

# Optimisation combinatoire

## Concepts fondamentaux

Décembre 2004



## Table des matières

<b>Chapitre 1. Approches Polyédrales . . . . .</b>	<b>11</b>
Ali Ridha MAHJOUR . . . . .	
1.1. Introduction . . . . .	11
1.2. Polyèdres, faces et facettes . . . . .	15
1.2.1. Polyèdres, polytopes et dimension . . . . .	16
1.2.2. Faces et facettes . . . . .	19
1.3. Optimisation combinatoire et programmation linéaire . . . . .	26
1.3.1. Polytope des solutions . . . . .	26
1.3.2. Points et rayons extrêmes . . . . .	30
1.4. Techniques de preuves . . . . .	33
1.4.1. Preuves de facettes . . . . .	33
1.4.1.1. Preuve de nécessité . . . . .	33
1.4.1.2. Preuve directe . . . . .	35
1.4.1.3. Preuve par maximalité . . . . .	36
1.4.2. Preuves d'intégrité . . . . .	38
1.4.2.1. Preuve d'intégrité des points extrêmes . . . . .	38
1.4.2.2. Preuve directe . . . . .	41
1.5. Polyèdres entiers et relations min-max . . . . .	43
1.5.1. Dualité et optimisation combinatoire . . . . .	44
1.5.2. Matrices totalement unimodulaires . . . . .	45
1.5.3. Systèmes totalement duals entiers . . . . .	47
1.5.4. Polyèdres bloquants et antibloquants . . . . .	48
1.5.4.1. Polyèdres bloquants . . . . .	48
1.5.4.2. Polyèdres antibloquants . . . . .	51
1.6. Méthode de coupes . . . . .	52
1.6.1. Méthode de Chvátal-Gomory . . . . .	53
1.6.2. Algorithmes de coupes . . . . .	55
1.6.3. Algorithmes de coupes et branchements . . . . .	56
1.6.4. Séparation et optimisation . . . . .	57

10 Optimisation combinatoire

1.7. Le problème de coupe maximum . . . . .	60
1.7.1. Modèles de verres de spins et le problème de coupe maximum . . . . .	60
1.7.2. Le polytope des coupes . . . . .	61
1.8. Le problème de conception d'un réseau fiable . . . . .	64
1.8.1. Formulation et polyèdre associé . . . . .	65
1.8.2. Inégalités valides et séparation . . . . .	67
1.8.2.1. Inégalités de multicoupe . . . . .	67
1.8.2.2. Inégalités de partition . . . . .	68
1.8.2.3. Inégalités de $F$ -partition . . . . .	69
1.8.3. Un algorithme de coupes et branchements . . . . .	70
1.9. Conclusion . . . . .	71
1.10.Bibliographie . . . . .	72
<b>Index . . . . .</b>	<b>77</b>

# Chapitre 1

## Approches Polyédrales

Plusieurs problèmes issus de domaines divers se ramènent à maximiser (ou minimiser) une fonction linéaire sous des contraintes linéaires avec des variables bivalentes. Ces problèmes, dits d'optimisation combinatoire, sont généralement NP-difficiles. Des méthodes efficaces ont été ainsi développées pour formuler et résoudre ce type de problèmes. En particulier, les approches polyédrales se sont avérées puissantes pour les résoudre à l'optimum. Celles-ci consistent à ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire en décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions par un système d'inégalités linéaires. L'équivalence établie entre la séparation et l'optimisation sur un polyèdre d'une part, et l'évolution des outils de calcul d'autre part, ont donné un essor important à ces méthodes. Ainsi celles-ci permettent d'élaborer des algorithmes polynomiaux et d'obtenir des relations min-max entre des structures combinatoires. Ces approches ont été appliquées avec succès, durant ces dernières années, pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire. Dans ce chapitre nous discutons de ces méthodes et présentons certaines applications aux problèmes de coupe maximum et de conception de réseaux.

### 1.1. Introduction

Au cours des trois dernières décennies, l'optimisation combinatoire a connu un développement important aussi bien sur le plan théorique qu'au niveau des applications. Plusieurs techniques ont été élaborées, et se sont avérées efficaces pour formuler et résoudre des problèmes combinatoires difficiles issus de domaines aussi variés que le transport et les télécommunications, la biologie, les circuits VLSI ou la physique statistique [GRA 95].

---

Chapitre rédigé par Ali Ridha MAHJOUB.

Un *problème d'optimisation combinatoire* est un problème de la forme suivante : étant donnés une famille  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles d'un ensemble de base fini  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  et un système de poids  $\omega = (\omega(e_1), \dots, \omega(e_n))$  associé aux éléments de  $E$ , trouver un ensemble  $F \in \mathcal{F}$  de poids  $\omega(F) = \sum_{e \in F} \omega(e)$  maximum (ou minimum), *i.e.*

$$\max(\text{ou min}) \{\omega(F) : F \in \mathcal{F}\}. \quad (1.1)$$

Ici la famille  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des solutions du problème, elle permet de représenter diverses structures combinatoires comme, par exemple, des chemins, des cycles, des arbres, etc., dans les graphes.

Un des problèmes de base de l'optimisation combinatoire est *le problème du voyageur de commerce*. Celui-ci consiste, étant donné un graphe où chaque arête est munie d'un certain poids, à trouver un cycle qui passe par chaque sommet du graphe une et une seule fois et qui soit de poids minimum. Un tel cycle est dit *tour* ou *circuit Hamiltonien*. Ici l'ensemble de base  $E$  est l'ensemble des arêtes du graphe et la famille  $\mathcal{F}$  est l'ensemble des tours. Ce problème a de nombreuses applications, en particulier dans les modèles de routage [LAW 85].

D'autres problèmes, constituant une large et importante classe de modèles d'optimisation combinatoire sont les problèmes dits de recouvrement, de partition et de pavage [BAL 76] [COR 01]. Soit  $M = \{e_1, \dots, e_n\}$  un ensemble fini d'éléments et soit  $\{M_1, \dots, M_m\}$  une famille de sous-ensembles de  $M$ . On dit que  $F \subseteq \{M_1, \dots, M_m\}$  est un *recouvrement* de  $M$  (resp. *pavage* par rapport à  $M$ ) si  $\{\bigcup M_i, M_i \in F\} = M$  (resp.  $M_i \cap M_j = \emptyset$  pour tous  $M_i$  et  $M_j$  de  $F$ ). Si  $F$  est à la fois un pavage et un recouvrement, alors  $F$  est dit une *partition* de  $M$ . Si  $\omega_1, \dots, \omega_m$  sont des poids associés à  $M_1, \dots, M_m$ , *le problème de recouvrement* (resp. *de pavage*) (resp. *de partition*) est de déterminer un recouvrement (resp. un pavage) (resp. une partition)  $F \subseteq \{M_1, \dots, M_m\}$  tel que

$$\sum_{M_i \in F} \omega_i,$$

est minimum (resp. maximum) (resp. maximum (ou minimum)). Il est clair que ces modèles sont des problèmes d'optimisation combinatoire dont l'ensemble de base est  $\{M_1, \dots, M_m\}$  et l'ensemble des solutions est l'ensemble des recouvrements, des pavages ou des partitions de  $M$ . Ces modèles sont fréquemment rencontrés dans les problèmes d'allocation de ressources, de localisation ou de reconnaissance de formes.

Enfin, un dernier modèle qui était à l'origine de plusieurs développements en optimisation combinatoire est *le problème du sac à dos*. Étant donnés un nombre  $b$  et  $n$  objets  $o_1, \dots, o_n$  ayant chacun un certain poids  $\omega(o_i)$  et une valeur  $v(o_i)$ , le problème consiste à déterminer un sous-ensemble d'objets  $F' \subseteq \{o_1, \dots, o_n\}$  tel que

$\sum_{o_i \in F} v(o_i) \leq b$  et  $\sum_{o_i \in F} \omega(o_i)$  est maximum. Des applications de ce modèle peuvent être trouvées dans [MAR 90] [NEM 88].

Étant donné que le nombre de solutions d'un problème d'optimisation combinatoire est fini, pour résoudre le problème on peut penser, par exemple, à une méthode énumérative qui consisterait à énumérer les solutions du problème, à calculer la valeur de chacune des solutions et à en choisir la meilleure. Cependant, bien qu'il soit fini, le nombre de solutions peut être exponentiel, et cette méthode peut atteindre rapidement ses limites, même sur des problèmes de petite taille. Si l'on considère cette méthode, par exemple, pour le problème du voyageur de commerce sur 30 villes, et en utilisant l'ordinateur le plus puissant actuellement, il faudrait plus de  $10^{10}$  siècles pour trouver une solution optimale. Ceci montre que de telles méthodes aussi "naïves" ne peuvent être appliquées pour les problèmes d'optimisation combinatoire.

En conséquence, d'autres outils plus performants se sont avérés nécessaires pour approcher ce type de problèmes. La programmation linéaire et la programmation en nombres entiers sont à la base de tels outils. Un problème d'optimisation combinatoire peut toujours être formulé comme un programme en nombres entiers (généralement en 0-1). Ainsi toute relaxation linéaire du problème, obtenue en relâchant les contraintes d'intégrité et en considérant un sous-ensemble de contraintes, n'est rien d'autre qu'un programme linéaire. Si, en résolvant un tel programme, on obtient une solution entière réalisable du problème, alors celle-ci est optimale.

À la fin des années quarante, Dantzig [DAN 51] [DAN 63] a introduit le premier algorithme, la méthode du simplexe, pour résoudre les problèmes de programmation linéaire. Non seulement cette méthode s'est révélée efficace en pratique, mais elle constitue un outil de base très important pour l'optimisation combinatoire. En effet une solution optimale d'un programme linéaire donné, trouvée par l'algorithme du simplexe, correspond toujours à un point extrême du polyèdre défini par les inéquations du programme. Ainsi cet algorithme permet de résoudre tout problème d'optimisation combinatoire dont l'ensemble de solutions correspond aux sommets d'un polyèdre dont on connaît la description par un système d'inégalités linéaires. Par conséquent, étant donné un problème d'optimisation combinatoire où toute solution peut être représentée par un vecteur d'entiers, si l'on arrive à décrire l'enveloppe convexe de ces points par un système linéaire, on ramène alors le problème à la résolution d'un simple programme linéaire.

Ce passage de l'optimisation sur un ensemble fini discret, qui peut avoir un très grand nombre de solutions, à l'optimisation sur un domaine convexe a été à l'origine d'une évolution importante du domaine de l'optimisation combinatoire. En effet, ce passage a permis d'introduire une nouvelle approche, dite *polyédrale*, pour les problèmes d'optimisation combinatoire. Celle-ci consiste à ramener un tel problème à la résolution d'un programme linéaire en décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions par des inéquations linéaires. Cette méthode, initiée par Edmonds [EDM 65] pour le

problème du couplage, s'est révélée par la suite très puissante pour résoudre ces problèmes à l'optimum. En particulier, elle peut permettre de résoudre efficacement un problème d'optimisation combinatoire même si l'on ne dispose que d'une description partielle de l'enveloppe convexe de ses solutions et même si cette dernière comporte un nombre exponentiel de contraintes. Elle permet également d'obtenir des relations min-max et d'élaborer des algorithmes polynomiaux de résolution.

En effet, comme il a été démontré par Grötschel et al. [GRÖ 81], l'optimisation sur un polyèdre donné ne dépend pas du nombre de contraintes du système décrivant le polyèdre, mais plutôt du problème dit de *séparation* lié à ce système. Ce problème consiste, étant donnée une solution  $x$ , à déterminer si  $x$  vérifie le système, et sinon à trouver une contrainte du système qui soit violée par  $x$ . Grötschel et al. [GRÖ 81] ont montré qu'il existe un algorithme polynomial pour optimiser une fonction linéaire sur un polyèdre si et seulement s'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème de séparation associé au système définissant le polyèdre. Cette équivalence entre optimisation et séparation a donné un nouvel essor à l'optimisation combinatoire et aux approches polyédrales. Ainsi, un problème d'optimisation combinatoire peut être résolu en temps polynomial en résolvant une séquence de programmes linéaires, chaque programme étant obtenu en ajoutant une contrainte violée déterminée par la résolution d'un problème de séparation. Si la solution d'un de ces programmes est une solution du problème, alors elle est optimale. Ainsi, le problème initial peut être résolu en temps polynomial, si la séparation des contraintes peut être réalisée en temps polynomial. Ce type d'algorithme est dit de *coupes* (ou *de plans sécants*).

