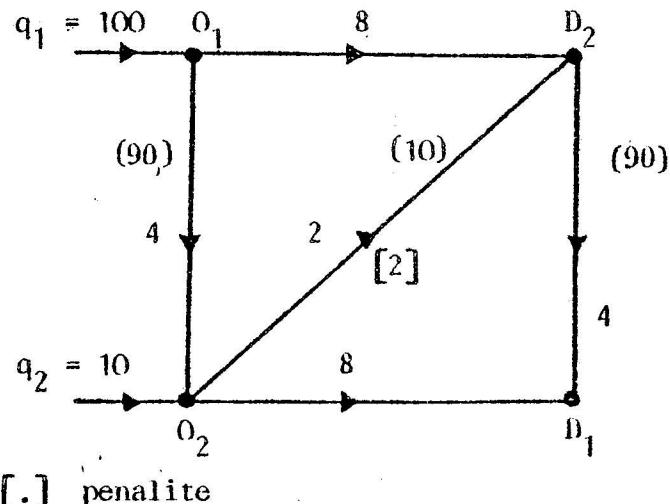
Deux files d'attente se forment sur les arcs  $(O_1, O_2)$  et  $(D_2, D_1)$  ce qui oblige les usagers qui utilisent ces arcs de passer sur chacun un temps supplémentaire égal à 2.

Les temps réels de parcours sont donc 14 sur chaque itinéraire de la liaison (1) et 2 sur  $(O_2, D_2)$ . Le temps réel total passé par l'ensemble des usagers dans le système est :

$$\begin{aligned}\tau &= 14 \times 100 + 10 \times 2 \\ &= 1420\end{aligned}$$

Une régulation dans ce cas peut se faire en abaissant la capacité de l'arc  $(O_2, D_1)$ .

En effet, si on réduit la capacité de l'arc  $(O_2, D_2)$  à 10 (les autres capacités restant les mêmes), le trafic  $q_2$  emprunte encore cet arc, mais le trafic  $q_1$  se répartit cette fois-ci sur les deux itinéraires  $(O_1, D_2, D_1)$  et  $(O_1, O_2, D_1)$  qui sont de même coût et qui peuvent absorber tout ce trafic.



Dans ce cas, la congestion se déplace sur l'arc  $(O_2, D_2)$  qui se trouve à la saturation. La circulation sur les itinéraires  $(O_1, D_2, D_1)$  et  $(O_1, O_2, D_1)$  est fluide.

Pour vérifier le principe de Wardrop, on doit munir l'arc  $(O_2, D_2)$  d'un coût supplémentaire . . . égal à 2,  $b(O_2, D_2) = 2$ . (Ceci pour que le coût de l'itinéraire  $(O_1, O_2, D_2, D_1)$  qui n'est pas utilisé par le trafic  $q_1$  ne soit pas inférieur au coût des itinéraires utilisés qui est 12).

Les temps de parcours sont donc :

- 12 sur les itinéraires de la liaison (1)
- 4 sur les itinéraires de la liaison (2)

Le temps total est donc :

$$\tau = 12 \times 100 + 4 \times 10 = 1240$$

Un gain de 180 unités de temps est donc réalisé après la régulation.; le temps minimum de parcours du trafic  $q_1$  est  $12 \times 100 = 1200$ .

D'autre part, on n'a pas intérêt à mettre de pénalités sur les arcs des itinéraires  $(O_1, D_2, D_1)$  et  $(O_1, O_2, D_1)$  (car, dans ce cas, le temps total dépasse 1 240).

La régulation est donc optimale.

On voit bien que dans la solution optimale, le plus long itinéraire utilisé dans la liaison (2) (qui est l'arc  $(O_2, O_1)$ ) supporte une pénalité de 2.

### 3.2 EXEMPLE DE REGULATION

On considère le réseau  $\mathcal{R}$  suivant comportant trois origines  $O_1, O_2, O_3$  et une destination D.

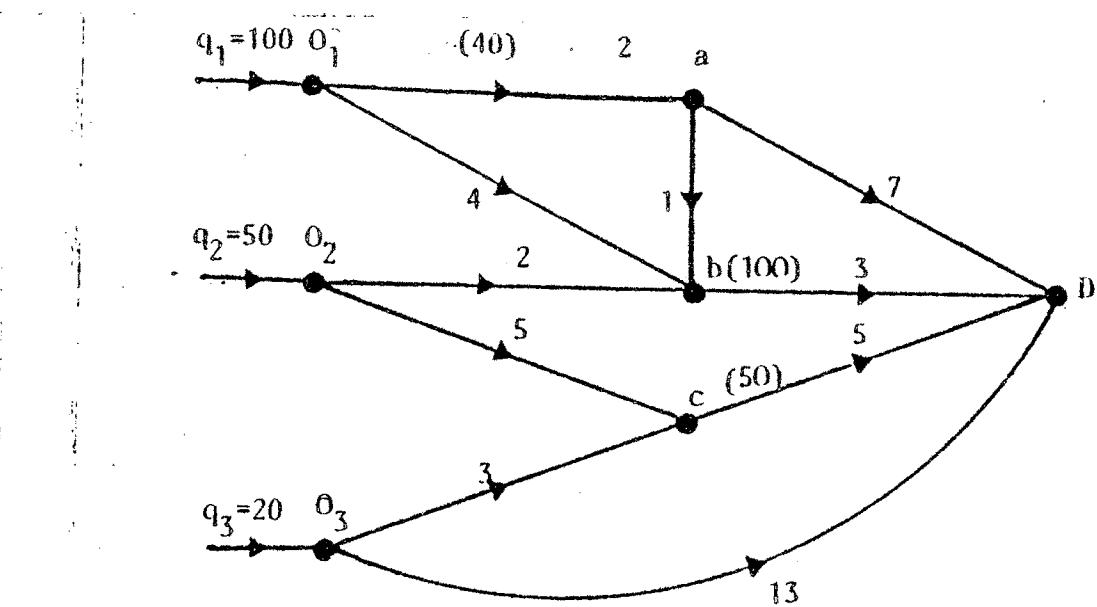


Fig. 11

Le chiffre associé à chaque arc représente le coût de cet arc. Les capacités des arcs  $(O_1, a)$ ,  $(b, D)$ ,  $(c, D)$  sont respectivement 40, 100 et 50. Les autres capacités sont supposées infinies.

En l'absence de régulation, le trafic s'autorépartit comme suit :

- . 40 empruntent l'itinéraire  $(O_1, a, D)$
- . 60 empruntent l'itinéraire  $(O_1, b, D)$
- . 40 empruntent l'itinéraire  $(O_2, b, D)$
- . 10 empruntent l'itinéraire  $(O_2, c, D)$
- . 20 empruntent l'itinéraire  $(O_3, c, D)$

Cette affectation conduit à la saturation des arcs  $(b, D)$  et  $(O_1, a)$ .

A l'équilibre de Wardrop, les arcs saturés supportent des coûts supplémentaires donnés par :

$$\begin{aligned} b(O_1, a) &= 3 \\ b(b, D) &= 5 \end{aligned}$$

Dans la pratique, ceci peut s'interpréter comme suit :

Etant donnée la restriction de capacité sur l'arc  $(O_1, a)$ , 60 usagers du trafic  $q_1$  sont obligés d'emprunter l'itinéraire  $(O_1, b, D)$ . La réserve de capacité sur l'itinéraire  $(O_2, b, D)$  (qui est de coût minimum (a vide) dans la liaison (2)) ne peut pas absorber tout le trafic  $q_2$ . Une portion du trafic  $q_2$  sera donc obligée de dévier vers l'itinéraire  $(O_2, C, D)$ , quand le temps réel de parcours sur l'itinéraire  $(O_2, b, D)$  devient égal à 10 (i.e. égal au coût de l'itinéraire  $(O_2, C, D)$ ). Une file d'attente se forme donc sur l'axe  $(b, D)$  et les usagers qui empruntent cet arc supportent un temps d'encombrement égal à 5.

Par conséquent, le temps de parcours sur l'itinéraire  $(O_1, b, D)$  s'élève à 12, les 40 usagers qui restent du trafic  $q_1$  empruntent l'itinéraire  $(O_1, a, D)$  qui est pour eux de coût minimum (de coût 12). Ils passent sur l'arc  $(O_1, a)$  un temps d'encombrement supplémentaire égal à 3. (Le coût de l'itinéraire  $(O_1, b, D)$  est égal à 12).

Le trafic  $q_3$  emprunte sans difficulté l'itinéraire  $(O_3, C, D)$  qui est pour lui de coût minimum.

Les temps réels de parcours sur les itinéraires sont :

. 12 dans la liaison (1)

. 10 dans la liaison (2)

. . 8 dans la liaison (3)

Le temps réel total passé dans le système est :

$$\tau = 100 \times 12 + 50 \times 10 + 20 \times 8 = 1860$$

Cette affectation n'est pas optimale, on peut améliorer la qualité de la circulation en abaissant les capacités des arcs  $(O_2, b)$  et  $(O_3, c)$ .

En effet, si on supprime les arcs  $(O_2, b)$  et  $(O_3, c)$  (i.e. on réduit les capacités de ces arcs à 0), les autres capacités restant les mêmes, le trafic s'autorépartit comme suit :

- . 40 empruntent l'itinéraire  $(O_1, a, b, C)$
- . 60 empruntent l'itinéraire  $(O_1, b, D)$
- . 50 empruntent l'itinéraire  $(O_2, C, D)$
- . 20 empruntent l'itinéraire  $(O_3, D)$

Dans ce cas, on oblige le trafic  $q_2$  à emprunter seulement l'itinéraire  $(O_2, C, D)$ . Ainsi, on supprime la congestion sur l'arc  $(b, D)$  et la circulation sur cet arc demeure fluide.

Les 40 usagers du trafic  $q_1$  choisissent alors l'itinéraire  $(O_1, a, b, D)$  qui est de coût minimum. Ils passent sur l'arc  $(O_1, a)$  un temps supplémentaire égal à 1 ( $b(O_1, a) = 1$ ).

Les temps réels de parcours sur les itinéraires de (1) (2) et (3) sont respectivement 7, 10 et 13. Le temps réel total est :

$$\tau = 100 \times 7 + 50 \times 10 + 20 \times 13 = 1460$$

Un gain de 400 unités de temps est donc réalisé après la régulation.

On peut vérifier facilement que cette régulation est optimale.

### 3.3 METHODE DE SEPARATION ET EVALUATION PROGRESSIVE

Dans le chapitre précédent, on a utilisé la méthode (S.E.P.) pour résoudre le problème  $\mathcal{P}$  dans le cas d'une origine et une destination.

Grâce au corollaire du théorème 2, on étend dans ce paragraphe cette méthode au cas de plusieurs origines et une destination. On utilisera dans ce cas l'affectation de coût minimum pour évaluer les sommets de l'arborescence. (Cette évaluation diffère de celle du cas d'une origine et une destination, et se base sur la relaxation que représente l'affectation à coût minimum).

Par le corollaire du théorème 4, le problème  $\mathcal{P}$  se ramène à la détermination d'un réseau partiel  $R^X$  qui écoule le trafic et tel que :

$$\tau^X = \sum_{k=1}^K T_k^X q_k$$

est minimum.

Où  $T_k^X$  est la longueur du plus long chemin dans  $R^X$  de  $O_k$  à  $D$ .

#### 3.3.1 Les deux premières itérations

Comme dans le cas d'une origine et une destination, on présente tout d'abord les deux premières itérations de l'algorithme.

On détermine la valeur de l'affectation de coût minimum dans  $R$  ( $R$  est le réseau initial). Soit  $T_{PC_0}$  cette valeur, et soit  $R_0$  le réseau partiel utilisé par cette affectation,

$$T_{PC_0} \leq \tau^X$$

Pour chaque liaison ( $k$ ), soit  $L_k$  un plus long chemin de l'origine  $O_k$  à la destination  $D$  dans  $R_o$ .

Soient  $T_1, T_2, \dots, T_K$  les longueurs respectives des chemins  $L_1, L_2, \dots, L_K$ .

Soit  $T_{PL_o} = T_1 q_1 + T_2 q_2 + \dots + T_k q_k$

On a

$$\tau^X \leq T_{PL_o}$$

D'où

$$T_{PC_o} \leq \tau^X \leq T_{PL_o}$$

Si  $T_{PC_o} = T_{PL_o}$ , l'optimum est atteint,  $R^X = R_o$  et  $\tau^X = T_{PC_o} = T_{PL_o}$

Soit l'ensemble  $L_o$  d'arcs donné par

$$L_o = L_1 + L_2 + \dots + L_K$$

(+ représente la somme ensembliste)

On suppose que

$$L_o = (e_1, e_2, \dots, e_m)$$

Si  $R_o$  n'est pas optimal, alors il existe au moins un arc  $e_i$  de  $L_o$  ne figurant pas dans  $R^X$ . Il faut donc entamer une séparation.

On partitionne l'ensemble  $S$  des réseaux réalisables en  $m$  sous ensembles disjoints  $S_1, S_2, \dots, S_m$ .

Où  $S_j$  est l'ensemble des réseaux réalisables contenant les arcs  $e_1, \dots, e_{j-1}$ , et ne contenant pas l'arc  $e_j$ .

Pour chaque ensemble obligé  $(e_1, \dots, e_{j-1})$  on détermine les ensembles d'arcs de raccourci et d'arcs fantômes correspondants  $R(\{e_1, \dots, e_{j-1}\})$  et  $F(\{e_1, \dots, e_{j-1}\})$  (voir § 2.2.2.2).

On détermine par la suite les ensembles d'arcs obligés et d'arcs interdits  $\theta_j$  et  $I_j$  associés à chaque sommet  $s_j$  :

$$\theta_j = \{e_1, \dots, e_{j-1}\} \cup R(\{e_1, \dots, e_{j-1}\})$$

$$I_j = \{e_j\} \cup F(\{e_1, \dots, e_{j-1}\})$$

Ces ensembles étant déterminés, on associe à tout arc de raccourci  $(a, b)$  un nouveau coût donné par :

$$t(a, b) = t(c)$$

Où  $c$  est le plus long chemin d'arcs obligés qui lie les deux sommets  $a$  et  $b$ .

Ensuite, on détermine pour chaque sous-ensemble  $S_j$ , la valeur de l'affectation de coût minimum dans le réseau partiel  $R - I_j$  muni des nouveaux coûts sur les arcs de raccourci.

Soit  $T_{PC_j}$  cette valeur, et soit  $R_j$  le réseau utilisé par cette affectation.

On note  $R_{\theta_j}$  le réseau  $R_j$  auquel on ajoute l'ensemble des arcs  $\theta_j$  obligés.

Pour chaque liaison  $(k)$  on détermine un plus long chemin de  $O_k$  à  $D$ . Soient  $T_{j_1}, T_{j_2}, \dots, T_{j_K}$  les longueurs de ces chemins.

On pose :

$$T_{PL_j} = \sum_{i=1}^K T_{j_k} q_k$$

On détermine ainsi les réseaux  $R_{O_1}, R_{O_2}, \dots, R_{O_K}$  munis chacun de deux bornes  $T_{PC_j}$  et  $T_{PL_j}$  respectivement borne inférieure et borne supérieure de  $\tau^*$  dans l'ensemble des solutions  $S_j$ .

Soient

$$T_{PL}^2 = \inf_{j=1, \dots, K} \{T_{PL_0}, T_{PL_j}\}$$

$$T_{PC}^2 = \inf_{j=1, \dots, K} \{T_{PC_j}\}$$

Si  $T_{PC}^2 \geq T_{PL}^2$ , l'optimum est atteint, et  $R^*$  est le réseau muni de la borne  $T_{PL}^2$ ,  $\tau^* = T_{PL}^2$ .

Sinon, on entame une nouvelle séparation à partir du sommet  $S_i$  tel que  $T_{PC_i} = T_{PC}^2$

REMARQUE 3 : Dans le cas d'une origine et une destination, les ensembles d'arcs obligés vérifient la propriété suivante :

Pour tout arc obligé  $(a, b)$ , il existe un chemin formé d'arcs obligés de l'origine 0 à a.

Cette propriété sera encore conservée dans le cas de plusieurs origines et une destination. On déterminera les ensembles d'arcs obligés de manière que, s'il existe un arc obligé  $(a, b)$  dans une liaison  $(k)$ , alors il existe tout un chemin formé d'arcs obligés de l'origine  $O_k$  à a.

Cette propriété permet de détecter le maximum d'arcs de raccourci.

### 3.3.2 Algorithme

#### (0) Initialisation

$S_i = S_0$  l'ensemble des solutions réalisables (réseaux réalisables) caractérisé par l'ensemble d'arcs obligés  $\theta_0 = \emptyset$  et l'ensemble d'arcs interdits  $I_0 = \emptyset$

$S_0$  est un sommet pendant unique.

(1) Pour chaque sommet pendant  $S_i$  (défini par le couple  $(\theta_i, I_i)$  d'arcs obligés et d'arcs interdits, et tel que les coûts des arcs de raccourci sont modifiés), faire :

(1.1) Si  $\theta_i$  contient un circuit, poser

$$T_{PC_i} = +\infty, T_{PL_i} = +\infty$$

(1.2) (1.2.1) Déterminer la valeur  $T_{PC_i}$  de l'affectation du coût minimum dans le réseau partiel  $R - I_i$  (si  $R - I_i$  n'est pas réalisable, poser

$$T_{PC_i} = +\infty, T_{PL_i} = +\infty$$

(1.2.2) Soit  $R_i$  le réseau partiel utilisé par l'affectation auquel on ajoute l'ensemble des arcs obligés  $\theta_i$ .

Si  $R_i$  contient un circuit, poser

$$T_{PL_i} = +\infty$$

Sinon, pour chaque liaison (k), déterminer un plus long chemin de

l'origine  $O_k$  à la destination D dans  $R_i$ , soient  $T_1, T_2, \dots, T_K$  respectivement les longueurs de ces chemins.

Poser :

$$T_{PL_i} = T_1 q_1 + T_2 q_2 + \dots + T_K q_K$$

(1.3) Si

$$\inf_{\substack{(S_i \text{ sommet pendant)}}} T_{PC_i} \geq \inf_{\substack{S_i \text{ quelconque} \\ (\text{pendant et non pendant})}} T_{PL_i} \quad \text{STOP !}$$

l'optimum est atteint,  $R^*$  est le réseau muni de la borne

$$\inf_{S_i} T_{PL_i}, \quad \tau^* = \inf_{S_i} T_{PL_i}$$

Sinon, aller en (2)

(2) (2.1) (2.1.1) Déterminer le sommet pendant  $S_{i_0}$  tel que

$$T_{PC_{i_0}} = \inf_{\substack{S_i \text{ pendant}}} T_{PC_i} < \inf_{S_i} T_{PL_i}$$

(2.1.2) Pour chaque liaison(k), soit  $L_{k_0}$  un plus long chemin de  $O_k$  à D dans  $R_{i_0}$  :

(Si (k) contient un circuit C,  $L_{k_0}$  sera le circuit C auquel on ajoute un chemin quelconque de  $O_k$  à C et un autre de C à D.

(2.1.3) Le sommet  $S_{i_0}$  étant défini par

$\theta_{i_0}$  ensemble d'arcs obligés

$I_{i_0}$  ensemble d'arcs interdits

Soit  $L$  l'ensemble de tous les arcs non obligés intervenus dans les plus longs chemins  $L_k$ .