Les problèmes d'optimisation combinatoire sont généralement NP-difficiles. Il y a, en conséquence, peu d'espoir de trouver pour un tel problème une description complète explicite du polyèdre des solutions par un système d'inégalités linéaires. En utilisant un algorithme de coupes, il est alors possible que celle-ci ne fournisse pas à la fin une solution optimale du problème. Une approche arborescente de séparation et d'évaluation (Branch-and-Bound) peut alors être considérée pour déterminer une solution optimale. À chaque itération de la méthode, de nouvelles contraintes peuvent être générées pour serrer davantage la relaxation linéaire, et améliorer la borne sur la valeur optimale au niveau de chaque sommet de l'arbre de résolution. Cette méthode, introduite par Padberg et Rinaldi [PAD 91] et connue sous le nom de méthode de coupes et branchements (Branch-and-Cut method), a été appliquée avec succès pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce [APP 98] [GRÖ 91] [LAW 85] [PAD 91], le problème de coupe maximum [BAR 88] [SIM 95] [JÜN 98] ou le problème de conception d'un réseau fiable [GRÖ 95] [KER 04a]. En plus, le progrès des outils de calcul a aussi permis une évolution importante de cette méthode ces dernières années. Elle constitue maintenant l'outil le plus efficace, et le plus largement utilisé, pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire. Dans ce chapitre, nous présentons ces techniques et discutons de certaines applications.

Dans la section suivante, nous présentons les éléments de base de la théorie des polyèdres. Dans la section 3, nous étudions la relation entre l'optimisation combinatoire et la programmation linéaire. Dans la section 4, nous présentons certaines techniques de preuves pour les polyèdres, en particulier nous présentons des méthodes pour prouver qu'une inégalité donnée définit une facette d'un polyèdre combinatoire, et qu'un système linéaire décrit un polyèdre entier. La section 5 discute des polyèdres entiers et des relations min-max en optimisation combinatoire. Nous étudions, en particulier, les matrices totalement unimodulaires, les systèmes totalement duals entiers et les polyèdres bloquants et antibloquants. Dans la section 6, nous présentons les méthodes de coupes et de coupes et branchements. Nous discutons également de la relation entre séparation et optimisation. Dans les sections 7 et 8, nous présentons certaines applications de ces techniques respectivement aux problèmes de coupe maximum et de conception d'un réseau fiable.

Le reste de cette section est consacré à quelques définitions et notations. Nous considérons des graphes non orientés. Un graphe sera noté par  $G = (V, E)$  où  $V$  est l'ensemble des *sommets* et  $E$  est celui des *arêtes*. Si  $e$  est une arête entre deux sommets  $u$  et  $v$ , alors nous écrivons  $e = uv$ . Une chaîne entre deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $G$  est une séquence de sommets et d'arêtes  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{l-1}, e_l, v_l)$  où  $u = v_0$ ,  $v = v_l$  et  $e_i = v_{i-1}v_i$  pour  $i = 1, \dots, l$  et  $v_0, \dots, v_l$  sont des sommets distincts de  $V$ . Les sommets  $u$  et  $v$  sont appelés les *extrémités* de la chaîne. Une chaîne sera notée par son ensemble d'arêtes  $(e_1, \dots, e_l)$ . Deux chaînes entre deux sommets  $u$  et  $v$  sont dites *arête-disjointes* (resp. *sommet-disjointes*) si elles n'ont aucune arête (resp. sommet à l'exception de  $u$  et de  $v$ ) en commun. Un *cycle* est une chaîne dont les extrémités coïncident. Si  $F \subseteq E$ , alors  $V(F)$  désignera l'ensemble des sommets des arêtes de  $F$ . Si  $S \subseteq V$ , on notera par  $E(S)$  l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans  $S$ .

Soit  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  un ensemble fini. Si  $F \subseteq E$  et  $x = (x(e), e \in E) \in \mathbb{R}^E$ , alors nous notons par  $x(F)$  la somme  $\sum_{e \in F} x(e)$ . Si  $a$  et  $x$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^E$ , nous désignons par  $ax$  la somme  $\sum_{e \in E} a(e)x(e)$ . Ainsi l'inégalité  $\sum_{e \in E} a(e)x(e) \leq \alpha$  s'écrit  $ax \leq \alpha$ .

## 1.2. Polyèdres, faces et facettes

Dans cette section, nous présentons les définitions et propriétés de base de la théorie des polyèdres. En particulier, nous discutons de la description d'un polyèdre par ses facettes.

### 1.2.1. Polyèdres, polytopes et dimension

DÉFINITION 1.1.– Un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  est l’ensemble de solutions d’un système fini d’inégalités linéaires, i.e.,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

où  $A$  est une matrice  $m \times n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $m$  et  $n$  sont deux entiers positifs.

Un polyèdre borné est appelé *polytope*. En d’autres termes, un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  est un polytope s’il existe  $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $x^1 \leq x \leq x^2$  pour tout  $x \in P$ .

Noter que tout polyèdre  $P$  est *convexe*, c’est-à-dire si  $x^1$  et  $x^2$  sont deux points quelconques de  $P$ , alors  $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$  est aussi un point de  $P$  pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Tout au long de ce chapitre nous considérons des polyèdres rationnels, c’est-à-dire des polyèdres pour lesquels les coefficients du système  $Ax \leq b$  sont tous rationnels. Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , on désignera par  $A_i$  (resp.  $A^j$ ) la  $i^{\text{ème}}$  ligne (resp.  $j^{\text{ème}}$  colonne) de  $A$  pour  $i = 1, \dots, m$  (resp.  $j = 1, \dots, n$ ).

DÉFINITION 1.2.– Des points  $x^1, \dots, x^k$  de  $\mathbb{R}^n$  sont dits linéairement (resp. affinement) indépendants si le système

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0 \quad (\text{resp. } \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0)$$

admet une solution unique  $\lambda_i = 0$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

Un ensemble de points linéairement (resp. affinement) indépendants sera également dit linéairement (resp. affinement) indépendant. Notons qu’un ensemble de points linéairement indépendant est affinement indépendant, par contre la réciproque n’est pas vraie. La proposition suivante, qui est facile à vérifier, établit la relation entre l’indépendance linéaire et l’indépendance affine.

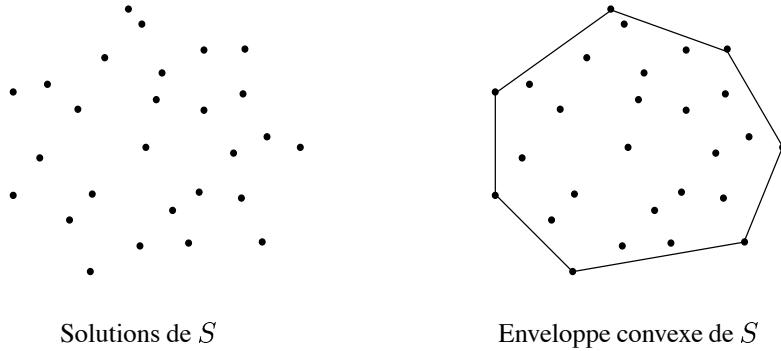
PROPOSITION 1.3.– Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- 1)  $x^1, \dots, x^k$  sont affinement indépendants.
- 2)  $x^2 - x^1, \dots, x^k - x^1$  sont linéairement indépendants.

DÉFINITION 1.4.– Un polyèdre  $P$  est dit de dimension  $k$  si le nombre maximum de points affinement indépendants de  $P$  est  $k + 1$ . On écrit alors  $\dim(P) = k$ .

Remarquons que si  $P$  est un polyèdre de  $\mathbb{R}^n$  alors  $\dim(P) \leq n$ . Si  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $\dim(P) = n$ , alors  $P$  est dit de *pleine dimension*.

DÉFINITION 1.5.– Un point  $x \in \mathbb{R}^n$  est dit combinaison linéaire des points  $x^1, \dots, x^k$  de  $\mathbb{R}^n$  s'il existe  $k$  scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tels que  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$ . Si de plus  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  (resp.  $\lambda_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ), alors  $x$  est dit combinaison affine (resp. combinaison convexe) de ces points.



**Figure 1.1.** Enveloppe convexe

DÉFINITION 1.6.– Étant donné un ensemble de points  $S \subset \mathbb{R}^n$ , l'enveloppe affine (resp. l'enveloppe convexe) de  $S$  (voir figure 1.1) est l'ensemble des points qui peuvent s'écrire comme combinaison affine (resp. convexe) de points de  $S$ .

REMARQUE 1.7.– Si  $0$  n'appartient pas à l'enveloppe affine de points  $x^1, \dots, x^n$ , alors  $x^1, \dots, x^n$  sont affinement indépendants si et seulement s'ils sont linéairement indépendants.

L'enveloppe convexe d'un ensemble de points  $S$  peut être aussi vue comme le plus petit ensemble convexe contenant  $S$ . On notera dans la suite l'enveloppe convexe d'un ensemble de points  $S$  par  $\text{conv}(S)$ . La proposition suivante établit la relation entre l'optimisation sur  $S$  et celle sur l'enveloppe convexe de  $S$ .

PROPOSITION 1.8.– Soient  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un ensemble de points et  $\omega$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\max\{\omega x : x \in S\} = \max\{\omega x : x \in \text{conv}(S)\}.$$

**Preuve.** Soient  $\bar{x} \in S$  et  $x^* \in \text{conv}(S)$  tels que  $\omega \bar{x} = \max\{\omega x : x \in S\}$  et  $\omega x^* = \max\{\omega x : x \in \text{conv}(S)\}$ . Comme  $\bar{x} \in S$ , et donc  $\bar{x} \in \text{conv}(S)$ , alors  $\omega \bar{x} \leq \omega x^*$ . De plus, par la programmation linéaire, on peut supposer que  $x^*$  est un point extrême de  $\text{conv}(S)$ , et par conséquent  $x^* \in S$ . Ce qui implique que  $\omega x^* \leq \omega \bar{x}$ , et alors  $\omega x^* = \omega \bar{x}$ .  $\square$

La proposition 1.8 établit le lien entre l'optimisation combinatoire et la programmation linéaire. Une solution optimale d'un problème d'optimisation combinatoire

peut être obtenue en résolvant le programme linéaire induit par l'enveloppe convexe de ses solutions.

Considérons maintenant un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , et supposons que  $P$  est décrit par un système de  $m_1$  inéquations et  $m_2$  équations, c'est-à-dire  $P$  s'écrit sous la forme

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m_1, \\ B_j x = d_j, \quad j = 1, \dots, m_2 \end{array} \right\}. \quad (1.2)$$

Cela implique que pour toute inéquation  $A_i x \leq b_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m_1\}$ , il existe une solution  $\tilde{x}$  de  $P$  telle que  $A_i \tilde{x} < b_i$ . Dans la suite, on notera par  $A$  et  $B$  les matrices dont les lignes sont les  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, m_1$  et les  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, m_2$ , respectivement, et par  $b$  et  $d$  les vecteurs  $(b_1, \dots, b_{m_1})^T$  et  $(d_1, \dots, d_{m_2})^T$ . (Pour une matrice donnée  $A$ ,  $A^T$  désignera le transposé de  $A$ .)

**DÉFINITION 1.9.-** Un point  $x^* \in P$  est appelé point intérieur de  $P$  si  $A_i x^* < b_i$  pour  $i = 1, \dots, m_1$ .