On ordonne les arcs de  $L$  ( $L = (e_1, \dots, e_m)$ ) de la manière suivante :

$e_i < e_{i+1}$  si l'ensemble  $\theta_{i_0} \cup \{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}\}$  vérifie la propriété suivante :

s'il existe un arc  $(a, b) \in \theta_{i_0} \cup \{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\}$  dans la liaison  $(k)$ , alors il existe tout un chemin dans  $\theta_{i_0} \cup \{e_1, \dots, e_i, e_{i+1}\}$  de  $\theta_k$  à  $a$ .

(2.2) Séparer  $S_{i_0}$  en  $m$  sommets pendants  $S_{i_0j}$ ,  
 $j = 1, \dots, m$  caractérisés par les couples  
 $(\theta_{i_0j}, I_{i_0j})$   $j = 1, \dots, m$  d'arcs obligés et d'arcs interdits tels que :

$$\theta_{i_0j} = \theta_{i_0} \cup \{e_1, \dots, e_{j-1}\}$$

$$I_{i_0j} = I_{i_0} \cup \{e_j\}$$

(2.3) (2.3.1) Déterminer

$R(\theta_{i_0j})$  et  $F(\theta_{i_0j})$  pour  $j = 1, \dots, m$

(voir § III 2.2.2)

( $R(\theta_{i_0j})$  et  $F(\theta_{i_0j})$  sont respectivement les ensembles d'arcs de raccourci et d'arcs fantômes associés à  $\theta_{i_0j}$ )

(2.3.2) Pour tout arc  $(a, b) \in R(\theta_{i_0j})$   
faire

$$t(a, b) := t(c)$$

où  $c$  est le plus long chemin dans  $\theta_{i_0j}$  qui lie  $a$  et  $b$ .

$$\theta_{i_0j} := \theta_{i_0j} \cup R(\theta_{i_0j})$$

$$I_{i_0j} := I_{i_0j} \cup F(\theta_{i_0j})$$

Chaque sommet pendant  $S_{i_0j}$  est défini par le couple  $(\theta_{i_0j}, I_{i_0j})$

Aller en (1)

La justification de l'algorithme ci-dessus est la même que celle donnée dans le cas d'une origine et une destination.

### 3.3.3 Exemple d'application

On reprend l'exemple présenté au § IV.2. Les itinéraires utilisés par l'affectation de coût minimum dans  $R$  sont :

$(O_1, a, D), (O_1, b, D), (O_2, b, D), (O_2, C, D), (O_3, C, D)$

et la valeur de cette affectation est :

$$T_{PC_0} = 1\ 240$$

Les plus longs chemins utilisés de chaque origine à la destination sont :

$$L_1 = (O_1, a, D)$$

$$L_2 = (O_2, C, D)$$

$$L_3 = (O_3, C, D)$$

d'où on déduit :

$$T_1 = 9 \quad T_2 = 10 \quad T_3 = 8$$

et

$$T_{PL_0} = 1\ 560$$

On a :

$$T_{PC_0} < T_{PL_0}$$

Donc on doit séparer l'ensemble des solutions réalisables  $S$  :

$$L_0 = L_1 + L_2 + L_3 = \{(O_1, a), (a, D), (O_2, C), (C, D), (O_3, C)\}$$

On ordonne les axes de  $L_0$  de telle sorte que les ensembles obligés qui seront formés dans la séparation de  $S$ , vérifient la propriété : s'il existe un arc obligé dans une liaison ( $k$ )  $k = 1, 2, 3$ , alors il existe tout un chemin obligé qui lie cet arc à l'origine  $O_k$ .

On aura

$$L_0 = \{(O_1, a), (a, D), (O_2, C), (O_3, C), (C, D)\}$$

$$\quad e_1 \quad \quad e_2 \quad \quad e_3 \quad \quad e_4 \quad \quad e_5$$

Alors, on partitionne l'ensemble  $S_0$  en cinq sous-ensembles  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ , où  $S_j$  est défini par l'ensemble obligé  $\{e_1, \dots, e_{j-1}\}$  et l'ensemble interdit  $\{e_j\}$  (les ensembles d'arcs de raccourci et d'arcs fantômes sont vides)

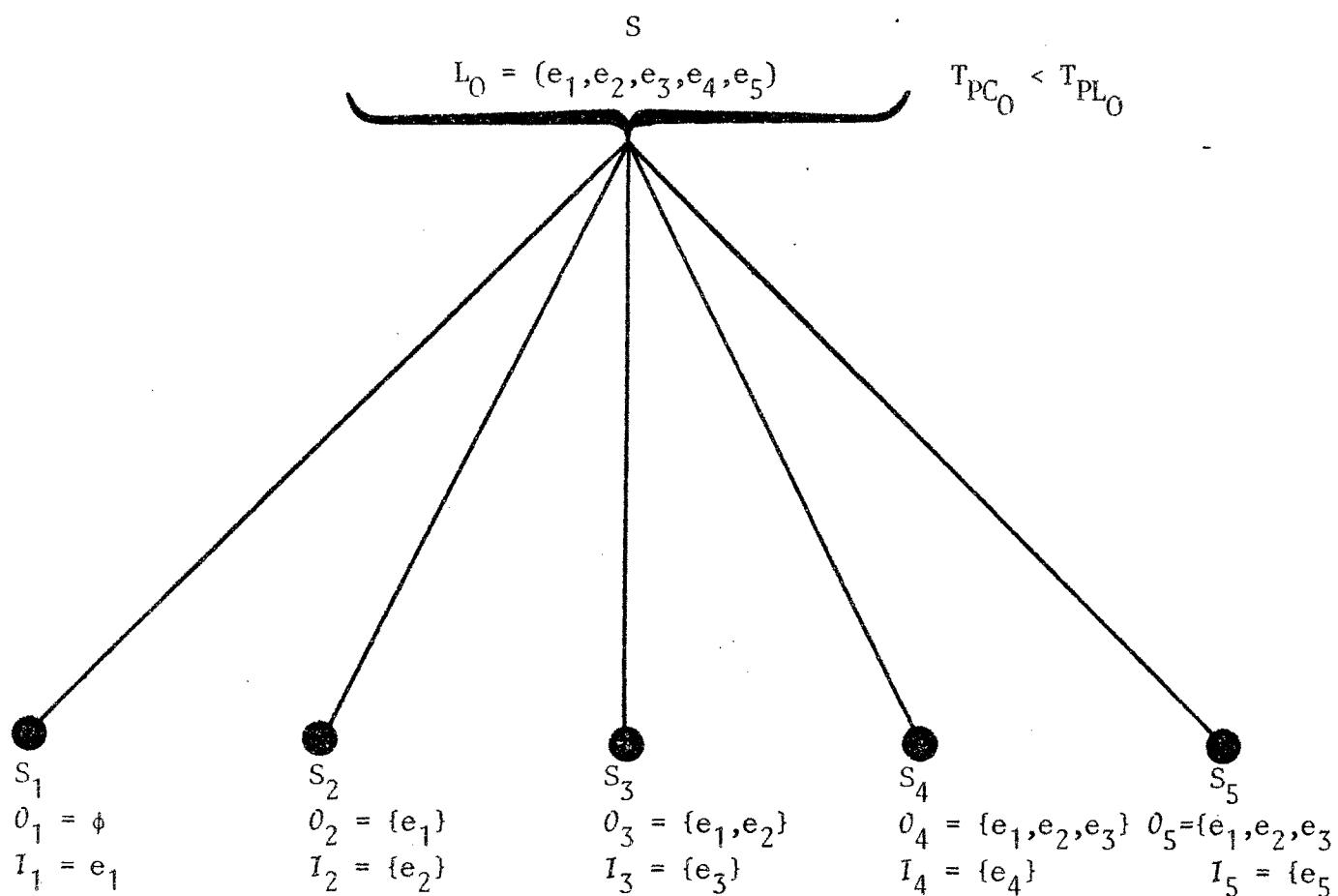


Fig. 11

Les valeurs des affectations de coût minimum associées aux ensembles  $S_{0_i}$   $i = 1, - , 5$  sont respectivement :

$$T_{PC_1} = 1460, \quad T_{PC_2} = 1420, \quad T_{PC_3} = +\infty,$$

$$T_{PC_4} = 1340, \quad T_{PC_5} = +\infty.$$

$T_{PC_3} = T_{PC_5} = +\infty$  car les réseaux partiels :

$$R - \{e_3\} \text{ et } R - \{e_5\}$$

ne sont pas réalisables.

On a aussi :

$$T_{PL_1} = 1460, \quad T_{PL_2} = 1460, \quad T_{PL_3} = +\infty,$$

$$T_{PL_4} = 1660, \quad T_{PL_5} = +\infty.$$

$$T_{PL}^2 = \inf_{i=1, - , 5} \{T_{PL_0}, T_{PL_i}\} = 1460$$

$$T_{PC}^2 = \inf_{i=1, - , 5} \{T_{PC_1}\} = 1460$$

$T_{PC}^2 = T_{PL}^2$  l'optimum est donc atteint, et  $R_1^X$  correspond au réseau  $R_1$  (ou bien au réseau  $R_2$ ) muni de la borne

$$T_{PL_1} = 1460$$

$R_1$  est le réseau formé par les arcs

$$\{(O_1, b), (b, D), (O_2, C), (C, D), (O_3, D)\}$$

REMARQUE 4: L'étude du problème  $\mathcal{P}$  dans le cas d'une origine et plusieurs destinations est la même que celle effectuée dans le cas de plusieurs origines et une destination.

CHAPITRE 4  
ETUDE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION

Pour tester le modèle proposé, nous avons programmé l'algorithme donné au Chapitre 3 dans le cas où le réseau comporte une origine et une destination en langage PASCAL (U.C.S.D.). La mise au point du programme a été faite sur un micro-ordinateur APPLE II.

Cette étude expérimentale a porté en particulier sur les deux points suivants :

- 1) La variation du temps réel de parcours passé dans le réseau avant et après la régulation en fonction du trafic.
- 2) La nature des réseaux pour lesquels la régulation selon Wardrop peut diminuer le temps réel de parcours passé par le trafic.

Dans le premier paragraphe, nous donnons l'organigramme du programme utilisé. Dans le second paragraphe, nous présentons l'exemple étudié, les résultats obtenus et les conclusions qu'on peut tirer de cette expérimentation.

4-1 - L'ORGANIGRAMME DU PROGRAMME

On rappelle que dans l'algorithme proposé au Chapitre 3, nous avons utilisé l'affectation de coût minimum pour évaluer les sommets de l'aborescence. Pour déterminer cette évaluation nous avons utilisé la méthode Out-of-Kitter développée par Fulkerson et Minty. C'est une méthode primale-duale qui est basée sur le

théorème des arcs colorés et qui détermine une solution optimale du problème de l'affectation de coût minimum en vérifiant progressivement les conditions des écarts complémentaires.

L'intérêt d'utiliser cette méthode est qu'elle est algorithmiquement très efficace dans notre cas. En effet, pour initialiser cette méthode on peut partir, sur le réseau, d'un flot qui n'est ni réalisable, ni optimal, mais qui n'est pas trop "loin" de ces deux propriétés. C'est ce qui se produit très fréquemment quand on développe l'arborescence du "branch and bound" où en passant d'un sommet à l'autre, on introduit une seule modification de capacité et quelques modifications des coûts.

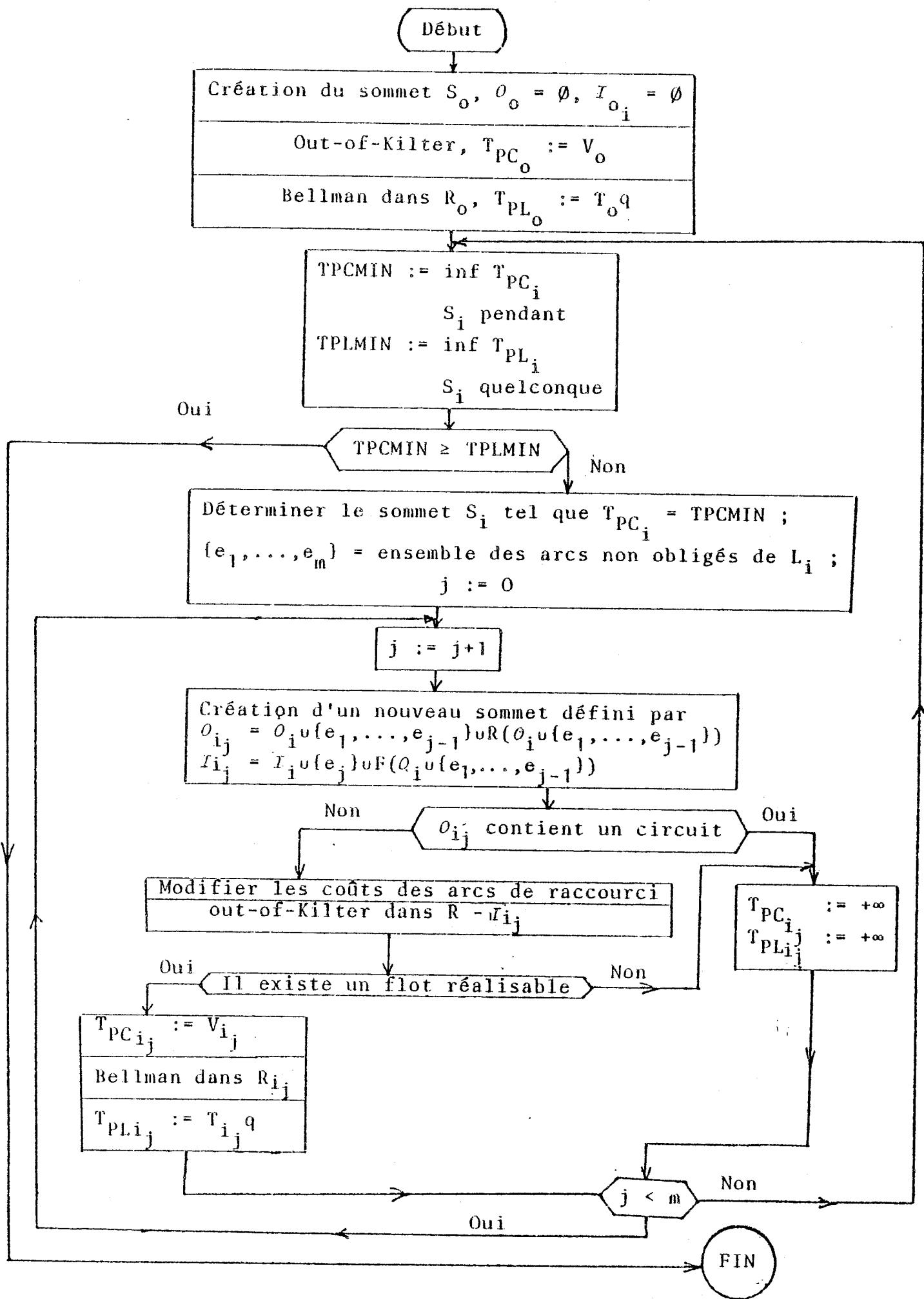
Nous avons également utilisé l'algorithme de Bellman pour déterminer le plus long chemin  $L_i$  dans le réseau  $R_i$  (réseau partiel utilisé par l'affectation auquel on ajoute l'ensemble des arcs obligés) suivant lequel on fait la séparation du sommet  $S_i$ .

On notera

$T_i$  : Longueur du plus long chemin  $L_i$  dans  $R_i$ .

$V_i$  : Valeur de l'affectation de coût minimum associée au sommet  $S_i$ .

L'organigramme du programme est donné par le schéma suivant :



Organigramme du programme

## 4-2 - EXPERIMENTATION

### 4-2-1 - Réseau étudié

Pour tester le modèle sur un exemple assez réaliste, nous avons pris un réseau simplifié qui lie le centre ville de Grenoble (Place Victor Hugo) à l'Avenue Gabriel-Péri, comportant 16 sommets et 36 arcs qui est donné par la figure 12.

Sur chaque arc nous avons porté un couple (a,b) qui représente respectivement le temps à vide et la capacité de l'arc (la capacité est donnée en centaines de véhicules par heure). (Le temps à vide et la capacité pour chaque tronçon sont déterminés approximativement en fonction de la longueur et du nombre de voies de ce tronçon). Le flot maximum qui peut traverser ce réseau est 68.

### 4-2-2 - Résultats expérimentaux

Pour étudier le temps de parcours passé par les usagers dans le réseau, nous avons fait une série de passages en faisant varier l'intensité du trafic. À chaque passage on note le temps passé dans l'affectation de coût minimum et les temps réels de parcours avant et après la régulation.

En portant en abscisse le débit du trafic et en ordonnée le temps de parcours, nous avons obtenu les courbes données par la figure 15.

Les enseignements que nous avons tiré de cette seule expérimentation doivent bien sûr être accueillis avec une grande prudence et demanderaient à être confirmés sur d'autres exemples. Ils nous semblent cependant présenter quelques caractères généraux

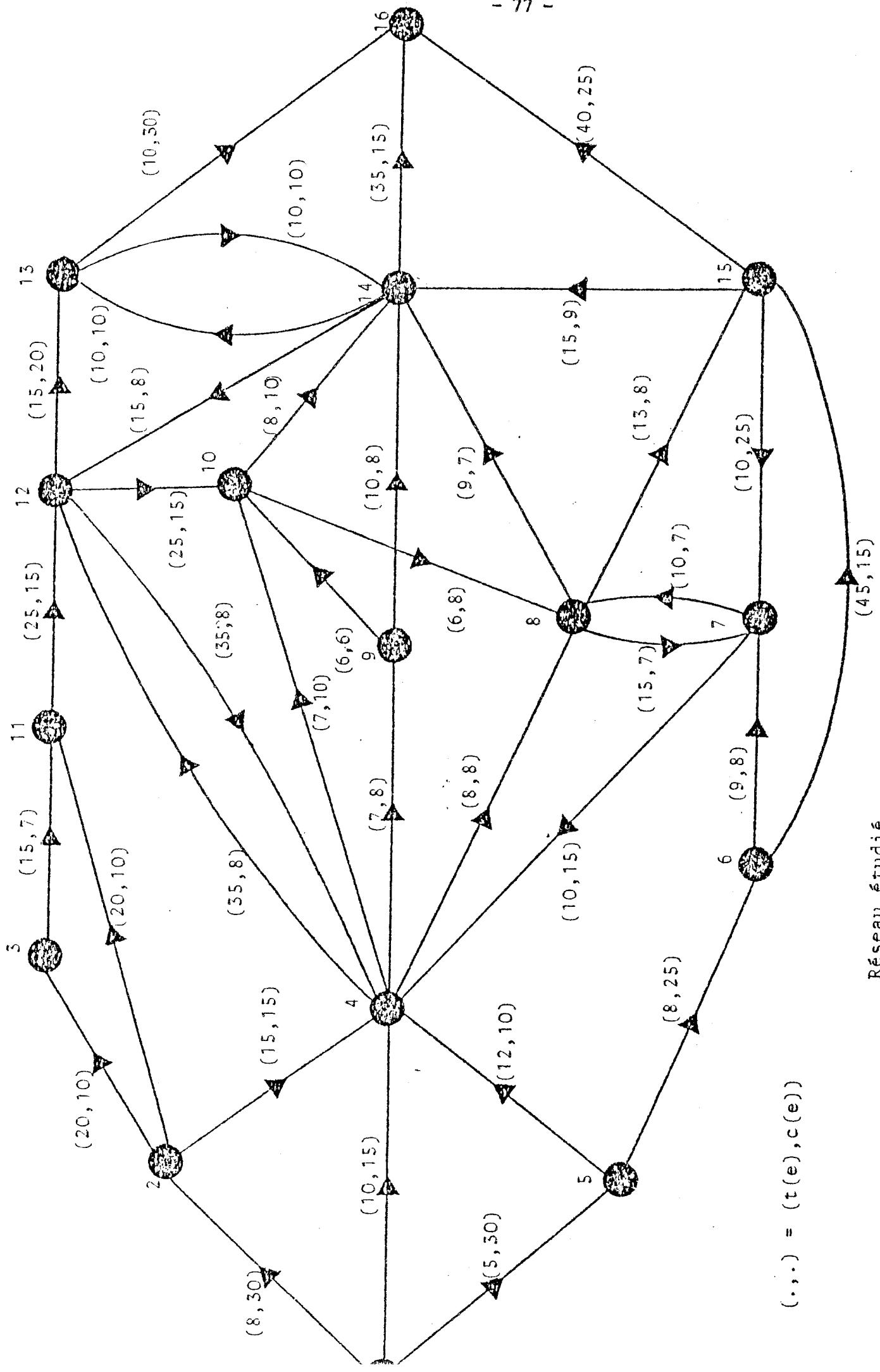
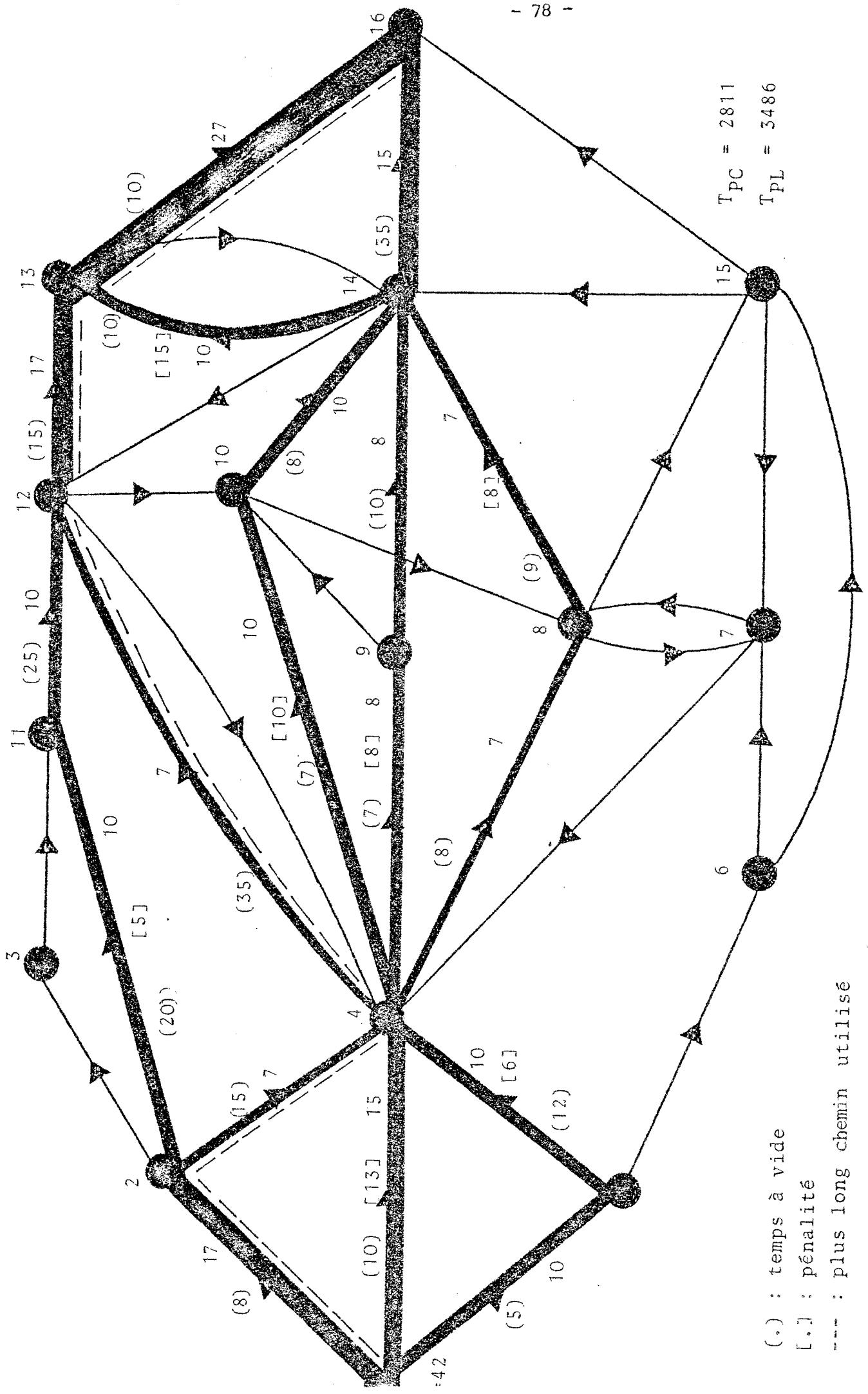


Fig. 12



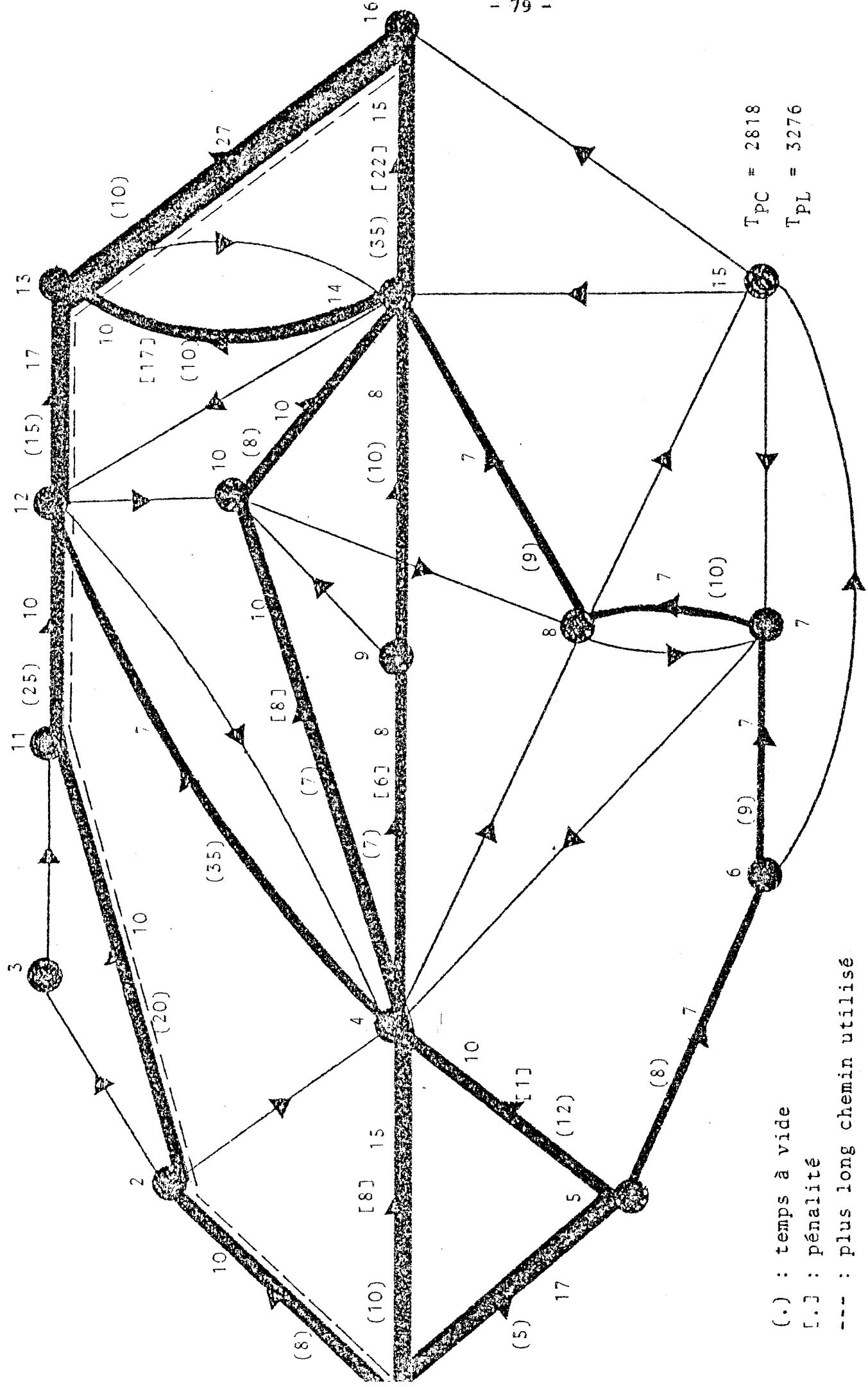
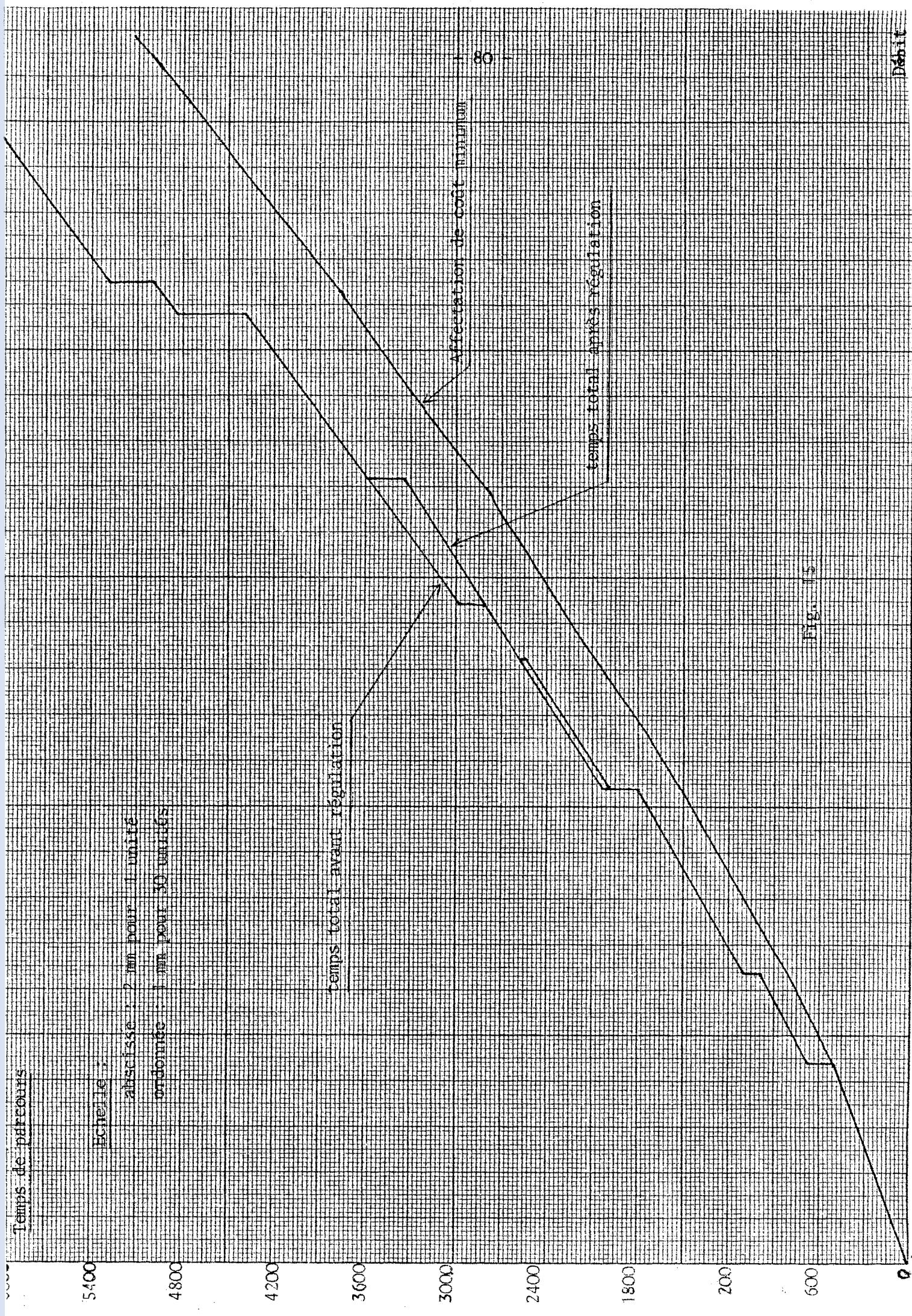


Fig. 14



D'après les courbes tracées (Fig. 15), on constate que :

- L'affectation de coût minimum qui est une fonction convexe, est presque linéaire dans ce cas. Ceci vient du fait que l'écart entre les coûts des itinéraires utilisés par l'affectation est assez faible.

- Les courbes qui définissent les temps réels sont croissantes et formées par des segments de droite. Ceci s'explique bien puisque on sait que le temps réel est donné par :

$$\tau = T \cdot q$$

où  $T$  : la longueur du plus long chemin utilisé

$q$  : l'intensité du trafic

donc en faisant varier  $q$ ,  $\tau$  est bien une droite qui change de pente chaque fois que le plus long chemin utilisé change de valeur.

On remarque aussi qu'une petite augmentation du trafic (d'une unité) peut changer la valeur du plus long chemin utilisé et faire beaucoup augmenter le temps réel de parcours. Ceci est dû d'une part à la nature du modèle étudié et d'autre part à la congestion que peut créer cette augmentation dans le réseau. Dans ce cas par exemple, si le trafic est égal à 51, le plus long chemin utilisé est (3, 5, 6, 27, 28, 36) et le temps de parcours est égal à 4284 et quand le trafic passe à 52, le plus long chemin utilisé devient (1, 9, 11, 17, 31, 34) et le temps de parcours passe à 4836.

D'autre part, on retrouve expérimentalement d'après ces courbes, que le temps réel selon Wardrop est une fonction non convexe.

- La régulation n'a pas d'effet si l'intensité  $q$  du trafic est comprise entre 0 et 25 ou bien, entre 43 et 68. Ceci peut s'interpréter de la manière suivante :

D'une part, quand l'intensité du trafic est faible le réseau se trouve loin de la saturation, la circulation demeure fluide et dans ce cas la régulation n'a pas d'effet. D'autre part, quand le trafic dépasse un certain seuil, le réseau se trouve près de la saturation et le trafic est obligé d'emprunter le plus long itinéraire dans le réseau. Il est bien évident dans ce cas que la régulation ne peut pas décongestionner la circulation. C'est ce qui se produit dans l'exemple, à partir d'un trafic d'intensité 55. Ce trafic emprunte le chemin (3, 5, 7, 36) qui est le plus long du réseau.

- Si  $q = 42$ , les coûts des affectations avant et après la régulation sont respectivement  $\tau = 3486$  et  $\tau = 3276$ . Le gain est donc égal à 210 et c'est le plus haut gain qu'on puisse réaliser avec la régulation dans ce réseau. Ces affectations sont données par les figures 13 et 14.

#### Commentaires des figures 13 et 14

Sur chaque arc des réseaux donnés par ces figures, on a porté le temps à vide, le flot qui circule sur cet arc et la pénalité que porte cet arc à l'équilibre de Wardrop. Les arcs épais sont les arcs empruntés par l'affectation. L'épaisseur d'un arc utilisé est proportionnelle au flot qui emprunte cet arc.

En l'absence de toute régulation (Fig. 13), l'affectation du trafic selon Wardrop (qui correspond à l'affectation de coût minimum) utilise l'itinéraire (1, 2, 4, 12, 13, 16). Cet itinéraire de coût 83 est le plus long itinéraire utilisé par l'affectation.

Les coûts d'encombrement sur les arcs saturés par cette affectation sont déterminés de telle manière que le principe d'égalité de temps de parcours sur les itinéraires utilisés soit vérifié. Autrement dit, le coût de chaque itinéraire utilisé sera égal à 83. Le coût total sera donc  $\tau = 42 \times 83 = 3486$ . (Le coût total dans l'affectation du coût minimum est  $T = 2811$ ).

La régulation ici peut être réalisée en supprimant le tronçon (2, 4) (en abaissant sa capacité à 0) (Fig. 14). En effet en abaissant la capacité du tronçon (2, 4) à 0, la partie du trafic qui empruntait le chemin (1, 2, 4, 8), emprunte dans l'affectation de coût minimum, dans ce cas, le chemin (1, 5, 6, 7, 8) et le plus long itinéraire utilisé sera (1, 2, 11, 12, 13, 16) de coût 78.

Le coût total dans ce cas est donc  $\tau = 42 \times 78 = 3276$  (le coût total de l'affectation de coût minimum dans ce cas est 2818). Un gain de 210 unités de temps est donc réalisé avec la régulation. (Il correspond à 6 % du temps passé avant la régulation).

On remarque aussi qu'après la régulation le tronçon (2, 11) ne supporte plus de pénalité. La régulation a donc permis de supprimer la congestion sur ce tronçon et d'améliorer l'écoulement du trafic sur les autres tronçons en abaissant leurs temps de parcours.

Enfin nous signalons que nous avons testé également le modèle sur d'autres exemples, même de taille plus grande, et que pour certains, la régulation ne diminue guère le temps réel de parcours.

#### 4-2-3 - Conclusions

Comme nous l'avons signalé précédemment, les conclusions expérimentales que nous allons donner dans la suite, ne sont pas des conclusions générales pour le modèle proposé. Pour bien étudier l'efficacité pratique de ce modèle, il faut plutôt le tester sur des exemples plus réalistes pour lesquels nous pensons que la régulation puisse être plus intéressant que pour l'exemple étudié.

D'après ce qui précède, nous remarquons que la régulation selon Wardrop, ne diminue le temps total de parcours que sur une zone du trafic qui laisse le réseau entre la fluidité et la saturation (entre 35 % et 65 % de la capacité maximum pour cet exemple). Dans ce cas, le trafic peut congestionner le réseau et fait augmenter le temps de parcours, mais vu que le réseau est assez loin de la saturation et le trafic à différentes possibilités d'affection, la régulation dans ce cas peut déplacer les congestions et améliorer la qualité de circulation dans le réseau.

D'autre part, d'après d'autres exemples étudiés, nous avons remarqué que la régulation selon Wardrop dépend beaucoup de la nature et des caractéristiques du réseau et il semble qu'elle est intéressante que dans le cas où les coûts des itinéraires du réseau ont des écarts importants et le réseau est assez dense du point de vue tronçons et comporte des voies rapides qui peuvent engendrer des congestions.

Bien que les résultats obtenus, dans le cas d'une seule origine-destinations, donnent une idée sur l'efficacité de la régulation selon Wardrop dans ce cas, il reste encore à tester le cas, plusieurs origines et une destination, pour lequel la régulation est sans doute plus intéressante.

Enfin concernant la performance du modèle nous avons remarqué que le temps de calcul (qui est presque proportionnel au nombre des sommets explorés dans l'arborescence) dépend de l'intensité du trafic qui circule dans le réseau : quand cette intensité augmente, le nombre de sommets (dans la plupart des passages) diminue (pour  $q = 29$ , le nombre de sommets est égale à 616 et pour  $q = 30$  il est égal à 522). En effet, quand cette intensité augmente, le trafic a moins de possibilités de circulation dans le réseau et par conséquent l'arborescence explore moins de sommets pour déterminer la régulation optimale.