**PROPOSITION 1.10.-** Si  $P$  est non vide, alors  $P$  contient un point intérieur.

**Preuve.** Pour  $i = 1, \dots, m_1$ , soit  $x^i \in P$  tel que  $A_i x^i < b_i$ . Soit  $\bar{x} = \frac{1}{m_1} \sum_{i=1}^{m_1} x^i$ . Nous avons  $A_i \bar{x} < b_i$  pour  $i = 1, \dots, m_1$  et  $B_j \bar{x} = d_j$  pour  $j = 1, \dots, m_2$ . Donc  $\bar{x}$  est un point intérieur de  $P$ .  $\square$

Étant donnée une matrice  $M$ , le *rang* de  $M$ , noté  $\text{rang}(M)$ , est le nombre maximum de lignes (ou de colonnes) de  $M$  linéairement indépendantes.

**REMARQUE 1.11.-** Si  $M$  est une matrice de rang  $r$ , et  $\{x \in \mathbb{R}^n : Mx = l\} \neq \emptyset$  pour un certain vecteur  $l$ , alors le nombre maximum de points affinement indépendants dans l'ensemble  $\{x \in \mathbb{R}^n : Mx = l\}$  est  $n - r + 1$ .

**PROPOSITION 1.12.-** Si  $P \neq \emptyset$ , alors  $\dim(P) = n - \text{rang}(B)$ .

**Preuve.** Soit  $k = \text{rang}(B)$ . Par la remarque 1.11, il existe  $n - k + 1$  points  $x^1, \dots, x^{n-k+1}$  affinement indépendants du système  $Bx = 0$ . Puisque  $P \neq \emptyset$ , par la proposition 1.10,  $P$  contient un point intérieur, disons  $\bar{x}$ . D'où  $A_i \bar{x} < b_i$  pour  $i = 1, \dots, m_1$ . Alors il existe un scalaire  $\epsilon \neq 0$ , suffisamment petit, tel que  $A_i \bar{x} + \epsilon A_i x^j \leq b_i$ , pour  $i = 1, \dots, m_1$  et  $j = 1, \dots, n - k + 1$ . Considérons les points  $y^j = \bar{x} + \epsilon x^j$  pour  $j = 1, \dots, n - k + 1$ . Nous avons  $y^j \in P$  pour  $j = 1, \dots, n - k + 1$ . En plus, comme  $x^1, \dots, x^{n-k+1}$  sont affinement indépendants,  $y^1, \dots, y^{n-k+1}$  sont également affinement indépendants. Ce qui implique que  $\dim(P) \geq n - k$ .

Aussi, comme  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Bx = d\}$ , par la remarque 1.11,  $\dim(P) \leq n - k$ . Par conséquent  $\dim(P) = n - k$ .  $\square$

Comme conséquence de la proposition 1.12, un polyèdre est de pleine dimension si et seulement s'il contient un point vérifiant toutes les contraintes du polyèdre avec inégalité stricte.

### 1.2.2. Faces et facettes

Considérons un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , et supposons que  $P$  est décrit par le système (1.2). Dans cette section, nous étudions les inégalités de ce système qui sont essentielles à la description de  $P$ .

DÉFINITION 1.13.– Une inégalité linéaire  $ax \leq \alpha$  est dite valide pour un polyèdre  $P \in \mathbb{R}^n$  si elle est vérifiée par tout point de  $P$ , i.e.,  $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : ax \leq \alpha\}$ .

DÉFINITION 1.14.– Si  $ax \leq \alpha$  est une inégalité valide, alors le polyèdre

$$F = \{x \in P : ax = \alpha\},$$

est appelé face de  $P$ , et on dit que  $F$  est définie par l'inégalité  $ax \leq \alpha$ .

Par convention, l'ensemble vide et le polytope  $P$  lui-même sont considérés comme des faces de  $P$ . Une face de  $P$  est dite *propre* si elle est non vide et différente de  $P$  (voir figure 1.2).

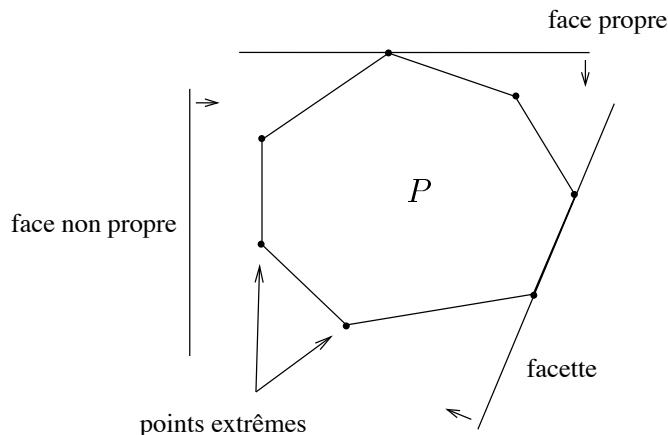


Figure 1.2. Faces et facettes

PROPOSITION 1.15.– Un sous-ensemble  $F$  non vide de  $P$  est une face de  $P$  si et seulement s'il existe un sous-système  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$  tel que  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ .

**Preuve.** ( $\implies$ ) Supposons que  $F$  est une face de  $P$ . Alors il existe une inégalité  $ax \leq \alpha$ , valide pour  $P$ , telle que  $F = \{x \in P : ax = \alpha\}$ . Considérons le programme linéaire

$$\max\{ax : x \in P\}. \quad (1.3)$$

Les solutions optimales de (1.3) sont précisément les éléments de  $F$ . Soit  $(y^1, y^2)$  une solution optimale duale de (1.3) où  $y^1$  et  $y^2$  sont les vecteurs duals correspondant respectivement aux systèmes  $Ax \leq b$  et  $Bx = d$ . Soit  $A'x \leq b'$  le sous-système de  $Ax \leq b$  dont les variables duals ont une valeur strictement positive. Par les conditions des écarts complémentaires en programmation linéaire, nous avons  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons qu'il existe un sous-système  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$  tel que  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ . Alors pour tout point  $x \in P \setminus F$ , il existe au moins une contrainte parmi les inégalités de  $A'x \leq b'$  qui ne soit pas vérifiée à l'égalité par  $x$ . Considérons l'inégalité  $ax \leq \alpha$  obtenue en sommant les inégalités de  $A'x \leq b'$ . Il est clair que  $ax = \alpha$  pour tout  $x \in F$  et  $ax < \alpha$  pour tout  $x \in P \setminus F$ .  $\square$

DÉFINITION 1.16.— *Un point  $x$  d'un polyèdre  $P$  est dit point extrême ou sommet de  $P$  s'il n'existe pas deux solutions  $x^1$  et  $x^2$  de  $P$ ,  $x^1 \neq x^2$ , telles que  $x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$ .*

PROPOSITION 1.17.— *Un point  $\bar{x} \in P$  est un point extrême de  $P$  si et seulement si  $\bar{x}$  est une face de dimension 0.*

**Preuve.** Soit  $\bar{P}$  le polyèdre obtenu à partir de  $P$  en transformant toute inéquation vérifiée à l'égalité par  $\bar{x}$  en une équation. Donc  $\bar{P}$  s'écrit

$$\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{A}x \leq \bar{b}, \bar{B}x = \bar{d}\},$$

où  $\bar{B}x = \bar{d}$  (resp.  $\bar{A}x \leq \bar{b}$ ) est le système des équations (resp. inéquations) de  $\bar{P}$ . On a donc  $\bar{A}\bar{x} < \bar{b}$ .

( $\implies$ ) Si  $\bar{x}$  n'est pas une face de dimension 0, alors  $\dim(\bar{P}) > 0$ , et donc, par la proposition 1.12,  $\text{rang}(\bar{B}) < n$ . Par conséquent, il existe un point  $y \neq 0$  tel que  $\bar{B}y = 0$ . Comme  $\bar{A}\bar{x} < \bar{b}$ , il existe  $\epsilon \neq 0$  suffisamment petit tel que  $\bar{A}\bar{x} + \epsilon\bar{A}y \leq \bar{b}$ , et ainsi  $\bar{x}^1 = \bar{x} + \epsilon y \in \bar{P}$ . Aussi,  $\epsilon$  peut être choisi tel que  $\bar{x}^2 = \bar{x} - \epsilon y \in \bar{P}$ . Nous avons alors  $\bar{x} = \frac{1}{2}(\bar{x}^1 + \bar{x}^2)$ , ce qui implique que  $\bar{x}$  n'est pas un point extrême.

( $\Leftarrow$ ) Si  $\bar{x}$  est une face de dimension 0, et donc  $\bar{P}$  est de dimension 0, par la proposition 1.12, il en résulte que  $\text{rang}(\bar{B}) = n$ . Alors  $\bar{x}$  est la solution unique du système  $\bar{B}x = \bar{d}$ . Soit  $\bar{x} = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$ , avec  $x^1, x^2 \in P$ . Comme  $x^1$  et  $x^2$  sont des solutions de  $\bar{B}x = \bar{d}$ , on doit donc avoir  $\bar{x} = x^1 = x^2$ , et ainsi  $\bar{x}$  est un point extrême de  $P$ .  $\square$

Il est clair que si  $F$  est une face propre de  $P$ , alors  $\dim(F) \leq \dim(P) - 1$ . Dans la suite, nous allons voir que les inégalités qui sont nécessaires à la description de  $P$  sont celles qui définissent des faces maximales (au sens de l'inclusion).

**DÉFINITION 1.18.** – Une face propre de  $P$  est dite facette si  $\dim(F) = \dim(P) - 1$  (voir figure 1.2).

**PROPOSITION 1.19.** – Supposons que  $P \neq \emptyset$ . Alors toute contrainte  $A_i x \leq b_i$  qui ne définit pas une facette de  $P$  est redondante.

**Preuve.** Supposons que  $A_i x \leq b_i$  est essentielle à la description de  $P$ . On montre que  $A_i x \leq b_i$  définit une facette. En effet, si  $A_i x \leq b_i$  est essentielle dans  $P$ , alors il doit exister un point  $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus P$  tel que

$$\begin{aligned} A_j x^* &\leq b_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, m_1\} \setminus \{i\}, \\ A_i x^* &> b_i, \\ B x^* &= d. \end{aligned}$$

Puisque  $P \neq \emptyset$ , par la proposition 1.10,  $P$  contient un point intérieur, disons  $\hat{x}$ . Donc  $A_i \hat{x} < b_i$ . Soit  $z$  un point sur le segment entre  $x^*$  et  $\hat{x}$  tel que  $A_i z = b_i$ . Alors  $z = \lambda \hat{x} + (1 - \lambda)x^*$  avec  $0 < \lambda < 1$ . De plus on a

$$\begin{aligned} A_j z &< b_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, m_1\} \setminus \{i\}, \\ A_i z &= b_i, \\ B z &= d. \end{aligned}$$

Ceci implique que  $z$  appartient à l'ensemble  $F = \{x \in P : A_i x = b_i\}$ , la face de  $P$  définie par  $A_i x \leq b_i$ . Aussi, notons que le système donné par les équations de  $F$  est  $\{A_i x = b_i, B x = d\}$ . Puisque  $\hat{x} \in P \setminus F$ ,  $A_i$  est linéairement indépendant des lignes de  $B$ . D'où  $\text{rang} \begin{pmatrix} A_i \\ B \end{pmatrix} = \text{rang}(B) + 1$ . D'où  $\dim(F) = \dim(P) - 1$ , et par conséquent,  $F$  est une facette de  $P$ .  $\square$

Dans la suite, nous avons besoin du théorème suivant, connu sous le nom du lemme de Farkas, qui est un des résultats fondamentaux de la programmation mathématique. Pour la preuve voir [COO 98].

**THEOREME 1.20.** – (Lemme de Farkas pour les inéquations). Étant donnés une matrice  $m \times n$   $A$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^m$ , le système  $Ax \leq b$  admet une solution si et seulement s'il n'existe pas un vecteur  $y \geq 0$  de  $\mathbb{R}^m$  tel que  $yA = 0$  et  $yb < 0$ .