## CHAPITRE 5

### CAS DU CORRIDOR

#### INTRODUCTION

On appelle corridor autoroutier le système constitué par une autoroute et le réseau routier associé, en particulier les voies susceptibles d'offrir aux usagers un itinéraire concurrent de l'autoroute.

Plusieurs approches théoriques ont été faites pour améliorer les conditions d'écoulement du trafic dans un corridor.

PAYNE et THOMPSON [14] ont étudié, dans le cas statique, le problème de régulation d'un corridor par le contrôle des accès de l'autoroute en laissant la circulation fluide sur cette dernière. Ils ont proposé deux méthodes de régulation (une optimale, et une heuristique) basées sur la programmation dynamique.

Dans ce chapitre, nous étudions le problème  $\mathcal{P}$  dans le cas du corridor, et nous donnons des indications générales pour la stratégie de régulation à adopter dans ce type de réseaux.

Nous montrons en particulier que sous l'hypothèse supposée par PAYNE et THOMPSON [14], où le temps marginal sur un tronçon autoroutier ne dépasse pas le temps sur le tronçon équivalent de la voie parallèle, l'autoroute peut ne pas supporter des coûts d'encombremens supplémentaires. La régulation, dans ce cas, laisse toujours la circulation fluide sur l'autoroute, mais

cette régulation n'est pas en général optimale.

Nous montrons aussi que sous cette hypothèse, nous pouvons déterminer facilement dans des cas simples (par exemple le corridor à plusieurs origines et une destination) la régulation optimale du trafic. Nous présentons à la fin l'exemple de régulation traité par PAYNE et THOMPSON dans [14] et nous montrons que les solutions données par les deux méthodes proposées sont en réalité les mêmes.

### 5.1 MODELE DU CORRIDOR

Dans cette étude, nous utiliserons le modèle du corridor proposé dans [14]. Le corridor est modélisé sous la forme d'une autoroute et d'une voie parallèle, toutes deux unidirectionnelles. L'autoroute et la voie parallèle sont divisées en  $N - 1$  tronçons limités par  $N$  échangeurs 1, 2, ...,  $N$  (accès à l'autoroute, ou noeuds). Une section du corridor est donnée par la figure 12.

Nous supposons que :

- . Toutes les caractéristiques du corridor ainsi que les données de trafic sont constantes dans le temps.
- . Les usagers s'affectent suivant le principe de Wardrop.
- . Si un trafic quitte l'autoroute, il quitte aussi le corridor (i.e. un usager trouve toujours désavantages pour lui de quitter l'autoroute avant d'arriver à sa destination).
- . Les origines du trafic circulant dans le corridor sont toutes situées sur la voie parallèle (on suppose qu'il n'y a pas déjà un trafic constant circulant sur l'autoroute).
- . La capacité de chaque tronçon est définie comme celle de son point de plus faible capacité.
- . La voie parallèle a une capacité infinie.
- . Le temps de parcours à vide sur un accès de l'autoroute est négligeable.

- Chaque accès a une capacité suffisante de stockage.

Nous définissons les variables suivantes :

- $d_{j,k}$  : demande de trafic d'origine  $j$  et de destination  $k$ .
- $f_{j,k}$  : trafic entrant dans l'autoroute par l'accès  $j$  et de destination  $k$ .
- $f_j$  : totalité du trafic entrant dans l'autoroute par l'accès  $j$ .

On a :

$$f_j = \sum_{k=j+1}^N f_{j,k}$$

- $b_j$  : coût d'encombrement (ou pénalité) sur l'accès  $j$ .
- $(i,j)$  : tronçon entre les accès  $i$  et  $j$ .
- $B_j$  : coût d'encombrement sur le tronçon autoroutier  $(j, j+1)$ . ( $B_j$  est la pénalité que porte le tronçon autoroutier  $(j, j+1)$  à l'état d'équilibre de Wardrop).
- $c_j$  : capacité du tronçon autoroutier  $(j, j+1)$ .
- $T_{j,k}$  : temps de parcours à vide sur le tronçon autoroutier  $(j, k)$ .
- $\tau_{j,k}$  : temps de parcours marginal sur le tronçon autoroutier  $(j, k)$ . (i.e. le temps total de parcours sur le tronçon autoroutier  $(j, k)$ ).

$$t_{j,k} = T_{j,k} + \sum_{i=0 \dots k-j+1} B_{i+j}$$

$t_{j,k}$  : temps de parcours sur le tronçon ( $j, k$ ) de la voie parallèle.

$x_j$  (resp  $x_j$ ) : partie du trafic qui circule sur le tronçon ( $j, j+1$ ) de l'autoroute (resp de la voie parallèle).

$x_{j,k}$  (resp  $x_{j,k}$ ) : partie du trafic qui circule sur le tronçon ( $j, j+1$ ) de l'autoroute (resp de la voie parallèle) et de destination  $k$ .

$\tilde{x}_{j,k}$  : totalité du trafic se trouvant à l'accès  $j$  et de destination  $k$ .

On a :

$$\tilde{x}_{j,k} = x_{j-1,k} + d_{j,k}$$

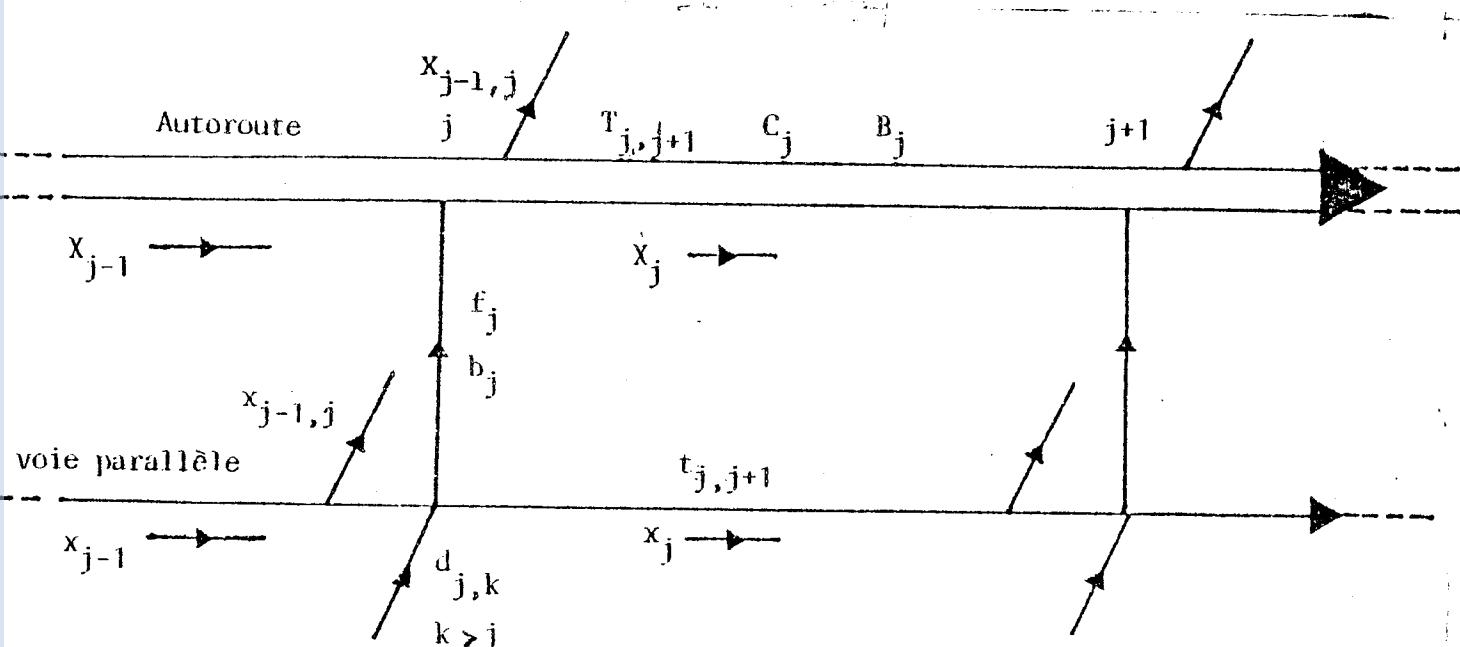


Fig. 16

$J^{\text{ième}}$  section du corridor



## 5.2 LES DEUX MÉTHODES PROPOSÉES PAR PAYNE ET THOMPSON

Le problème étudié par PAYNE et THOMPSON dans [14] est de déterminer une bonne régulation des débits sur les entrées de l'autoroute, en laissant la circulation fluide sur cette dernière, afin d'améliorer la qualité globale de circulation dans le corridor.

Les variables suivantes sont définies dans [14] :

$\theta_j$  : temps de parcours à vide sur l'accès j (ce temps est supposé négligeable dans notre modèle).

$\lambda_j$  : nombre d'usagers qui font la queue à l'accès j.

Si le débit de trafic à l'accès j est  $f_j$ , alors le temps nécessaire pour écouler la queue à l'accès j est :

$$\lambda_j / f_j$$

Il en résulte que le temps de parcours marginal sur l'accès j est donné par :

$$\theta_j + \lambda_j / f_j$$

Dans [14] on suppose que

$$\theta_j + T_{j,j+1} < t_{j,j+1}$$

pour tout j, c'est-à-dire qu'il est plus rapide de passer par l'autoroute pour parcourir le tronçon (j, j+1), que d'emprunter la voie parallèle.

Deux performances ont été définies dans [14] dont une est la suivante :

$$P(x_1, \dots, x_{N-1}; x_1, \dots, x_{N-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) = \sum_{j=1}^{N-1} x_j T_{j,j+1} + x_j t_{j,j+1} + \lambda_j$$

REMARQUE 1 :  $P(x_1, \dots, x_{N-1}; x_1, \dots, x_{N-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})$  représente le temps total passé dans le corridor sans compter le temps à vide

$$\sum_{j=1}^{N-1} \theta_j f_j$$

que passent les usagers sur les accès  
1, ..., N-1.

### 5.2.1 Méthode optimale

PAYNE et THOMPSON ont proposé par la suite un algorithme qui pour un système de capacités donné  $V_1, V_2, \dots, V_{N-1}$  sur les entrées, détermine l'affectation du trafic donnée par  $x_j, x_j$  et  $f_j, j = 1, \dots, N-1$ , et les queues  $\lambda_j, j = 1, \dots, N-1$  qui définissent une solution optimale selon le principe de Wardrop.

La performance associée à cette solution est :

$$\sum_{j=1}^{N-1} x_j T_{j,j+1} + x_j t_{j,j+1} + \lambda_j$$

Par conséquent, le problème étudié revient à déterminer un système de capacité sur les entrées de l'autoroute de telle sorte que la performance correspondante (i.e. la performance associée à la solution donnée par l'algorithme pour le système de capacité) soit minimum.

Ce problème peut avoir donc la formulation F suivante :

$$F \left\{ \begin{array}{l} \min P(x_1, \dots, x_{N-1}; x_1, \dots, x_{N-1}; \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}) \\ \text{s.t. } \\ V_1, \dots, V_{N-1} \\ x_j \leq c_j \\ 0 \leq \min v_j \leq v_j \leq \max v_j \end{array} \right.$$

Il est possible de déterminer une solution optimale du problème formulé ci-dessus, par l'application directe de la programmation dynamique. Cependant, d'après

PAYNE et THOMPSON, dans la pratique, le nombre important de variables déclarées  $x_{j,k}$ ,  $x'_{j,k}$  rend cette méthode peu efficace.

Ils proposent par conséquent une méthode heuristique basée également sur la programmation dynamique, dont nous allons décrire maintenant les idées fondamentales.

### 5.2.2 Méthode heuristique

Pour tout  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), soit  $r_j$ ,  $j < r_j \leq N$ , l'accès tel que tout trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  de destination  $k \geq r_j$  choisit l'autoroute et tout trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  de destination  $k < r_j$  continue sur la voie parallèle. (le trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte un seul type d'itinéraire pour se rendre de  $j$  à  $k$ ).

Il en résulte :

- Si  $k \geq r_j$  alors  $f_{j,k} = x_{j,k} = x_{j-1,k} + d_{j,k}$
- Si  $k < r_j$  alors  $f_{j,k} = 0$
- Si  $\sum_{k=j+1}^N x_{j-1,k} + d_{j,k} \leq v_j$  alors  $x_j = j+1$
- et si  $x_{j-1,N} + d_{j,N} > v_j$  alors  $r_j = N + 1$

On remarque que si on se donne un système  $r_1, \dots, r_{N-1}$  alors on peut déterminer l'affectation correspondante du trafic dans le corridor.

L'heuristique proposée détermine un système  $r_1, \dots, r_{N-1}$  qui minimise la performance du corridor.

On définit par la suite  $m_{j,k}$ , l'entrée la plus éloignée avant  $j$  telle que

$$r_{m_{j,k}} \leq k$$

(i.e. par laquelle passe un trafic de destination  $k$ ).

Si  $r_{m_{j,k}} > k$  pour tout  $m_{j,k}$  dans  $[1, j-1]$

alors

$$m_{j,k} = 0$$

Les entiers  $m_{j,j+1}, m_{j,j+2}, \dots, m_{j,N}$  déterminent la répartition du trafic de destination  $k \geq j+1$  dans le tronçon  $(j, N)$  du corridor.

La performance correspondante au tronçon  $(j, N)$  du corridor peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P(j, N; r_j, r_{j+1}, \dots, r_{N-1}; m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N}) \\ = \sum_{i=j}^{N-1} g(i, r_i; m_{i,i+1}, \dots, m_{i,N}) \end{aligned}$$

où  $g(i, r_i; m_{i,i+1}, \dots, m_{i,N})$  est la performance correspondante au tronçon  $(i, i+1)$ .

Connaissant  $m_{i,i+1}, \dots, m_{i,N}$  et  $r_i$ , alors on peut déterminer l'affectation du trafic dans le tronçon  $(i, i+1)$  et, par conséquent on peut déterminer la performance correspondante.

Soit

$$P^X(j, N; m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N}) = \min_{r_j, \dots, r_{N-1}} P(j, N; r_j, \dots, r_{N-1}; \bar{m}_{j,j+1}, \dots, m_{j,N})$$

D'après le principe d'optimalité en programmation dynamique on a :

$$P^X(j, N; m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N}) = \min_{r_j} (g(j, r_j; m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N}) + P^X(j+1, N; m_{j+1,j+2}, \dots, m_{j+1,N}))$$

Soit  $r_j^X(m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N})$  l'accès qui réalise l'optimalité dans l'équation précédente. Il est défini en fonction de  $m_{j,j+1}, \dots, m_{j,N}$ .

Cette procédure est itérative avec  $j = N-1, N-2, \dots, 1$ .

Dans la dernière itération on aura l'optimum donné par :

$$P^X(1, N; m_{1,2}, \dots, m_{1,N}) = \min_{r_1} (g(1, r_1; m_{1,2}, \dots, m_{1,N}) + P^X(2, N; m_{2,3}, \dots, m_{2,N}))$$

où  $m_{1,2} = m_{1,3} = m_{1,4} = \dots = m_{1,N} = 0$

On désignera dans la suite par  $H_0$  l'hypothèse suivante : le temps de parcours marginal sur un tronçon autoroutier ne dépasse pas le temps de parcours sur la voie parallèle. (i.e.  $\tau_{j,j+1} \leq t_{j,j+1} \quad \forall j$ ).

(Cette hypothèse est supposée dans [14]).

On montrera dans le paragraphe suivant que sous cette hypothèse, l'autoroute peut ne pas supporter des coûts d'encombrement supplémentaires.

5.3 Sous l'hypothèse  $H_0$ , l'autoroute ne supporte pas des pénalités

5.3.1 Résultats préliminaires

L'heuristique proposée par PAYNE et THOMPSON dans [14] détermine une solution telle que chaque portion du trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  se trouvant à l'entrée j, emprunte dans le corridor un seul itinéraire pour se rendre de j à k. C'est-à-dire au niveau des noeuds, on n'a pas intérêt à scinder le trafic ayant la même destination. Ce résultat est vrai dans le cas général, et il est donné par le lemme suivant.

LEMME 1 : Il existe une affectation optimale du trafic, telle que toute portion du trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte un seul itinéraire pour se rendre de j à k.

Démonstration :

Supposons que dans l'affectation optimale, il existe un trafic

$$\tilde{x}_{j,k} = \tilde{x}_{j,k}^1 + \tilde{x}_{j,k}^2$$

tel que  $\tilde{x}_{j,k}^1$  emprunte l'autoroute et  $\tilde{x}_{j,k}^2$  continue sur la voie parallèle, fig. 17.

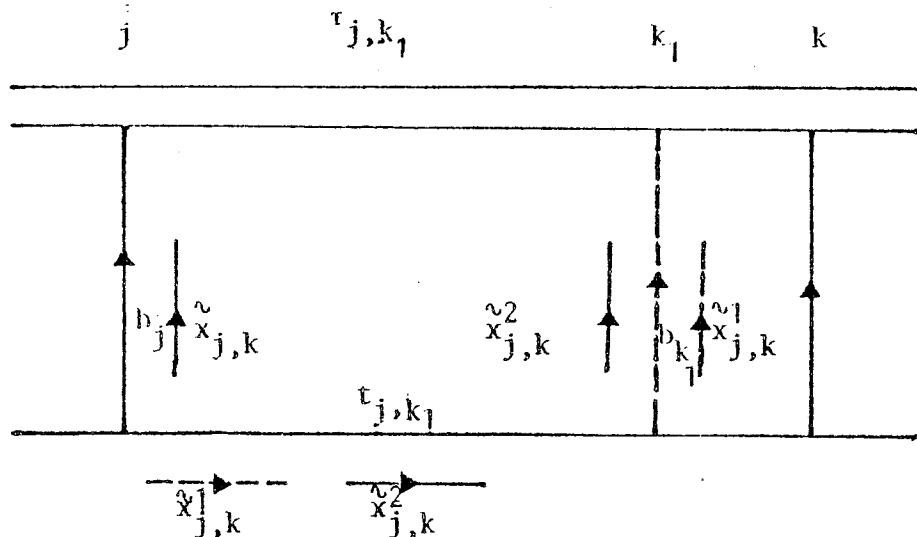


Fig. 17

a)  $\tilde{x}_{j,k}^2$  entre dans l'autoroute par l'accès  $k_1 < k$

Puisque le système se trouve à l'équilibre de Wardrop, on a donc :

$$b_j + \tau_{j,k_1} = t_{j,k_1} + b_{k_1}$$

Par conséquent, en obligeant le trafic  $\tilde{x}_{j,k}^1$  à emprunter le même itinéraire que  $\tilde{x}_{j,k}^2$ , le temps total passé dans le système reste le même, et le principe de Wardrop reste encore vérifié.

b)  $\tilde{x}_{j,k}^2$  continue sur la voie parallèle jusqu'à sa destination k.

Dans ce cas, on peut obliger aussi le trafic  $\tilde{x}_{j,k}^1$  à emprunter la voie parallèle de j à k et la nouvelle affectation vérifie le principe de Wardrop avec le même temps total de parcours

LEMME 2 : Sous l'hypothèse  $H_0$ , il existe une affectation du trafic optimale, telle que si un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $j_1$  ( $j_1 \leq k$ ) alors tout trafic

$$\tilde{x}_{j,k_1} \text{ , } j < j_1 \leq k_1 \leq k \text{ , resp } (k_1 \leq j_1)$$

emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $j_1$  (resp de  $j$  à  $k_1$ ).

Démonstration :

Supposons que dans une affectation optimale, il existe un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  qui emprunte l'autoroute en  $j_1$ ,  $j < j_1 < k$ , et un trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$ ,  $k_1 \leq j_1$  qui emprunte l'autoroute en  $j$ . Fig. 18.

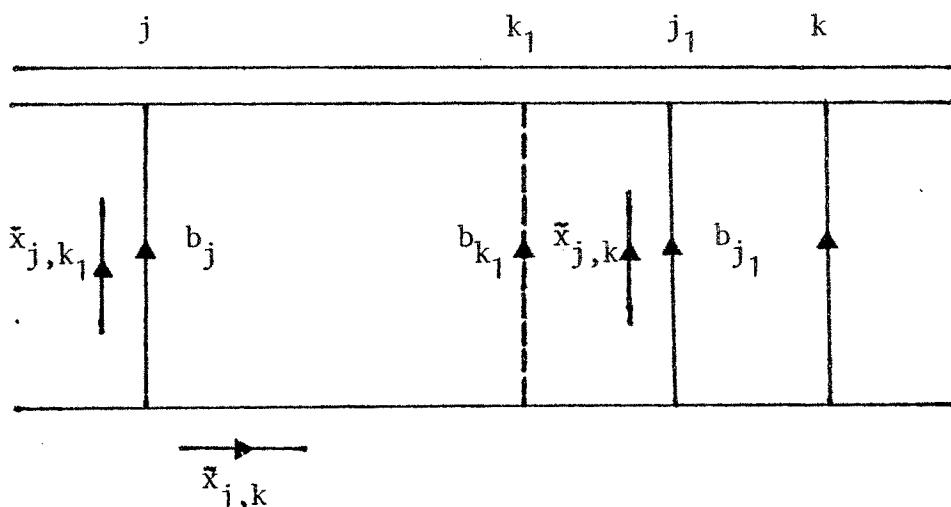


Fig. 18

Puisque le système se trouve à l'état d'équilibre,  
on a donc :

$$t_{j,j_1} + b_{j_1} \leq b_j + \tau_{j,j_1} \quad (5,1)$$

et

$$b_j + \tau_{j,k_1} \leq t_{j,k_1} \quad (5,2)$$

or,

$$\tau_{j,j_1} = \tau_{j,k_1} + \tau_{k_1,j_1}$$

$$t_{j,j_1} = t_{j,k_1} + t_{k_1,j_1}$$

Donc l'équation (5,1) peut s'écrire :

$$t_{j,k_1} + t_{k_1,j_1} + b_{j_1} \leq b_j + \tau_{j,k_1} + \tau_{k_1,j_1} \quad (5,3)$$

D'après l'hypothèse  $H_0$ , on a aussi :

$$t_{k_1,j_1} + b_{j_1} \geq \tau_{k_1,j_1} \quad (5,4)$$

D'après (5,3) et (5,4), il en résulte :

$$t_{j,k_1} \leq b_j + \tau_{j,k_1} \quad (5,5)$$

et d'après (5,2) et (5,5), il vient :

$$t_{j,k_1} = b_j + \tau_{j,k_1} \quad (5,6)$$

Par conséquent, le trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$  peut emprunter dans ce cas la voie parallèle de  $j$  à  $k_1$ . D'après (5,6), le temps total du parcours sera dans ce cas le même et le principe de Wardrop sera encore vérifié.

Si  $k_1 > j_1$ , à l'équilibre on aura :

$$b_j + \tau_{j,j_1} = t_{j,j_1} + b_{j_1}$$

et dans ce cas,  $\tilde{x}_{j,k_1}$  peut continuer sur la voie parallèle et emprunter l'autoroute en  $j_1$ .

Le cas où  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $k$  peut être traité de la même manière et nous montrons que dans ce cas, le trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$  peut emprunter aussi la voie parallèle de  $j$  à  $k_1$ .

Le lemme 2 nous donne une indication pour le choix de la stratégie de régulation dans le cas où l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée.

Ce lemme est fondamental pour démontrer que, dans ce cas, l'autoroute peut ne pas supporter de pénalités.

On verra plus tard l'utilité importante de ce lemme pour déterminer la régulation optimale dans quelques cas particuliers.

### 5.3.2 : Theorème 1 :

Sous l'hypothèse  $H_0$  il existe une solution optimale du problème  $\mathcal{P}$  telle que  $B_j = 0$  pour tout  $j$ .

#### Démonstration :

Puisque l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée, on peut supposer que toute affectation du trafic vérifie le lemme 2.

Pour démontrer le théorème, nous supposons que le système se trouve à l'équilibre de Wardrop avec une

pénalité  $B_k > 0$  sur le tronçon autoroutier  $(k, k+1)$ , et nous montrons qu'on peut supprimer cette pénalité  $B_k$  du tronçon  $(k, k+1)$  et la faire déplacer sur quelques accès critiques, en respectant toujours le principe de Wardrop et sans que la qualité de circulation soit dégradée.

Les accès non utilisés par le trafic sont supposés fermés (i.e. de capacité nulle).

On conserve la même affectation du trafic dans le système, et on définit un nouveau système de pénalité de la manière suivante :

1) S'il existe un noeud  $j$  et un noeud  $l$  vérifiant  
 $j < k < l$   
et tel qu'il existe un trafic  $\tilde{x}_{j,l}$  empruntant la voie parallèle de  $j$  à  $l$  (notons que d'après le lemme 2, tout trafic  $x_{j,l'}$ ,  $l' < l$  emprunte la voie parallèle), alors :

mettre la pénalité  $B_k$  sur l'accès  $j$ .

(i.e. la pénalité sur l'accès  $j$  devient  $b_j + B_k$ )

2) S'il existe quatre noeuds  $j, l, m, n$  vérifiant

$$j \leq l \leq k \leq m \leq n, \quad m \geq k+1, \quad n \geq k+1$$

et deux trafics  $\tilde{x}_{l,m}$  et  $\tilde{x}_{j,n}$  tels que :

-  $\tilde{x}_{j,n}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $l$  et emprunte ensuite l'autoroute à partir de  $l$  ;

-  $\tilde{x}_{1,m}$  emprunte la voie parallèle de 1 à  $k+1$  ;

alors :

mettre la pénalité  $B_k$  sur l'accès j.

- 3) Supprimer la pénalité  $B_k$  sur le tronçon autoroutier ( $k, k+1$ ).
- 4) Garder les autres pénalités telles qu'elles sont définies dans la solution précédente.

REMARQUE 2 : Si un accès j porte une pénalité  $B_k$ , alors tout accès i, tel que  $j < i \leq k$ , porte également cette pénalité.

Nous allons montrer dans la suite que la solution précédente, avec les nouvelles pénalités, vérifie le principe de Wardrop et de coût total inférieur.

Pour ce faire, nous montrons que dans le corridor muni du nouveau système de pénalités, tout itinéraire utilisé par un trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$  ( $\tilde{x}_{j,k_1}$  est un trafic au noeud j,  $j < k$  de destination  $k_1 \geq j$ ) possède un coût inférieur ou égal à celui de la solution précédente et il est l'itinéraire de coût minimum ressenti par ce trafic.

a.  $\tilde{x}_{j,k_1}$  est de destination  $k_1$ ,  $k_1 > k+1$  et  $\tilde{x}_{j,k_1}$  emprunte l'autoroute en  $j_1$  tel que  $j \leq j_1 \leq k$

a.1. Si l'accès  $j_1$  ne porte pas la pénalité  $B_k$ , alors dans ce cas, le coût de l'itinéraire utilisé par  $\tilde{x}_{j,k_1}$  a diminué de  $B_k$ . Le coût de tout itinéraire entre les noeuds j et  $k+1$  a ou bien

diminué de  $B_k$ , ou bien il a la même valeur que dans la solution précédente.

Par conséquent, l'itinéraire choisi par le trafic  $x_{j,k_1}$  reste encore de coût minimum.

a.2. Si l'accès  $j_1$  porte la pénalité  $B_k$ , alors d'après 2) et d'après la remarque 2, tout accès  $i$  (utilisé), tel que  $j < i \leq k$  porte la pénalité  $B_k$ . Donc, tout itinéraire entre les noeuds  $j$  et  $k_1$  possède le même coût que celui de la solution précédente.

L'itinéraire emprunté par  $\tilde{x}_{j,k_1}$  reste donc le plus rapide ressenti par ce trafic.

b.  $\tilde{x}_{j,k_1}$  est de destination  $k_1 \leq k+1$  et  $\tilde{x}_{j,k_1}$  emprunte l'autoroute à partir de  $j_1$  tel que  $j \leq j_1 < k_1$ .

Dans ce cas, l'accès  $j_1$  ne porte pas la pénalité  $B_k$  (car sinon, on contredit le lemme 2) et le coût de l'itinéraire utilisé par  $\tilde{x}_{j,k_1}$  n'a pas changé. Le coût de tout autre itinéraire entre  $j$  et  $k_1$  a ou bien augmenté de  $B_k$ , ou bien il a la même valeur. Cet itinéraire est donc celui de coût minimum ressenti par  $\tilde{x}_{j,k_1}$ .

c.  $\tilde{x}_{j,k_1}$  est de destination  $k_1 > k+1$  et  $\tilde{x}_{j,k_1}$  emprunte l'autoroute en  $j_2$  tel que  $k \leq j_2 < k_1$  où  $\tilde{x}_{j,k_1}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $k_1$ .

Dans les deux cas, tous les accès entre  $j$  et  $k$  portent la pénalité  $B_k$  et tout itinéraire entre  $j$  et  $k_1$  possède le même coût que dans la solution précédente.

L'itinéraire choisi par le trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$  reste donc de coût minimum.

- d. Si  $\tilde{x}_{j,k_1}$  est de destination  $k_1 < k+1$  et  $\tilde{x}_{j,k_1}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $k_1$ , cet itinéraire choisi par  $\tilde{x}_{j,k_1}$  reste également de coût minimum.

C. Q. F. D.

Le théorème ci-dessus montre que dans le cas où l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée, la régulation optimale du corridor se ramène au contrôle des accès de l'autoroute, et elle permet à la circulation de demeurer fluide sur cette dernière. Par conséquent, la régulation dans ce cas consiste à déterminer un système de capacités sur les entrées (ce qui revient à limiter les débits sur ces dernières) de telle sorte que l'auto-répartition du trafic dans le système soit de coût réel total minimum.

Cette régulation (i.e. en supposant l'hypothèse  $H_0$ ) n'est pas en général optimale comme le montre l'exemple suivant :

### 5.3.3 Exemple de régulation avec des pénalités sur l'autoroute

On considère le corridor suivant, Fig. 19

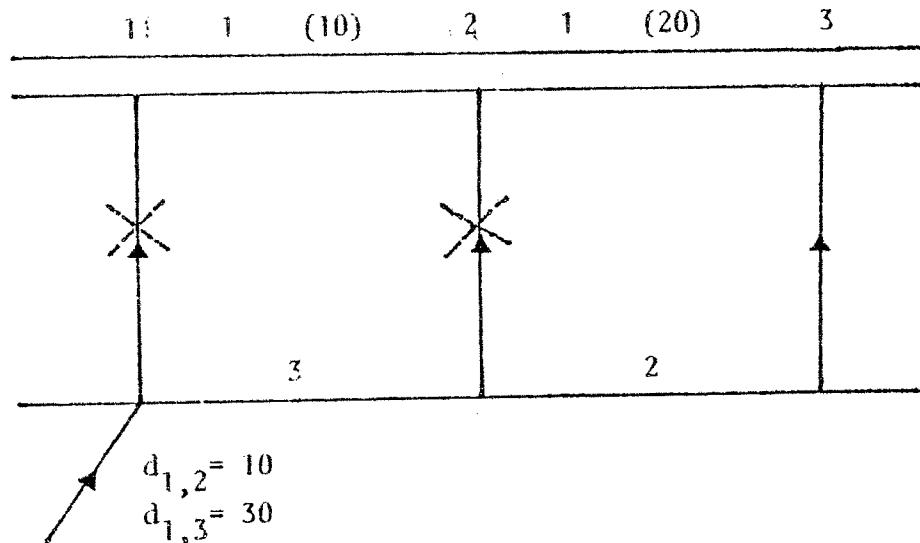


Fig. 19

Ce corridor comporte deux tronçons  $(1,2)$  et  $(2,3)$  de capacités respectives 10 et 20. Les temps de parcours à vide sur ces tronçons sont :

$$T_{1,2} = 1, \quad T_{2,3} = 1, \quad t_{1,2} = 3 \text{ et } t_{2,3} = 2.$$

Les demandes de trafic sur ce corridor sont :

$$d_{1,3} = 30 \quad \text{et} \quad d_{1,2} = 10$$

Vu les restrictions de capacités sur l'autoroute, 10 usagers au moins du trafic  $d_{1,3}$  sont obligés d'emprunter la voie parallèle.

Par conséquent, dans le cas où l'autoroute ne supporte pas de pénalités (l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée), d'après le lemme 2, tout le trafic (i.e.  $d_{1,3}$  et  $d_{1,2}$ ) peut

toujours emprunter la voie parallèle pour se rendre à sa destination, et la régulation optimale dans ce cas consiste à fermer les accès 1 et 2 de l'autoroute.

Le temps total de parcours sera donc :

$$\tau = 10 \times 3 + 30 \times 5 = 180$$

Cette régulation n'est pas optimale.

En effet, si on impose sur le tronçon autoroutier (2,3) une pénalité  $B_2 = 3$  (i.e. on fait augmenter le temps de parcours sur ce tronçon à 4).

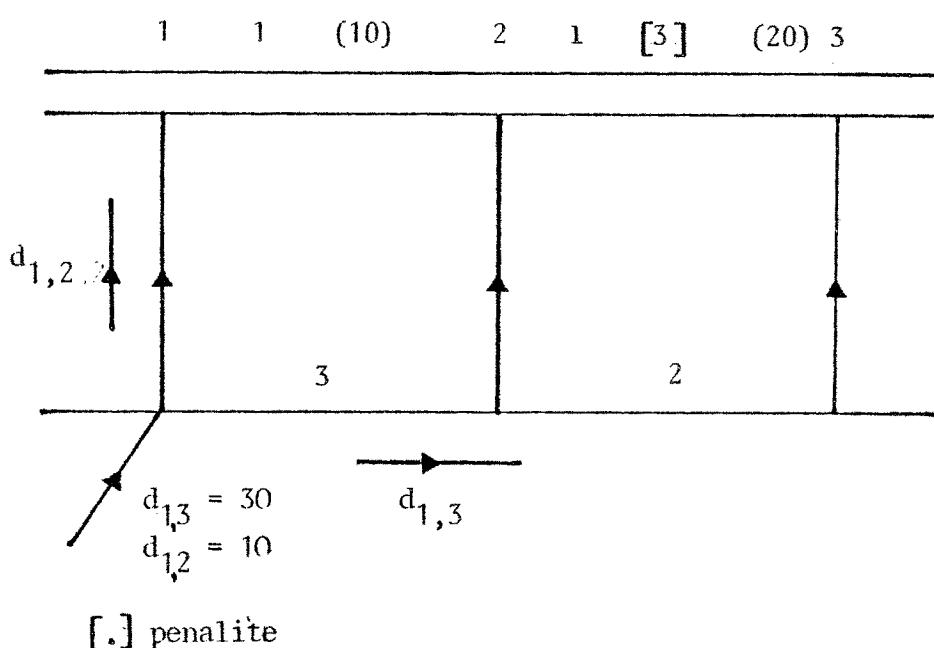


Fig. 20

Dans ce cas, d'après le lemme 1, le trafic  $d_{1,3}$  emprunte la voie parallèle. Par contre, le trafic  $d_{1,2}$  emprunte l'autoroute qui est pour lui de coût minimum.

Le temps total passé dans le corridor sera dans ce cas égal à 160.

Un gain de 20 unités de temps est donc réalisé par cette régulation qui est optimale.

On remarque d'après cet exemple que dans le cas où l'hypothèse  $H_0$  n'est pas vérifiée (le temps de parcours sur le tronçon routier (2,3) dépasse le temps de parcours sur le tronçon de la voie parallèle correspondant), l'affectation optimale ne vérifie pas parfois le lemme 2.

On remarque aussi que même dans le cas où les capacités sur l'autoroute sont croissantes, la régulation optimale impose parfois des pénalités sur l'autoroute.

Cette exemple constitue aussi un contre-exemple pour la régulation de PAYNE et THOMPSON dans laquelle l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée. Dans ce cas, la régulation optimale pour PAYNE et THOMPSON correspond à la première régulation donnée (sans pénalité sur l'autoroute) où le temps de parcours total est égal à 180 (au lieu de 160 pour la solution optimale).

Dans le reste de l'étude, on suppose que l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée (on suppose par conséquent que toute affectation donnée du trafic vérifie le lemme 2, et que l'autoroute ne supporte pas de pénalités).

#### 5-4 - Affectation du plus près au plus loin

Définition :

On appelle affectation du plus près au plus loin, l'affectation telle que :

$P_1$ ) Le lemme 2 est vérifié.

$P_2$ ) Si  $i < j$ , alors un trafic d'origine i s'affecte dans le corridor ayant un trafic d'origine j.

P<sub>3</sub>) L'affectation d'un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  se fait de la manière suivante : si la réserve de capacité sur le tronçon (j, k) est suffisante pour absorber  $\tilde{x}_{j,k}$ , alors  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute, sinon,  $\tilde{x}_{j,k}$  continue sur la voie parallèle.

Dans la suite, nous allons montrer que sous l'hypothèse H<sub>0</sub>, dans des cas particuliers, la régulation optimale correspond à l'affectation du plus près au plus loin.

Nous commençons par présenter deux lemmes fondamentaux.

#### 5-4-1 - Deux lemmes fondamentaux

---

LEMME 3 : Etant donnée une affectation de trafic vérifiant le principe de Wardrop, s'il existe quatre noeuds j, j<sub>1</sub>, l, k vérifiant

$$j < j_1 < l < k$$

et deux trafics  $\tilde{x}_{j,k}$  et  $\tilde{x}_{j,l}$  tels que

- $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en j ;
- $\tilde{x}_{j,l}$  emprunte l'autoroute en j<sub>1</sub> (Fig. 21)

Alors,

si  $\tilde{x}_{j,k}$  change d'itinéraire et emprunte l'autoroute en j<sub>1</sub>, l'affectation ainsi obtenue vérifie le principe de Wardrop, et elle est de même coût marginal.