**COROLLAIRE 1.21.**— (Lemme de Farkas). *Le système  $Ax = b$  admet une solution (resp. solution positive) si et seulement s'il n'existe pas un vecteur  $y$  tel que  $yA = 0$  et  $yb < 0$  (resp.  $yA \geq 0$  et  $yb < 0$ ).*

La proposition suivante montre qu'une facette de  $P$  doit être définie par au moins une des inéquations de  $P$ .

**PROPOSITION 1.22.**— *Pour toute facette  $F$  de  $P$ , une des inéquations définissant  $F$  est nécessaire dans la description de  $P$ .*

**Preuve.** Supposons que  $F$  est définie par chacune des inégalités  $A_i x \leq b_i$ , pour  $i \in I$  où  $I$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, m_1\}$ . Soit  $\tilde{P}$  le polyèdre obtenu en supprimant toutes les inégalités  $A_i x \leq b_i$ ,  $i \in I$ . Nous allons montrer que  $\tilde{P} \setminus P \neq \emptyset$ , ce qui montre qu'au moins une des contraintes  $A_i x \leq b_i$ ,  $i \in I$ , doit apparaître dans la description de  $P$ .

Considérons une contrainte  $A_i x \leq b_i$  parmi celles qui définissent  $F$ . Puisque  $F$  est une facette de  $P$ , on a  $F \neq \emptyset$ . Par la proposition 1.10,  $F$  contient donc un point intérieur, disons  $x^0$ . Aussi comme  $F \neq P$ ,  $A_i$  est indépendant des lignes de  $B$ . Donc le système  $yB = A_i$  n'a pas de solution. Par le corollaire 1.21, le système  $\{Bx = 0, A_i x > 0\}$  admet une solution, disons  $x^1$ . Comme  $A_k x^0 < b_k$  pour  $k \in \{1, \dots, m_1\} \setminus I$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $A_k x^0 + \epsilon A_k x^1 \leq b_k$  pour  $k \in \{1, \dots, m_1\} \setminus I$ . Soit  $x^2 = x^0 + \epsilon x^1$ . D'où  $A_k x^2 \leq b_k$  pour  $k \in \{1, \dots, m_1\} \setminus I$ . Comme  $A_i x^1 > 0$  et  $A_i x^0 = b_i$ , on a  $A_i x^2 = A_i x^0 + \epsilon A_i x^1 > b_i$ . D'où  $x^2 \notin P$ . Aussi, puisque  $Bx^1 = 0$ , on a aussi  $x^2 \in \tilde{P}$ , et, par conséquent,  $x^2 \in \tilde{P} \setminus P$ .  $\square$

**DÉFINITION 1.23.**— *Deux inégalités valides  $a_1 x \leq \alpha_1$  et  $a_2 x \leq \alpha_2$  sont dites équivalentes s'il existe  $\lambda > 0$  et un vecteur  $\mu$  de  $\mathbb{R}^{m_2}$  tels que*

$$a_2 = \lambda a_1 + \mu B, \tag{1.4}$$

$$\alpha_2 = \lambda \alpha_1 + \mu d. \tag{1.5}$$

**PROPOSITION 1.24.**— *Supposons que  $P \neq \emptyset$ . Si deux inégalités valides de  $P$  définissent la même facette, alors elles sont équivalentes.*

**Preuve.** Soient  $a_1 x \leq \alpha_1$  et  $a_2 x \leq \alpha_2$  deux inégalités valides qui définissent la même facette  $F$  de  $P$ . Tout d'abord notons que si le système (1.4) admet une solution, alors celle-ci satisfait également (1.5). En effet, comme  $F \neq \emptyset$ , il existe une solution  $\tilde{x}$  dans  $F$  telle que  $a_1 \tilde{x} = \alpha_1$  et  $a_2 \tilde{x} = \alpha_2$ . On a également  $B \tilde{x} = d$ . D'où  $\alpha_2 = a_2 \tilde{x} = \lambda a_1 \tilde{x} + \mu B \tilde{x} = \lambda \alpha_1 + \mu d$ .

Dans ce qui suit, nous allons montrer que si le système (1.4) admet une solution, alors

$\lambda > 0$ . En effet, si  $\lambda \leq 0$ , alors  $\lambda a_1 x \geq \lambda \alpha_1$  pour tout  $x \in P$ , et, en conséquence, pour tout  $x \in P$ , on a

$$\begin{aligned} a_2 x &= \lambda a_1 x + \mu B x \\ &\geq \lambda \alpha_1 + \mu d \\ &= \alpha_2. \end{aligned}$$

Comme  $a_2 x \leq \alpha_2$ , il en résulte que  $a_2 x = \alpha_2$ . Mais ceci implique que  $P = F$ , ce qui contredit le fait que  $F$  est une face propre. Supposons maintenant que le système (1.4) n'admet pas de solution. Alors par le corollaire 1.21, il existe une solution  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  telle que

$$\begin{aligned} a_1 \bar{x} &= 0, \\ B \bar{x} &= 0, \\ a_2 \bar{x} &> 0. \end{aligned}$$

Soit  $I \subset \{1, \dots, m_1\}$  tel que  $A_i x \leq b_i$  définit  $F$  pour tout  $i \in I$ . Notons que par la proposition 1.22,  $I \neq \emptyset$ . Puisque  $F$  est une facette, et, par conséquent,  $F \neq \emptyset$ , par la proposition 1.10,  $F$  possède un point intérieur, disons  $x^*$ . Donc  $A_k x^* < b_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m_1\} \setminus I$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $A_k x^* + \epsilon A_k \bar{x} \leq b_k$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m_1\} \setminus I$ . Soit  $\hat{x} = x^* + \epsilon \bar{x}$ . Comme  $a_2 \bar{x} > 0$  et  $a_2 x^* = \alpha_2$ , nous avons  $a_2 \hat{x} = a_2 x^* + \epsilon a_2 \bar{x} > \alpha_2$ . Par conséquent  $\hat{x} \notin P$ . Puisque  $P \neq \emptyset$ , soit  $y$  un point intérieur de  $P$ . On a donc  $a_1 y < \alpha_1$ , et alors  $y \notin F$ . Soit  $z$  le point de  $F$  sur le segment entre  $y$  et  $\hat{x}$ . Donc  $z = \nu y + (1 - \nu) \hat{x}$  pour un certain  $0 < \nu < 1$ . De plus, nous avons  $a_1 z = \nu a_1 y + (1 - \nu) a_1 \hat{x} < \nu \alpha_1 + (1 - \nu) \alpha_1 = \alpha_1$ , ce qui est impossible.

En conséquence, le système (1.4) admet une solution. Comme il a été démontré ci-dessus, cette solution satisfait également (1.5), et on a  $\lambda > 0$ .  $\square$

D'après la proposition 1.24, pour toute facette de  $P$ , une et une seule inégalité définissant  $F$  est nécessaire dans le système qui décrit  $P$ . Comme conséquence des propositions 1.19, 1.22 et 1.24, nous avons le théorème suivant.

**THEOREME 1.25.** — *Le système (1.2) définissant  $F$  est minimal si et seulement si les lignes de  $B$  sont linéairement indépendantes et toute inégalité  $A_i x \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ , définit une facette distincte de  $P$ .*

Si  $P$  est un polyèdre de pleine dimension, alors par la proposition 1.24, deux contraintes induisent la même facette si et seulement si l'une est un multiple positif de l'autre. Nous avons donc le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 1.26.**— Si  $P$  est un polyèdre de pleine dimension, alors il existe un système linéaire minimal unique (à des multiplications par des scalaires positifs près) qui décrit  $P$ . De plus, toute contrainte de ce système définit une facette distincte de  $P$ .

Une autre importante classe de faces est celle des faces *minimales*, i.e., les faces qui ne contiennent pas strictement d'autre face. Nous avons le résultat suivant.

**PROPOSITION 1.27.**— (Hoffman and Kruskal [HOF 56]). Un sous-ensemble  $F$  non vide de  $P$  est une face minimale de  $P$  si et seulement s'il existe un sous-système  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$  tel que  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', Bx = d\}$ .

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $F$  est une face minimale de  $P$ . Alors par la proposition 1.15, il existe un sous-système  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$  tel que  $F = \{x \in P : A'x = b'\}$ . On choisit  $A'x \leq b'$  de telle manière qu'il soit maximal. Soit  $A''x \leq b''$  un sous-système minimal de  $Ax \leq b$  tel que  $F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', A''x \leq b'', Bx = d\}$ . Nous allons montrer que  $A''x \leq b''$  ne contient aucune inégalité.

Supposons par contradiction que  $A''x \leq b''$  contient une inégalité  $a''x \leq \alpha''$ . Comme  $a''x \leq \alpha''$  n'est pas redondante dans le système décrivant  $F$ , d'après la proposition 1.19 l'ensemble  $F' = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', A''x \leq b'', a''x = \alpha'', Bx = d\}$  est une facette de  $F$ . Par la proposition 1.15,  $F'$  est également une face de  $P$ . Ce qui contredit le fait que  $F$  est une face minimale de  $P$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons maintenant que  $\emptyset \neq F = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x = b', Bx = d\} \subseteq P$  pour un certain sous-système  $A'x \leq b'$  de  $Ax \leq b$ . Par la proposition 1.15,  $F$  est une face de  $P$ . Aussi  $F$  ne contient strictement aucune face de  $P$ . Alors  $F$  est une face minimale de  $P$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.28.**— Toute face minimale non vide de  $P$  est de dimension  $n - \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ . Les faces minimales non vides d'un polytope sont des points extrêmes.

Étant donné un ensemble de points  $S = \{x^1, \dots, x^p\}$ , on peut avoir besoin de déterminer si un point donné  $x^0$  appartient à  $\text{conv}(S)$ . Ce problème se ramène à vérifier si  $x^0$  est une combinaison convexe des points  $x^1, \dots, x^p$ , c'est-à-dire, s'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i &= x^0, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{1.6}$$

La proposition suivante montre que, si le système (1.6) n'a pas de solution, alors il doit exister une inéquation (un hyperplan) qui sépare  $x^0$  et  $\text{conv}(S)$ , c'est-à-dire une inégalité  $ax \leq \alpha$  telle que  $ax \leq \alpha$  pour tout  $x \in \text{conv}(S)$  et  $ax^0 > \alpha$ .

**PROPOSITION 1.29.** – Si  $x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{conv}(S)$ , alors il existe une inéquation qui sépare  $x^0$  et  $\text{conv}(S)$ .

**Preuve.** Si  $x^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \text{conv}(S)$ , alors le système (1.6) n'admet pas de solution. Par le lemme de Farkas, il existe un scalaire  $\alpha \in \mathbb{R}$  et un vecteur  $y \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\begin{aligned} yx^i + \alpha &\geq 0, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p, \\ yx^0 + \alpha &< 0. \end{aligned}$$

Soit  $a = -y$ . Puisque  $ax^i \leq \alpha$  pour  $i = 1, \dots, p$ , par la proposition 1.8 on en déduit que  $ax \leq \alpha$  pour tout  $x \in \text{conv}(S)$ . Comme  $ax^0 > \alpha$ , la contrainte  $ax \leq \alpha$  sépare donc  $x^0$  et  $\text{conv}(S)$ .  $\square$

**DÉFINITION 1.30.** – Un cône est l'ensemble de solutions d'un système fini homogène, i.e., un système de la forme  $Ax \leq 0$ . Un cône  $C$  est dit généré par un ensemble de points  $\{x^1, \dots, x^k\}$  si tout point  $x$  de  $C$  peut s'écrire sous la forme  $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  avec  $\lambda_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

**THEOREME 1.31.** – (Minkowski [MIN], Weyl [WEY 50]). Un ensemble  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  est un cône si et seulement si  $C$  est généré par un ensemble fini de points.