Démonstration :

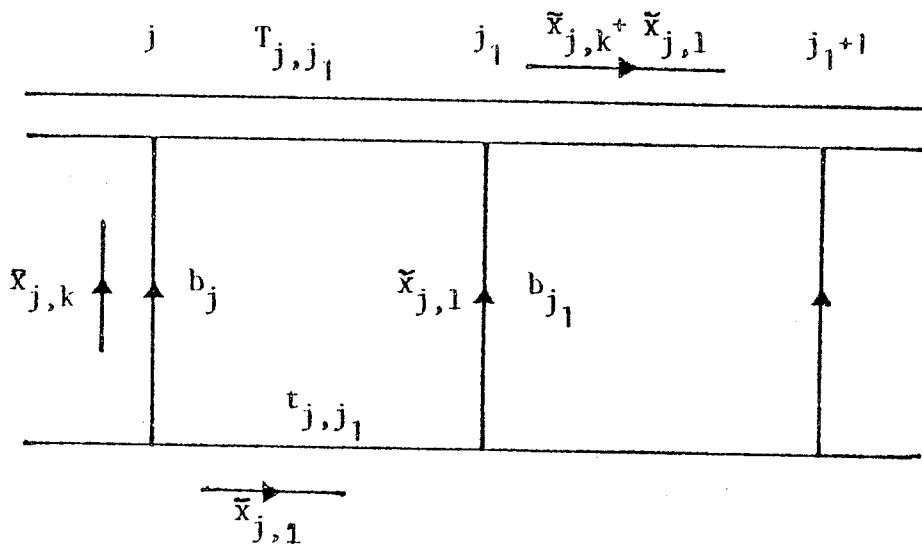


Fig. 21

D'après le principe de Wardrop, on a :

$$b_j + T_{j,j_1} = t_{j,j_1} + b_{j_1} \quad (5,7)$$

Etant donné que la capacité sur la voie parallèle est infinie, donc d'après (5,7) le trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$  peut continuer sur la voie parallèle et emprunter l'autoroute à partir de  $j_1$ . Dans ce cas  $\tilde{x}_{j,k_1}$  passe le même temps de parcours et le système reste donc à l'équilibre de Wardrop.

LEMME 4 : Etant donné une affectation de trafic vérifiant le principe de Wardrop, s'il existe trois noeuds  $j, j_1, k$  vérifiant

$$j < j_1 \leq k$$

et un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  tel que :

- $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j_1$ .
- La réserve de capacité sur le tronçon autoroutier  $(j, j_1)$  peut absorber le trafic  $\tilde{x}_{j,k_1}$ , (Fig. 22)

Alors,

si au lieu de  $j_1$ ,  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j$ , l'affectation ainsi obtenue possède à l'équilibre de Wardrop le même coût marginal.

Démonstration :

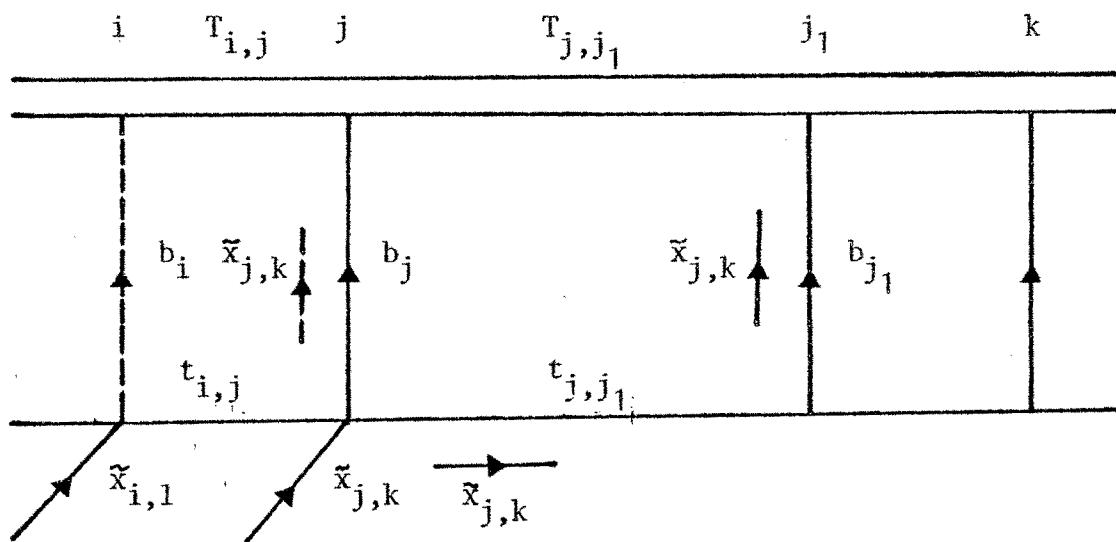


Fig. 22

Il suffit de montrer qu'à l'équilibre de Wardrop, on peut avoir :

$$b_j + T_{j,j_1} = t_{j,j_1} + b_{j_1} \quad (5,8)$$

Dans ce cas  $\tilde{x}_{j,k}$  peut emprunter l'autoroute en  $j_1$ , et passe sur le nouvel itinéraire le même temps de parcours.

a. S'il existe un trafic  $f_j$  ( $f_j > 0$ ) qui emprunte l'autoroute en  $j$ ,

alors, d'après le lemme 2

$$f_j = \sum_{k>j_1} f_{j,k}$$

Donc, il existe au moins un trafic  $f_{j,k} > 0$  tel que  $k > j_1$ .

D'après le principe de Wardrop, l'équation (5,8) est donc vérifiée.

b. Sinon, alors l'accès  $j$  n'est pas utilisé par l'affection. On montrera que si on pose  $b_j$  tel que  $b_j$  vérifie l'équation (5,8), l'affection dans ce cas vérifie le principe de Wardrop.

Pour cela, il suffit de montrer qu'un itinéraire emprunté par un trafic  $\tilde{x}_{i,l}$  tel que  $i \leq j$  et  $l > j$  reste de coût minimum (c'est-à-dire de coût inférieur ou égal à  $t_{i,j} + b_j + T_{j,l}$ ).

b.1. Supposons que  $\tilde{x}_{i,l}$  emprunte l'autoroute en  $i$ . Puisque le système est à l'équilibre de Wardrop, on a donc :

$$b_i + T_{i,l} \leq t_{i,l} \quad \text{si } l \leq j_1$$

$$\leq t_{i,j_1} + b_{j_1} + T_{j_1,l} \quad \text{si } l > j_1$$

Si  $b_j$  vérifie (5,8), alors on peut vérifier simplement (en supposant que l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée) que dans les deux cas (i.e.  $i < j_1$  et  $i > j_1$ ) on a :

$$b_i + T_{i,1} \leq t_{i,j} + b_j + T_{j,1}$$

b.2. Si le trafic  $\tilde{x}_{i,1}$  emprunte l'autoroute en  $i_1$  tel que  $j \leq i_1 \leq j_1$ , alors, d'après le principe de Wardrop, on a :

$$b_{i_1} + T_{i_1,j_1} = t_{i_1,j_1} + b_{j_1}$$

$$= b_j + T_{j,i_1} + T_{i_1,j_1} - t_{j,i_1}$$

donc

$$t_{i,i_1} + b_{i_1} + T_{i_1,1} = t_{i,j} + b_j + T_{j,1}$$

b.3. Si  $\tilde{x}_{i,1}$  emprunte l'autoroute en  $i_1$ , tel que  $i_1 > j_1$ , on peut montrer de la même manière que

$$t_{i,i_1} + b_{i_1} + T_{i_1,1} = t_{i,j} + b_j + T_{j,1}$$

b.4. Si  $\tilde{x}_{i,1}$  emprunte la voie parallèle de  $i$  à 1, on peut montrer également que :

$$t_{i,1} \leq t_{i,j} + b_j + T_{j,1}$$

C. Q. F. D.

D'après les lemmes 3 et 4, on déduit le théorème suivant :

Théorème 2 : Etant donnée une affectation de trafic vérifiant le principe de Wardrop et telle que :

a) Il existe un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  qui emprunte l'autoroute en  $j_1$  tel que  $j < j_1 < k$ .

b) Il existe des trafics  $f_{i_1}, \dots, f_{i_r}$  qui empruntent l'autoroute respectivement en  $i_1, \dots, i_r$  tels que :

$$j < i_1 < i_2 < \dots < i_r < j_1$$

c) Sans les trafics  $f_{i_m}$   $m = 1, \dots, r$ , la réserve de capacité sur le tronçon autoroutier  $(j, j_1)$  est suffisante pour absorber le trafic  $\tilde{x}_{j,k}$

Alors,

si on modifie l'affectation de telle manière que :

-  $\forall m$ ,  $f_{i_m}$  emprunte l'autoroute en  $j_1$ ,

-  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j$ .

L'affectation ainsi obtenue possède à l'équilibre de Wardrop le même coût marginal.

5-4-2- Cas où l'affectation du plus près au plus

loin est optimale

Théorème 3 : Supposons que l'affectation du plus près au plus loin est telle que, s'il existe un trafic  $\tilde{x}_{j,k}$  qui emprunte l'autoroute en  $j$ , alors tout trafic d'origine  $j_1$ , telle que  $j_1 > j$  a une destination  $k_1$  vérifiant  $k_1 \leq k$ ,

alors l'affectation du plus près au plus loin est optimale.

Démonstration :

Soit  $\tilde{x}_{j,k}$  un trafic qui emprunte l'autoroute en  $j$  dans l'affectation du plus près au plus loin.

Supposons que dans la solution optimale  $\tilde{x}_{j,k}$  n'emprunte pas l'autoroute en  $j$ , donc d'après le théorème 2  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte la voie parallèle de  $j$  à  $k$  (car si  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j_1$ ,  $j_1 > j$  puisque dans ce cas, les conditions  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) du théorème 2 sont vérifiées, alors on peut se ramener au cas où  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j$ , sans que le temps total dans le système soit dégradé).

Puisque tout trafic d'origine  $j_1$ , telle que  $j_1 > j$  est de destination  $k_1$  vérifiant  $k_1 \leq k$ , alors d'après le lemme 2, tout le trafic en aval de  $j$  emprunte la voie parallèle pour se rendre à sa destination. Or dans ce cas, la réserve de capacité sur le tronçon autoroutier ( $j, k$ ) reste suffisante pour absorber  $\tilde{x}_{j,k}$  (car  $\tilde{x}_{j,k}$  emprunte l'autoroute en  $j$  dans l'affectation du plus près au plus loin).

Par conséquent  $\tilde{x}_{j,k}$  peut emprunter l'autoroute en  $j$  et à l'équilibre de Wardrop cette affectation possède un temps total de parcours inférieur.

Donc, on aurait intérêt dans la régulation optimale à envoyer  $\tilde{x}_{j,k}$  sur l'autoroute à partir de  $j$ .

REMARQUE 3 : Dans le cas où le corridor comporte plusieurs origines et une destination, l'affectation du plus près au plus loin est optimale.

Ceci est simple à vérifier à partir du théorème ci-dessus

!

Dans ce qui suit, nous présentons l'exemple numérique traité par PAYNE et THOMPSON dans [14].

Nous montrons que l'affectation du plus près au plus loin correspond dans ce cas à l'affectation optimale. Nous montrons de même que les deux solutions données dans [14] possèdent le même coût réel de parcours, ce coût est aussi égal au coût de l'affectation du plus près au plus loin.

## 5.5 EXEMPLE DE PAYNE ET THOMPSON

### 5.5.1 Présentation de l'exemple

On considère le corridor ci-dessous, Fig. 23 comportant quatre échangeurs ( $N = 4$ ).

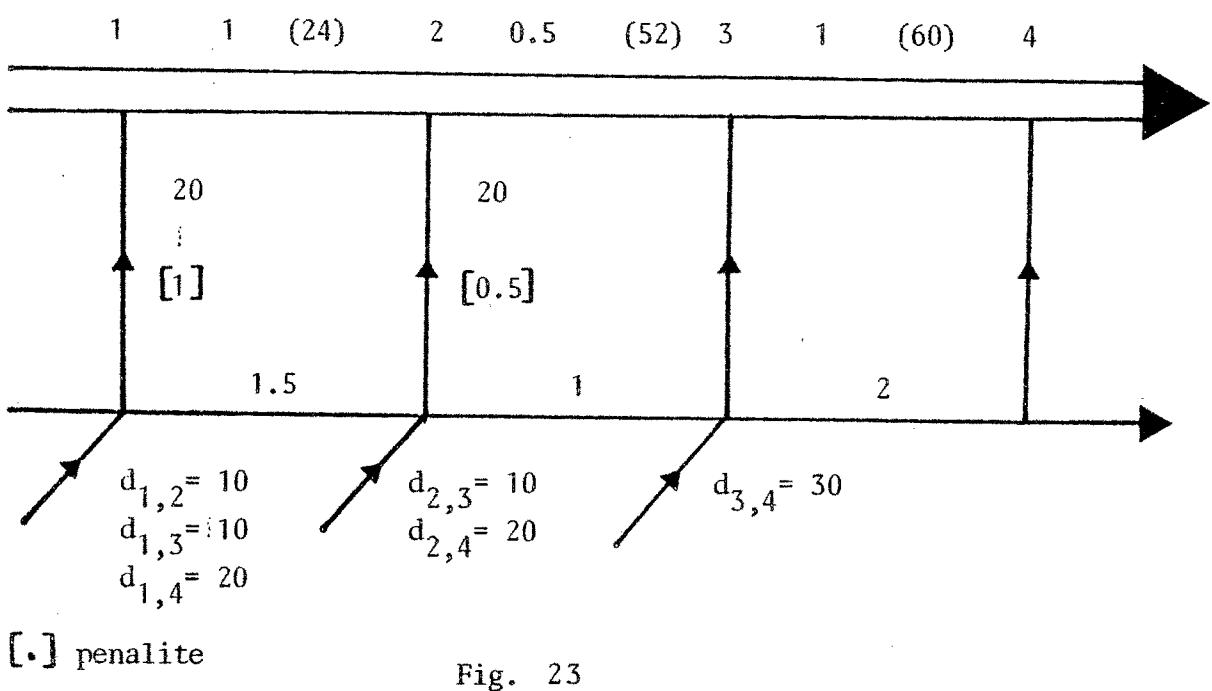


Fig. 23

Les demandes de trafic sont données sur la voie parallèle à côté des origines. Le chiffre sur chaque tronçon correspond au coût de parcours à vide sur ce tronçon. Les capacités des tronçons autoroutiers sont toutes égales à 120. On suppose que sur l'autoroute circule un trafic constant

$$q_{12} = 28, \quad q_{13} = 8, \quad q_{14} = 60,$$

$q_{ij}$  circule sur l'autoroute de  $i$  à  $j$ .

Les réserves de capacités sur ces tronçons deviennent donc respectivement :

$$c_1 = 24, \quad c_2 = 52, \quad c_3 = 60$$

#### 5.5.2 Solution donnée par l'affectation du plus près au plus loin

On suppose que l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée. L'affectation du plus près au plus loin est donnée par :

$d_{14}$  emprunte l'autoroute à l'entrée 1

$d_{24}$  emprunte l'autoroute à l'entrée 2.

Le reste du trafic emprunte la voie parallèle.

Cette affectation vérifie les conditions du théorème précédent. Elle est donc optimale.

La régulation dans ce cas consiste donc à limiter les capacités des entrées 1 et 2 à 20 et à fermer l'entrée 3.

À l'équilibre de Wardrop, les entrées 1 et 2 supportent respectivement les pénalités  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 0,5$ .

Le coût total de cette affectation est égal à 220.

Le temps passé par le trafic supposé constant sur l'autoroute est égal à 190.

Le temps total de parcours est donc :

$$\tau = 220 + 190 = 410$$

### 5.5.3 Les deux solutions de PAYNE et THOMPSON

La solution donnée par la méthode heuristique dans [14] correspond à l'affectation :

$d_{1,4} + d_{2,4}$  empruntent l'autoroute à l'accès 2  
et le reste du trafic emprunte la voie  
parallèle.

Cette affectation impose à l'accès 2 une pénalité  
 $b_2 = 0,5$ .

Le temps total de parcours passé dans le système  
par cette affectation est  $\tau = 410$ .

La solution optimale proposée dans [14] est donnée par :

- $d_{1,4} + d_{2,4}$  empruntent l'autoroute en 2.
- 12 usagers du trafic ( $d_{1,3} + d_{2,3}$ ) empruntent  
l'autoroute en 2.
- 20 usagers du trafic  $d_{3,4}$  empruntent l'auto-  
route en 3.
- Le reste du trafic emprunte la voie parallèle.

A l'équilibre de Wardrop, les entrées 2 et 3 supportent respectivement les pénalités  $b_2 = 0,5$  et  $b_3 = 1$ .

Le temps total passé dans le système par cette affectation est aussi  $\tau = 410$ .

#### 5.5.4 Discussion des solutions proposées

Les trois régulations proposées ci-dessus conduisent les usagers à passer dans le système le même temps réel de parcours.

On voit bien que les deux méthodes proposées par PAYNE et THOMPSON donne en réalité (pour cet exemple) la même solution. La différence qu'ils ont soulevée entre les deux solutions dans [14] vient du fait qu'ils ont tenu compte du temps de parcours à vide sur les accès pour déterminer les pénalités

$$b_j \quad (b_j = \frac{\lambda_j}{f_j} + \theta_j)$$

alors qu'ils n'en ont pas tenu compte dans le calcul de la performance.

Par conséquent, on peut se demander si les deux méthodes proposées dans [14] conduisent toujours ou non à la même solution réelle et si l'heuristique peut donner ou non des solutions meilleures que l'affectation du plus près au plus loin.

On remarque aussi d'après cet exemple l'efficacité pratique du corollaire précédent du fait qu'on a pu déterminer facilement et sans calcul la régulation optimale correspondant à cet exemple.

Dans la suite, nous allons montrer que la régulation du plus près au plus loin n'est pas toujours optimale.

5.6 LA REGULATION DU PLUS PRES AU PLUS LOIN N'EST PAS TOUJOURS OPTIMALE

Si l'affectation du plus près au plus loin est toujours optimale sous l'hypothèse  $H_0$ , le problème de régulation des accès de l'autoroute sera dans ce cas très simple à résoudre. Mais cette régulation ne l'est pas en général, même dans le cas où l'hypothèse  $H_0$  est vérifiée, comme le montre l'exemple ci-dessous. Elle peut être néanmoins considérée comme une heuristique de résolution.

On considère le corridor suivant. Fig. 24

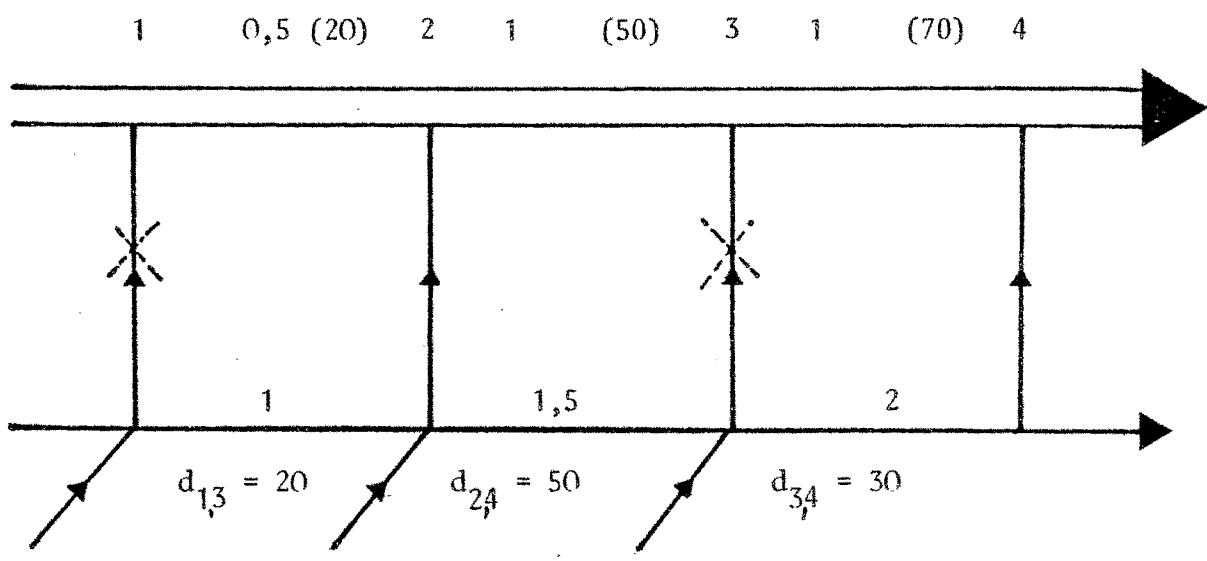


Fig. 24

Ce corridor comporte quatre échangeurs 1, 2, 3, 4. Le chiffre indiqué sur chaque tronçon représente le coût de parcours à vide sur ce tronçon.

Les demandes de trafic sont :

$$d_{1,3} = 20, \quad d_{2,4} = 50 \quad \text{et} \quad d_{3,4} = 30.$$

Les capacités des tronçons autoroutiers sont respectivement :

$$c_1 = 20, \quad c_2 = 50 \quad \text{et} \quad c_3 = 70.$$

L'affectation du plus près au plus loin est donnée par :

- $d_{1,3}$  emprunte l'autoroute à l'entrée 1 ;
- $d_{2,4}$  et  $d_{3,4}$  empruntent la voie parallèle.

On remarque que cette affectation ne vérifie pas les conditions du corollaire précédent (la destination de  $d_{2,4}$  et de  $d_{3,4}$  est au-delà de la destination de  $d_{1,3}$ ).

Le coût total de cette affectation est égal à 265.  
Cette affectation n'est pas optimale.

En effet, si on ferme les axes 1 et 3 de l'autoroute, l'affectation du trafic dans ce cas correspond à :

- $d_{2,4}$  emprunte l'autoroute ;
- $d_{1,3}$  et  $d_{3,4}$  empruntent la voie parallèle.

A l'équilibre de Wardrop, l'accès 2 supporte une pénalité  $b_2 = 0,5$  et le coût total est 235.

Un gain de 30 unités de temps est donc réalisé après cette régulation.

On peut vérifier que cette régulation est optimale.

On remarque qu'en l'absence de toute régulation, le trafic s'affecte de telle manière que chaque tronçon de l'autoroute se trouve à la saturation. Ce qui correspond à l'affectation de coût minimum.

Dans ce cas, cette affectation est donnée par :

- $d_{1,3}$  emprunte l'autoroute à l'entrée 1 ;
- 30 usagers du trafic  $d_{2,4}$  empruntent l'autoroute à l'entrée 2 ;
- 20 usagers du trafic qui reste empruntent l'autoroute à l'accès 3.

Cette affectation conduit à la saturation des trois tronçons autoroutiers, et à l'équilibre elle leur fait ressentir les pénalités respectives :

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0,5, \quad B_3 = 1.$$

Ceci car on a supposé que les accès ont des capacités infinies (chaque bretelle a une capacité suffisante de stockage).

Le temps réel total passé dans ce cas par les usagers est égal à 275.

La régulation optimale a donné un gain de 40 unités de temps, alors que la régulation du plus près au plus loin n'a donné qu'un gain de 10 unités.

## CONCLUSION

Les méthodes mises au point par la régulation d'un réseau à une origine et une destination ou plusieurs origines et une destination devraient s'avérer relativement efficaces. Il convient pour s'en assurer, d'effectuer des tests sur des réseaux divers assez proche de la réalité.

Dans le cas général de plusieurs origines et plusieurs destinations, l'optimum semble difficile à atteindre, et il faut plutôt s'orienter vers la recherche de bonnes heuristiques.

On a remarqué par exemple que si le trafic est fixé, il suffisait de résoudre un programme linéaire pour atteindre la régulation optimale.

Il serait intéressant de le faire sur des réseaux réels, d'autant que cette hypothèse est couramment faite par les praticiens qui supposent que la régulation ne modifie guère l'affectation. Cette simulation permettrait d'obtenir des ordres de grandeur sur les gains de temps obtenus par une bonne régulation.

Un autre axe de recherche consiste à partir des algorithmes mis au point dans le cas de plusieurs origines et une destination pour en déduire un algorithme sous-optimal dans le cas général.

Pour le cas particulier du corridor, notre étude de [14] montre que dans les cas usuels, la politique consistant à faire entrer le plus tôt possible sur la voie rapide les usagers allant le plus loin possible, est en général la meilleure possible, et presque toujours une bonne solution.

Mais que dans le cas de restrictions importantes de capacité sur la voie rapide (accident, travaux) les hypothèses de [14] ne sont plus vérifiées, et le problème devient plus complexe.

En particulier, comme nous l'avons montré, la régulation optimale peut conduire dans ces cas à restreindre les capacités de certains tronçons de la voie rapide en amont du tronçon "accidenté".

On peut s'interroger, enfin, sur les retombées pratiques des modèles mathématiques étudiés, alors que les hypothèses sur lesquelles ils reposent simplifient beaucoup le réel.

Il ne faut pas en attendre, à notre avis, un outil de régulation en temps réel pour des cas concrets, mais ils peuvent permettre de répondre à des questions intéressant les praticiens, comme par exemple :

- Quelles politiques générales peuvent être appliquées dans des cas types (ex. : accident sur autoroute) ?
- Quel gain de temps peut-on espérer par une régulation dans des réseaux complexes ?
- Y-a-t-il réaffectation importante des usagers dans le cas de certaines régulations ?

En résumé, ces modèles nous paraissent constituer plus des outils "pédagogiques" permettant au praticien de mieux cerner la réalité complexe d'un système routier plutôt que des outils directement opérationnels.

REFERENCES

[1] R. AKCELIK

A graphical explanation of the two principles and two techniques of traffic assignment.

[2] R. AKCELIK

A mathematical analysis of route control. Communication.  
International Symposium on transportation and traffic theory.  
Kyoto 1977.

[3] R. AKCELIK & M.J. MAHER

Route control of traffic in urban road networks.  
Transp. Res. Vol. 11, pp. 15-24.

[4] P.H. FARGIER

Institut de Recherche des Transports. (Communication orale).

[5] C. FISK

More paradoxes in the equilibrium assignment problem.  
Transp. Res. Vol. 13 B, pp 305-309.

[6] C. FISK & S. PALLOTINS

Paradoxes equilibrium traffics assignment and their implications  
for the network design problem.  
Université de Montréal. Centre de recherche sur des transports.  
Publication # 144 (1979).

[7] J. FONLUPT, A.R. MAHJOUB et J.P. UHRY

Amélioration de l'écoulement du trafic routier par des restrictions de capacité : approche théorique.  
R.R. n° 223, I.M.A.G.

- [8] M.A. HALL  
Properties of the equilibrium state in transportation network  
Transp. Science, Vol. 12, n° 3, 1978.
- [9] E. LAWLER  
Combinatorial optimization : Networks and Matroids.  
Holt. Rinchart and Winston, New-York, 1976.
- [10] J.L. KENNINGTON  
A survey of linear multicommodity network flows.  
Operations research, Vol. 26, n° 2, 1978.
- [11] J.M. MORIN  
Le contrôle d'accès dans les corridors autoroutiers urbains saturés.  
Institut de recherche des transports (Paris 1979).
- [12] J.D. MURCHLAND  
Braess's paradox of traffic flow. Transp. Res., Vol. 4,  
pp 391-394.
- [13] R. PAQUIN, J.J. HNERY et M. LEGLISE  
Stratégies de commande de réseaux urbains saturés.  
AFCET, Traffic Control and Transportation System (1974).
- [14] H.J. PAYNE & W.A. THOMPSON  
Allocation of freeway Ramp Metering volumes to optimize  
corridor performance.  
Transaction on automatic control, Vol. 1c-19 n° 3, June 1974.
- [15] M.J. SMITH  
Traffic control and route choice ; A simplet example.  
Transp. Res., Vol. 13 B, pp 289-294.

[16] M.J. SMITH

In a road network, increasing delay locally can reduce delay globally.

[17] M.J. SMITH

The existence, uniqueness and stability of traffic equilibria.  
Transp. Res., Vol. 13 B, pp 295-304.

[18] Some theoretical aspects of road traffic research.

Proceedings of the institute of Civil engineers, Part II, 1,  
pp 325-378 (1952).

[19] J.Y. YEN

Finding the K Shortest loopless in a network.  
Management Science, Vol. 17, n° 11 (1971).

[20] P.B. ZWART

Global maximization of a convex function with linear inequality constraint.

Washington University St Louis, Missouri (1969).



**II - POLYTOPE DES ABSORBANTS  
D'UN GRAPHE A SEUIL**



## INTRODUCTION

Soit  $G = (X, E)$  un graphe à  $n$  sommets, simple, non orienté, sans boucle, dont  $X$  représente l'ensemble des sommets,  $E$  celui des arêtes. Un ensemble  $A \subseteq X$  est dit absorbant si tout sommet de  $X-A$  est adjacent à au moins un sommet de  $A$ .

On peut associer à chaque absorbant  $A$  de  $G$  son vecteur représentatif  $x^A$  dans  $\{0,1\}^n$  ( $x_i^A = 1$  si  $i \in A$ , 0 sinon). En considérant chacun de ces vecteurs comme un point de  $\mathbb{R}^n$ , on peut définir l'enveloppe convexe  $P(G)$  de ces absorbants qu'on appellera polytope des absorbants de  $G$ .

Il est en effet souvent intéressant de caractériser des structures combinatoires par l'enveloppe convexe de ses vecteurs représentatifs (cf. les travaux d'EDMONDS sur les couplages, de FULKERSON sur les graphes parfaits, de CHVATAL, UHRY et BOULALA sur les stables dans un graphe série parallèle). Ceci, à notre connaissance, n'a jamais été fait sur les absorbants d'une classe de graphes non triviale. De plus, cette caractéristation est souvent liée à des algorithmes de reconnaissance et d'optimisation polynomiaux.

Dans cette partie, nous caractérisons le polytope  $P(G)$  dans la classe des graphes absorbants à seuils définie par BENZAKEN et HAMMER [1] et, pour ce faire, nous donnons un algorithme polynomial en  $O(n)$  de construction d'un absorbant de poids minimum dans un tel graphe, alors que ce problème est NP Complet dans le cas général.

## 1 - PRÉLIMINAIRES

### Définition 1 : BENZAKEN et HAMMER [1]

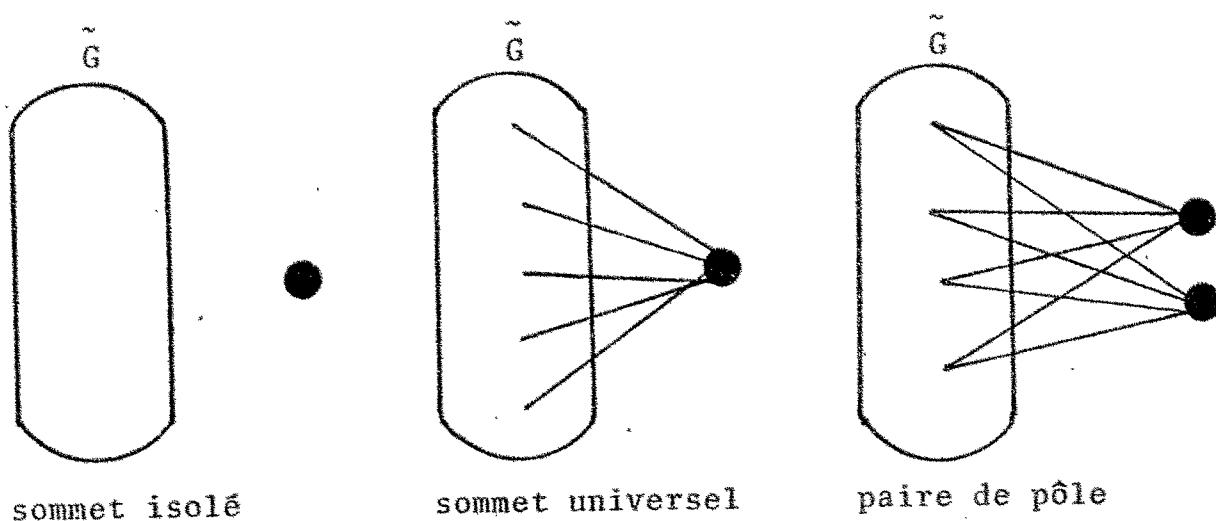
Soit  $G = (X, E)$  un graphe fini, sans boucle, simple, non orienté,  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $G$  est dit "absorbant à seuil" s'il existe des poids  $a_i \geq 0$  associés aux sommets de  $G$  et un seuil  $b \geq 0$  tel que  $A \subseteq X$  est un absorbant (ou dominant) de  $G$  si et seulement si  $\sum_{i \in A} a_i \geq b$ .

Parmi les caractérisations des graphes absorbants à seuil ([1]), nous utiliserons essentiellement la suivante :

Théorème 1 :

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1)  $G$  est absorbant à seuil,
- 2)  $G$  peut se ramener à un graphe réduit à un sommet en enchaînant un nombre fini de fois les opérations suivantes (cf. Fig. 1) :
  - $\emptyset_1$  : Supprimer un sommet isolé.
  - $\emptyset_2$  : Supprimer un sommet universel (sommet adjacent à tous les autres sommets).
  - $\emptyset_3$  : Supprimer une paire de pôles (deux sommets non liés entre eux, mais adjacents à tous les autres sommets).



$\tilde{G}$  est le graphe restant après avoir fait l'une des opérations  $\emptyset_1$ ,  $\emptyset_2$  ou  $\emptyset_3$ .

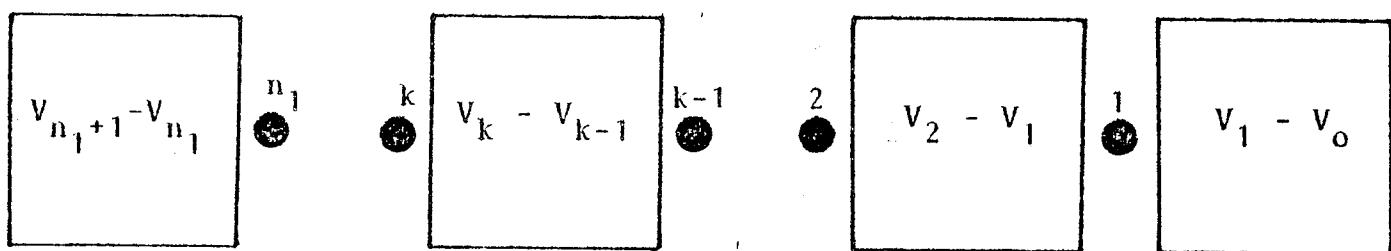
Fig. 1

Remarques : Un sommet isolé ne peut être absorbé que par des sommets universels ou paires de pôle qui lui sont adjacents. Ainsi, les sommets isolés constituent des étapes dans le "démontage" de  $G$ . Chaque étape consiste à supprimer des sommets universels et des paires de pôle adjacents à un sommet qui, par la suite, devient un sommet isolé. Autrement dit, il s'agit dans chaque étape d'enchaîner des opérations de type  $\emptyset_2$  ou  $\emptyset_3$  suivie d'une opération de type  $\emptyset_1$ .

Soit  $n_1$  le nombre d'opérations de type  $\emptyset_1$ , à faire, pour ramener  $G$  à un sommet. On numérotéra  $n_1+1$  ce sommet, et  $i$  le sommet isolé définissant la  $i$ ème opération  $\emptyset_1$ .

Pour tout sommet  $j \neq n_1+1$ , on notera  $V_j$  l'ensemble des sommets de  $G$  qui sont adjacents à  $j$  et  $V_{n_1+1} = X - \{1, \dots, n_1\}$ .

D'après ce qui précède, on peut représenter  $G$  par le schéma symbolique de la figure 2.



où  $V_k - V_{k-1} = \{i / i \in V_k \text{ et } i \notin V_{k-1}\}$

et  $V_o = \emptyset$

Fig. 2

on posera dans la suite  $W_k = V_k - V_{k-1} \quad 1 \leq k \leq n_1$

Remarque 2 : Dans la suite on considère le sommet  $n_1+1$  comme un sommet universel dans  $W_{n_1+1}$ .

Soit  $C = (C_1, \dots, C_n)$  un vecteur de  $R^n$ . On désignera par  $P(G, C)$  le problème de la recherche d'un absorbant  $A_0$  de  $G$  tel que  $\sum_{i \in A_0} C_i$  soit minimum (on dit que  $A_0$  est de poids minimum dans  $G$ ). Dans ce qui suit, nous allons donner un algorithme de résolution de  $P(G, C)$  qui exige seulement un nombre d'opérations élémentaires proportionnel à  $n$ . Pour ce faire on peut supposer que  $C_i \geq 0$  pour  $i \in X$ , car les sommets ayant des poids négatifs appartiennent forcément à  $A_0$ .

## 2 - ALGORITHME DE RESOLUTION DE $P(G, C)$

### 2-1 - Algorithme

On notera  $(V_k)_u$  et  $(W_k)_u$  (resp.  $(V_k)_p$  et  $(W_k)_p$ ) les ensembles de sommets universels (resp. paires de pôles) de  $V_k$  et  $W_k$ . Pour  $k = 1, \dots, n_1+1$ , soit  $p_k$  (resp.  $u_k$ ) un sommet de  $(W_k)_p$  (resp.  $(W_k)_u$ ) tel que  $C_{p_k} = \min\{C_i / i \in (W_k)_p\}$  (resp.  $C_{u_k} = \min\{C_i / i \in (W_k)_u\}$ ). Soient  $i_k^*$  et  $j^*$  respectivement les sommets tels que  $C_{i_k^*} = \min\{C_i / i = k, \dots, n_1\}$  et  $C_{j^*} = \min\{C_i / i \in \{p_1, \dots, p_{n_1+1}, u_1, \dots, u_{n_1+1}\}\}$  et soit  $k_0$  tel que  $j^* \in W_{k_0+1}$ .

D'après les notations précédentes, l'absorbant  $A_0$  de poids minimum parmi les absorbants suivants est solution de  $P(G, C)$ .

- a)  $\{1, 2, \dots, r-1, p_r, j^*\} \quad r = 1, \dots, k_0$
- b)  $\{1, 2, \dots, r-1, u_r\} \quad r = 1, \dots, k_0+1$
- c)  $\{1, 2, \dots, r-1, p_r, i_r^*\} \quad r = 1, \dots, k_0$
- d)  $\{1, 2, \dots, k_0, p_{k_0+1}, s\}$

où  $s$  est un sommet tel que

$$c_s = \min\{c_i / i \in (W_{k_0+1})_p - \{p_{k_0+1}\} \cup (v_{n_1+1} - v_{k_0+p}) \cup \{i^*_{k_0+1}\}\}$$

### 2-2 - Justification

Soit  $A_0$  une solution de  $P(G, C)$ , et soit  $r$  le plus petit entier compris entre 1 et  $k_0$  (s'il existe) tel que  $A_0 \cap W_r \neq \emptyset$ .