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $C$  est l'ensemble de solutions d'un système fini  $Ax \leq 0$ . Nous allons montrer que  $C$  peut être généré par un ensemble fini de points. La preuve est par récurrence sur le nombre de contraintes dans le système définissant  $C$ . Si le système n'a aucune contrainte (i.e.,  $C = \mathbb{R}^n$ ), alors les points donnés par les vecteurs unités et le vecteur dont toutes les composantes sont égales à  $-1$  génèrent  $C$ . Supposons maintenant que nous avons un ensemble fini  $S'$  de points qui génère  $C' = \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq 0\}$  et supposons que  $Ax \leq 0$  est obtenu à partir de  $A'x \leq 0$  en ajoutant une contrainte  $ax \leq 0$ . Soient  $S'_0, S'_+, S'_-$  respectivement les sous-ensembles de points  $x$  de  $S'$  tels que  $ax = 0, ax > 0$  et  $ax < 0$ . Remarquons que  $S'_0, S'_+, S'_-$  forment une partition de  $S'$ . Pour toute paire  $(x, x')$  telle que  $x \in S'_+$  et  $x' \in S'_-$  considérons le vecteur

$$y_{x,x'} = (ax)x' - (ax')x. \tag{1.7}$$

Ainsi  $ay_{x,x'} = 0$  et  $A'y_{x,x'} = (ax)A'x' - (ax')A'x \leq 0$ . Soit  $S = S'_- \cup S'_0 \cup \{y_{x,x'} : x \in S'_+, x' \in S'_-\}$ . Il s'ensuit donc que  $S \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : A'x \leq 0, ax \leq 0\}$ . Nous allons montrer dans la suite que  $S$  génère  $C$ . Pour cela, considérons une solution  $x^*$  de  $C$ . Puisque  $C \subseteq C'$ , alors  $x^* = \sum_{x \in S'} \lambda_x x$  où  $\lambda_x \geq 0$  pour tout  $x \in S'$ . La solution  $x^*$  peut être aussi écrite sous la forme

$$x^* = \sum_{x \in S'_+} \lambda_x x + \sum_{x \in S'_0} \lambda_x x + \sum_{x \in S'_-} \lambda_x x. \tag{1.8}$$

Si  $\lambda_x = 0$  pour tout  $x \in S'_+$ , comme  $S'_0 \cup S'_- \subseteq S$ ,  $x^*$  est donc généré par des éléments de  $S$ . S'il existe  $x \in S'_+$  avec  $\lambda_x > 0$ , alors il doit exister  $\tilde{x} \in S'_-$  avec  $\lambda_{\tilde{x}} > 0$ . Sinon on aurait  $ax^* > 0$ , ce qui contredirait le fait que  $x^* \in C$ . Par (1.7), nous avons

$$(ax)\tilde{x} + (-a\tilde{x})x - y_{x,\tilde{x}} = 0. \quad (1.9)$$

En retranchant (1.9), multipliée par un coefficient approprié, à (1.8) on obtient une combinaison positive pour  $x^*$  dans laquelle au moins un scalaire parmi  $\lambda_x, \lambda_{\tilde{x}}$  est réduit à zéro. En répétant cette opération un certain nombre de fois (au plus  $|S'_+| + |S'_-|$  fois), on obtient une combinaison positive de points de  $S$  pour  $x^*$ . Ce qui implique que  $S$  est un générateur pour  $C$ .

( $\Leftarrow$ ) Supposons que  $C$  est généré par un ensemble fini  $S$ . Nous allons montrer que  $C$  est l'ensemble de solutions d'un système fini de la forme  $Ax \leq 0$ . Soit  $U = \{a \in \mathbb{R}^n : ax \leq 0, \forall x \in S\}$ . Donc  $U$  est l'ensemble de solutions d'un système homogène. Par la première partie de la preuve, il doit exister un sous-ensemble  $U'$  de  $U$  tel que toute solution de  $U$  peut s'écrire comme combinaison linéaire positive de points de  $U'$ . Soit  $A$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs  $a$  tels que  $a \in U'$ . Nous avons  $C = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ . En effet, il est clair que  $C \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ . Soit  $\tilde{x} \notin C$ . Alors le système linéaire  $\sum_{x \in S} \lambda_x x = \tilde{x}$ ,  $\lambda_x \geq 0$  pour  $x \in S$  n'a pas de solution. Par le lemme de Farkas, il existe un vecteur  $a \in \mathbb{R}^n$  tel que  $a\tilde{x} > 0$  et  $ax \leq 0$  pour tout  $x \in S$ . Par conséquent,  $a \in U$ . Comme  $a\tilde{x} > 0$ ,  $\tilde{x}$  ne peut donc être une solution du système  $Ax \leq 0$ .  $\square$

### 1.3. Optimisation combinatoire et programmation linéaire

Comme il apparaît dans les sections précédentes, il existe une relation forte entre l'optimisation combinatoire et la programmation linéaire. En effet, tout problème d'optimisation combinatoire peut se ramener à la résolution d'un programme linéaire. Dans cette section, nous discutons de cette relation et des applications de la théorie polyédrale à l'optimisation combinatoire.

#### 1.3.1. Polytope des solutions

Considérons un problème d'optimisation combinatoire du type (1.1) associé à une famille  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles d'un ensemble de base fini  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . A toute solution  $F \in \mathcal{F}$  de (1.1), on peut associer le vecteur  $x^F \in \{0, 1\}^E$  donné par

$$x^F(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le vecteur  $x^F$  est appelé *le vecteur d'incidence* (ou *vecteur représentatif*) de  $F$ . Soit

$$\mathcal{S} = \{x^F : F \in \mathcal{F}\},$$

l'ensemble des vecteurs d'incidence des solutions de (1.1). Alors (1.1) est équivalent au problème

$$\max\{\omega x : x \in \mathcal{S}\}. \quad (1.10)$$

Par la proposition 1.8, la valeur optimale de (1.10) est égale à celle du problème

$$\max\{\omega x : x \in \text{conv}(\mathcal{S})\}. \quad (1.11)$$

Le théorème suivant montre que les deux problèmes sont équivalents.

**THEOREME 1.32.** – *Un ensemble (non vide) de points  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  est un polytope si et seulement s'il existe un ensemble de points  $S$  tel que  $P = \text{conv}(S)$ .*

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $P$  est un polytope. Soit  $S$  l'ensemble de ses points extrêmes. Il est clair que  $\text{conv}(S) \subseteq P$ . Supposons qu'il existe un point  $x^0 \in P \setminus \text{conv}(S)$ . Par la proposition 1.29, il existe une inégalité  $ax \leq \alpha$  telle que  $ax \leq \alpha$  pour tout  $x \in \text{conv}(S)$  et  $ax^0 > \alpha$ . Soit  $\alpha^* = \max\{ax : x \in P\}$ , et soit  $F = \{x \in P : ax = \alpha^*\}$ . Notons que  $F$  est une face non vide de  $P$ . Comme  $x^0 \in P$ , on doit avoir  $\alpha < \alpha^*$ . Mais ceci implique que  $F$  ne contient aucun point extrême de  $P$ , ce qui contredit le corollaire 1.28.

( $\Leftarrow$ ) Soit  $S = \{x^1, \dots, x^p\}$  un ensemble fini de points de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $P = \text{conv}(S)$ . On va montrer que  $P$  est l'ensemble de solutions d'un système linéaire fini. Pour ce faire, considérons l'ensemble  $T \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  donné par les points  $(\lambda, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  tels que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \lambda \leq 1, \\ -\mathbf{1} &\leq y^T \leq \mathbf{1}, \\ yx^i &\leq \lambda, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{1}$  dénote le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont les composantes sont toutes égales à 1. Il est clair que  $T$  est un polytope. Soient  $(\lambda_1, y^1), \dots, (\lambda_t, y^t)$  les points extrêmes de  $T$ . Par la

première partie de cette preuve,  $T = \text{conv}(\{(\lambda_1, y^1), \dots, (\lambda_t, y^t)\})$ . Dans la suite, nous allons montrer que  $P$  est l'ensemble de solutions du système

$$y^i x \leq \lambda_i, \quad \text{pour } i = 1, \dots, t. \quad (1.12)$$

Pour ce faire, nous montrons d'abord que tout point de  $P$  est une solution du système (1.12). En effet, si  $\bar{x} \in P$ , alors  $\bar{x} = \mu_1 x^1 + \dots + \mu_p x^p$  pour certains scalaires  $\mu_1, \dots, \mu_p \geq 0$  tels que  $\sum_{i=1}^p \mu_i = 1$ . Donc  $y^i \bar{x} = \mu_1 y^i x^1 + \dots + \mu_p y^i x^p \leq \mu_1 \lambda_i + \dots + \mu_t \lambda_i = \lambda_i$  pour  $i = 1, \dots, t$ . Ce qui implique que  $\bar{x}$  est une solution de (1.12).

Considérons maintenant une solution  $\tilde{x}$  du système (1.12). Si  $\tilde{x} \notin P$ , alors par la proposition 1.29, il existe une inégalité  $ax \leq \alpha$  telle que  $ax \leq \alpha$  pour tout  $x \in P$  et  $a\tilde{x} > \alpha$ . En divisant l'inégalité par des coefficients appropriés, on peut supposer que  $-1 \leq a^T \leq 1$  et  $-1 \leq \alpha \leq 1$ . Donc  $(\alpha, a) \in T$ , et par conséquent  $(\alpha, a)$  peut s'écrire  $(\alpha, a) = \sum_{i=1}^t \gamma_i (\lambda_i, y^i)$  pour certains scalaires  $\gamma_1, \dots, \gamma_t$  tels que  $\sum_{i=1}^t \gamma_i = 1$ . D'où  $a\tilde{x} = \sum_{i=1}^t \gamma_i y^i \tilde{x} \leq \sum_{i=1}^t \gamma_i \lambda_i = \alpha$ . Comme  $a\tilde{x} > \alpha$ , on obtient une contradiction. Par conséquent,  $\tilde{x} \in P$ , ce qui termine la preuve du théorème.  $\square$

Par le théorème 1.32,  $\text{conv}(\mathcal{S})$  est un polytope, et peut donc être décrit par un système fini d'inégalités linéaires. En conséquence, le problème (1.11) n'est rien d'autre qu'un programme linéaire. Par l'algorithme du simplexe, une solution optimale de (1.11) peut être prise parmi les points extrêmes de  $\text{conv}(\mathcal{S})$ . Comme ces derniers sont précisément les solutions de  $\mathcal{S}$ , il en résulte que les problèmes (1.10) et (1.11) sont équivalents. Ainsi tout problème d'optimisation combinatoire peut être ramené à un programme linéaire en décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions par un système linéaire. Cette enveloppe convexe est appelée *le polytope associé* au problème (ou *le polytope des solutions* du problème).

Le problème (1.10) peut être formulé comme un programme en nombres entiers de la forme

$$\max \omega x \quad (1.13)$$

$$Ax \leq b, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}, \quad (1.14)$$

$$x \text{ entier}. \quad (1.15)$$

(Ici  $\mathbf{0}$  est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 0.) Les contraintes (1.14) sont appelées *inégalités triviales*. Le polytope donné par les inégalités (1.13) et (1.14) comporte généralement des points extrêmes fractionnaires. Ainsi, la relaxation linéaire, obtenue en supprimant les contraintes d'intégrité (1.15), peut avoir une

solution optimale fractionnaire. Par conséquent, d'autres contraintes seraient nécessaires pour caractériser le polytope des solutions du problème et le formuler comme un programme linéaire.

Comme conséquence de ce qui précède, on obtient une méthode générale pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire. Cette méthode, appelée *approche polyédrale*, peut être résumée de la manière suivante :

- 1) Représenter les éléments de  $\mathcal{F}$  par un ensemble  $\mathcal{S}$  de vecteurs en 0-1.
- 2) Définir le polytope  $P$ , enveloppe convexe des points de  $\mathcal{S}$ .
- 3) Déterminer un système complet qui décrit  $P$ .
- 4) Appliquer la programmation linéaire pour résoudre le problème.

L'étape 3) est l'étape cruciale de la méthode. Bien que les résultats ci-dessus impliquent qu'il existe un système linéaire fini qui décrit  $P$ , ils ne disent pas comment obtenir un tel système.