1)  $r$  existe

Donc  $\{1, 2, \dots, r-1\} \subset A_0$ . Si  $A_0 \cap (W_r)_u \neq \emptyset$  alors  $A_0 = \{1, 2, \dots, r-1, u_r\}$ , sinon, il existe  $i \neq p_r$  tel que  $A_0 = \{1, 2, \dots, r-1, p_r, i\}$ , donc  $i \in \{i^*_r, j\}$ .

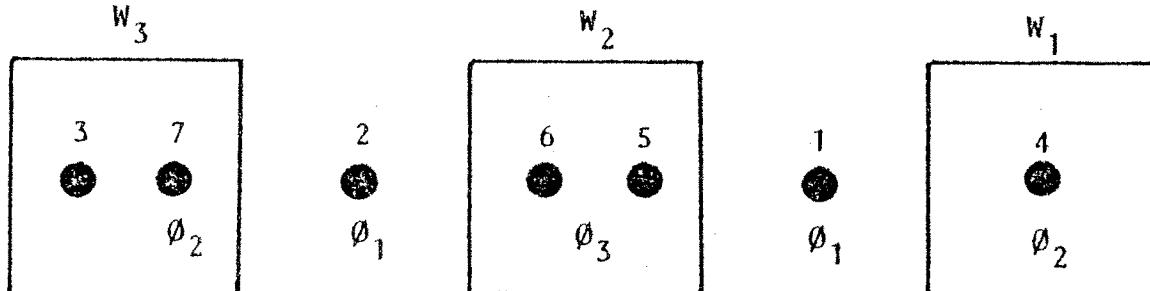
2)  $r$  n'existe pas

Donc  $A_0 \cap W_{k_0} = \emptyset$  et par suite  $\{1, 2, \dots, k_0\} \subset A_0$ .

D'après la définition de  $j^*$ , il existe dans ce cas, un absorbant  $A_0$  de poids minimum tel que  $A_0 \cap W_{k_0+1} \neq \emptyset$ , donc  $A_0 = \{1, 2, \dots, k_0, u_{k_0+1}\}$  ou bien  $A_0 = \{1, 2, \dots, k_0, p_{k_0+p}, s\}$ .

### 2-3 - Exemple

Soit  $G$  le graphe ci-dessous (Fig. 3), défini par l'enchaînement des opérations  $\emptyset_2$ ,  $\emptyset_1$ ,  $\emptyset_3$ ,  $\emptyset_1$ ,  $\emptyset_2$ .



Représentation schématique de  $G$

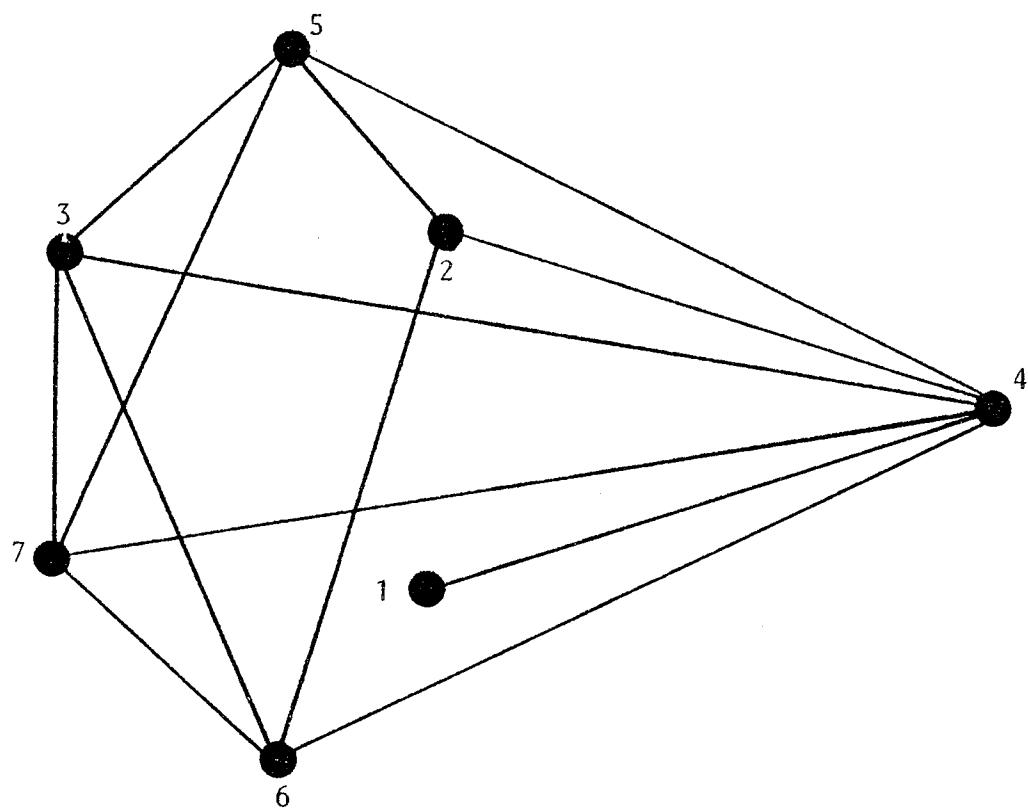


Fig. 3

On affecte aux sommets de  $G$  les poids

$$C_1 = 2, C_2 = 3, C_3 = 12, C_4 = 20, C_5 = 8, C_6 = 16, C_7 = 4.$$

D'après l'algorithme, un absorbant  $A_0$  de poids minimum dans  $G$  est parmi les absorbants  $\{4\}$ ,  $\{1, 5, 7\}$ ,  $\{1, 5, 2\}$ ,  $\{1, 2, 7\}$  donc  $A_0 = \{1, 2, 7\}$  de poids 9.

### 3 - POLYTOPE DES ABSORBANTS D'UN GRAPHE ABSORBANT A SEUIL

#### 3-1 - Une famille de facette de $P(G)$

Lemme 1 : Si  $G$  n'a pas de sommets isolés (i.e.  $V_1 \neq \emptyset$ ), alors  $P(G)$  est de pleine dimension.

Démonstration : Si  $V_1 \neq \emptyset$ , les ensembles  $X - \{i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  et l'ensemble  $X$  lui-même forment une famille de  $n+1$  absorbants affinement indépendants.

Remarque 3 : Pour caractériser  $P(G)$ , on supposera, sans perte de généralité, que  $G$  n'a pas de sommets isolés.

Définition 2 : L'inéquation  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \alpha_0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i$ , est dite

facette (face de dimension  $n-1$ ) de  $P(G)$  si et seulement si

- 1) elle est valide pour tout absorbant de  $G$  ;
- 2) il existe  $n$  absorbants affinement indépendants vérifiant cette inéquation avec égalité.

Lemme 2 : Pour tout sommet  $i \in X$ , la contrainte  $x_i \leq 1$  définit une facette de  $P(G)$ .

Démonstration : D'une part, la contrainte  $x_i \leq 1$  est satisfait par tous les absorbants d'autre part les  $n$  absorbants suivants  $X$ ,  $X - \{1\}$ , ...,  $X - \{i-1\}$ ,  $X - \{i+1\}$ , ...,  $X - \{n\}$  sont affinement indépendants et vérifient la contrainte avec égalité.

### 3-2 - Le polytope $P(G)$

3-2-1 - Théorème 2 : Le polytope  $P(G)$  est défini par les inégalités suivantes :

$$(1-\delta_{n_1+1,i})x_i + \sum_{j \in V_i} x_j \geq 1 \quad i = 1, \dots, n_1+1 \quad (1)$$

$$i \in (W_k)_p, \quad k = 1, \dots, n_1+1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=k+1}^{n_1} x_i + (j-k+2) \sum_{i \in V_k \cup (W_{k+1})_u} x_i + \sum_{t=k}^{j-1} (j+1-t) \sum_{i \in (W_{t+1})_p \cup (W_{t+2})_u} x_i \\ + \sum_{i \in (V_{n_1+1} - V_{j+1})_u \cup (W_{j+1})_p} x_i \geq j - k + 2 \quad 0 \leq k \leq j \leq n_1 \\ x_i \leq 1 \quad \forall i \in X \\ x_i \geq 0 \quad \forall i \in X \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\text{où } \delta_{n_1+1,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } n_1+1 = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que les contraintes (1), (3) et (4) sont satisfaites pour tout absorbant du graphe  $G$ . Pour une contrainte (C) de type (2), définie par  $j, k$  tels que  $0 \leq k \leq j \leq n_1$ , on considère un absorbant  $A$  de  $G$ .

Si  $A \cap (V_k \cup W_{k+1})_u \neq \emptyset$ , alors (C) est vérifiée, sinon soit  $t_0$ ,  $k \leq t_0 \leq n_1$ , le plus petit entier tel que  $A \cap V_{t_0} = \emptyset$  et  $A \cap V_{t_0+1} \neq \emptyset$ , donc  $\{1, 2, \dots, t_0\} \subseteq A$ . Suivant que  $t_0 \leq j$  ou  $t_0 > j$  on peut voir facilement que la contrainte (C) est bien vérifiée.

Remarque 4 : Les contraintes de type (1) et (2) correspondantes respectivement à  $i = n_1 + 1$ , et  $(k, j)$  tel que  $k = j = n_1$ , sont les mêmes.

### 3-2-2 - Démonstration du théorème 2

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que les points extrêmes du polytope  $Q$  représentent tous des absorbants de  $G$ . Pour ce faire, considérons le programme linéaire suivant :

$$P_G = \left\{ \begin{array}{l} X \in Q \\ \min C.X \quad C \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

On sait que pour tout point extrême de  $Q$ , il existe un vecteur  $C$  tel que ce point soit solution optimale unique de  $P_G$ . Par conséquent, il suffit de montrer que pour tout système de poids  $C = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^n$ , sur les sommets de  $G$ , il existe une solution optimale de  $P_G$  qui est le vecteur représentatif d'un absorbant de  $G$ . Pour cela, nous montrons que pour tout absorbant  $A_0$  de poids minimum dans  $G$  et de vecteur représentatif  $x^0$ , donné par l'algorithme précédent, il existe une solution  $y^0$  du dual  $D_G$  de  $P_G$  qui vérifie avec  $x^0$  les conditions du théorème des écarts complémentaires.

Puisque on a supposé  $C_i \geq 0$ ,  $\forall i \in X$ , on peut omettre les contraintes (3).

A une contrainte de type (1), correspondant à un sommet  $i$  (isolé ou appartenant à une paire de pôle),

on associe la variable duale  $y_i$ , et à une contrainte de type (2) définie par les entiers  $k, j$  on associe la variable duale  $\epsilon_{k,j}$ .

Le dual  $D_G$  s'écrit :

$$\bullet \quad y_i + \sum_{j \in (V_i)_p} y_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq i-1 \\ k \leq j \leq n_1}} \epsilon_{k,j} \leq c_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n_1 \quad (5)$$

$$\bullet \quad \sum_{i=h}^{n_1} y_i + \sum_{j \in (V_{n_1+1})_p} y_j + \sum_{\substack{0 \leq k \leq j \leq h-2 \\ h-1 \leq j \leq n_1}} \epsilon_{k,j} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq h-2 \\ h-1 \leq j \leq n_1}} \epsilon_{k,j} + \sum_{h-1 \leq j \leq n_1} \sum_{h \leq k \leq j} (j-h+3) \epsilon_{k,j} \quad (6)$$

$$+ \sum_{h-1 \leq k \leq j \leq n_1} \sum_{h \leq k \leq j} (j-k+2) \epsilon_{k,j} \leq c_u \quad \text{pour } u \in (W_h)_u$$

$$\bullet \quad \sum_{i=h}^{n_1+1} y_i + \sum_{j \neq p}^* y_j + \sum_{0 \leq k \leq j \leq h-1} \epsilon_{k,j} + \sum_{0 \leq k \leq h-1} \sum_{h \leq j \leq n_1} (j-h+2) \epsilon_{k,j} \quad (7)$$

$$+ \sum_{h \leq k \leq j \leq n_1} \sum_{h \leq k \leq j} (j-k+2) \epsilon_{k,j} \leq c_p$$

Pour  $p$  tq  $(p, p^*)$  est une paire de pôle de  $(W_h)$

$$\bullet \quad y_i \geq 0 \quad i \in \{1, \dots, n_1\} \cup (V_{n_1+1})_p$$

$$\epsilon_{k,j} \geq 0 \quad 0 \leq k \leq j \leq n_1 \quad (8)$$

$$\max \left( \sum_{i=1}^{n_1+1} y_i + \sum_{j \in (V_{n_1+1})_p} y_j + \sum_{0 \leq k \leq j \leq n_1} \sum_{h \leq k \leq j} (j-h+2) \epsilon_{k,j} \right)$$

Soit  $P(A_o)$  le poids d'un absorbant  $A_o$ , solution de  $P(G, C)$ , alors d'après l'algorithme précédent, il existe  $r$ ,  $1 \leq r \leq k_o + 1$  tel que :

$$P(A_0) \geq C_j^* + C_1 + C_2 + \dots + C_{r-1}$$

et

$$P(A_0) \leq C_j^* + C_1 + C_2 + \dots + C_{k_0} + C_s$$

Donc, il existe  $t$ ,  $r-1 \leq t \leq k_0$ , tel que

$$P(A_0) = C_j^* + C_1 + C_2 + \dots + C_t + \delta \text{ avec } 0 \leq \delta \leq C_{t+1}$$

D'où le lemme suivant :

Lemme 3 : Si  $A_0$  est solution de  $P(G, C)$ , alors il existe  $t$ ,  $r-1 \leq t \leq k_0$ , et un réel  $\delta$ ,  $0 \leq \delta \leq C_{t+1}$ , tel que

$$P(A_0) = C_j^* + C_1 + C_2 + \dots + C_t + \delta \quad (9)$$

Soit

$$C_i^* = \min\{C_i, \dots, C_{k_0}, C_0\} \quad i = 1, \dots, k_0 \quad (10)$$

$$\text{avec } C_0^* = 0, C_{k_0+1}^* = C_0$$

$$\text{où } C_0 = \min\{C_j^*, C_{k_0+1}, \dots, C_{n_1}\}$$

Nous avons  $C_i^* \leq C_{i+1}^*$  pour  $i = 1, \dots, k_0$ .

Alors, si  $A_0$  est solution de  $P(G, C)$  et de poids donné par la relation (9), il en résulte :

$$C_h + C_{h+1} + \dots + C_t + C_j^* + \delta \leq C_{p_h} + C_h^* \quad (11)$$

$$C_h + C_{h+1} + \dots + C_t + C_j^* + \delta \leq C_{u_h} \quad \text{Pour } h \neq q, 1 \leq h \leq t$$

$$\text{et si } t = k_0 \quad \delta \leq C_s \quad (12)$$

$p_h$  et  $u_h$  sont déjà définis dans l'algorithme au paragraphe 3.

Soit  $i_0$  tel que

$$\begin{cases} 0 \leq i_0 \leq t & \text{si } 0 \leq \delta \leq C_{t+1}^* \text{ et } C_{i_0}^* \leq \delta \leq C_{i_0+1}^* \\ i_0 = t+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 4 : Si  $P(A_0) = C_{j^*} + C_1 + C_2 + \dots + C_t + \delta$  avec  $r-1 \leq t \leq k_0$  et  $0 \leq \delta \leq C_{t+1}$ , alors

$$y^{A_0} = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_{k,t} = C_{k+1}^* - C_k^* & k = 0, 1, \dots, i_0 - 1 \\ \epsilon_{i_0, t} = \delta - C_{i_0}^* & \\ \epsilon_{i_0, t-1} = C_{i_0+1}^* - \delta & \\ \epsilon_{k, t-1} = C_{k+1}^* - C_k^* & k = i_0 + 1, \dots, t-1 \\ y_i = C_i - C_i^* & i = 1, \dots, t \\ (1 - \delta_{t, k_0}) y_{t+1} + \delta_{t, k_0} - y_{p_{k_0+1}}^* = \lambda(\delta - C_{t+1}^*) & \\ y_{n_1+1} = C_{j^*} - \epsilon & \\ y_i = \epsilon_{k, j} = 0 & \text{ailleurs} \end{array} \right.$$

où

$$\delta_{t, k_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = k_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta > C_{t+1}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\epsilon = \sum_{0 \leq k \leq j \leq n_1} \epsilon_{k,j}$$

est une solution réalisable du dual  $D_G$ .

Démonstration : Simple à vérifier à partir de (10), (11) et (12).

D'après les lemmes 3 et 4, on déduit que pour tout absorbant  $A_0$  solution de  $P(G, C)$ , on peut associer une solution réalisable  $y^{A_0}$  du dual  $D_G$ .

Lemme 5 : Pour tout absorbant  $A_o$ , solution de  $P(G, C)$ , déterminé par l'algorithme,  $x^o$  est une solution optimale de  $P_G$ .

Démonstration : Il est facile de vérifier que pour tout absorbant  $A_o$ , de poids minimum proposé par l'algorithme,  $x^o$  vérifie avec  $y^o$  les conditions du théorème des écarts complémentaires.

Le lemme 5 achève la démonstration du théorème 2;

### Exemple

On reprend le graphe  $G$  donné par la figure.3, le polytope  $P(G)$  sera dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
 x_1 & + x_4 & \geq 1 \\
 x_2 & + x_4 + x_5 + x_6 & \geq 1 \\
 x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 1 \\
 x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 & \geq 1 \\
 x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 & \geq 1 \\
 x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 2 & * \\
 x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 3 & * \\
 x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 & \geq 4 & * \\
 x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & \geq 2 & .. \\
 x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 & \geq 3 & *
 \end{array} \right.$$

Les quatres contraintes marquées d'un astérisque sont redondantes, ce qui montre que les contraintes de type (2) ne sont pas toutes des facettes.

La solution optimale du dual  $D_G$  associée à l'absorbant de poids minimum  $A_0$  est :

$$y^{A_0} = \begin{cases} y_{\bar{3}} = 1 \\ \epsilon_{0,1} = 2 \\ \epsilon_{1,1} = 1 \\ y_i = \epsilon_{j,k} = 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$



REFERENCES

- [1] C. BENZAKEN and P.L. HAMMER  
Linear separation of dominating sets in graphs.  
Discrete math. 3 (1978) 1-10.
- [2] C. BERGE  
Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1973).
- [3] M. BOULALA and J.P. UHRY  
Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle.  
Discrete Mathematics 27(1979) 225-243.
- [4] V. CHVATAL  
On certain polytope associated with graphs.  
J. Combinatorial Theory 18(1975) 138-154.
- [5] M.W. PADBERG  
On the facial structure of set packing polyhedra.  
Math. Programming 5(1973) 199-215.
- [6] URI. N. PELED  
Properties of facets of binary polytopes.  
Discrete Math. 1(1977) 435-456.
- [7] G.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER  
Properties of vertex packing and independance system polyhedra.  
Math. Programming 5(1974) 48-61.
- [8] G.L. NEMHAUSER and L.E. TROTTER  
Vertex packing structural properties and algorithms.  
Math. Programming 8(1975) 232-248.

[9] L.E. TROTTER

A class of facet producing graphs for vertex packing polyhedra  
Discrete Math. 12(1975) 373-388.

[10] L.A. WOLSEY

Further facet generating procedures for vertex packing polytopes  
Math. Programming 11(1976) 158-163.

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le 27 Avril 1981

Le Président de la thèse

*N. Schatzky*

Vu, et permis d'imprimer,

Grenoble, le 29. 4. 81

Le Président de l'Université Scientifique et Médicale

*C. Ray*