Le *dominant* d'un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$ , noté par  $\text{dom}(P)$ , est le polyèdre qui consiste en les points  $x$  tels que  $x \geq x'$  pour certain  $x' \in P$ , i.e.,

$$\text{dom}(P) = P + \mathbb{R}_+^n.$$

Il est clair que  $P \subseteq \text{dom}(P)$  et  $\text{dom}(P)$  est non borné. Nous avons la propriété algorithmique intéressante suivante.

**REMARQUE 1.33.-** Si  $\omega \in \mathbb{R}_+^n$ , alors  $\min\{\omega x : x \in P\} = \min\{\omega x : x \in \text{dom}(P)\}$ .

Par conséquent, étant donné un problème d'optimisation combinatoire de la forme  $\min\{\omega x : x \in P\}$  où  $P$  est son polytope des solutions, au lieu d'étudier  $P$ , on peut considérer son dominant. Ce dernier est généralement plus simple à caractériser.

Étant donné un ensemble de points  $S \in \mathbb{R}^n$ , on dit qu'une inégalité  $ax \leq \alpha$  est valide pour  $S$  si elle est vérifiée par tout point de  $S$ .

**PROPOSITION 1.34.-** Une inégalité  $ax \leq \alpha$  est valide pour  $S$  si et seulement si elle est valide pour  $\text{conv}(S)$ .

**Preuve.** Comme  $S \subset \text{conv}(S)$ ,  $ax \leq \alpha$  est valide pour  $S$  si elle l'est pour  $\text{conv}(S)$ . Supposons alors que  $ax \leq \alpha$  est valide pour  $S$ , et considérons une solution  $x \in \text{conv}(S)$ . Donc  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$  où  $x^i \in S$ ,  $\lambda_i \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, k$  et  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  pour un certain entier  $k$ . Par conséquent  $ax = \sum_{i=1}^k \lambda_i(ax^i) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha = \alpha$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.35.** – *Si  $F$  est une face non vide de  $\text{conv}(S)$  de dimension  $p - 1$ , alors il existe  $p$  points affinement indépendants dans  $S \cap F$ .*

**Preuve.** Par définition, il existe  $p$  points  $x^1, \dots, x^p$  dans  $F$  affinement indépendants. Si  $x^i \in S$  pour  $i = 1, \dots, p$ , alors l'assertion est démontrée. Supposons que  $x^1 \notin S$ . Alors  $x^1 = \sum_{j=1}^k \lambda_j \bar{x}^j$  où  $\bar{x}^j \in S$ ,  $\lambda_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, k$  et  $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$  pour un certain entier  $k$ . De plus les points  $\bar{x}^j$ ,  $j = 1, \dots, k$  sont tous dans  $F$ . En effet, cela est clair si  $F = \text{conv}(S)$ . Si  $F$  est définie par une contrainte  $ax \leq \alpha$  valide pour  $\text{conv}(S)$ , alors  $a\bar{x}^1 = \alpha$ . Comme  $a\bar{x}^j \leq \alpha$  pour  $j = 1, \dots, k$ , il s'ensuit que  $a\bar{x}^j = \alpha$  pour  $j = 1, \dots, k$ , et ainsi  $\bar{x}^j \in F$  pour  $j = 1, \dots, k$ . Puisque  $x^1, \dots, x^p$  sont affinement indépendants, il existe  $t \in \{1, \dots, k\}$  tel que  $\bar{x}^t, x^2, \dots, x^p$  sont affinement indépendants. Maintenant la preuve peut être complétée en répétant ce processus pour tout point  $x^i \notin S$ .  $\square$

Par les propositions 1.34 et 1.35, pour établir la validité d'une contrainte pour  $\text{conv}(S)$  ou la dimension d'une face de  $\text{conv}(S)$ , il suffit de considérer des points de  $S$ .

### 1.3.2. Points et rayons extrêmes

Considérons un polyèdre  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  où  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^m$ . Notons qu'il peut y avoir des inégalités dans  $Ax \leq b$  qui sont vérifiées à l'égalité par les solutions de  $P$ .

**DÉFINITION 1.36.** – *Soit  $P^0 = \{r \in \mathbb{R}^n : Ar \leq 0\}$ . Les points de  $P^0 \setminus \{0\}$  sont appelés rayons de  $P$ .*

Il est facile de voir qu'un point  $r \in \mathbb{R}^n$  est un rayon de  $P$  si et seulement si pour tout point  $x \in P$ ,  $\{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \in \mathbb{R}_+\} \subseteq P$ .

**DÉFINITION 1.37.** – *Un rayon  $r$  de  $P$  est dit rayon extrême s'il n'existe pas deux rayons  $r^1, r^2 \in P^0$ ,  $r^1 \neq \lambda r^2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ , tels que  $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$ .*

Dans la suite nous donnons quelques propriétés des points et rayons extrêmes. Celles-ci vont permettre de décrire tout polyèdre par ses points et rayons extrêmes.

**PROPOSITION 1.38.** – *Un point  $r \in P^0$  est un rayon extrême de  $P$  si et seulement si l'ensemble  $\{\lambda r : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$  est une face de  $P^0$  de dimension 1.*

**Preuve.** Soit  $\bar{A}$  la matrice formée par les lignes  $A_i$  de  $A$  telles que  $A_i r = 0$ . Si  $\{\lambda r : \lambda \in \mathbb{R}_+\}$  est une face de  $P^0$  de dimension 1, alors par la proposition 1.12,  $\text{rang}(\bar{A}) = n - 1$ . Donc toute solution du système  $\bar{A}y = 0$  est de la forme  $y = \mu r$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Si  $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$  où  $r^1, r^2 \in P^0$ , alors  $\bar{A}r^1 \leq 0$  et  $\bar{A}r^2 \leq 0$ . Mais ceci implique

que  $\bar{A}r^1 = \bar{A}r^2 = 0$ . Et par conséquent  $r^1 = \lambda_1 r$  et  $r^2 = \lambda_2 r$  pour  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Ainsi  $r^1 = \lambda r^2$  avec  $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}$ , et donc  $r$  est un rayon extrême.

Si  $r \in P^0$  et  $\text{rang}(\tilde{A}) < n - 1$ , alors il existe  $r' \neq \lambda r$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\bar{A}r' = 0$ . Soit  $\tilde{A}$  la sous-matrice complémentaire de  $\tilde{A}$  dans  $A$ . Remarquons que  $\bar{A}r < 0$ . Il existe, par conséquent,  $\epsilon \neq 0$  tel que  $\tilde{A}r + \epsilon \tilde{A}r' \leq 0$  et  $\tilde{A}r - \epsilon \tilde{A}r' \leq 0$ . Alors  $r^1 = r + \epsilon r'$  et  $r^2 = r - \epsilon r'$  sont des rayons de  $P^0$ . Comme  $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$  et  $r^1 \neq \lambda r^2$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $r$  ne peut être un rayon extrême.  $\square$

**THEOREME 1.39.** – Pour tout point extrême  $x^*$  de  $P$ , il existe  $c \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $x^*$  est la solution optimale unique du programme  $\max\{cx : x \in P\}$ .

**Preuve.** Soit  $I = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i x^* = b_i\}$ . Soit  $c^* = \sum_{i \in I} A_i$ . Puisque  $P$  est rationnel, il existe un entier  $t > 0$  tel que  $c = tc^* \in \mathbb{Z}^n$ . Comme  $x^*$  est un point extrême de  $P$ , et par la proposition 1.17,  $x^*$  est une face de dimension 0, pour tout point  $x \in P \setminus \{x^*\}$ , il existe  $i \in I$  tel que  $A_i x < b_i$ . Donc pour  $x \in P \setminus \{x^*\}$ , on a  $cx = \sum_{i \in I} t A_i x < \sum_{i \in I} tb_i = \sum_{i \in I} t A_i x^* = cx^*$ .  $\square$

**THEOREME 1.40.** – Si  $\text{rang}(A) = n - k$  et  $P \neq \emptyset$ , alors  $P$  possède une face de dimension  $k$ , et ne contient aucune face de dimension inférieure.

**Preuve.** Soit  $F \neq \emptyset$  une face de  $P$  et notons par  $I$  l'ensemble des indices  $i \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $A_i x < b_i$  pour un certain  $x \in F$ . Comme  $\text{rang}(A) = n - k$ , alors la matrice des équations de  $F$ , donnée par les  $A_i$  tels que  $i \in \{1, \dots, m\} \setminus I$ , est de rang inférieur ou égal à  $n - k$ . Par la proposition 1.12,  $\dim(F) \geq k$ . Supposons maintenant que  $F$  est de dimension minimum. Si  $\dim(F) = 0$ , alors, par la proposition 1.17,  $F$  est réduite à un point extrême de  $P$  et l'assertion est donc démontrée. Supposons que  $\dim(F) > 0$ . Soit  $\hat{x}$  un point intérieur de  $F$ . Puisque  $\dim(F) > 0$ , il doit exister un autre point  $y \in F$ . Considérons la droite  $\Delta$  passant par les points  $\hat{x}$  et  $y$ . Celle-ci contient les points  $z(\lambda) = \lambda y + (1 - \lambda)\hat{x}$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $\Delta$  intersecte un des hyperplans  $\{x \in \mathbb{R}^n : A_i x = b_i\}$ ,  $i \in I$ . Soit  $\lambda^* = \min\{|\lambda^i| : i \in I, A_i z(\lambda^i) = b_i\}$ , et soit  $i^* \in I$  tel que  $\lambda^* = |\lambda^{i^*}|$ . Comme  $\hat{x}$  est un point intérieur de  $F$ , et, par conséquent,  $A_{i^*} \hat{x} < b_{i^*}$ , il s'ensuit que  $\lambda^* \neq 0$ . Considérons l'ensemble  $F^* = \{x \in F : A_{i^*} x = b_{i^*}\}$ . Il est clair que  $F^*$  est une face de  $P$ . Aussi, comme  $z(\lambda^{i^*}) \in F^* \setminus F$ ,  $F^*$  est une face de dimension inférieure, une contradiction.

Par conséquent,  $\Delta$  n'intersecte aucun des hyperplans  $\{x \in \mathbb{R}^n : A_i x = b_i\}$ ,  $i \in I$ . Ceci implique que  $\Delta \subseteq P$ , i.e.,  $A(\lambda y + (1 - \lambda)\hat{x}) \leq b$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Puisque  $A\hat{x} \leq b$ , on en déduit que  $A(y - \hat{x}) = 0$  pour tout  $y \in F$ . D'où  $F = \{y \in P : Ay = A\hat{x}\}$ . Comme  $\text{rang}(A) = n - k$ , par la proposition 1.12, on a  $\dim(F) = k$ .  $\square$

**THEOREME 1.41.** – Supposons que  $\text{rang}(A) = n$ , et le problème

$$\max\{\omega x : x \in P\} \tag{1.16}$$

admet une solution optimale finie. Alors il existe une solution optimale de (1.16) qui est un point extrême de  $P$ .

**Preuve.** L'ensemble des solutions optimales de (1.16) est une face non vide  $F = \{x \in P : \omega x = \omega_0\}$ . Comme  $\text{rang}(A) = n$ , par le théorème 1.40,  $F$  contient une face de dimension 0. Par la proposition 1.17, il en résulte que  $F$  contient un point extrême.  $\square$

**THEOREME 1.42.** – Si  $\text{rang}(A) = n$  et  $\max\{\omega x : x \in P\}$  est non borné, alors  $P$  admet un rayon extrême  $r^*$  tel que  $\omega r^* > 0$ .

**Preuve.** Comme le programme linéaire  $\max\{\omega x : x \in P\}$  n'admet pas de solution optimale finie, par la dualité en programmation linéaire, le système  $\{yA = \omega, y \geq 0\}$  n'admet pas de solution. Par le lemme de Farkas, il existe  $r \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ar \leq 0$  et  $\omega r > 0$ . Considérons le programme linéaire

$$\max\{\omega r : Ar \leq 0, \omega r \leq 1\}. \quad (1.17)$$

La valeur optimale de (1.17) est donc égale à 1. Comme cette valeur est bornée et  $\text{rang}(A) = n$ , par le théorème 1.41, (1.17) admet une solution optimale qui est un point extrême de  $\{r : Ar \leq 0, \omega r \leq 1\}$ . Soit  $r^*$  un tel point. Il est clair que  $r^*$  est un point de  $P^0 \setminus \{0\}$ , et donc  $r^*$  est un rayon de  $P$ . En plus, comme  $r^*$  est la solution unique de  $n$  équations du système  $\{Ar \leq 0, \omega r \leq 1\}$ , le sous-système de  $Ax \leq 0$  vérifié à l'égalité par  $r^*$  doit être de rang  $n - 1$ . Sinon  $r^*$  serait nul, ce qui est impossible. Par conséquent,  $\{\lambda r^*, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$  est une face de  $P^0$  de dimension 1. Par la proposition 1.38,  $r^*$  est donc un rayon extrême de  $P$ .  $\square$

On peut donner maintenant le théorème fondamental suivant qui établit une description de  $P$  en termes de points et rayons extrêmes.

**THEOREME 1.43.** – (Minkowski [MIN ]). Si  $P \neq \emptyset$  et  $\text{rang}(A) = n$ , alors

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^q \mu_j r^j, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \mu_j \geq 0, j = 1, \dots, q \end{array} \right\},$$

où  $x^1, \dots, x^p$  et  $r^1, \dots, r^q$  sont respectivement les points et les rayons extrêmes de  $P$ .

**Preuve.** Soit

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^q \mu_j r^j, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \begin{array}{l} \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \mu_j \geq 0, j = 1, \dots, q \end{array} \right\}.$$

Comme  $x^i \in P$  pour  $i = 1, \dots, p$ , il est clair que  $x' = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i \in P$ , si  $\lambda_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  et  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ . Aussi, puisque les  $r^j$ ,  $j = 1, \dots, q$  sont des rayons de  $P$ ,  $x' + \sum_{j=1}^q \mu_j r^j \in P$ , si  $\mu_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, q$ . Ainsi  $Q \subseteq P$ .

Supposons maintenant que  $P \setminus Q \neq \emptyset$ , et soit  $y \in P \setminus Q$ . Alors il n'existe pas des  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et  $\mu_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i + \sum_{j=1}^q \mu_j r^j &= y, \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i &= 1, \\ \lambda_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ \mu_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Par le lemme de Farkas, il existe un vecteur  $(a, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $ax^i - a_0 \leq 0$  pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $ar^j \leq 0$  pour  $j = 1, \dots, q$ , et  $ay - a_0 > 0$ . Considérons maintenant le programme linéaire  $\max\{ax : x \in P\}$ . Si ce programme admet une solution optimale finie, alors par le théorème 1.41, une telle solution peut être prise parmi les points extrêmes de  $P$ . Comme  $y \in P$  et  $ay < ay$  pour tout point extrême  $x^i$ , ceci est impossible. Si la solution optimale du programme ci-dessus est non bornée, alors par le théorème 1.42, il existe un rayon extrême  $r^j$  tel que  $ar^j > 0$ . De nouveau, nous avons une contradiction.  $\square$

## 1.4. Techniques de preuves

Nous avons vu dans la section 2 qu'une description minimale d'un polyèdre  $P$  par un système d'inégalités, peut être obtenue en caractérisant les facettes du polyèdre. Par la dualité en programmation linéaire, cette description peut permettre d'obtenir une forte relation min-max entre les solutions optimales du problème primal  $\max\{\omega x : x \in P\}$  et de son dual. De plus, l'utilisation d'inégalités définissant des facettes dans le cadre d'une méthode de coupes pour le problème primal peut permettre d'accélérer considérablement la résolution du problème. En conséquence, si  $P$  est le polytope associé à un problème d'optimisation combinatoire, étant donnée une inégalité valide pour  $P$ , une question fondamentale qui se pose est de déterminer si celle-ci définit une facette de  $P$ . Par ailleurs, étant donné un système d'inégalités valides pour  $P$ , il serait intéressant de voir si le système décrit complètement  $P$ . Dans cette section, nous discutons de certaines techniques de preuve pour ces questions.

### 1.4.1. Preuves de facettes

#### 1.4.1.1. Preuve de nécessité

Une première technique pour prouver qu'une contrainte valide  $ax \leq \alpha$  définit une facette de  $P$  est de montrer que  $ax \leq \alpha$  est *essentielle* dans la description de  $P$ . En

d'autres termes, si  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  et si  $ax \leq \alpha$  est une des contraintes de  $Ax \leq b$ , alors il faut montrer qu'il existe un point  $\bar{x}$  tel que  $a\bar{x} > \alpha$ , et  $\bar{x}$  satisfait toutes les autres inégalités de  $Ax \leq b$ . Ceci implique que la contrainte  $ax \leq \alpha$  est nécessaire pour décrire  $P$ . Si  $P$  est de pleine dimension, par le corollaire 1.26, il en résulte que  $ax \leq \alpha$  définit une facette. Si  $P$  n'est pas de pleine dimension, alors il faut également montrer que  $ax \leq \alpha$  n'est pas une équation dans le système  $Ax \leq b$ . Pour ce faire, il suffit de déterminer une solution  $\hat{x} \in P$  telle que  $a\hat{x} < \alpha$ .

Cette technique ne s'applique généralement que pour des contraintes simples. Nous l'illustrons ici pour les inégalités triviales du polytope des stables.

Un *stable* dans un graphe  $G = (V, E)$  est un sous-ensemble de sommets deux à deux non-adjacents. Si chaque sommet  $v$  de  $V$  est muni d'un poids  $\omega(v)$ , le *problème du stable* est de déterminer un stable  $S$  tel que  $\sum_{v \in S} \omega(v)$  est maximum. Le problème du stable est NP-difficile même quand les poids sont tous égaux à 1.  
Si  $S \subseteq V$  est un sous-ensemble de sommets, soit  $x^S \in \mathbb{R}^V$  le vecteur d'incidence de  $S$  donné par

$$x^S(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v \in S, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit

$$P(G) = \text{conv}\{x^S : S \subseteq V \text{ est un stable}\},$$

l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de tous les stables de  $G$ .  $P(G)$  est appelé le *polytope des stables* de  $G$ . Le problème du stable dans  $G$  est donc équivalent au programme linéaire  $\max\{\omega x : x \in P(G)\}$ . Le polytope des stables a été largement étudié dans la littérature. Comme le problème du stable est NP-difficile, le polytope  $P(G)$  n'est explicitement connu que pour certaines classes particulières de graphes.

Si  $S$  est un stable de  $G$ , il est clair que  $x^S$  satisfait les contraintes

$$x(u) + x(v) \leq 1 \quad \forall uv \in E, \tag{1.18}$$

$$x(v) \geq 0 \quad \forall v \in V. \tag{1.19}$$

Aussi toute solution entière des contraintes (1.18),(1.19) représente un stable. Dans ce qui suit, nous allons montrer que les contraintes (1.19) définissent des facettes pour  $P(G)$ . Pour cela nous montrons d'abord que  $P(G)$  est de pleine dimension.

**PROPOSITION 1.44.**—  $P(G)$  est de pleine dimension.

**Preuve.** Par la proposition 1.35, il suffit d'exhiber  $n + 1$  stables dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants. Considérons les ensembles  $S_0 = \emptyset$  et  $S_i =$

$\{v_i\}$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Il est clair que ces ensembles induisent des stables. En plus leurs vecteurs d'incidence  $x^{S_0}, x^{S_1}, \dots, x^{S_n}$  sont affinement indépendants.  $\square$

En conséquence, par le corollaire 1.26, deux inégalités valides pour  $P(G)$  définissent la même facette si et seulement si l'une est un multiple positif de l'autre.

**PROPOSITION 1.45.-** Soit  $\sum_{v \in V} a(v)x(v) \leq \alpha$  une inégalité valide pour  $P(G)$  différente des inégalités (1.19). Supposons que  $\sum_{v \in V} a(v)x(v) \leq \alpha$  définit une facette de  $P(G)$ . Alors  $a(v) \geq 0$  pour tout  $v \in V$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe un sommet  $u \in V$  tel que  $a(u) < 0$ . Puisque  $P(G)$  est de pleine dimension, et  $\sum_{v \in V} a(v)x(v) \leq \alpha$  est différente des contraintes (1.19), il en résulte que la facette définie par  $\sum_{v \in V} a(v)x(v) \leq \alpha$  est différente de la face  $\{x \in P : x(u) = 0\}$ . D'après la proposition 1.35, il doit alors exister un stable  $S$  de  $G$  contenant  $u$  tel que  $\sum_{v \in V} a(v)x^S(v) = \alpha$ . Soit  $S' = S \setminus \{u\}$ . Il est évident que  $S'$  est un stable. Par contre, nous avons  $\sum_{v \in V} a(v)x^{S'}(v) = \sum_{v \in V} a(v)x^S(v) - a(u) > \alpha$ , ce qui est impossible.  $\square$

**PROPOSITION 1.46.-** Les contraintes (1.19) définissent des facettes de  $P(G)$ .

**Preuve.** D'après le théorème 1.32 et la proposition 1.45, le polytope  $P(G)$  peut être décrit par un système d'inégalités de la forme

$$\begin{aligned} a^i x &\leq \alpha_i, & \forall i \in I, \\ x(v) &\geq 0, & \forall v \in V, \end{aligned} \tag{1.20}$$

où  $I$  est un ensemble d'indices, et  $a^i \geq 0$  pour tout  $i \in I$ . Soient  $v \in V$  et  $\bar{x} \in \mathbb{R}^V$  tels que  $\bar{x}(u) = 0$  pour tout  $u \in V \setminus \{v\}$  et  $\bar{x}(v) = -1$ . Comme  $a^i \geq 0$  pour tout  $i \in I$ , il s'ensuit que  $\bar{x}$  vérifie toutes les contraintes du système (1.20) sauf la contrainte  $x(v) \geq 0$ . Ceci montre que cette dernière est essentielle dans (1.20), et définit, en conséquence, une facette de  $P(G)$ .  $\square$

#### 1.4.1.2. Preuve directe

La technique la plus directe pour montrer qu'une contrainte valide induit une facette consiste à exhiber  $\dim(P)$  solutions affinement indépendantes et satisfaisant la contrainte à l'égalité. Si  $P$  est de pleine dimension, on en déduit que  $ax \leq \alpha$  définit une facette de  $P$ . Si  $P$  n'est pas de pleine dimension, comme pour la première méthode, il faut aussi montrer que  $ax \leq \alpha$  n'est pas une équation dans  $Ax \leq b$  en déterminant une solution de  $P$  qui vérifie  $ax \leq \alpha$  avec inégalité stricte. Nous allons illustrer également cette méthode sur le polytope des stables.

Un graphe (simple) est dit *complet* si entre chaque paire de sommets il existe une arête. Si  $G = (V, E)$  est un graphe, un sous-ensemble  $K$  de sommets de  $V$  est appelé

*clique* de  $G$  s'il induit un sous-graphe complet maximal, *i.e.*, un sous-graphe complet qui n'est contenu strictement dans aucun sous-graphe complet. Si  $S \subseteq V$  est un stable, il est clair que  $S$  ne peut intersecter une clique en plus d'un sommet. Ceci implique que les contraintes suivantes

$$x(K) \leq 1, \quad \forall K \text{ clique de } G, \quad (1.21)$$

sont valides pour le polytope  $P(G)$ .

**PROPOSITION 1.47.**— *Les inégalités (1.21) définissent des facettes de  $P(G)$ .*

**Preuve.** Comme  $P(G)$  est de pleine dimension, il suffit d'exhiber  $n = |V|$  stables de  $G$  dont les vecteurs d'incidence satisfont (1.21) à l'égalité et sont affinement indépendants.

Puisque  $K$  est une clique, pour tout sommet  $v$  dans  $V \setminus K$ , il existe un sommet  $v' \in K$  tel que  $vv' \notin E$ . Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} S_v &= \{v\} \text{ pour tout } v \in K, \\ S_v &= \{v, v'\} \text{ pour tout } v \in V \setminus K. \end{aligned}$$

Il est clair que ces ensembles sont des stables de  $G$ . De plus, leurs vecteurs d'incidence  $x^{S_v}$ ,  $v \in V$ , vérifient (1.21) à l'égalité et sont linéairement indépendants. Comme  $0$  n'appartient pas à l'enveloppe affine des vecteurs d'incidence  $x^{S_v}$ ,  $v \in V$ , par la remarque 1.7 ces points sont également affinement indépendants.  $\square$

Noter que si  $uv$  est une arête telle que  $\{u, v\}$  est contenu dans une clique  $K$ , alors l'inégalité (1.18) correspondant à  $uv$  est dominée par (1.21).

#### 1.4.1.3. Preuve par maximalité

Une dernière méthode, pour montrer qu'une contrainte  $ax \leq \alpha$ , valide pour  $P$ , définit une facette, consiste à prouver que la face  $F = \{x \in P : ax = \alpha\}$  induite par  $ax \leq \alpha$ , n'est pas strictement contenue dans une facette de  $P$ . En d'autres termes, si  $F \subseteq \{x \in P : bx = \beta\}$ , où  $bx \leq \beta$  est une contrainte qui définit une facette de  $P(G)$ , alors  $ax \leq \alpha$  doit être équivalente à  $bx \leq \beta$ . Si  $P$  est de pleine dimension, il suffit de montrer, dans ce cas, qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $b = \rho a$ . Si  $P$  n'est pas de pleine dimension, alors, en plus de l'équivalence entre  $ax \leq \alpha$  et  $bx \leq \beta$ , il faut montrer que  $ax \leq \alpha$  n'est pas une équation dans  $Ax \leq b$ .

Considérons encore le polytope des stables. Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Une *roue* de  $G$  est un sous-graphe  $H = (W, T)$  où  $W = \{w_0, w_1, \dots, w_k\}$  et  $T = \{w_0w_i, i = 1, \dots, k\} \cup \{w_iw_{i+1}, i = 1, \dots, k-1\} \cup \{w_1w_k\}$ . Supposons que  $H = (W, T)$  est une roue de  $G$  avec  $|W| = k + 1$  pair. Une telle roue est dite *impaire*. Il n'est pas difficile de voir que la contrainte suivante est valide pour  $P(G)$ .

$$\sum_{i=1}^k x(w_i) + \frac{k-1}{2}x(w_0) \leq \frac{k-1}{2}. \quad (1.22)$$

**PROPOSITION 1.48.**— *Supposons que  $v_0$  n'est adjacent à aucun sommet de  $V \setminus W$ . Alors l'inégalité (1.22) définit une facette pour  $P(G)$ .*

**Preuve.** Notons la contrainte (1.22) par  $ax \leq \alpha$ , et supposons qu'il existe une contrainte  $bx \leq \beta$  valide pour  $P(G)$  définissant une facette de  $P(G)$  telle que  $\{x \in P(G) : ax = \alpha\} \subseteq \{x \in P(G) : bx = \beta\}$ . Puisque  $P(G)$  est de pleine dimension, il suffit de montrer qu'il existe  $\rho > 0$  tel que  $b = \rho a$ . Pour cela, nous montrons d'abord que  $a(w_i) = a(w_j)$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ . Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} S &= \{w_1, w_3, \dots, w_{k-2}\}, \\ S' &= (S \setminus \{w_1\}) \cup \{w_k\}. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ces ensembles sont des stables de  $G$  dont les vecteurs d'incidence vérifient (1.22) à l'égalité. Il s'ensuit que  $bx^S = bx^{S'}$ , et par conséquent,  $b(w_1) = b(w_k)$ .

Par symétrie, on en déduit qu'il existe  $\rho \in \mathbb{R}$  tel que

$$b(w_i) = b(w_j) = \rho \text{ pour tous } i, j \in \{1, \dots, k\}. \quad (1.23)$$

Puisque  $\{w_0\}$  est un stable et  $ax^{\{w_0\}} = ax^S = \alpha$ , alors  $bx^{\{w_0\}} = bx^S = \beta$ . D'après (1.23), il en résulte que

$$b(w_0) = \rho \frac{k-1}{2}. \quad (1.24)$$

Considérons maintenant un sommet  $w \in V \setminus W$ . Puisque  $w$  n'est pas adjacent à  $w_0$ , l'ensemble  $S'' = \{w, w_0\}$  est alors un stable de  $G$ . Comme  $ax^{S''} = ax^{\{w_0\}} = \alpha$ , et ainsi  $bx^{S''} = bx^{\{w_0\}} = \beta$ , il en résulte que  $0 = bx^{S''} - bx^{\{w_0\}} = b(w)$ . Comme  $w$  est arbitraire dans  $V \setminus W$ , nous avons

$$b(w) = 0 \quad \text{pour tout } w \in V \setminus W. \quad (1.25)$$

D'après (1.23)-(1.25), il s'ensuit que  $b = \rho a$ . De plus, comme pour tout sommet  $v$  de  $G$ , il existe un stable  $S$  de  $G$  contenant  $v$  tel que  $ax^S = \alpha$ . La face définie par  $ax \leq \alpha$  est différente d'une face triviale  $\{x \in P(G) : x(v) = 0\}$ . Ceci implique que la face induite par  $bx \leq \beta$  n'est pas contenue dans une face triviale. Par la proposition 1.45, il s'ensuit que  $b(v) \geq 0$  pour tout  $v \in V$ . Comme  $bx \leq \beta$  définit une facette de  $P(G)$ , il doit donc exister au moins un sommet  $v \in V$  tel que  $b(v) > 0$ . Par conséquent  $\rho > 0$ .

□

### 1.4.2. Preuves d'intégrité

Soit  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  le polyèdre des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire, et soit  $Ax \leq b$  un système d'inégalités valides pour  $P$ . Dans ce qui suit, nous discutons de techniques pour montrer que  $Ax \leq b$  décrit complètement  $P$ . Pour cela on suppose que toute solution entière de  $Ax \leq b$  est une solution du problème.

#### 1.4.2.1. Preuve d'intégrité des points extrêmes

Une première technique, pour montrer que  $Ax \leq b$  décrit  $P$  consiste à montrer que les points extrêmes du polyèdre  $\hat{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  sont tous entiers. Ceci impliquerait que  $\hat{P} \subseteq P$ . Comme  $P \subseteq \hat{P}$ , on a alors  $P = \hat{P}$ . Pour illustrer cette technique, nous considérons le problème du sous-graphe 2-arête connexe.

Un graphe  $G$  est dit  $k$ -arête connexe, pour  $k > 0$  fixé, si pour chaque paire de sommets de  $G$  il existe au moins  $k$  chaînes arête-disjointes. Étant donnés un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction poids  $\omega : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui associe le poids  $\omega(e)$  à chaque arête  $e \in E$ , le problème du sous-graphe  $k$ -arête connexe est de déterminer un sous-graphe  $k$ -arête connexe  $(V, T)$  de  $G$  contenant tous les sommets de  $V$  et tel que  $\sum_{e \in T} \omega(e)$  est minimum. Ce problème a entre autre des applications dans la conception des réseaux de télécommunications fiables [GRÖ 95] [KER 04a].

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Si  $W \subseteq V$ , l'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans  $W$  et l'autre dans  $V \setminus W$  est appelé *coupé*, et noté par  $\delta(W)$ . Si  $W = \{v\}$ , on écrit  $\delta(v)$  à la place de  $\delta(\{v\})$ . Le théorème suivant, dû à Menger, établit une relation entre les chaînes arête-disjointes et les coupes dans un graphe.

**THEOREME 1.49.**— (Menger [MEN 27]). *Dans un graphe  $G$ , il existe  $k$  chaînes arête-disjointes entre deux sommets  $s$  et  $t$  si et seulement si toute coupe de  $G$  déconnectant  $s$  et  $t$  contient au moins  $k$  arêtes.*

Soit  $P2AC(G)$  l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des ensembles d'arêtes  $T \subseteq E$  tels que  $(V, T)$  est un sous-graphe 2-arête connexe de  $G$ . Il est facile de voir que les contraintes suivantes sont valides pour  $P2AC(G)$ .

$$x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E, \tag{1.26}$$

$$x(e) \leq 1, \quad \forall e \in E, \tag{1.27}$$

$$x(\delta(W)) \geq 2, \quad \forall W \subset V, W \neq \emptyset. \tag{1.28}$$

Par le théorème de Menger, toute solution entière qui vérifie les contraintes (1.26)-(1.28) induit un sous-graphe 2-arête connexe couvrant tous les sommets de  $V$ . Dans la suite, nous notons par  $Q(G)$  le polytope donné par les inégalités (1.26)-(1.28).

Un graphe  $G$  est dit *série-parallèle* s'il peut être construit, à partir d'un graphe composé de deux sommets liés par une arête, en appliquant les opérations suivantes :

- dupliquer une arête (*i.e.*, ajouter une arête parallèle),
- subdiviser une arête (*i.e.*, remplacer une arête  $uv$  par deux arêtes  $uw$  et  $wv$  où  $w$  est un nouveau sommet).

Les graphes série-parallèles ont la propriété suivante.

**REMARQUE 1.50.** Si  $G = (V, E)$  est un graphe connexe, série-parallèle et sans arêtes multiples avec  $|E| \geq 2$ , alors  $G$  contient au moins un sommet de degré 2.

Dans la suite, nous allons montrer que si  $G = (V, E)$  est un graphe série-parallèle, alors les contraintes (1.26)-(1.28) caractérisent le polytope  $P2AC(G)$ .

**THEOREME 1.51.** [MAH 94] Si  $G$  est série-parallèle, alors  $P2AC(G) = Q(G)$ .

**Preuve.** Supposons par contradiction qu'il existe un graphe série-parallèle  $G = (V, E)$  tel que  $P2AC(G) \neq Q(G)$ . Donc  $G$  est 2-arête connexe, sinon  $P2AC(G) = Q(G) = \emptyset$ . Ainsi  $|E| \geq 2$ . Supposons que  $|E|$  est minimum, *i.e.*, pour tout graphe série-parallèle  $G' = (V', E')$  tel que  $|E'| < |E|$ , nous avons  $P2AC(G') = Q(G')$ .

Puisque les contraintes (1.26)-(1.28) sont valides pour  $P2AC(G)$ , il est clair que  $P2AC(G) \subseteq Q(G)$ . Comme  $P2AC(G) \neq Q(G)$ , il doit donc exister un point extrême fractionnaire  $\bar{x}$  de  $Q(G)$ .

**Assertion 1.**  $\bar{x}(e) > 0$  pour tout  $e \in E$ .

**Preuve.** Supposons qu'il existe une arête  $e_0 \in E$  telle que  $\bar{x}(e_0) = 0$ . Soit  $\bar{x}' \in \mathbb{R}^{|E|-1}$  la restriction de  $\bar{x}$  sur  $E \setminus \{e_0\}$ , *i.e.*, la solution définie par  $\bar{x}'(e) = \bar{x}(e)$  pour  $e \in E \setminus \{e_0\}$ . Il est clair que  $\bar{x}'$  est un point extrême de  $Q(G - e_0)$  où  $G - e_0$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant  $e_0$ . Comme  $\bar{x}'$  est fractionnaire et  $Q(G - e_0) = P2AC(G - e_0)$ , on a une contradiction.  $\diamond$

**Assertion 2.**  $G$  est 3-arête connexe.

**Preuve.** Supposons que  $G$  n'est pas 3-arête connexe. Puisque  $G$  est 2-arête connexe, alors  $G$  contient une coupe consistant en exactement deux arêtes, disons  $e_1$  et  $e_2$ . Par conséquent  $x(e_1) = x(e_2) = 1$ . Soit  $G^* = (V^*, E^*)$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant  $e_1$ . Soit  $x^* \in \mathbb{R}^{|E^*|-1}$  la restriction de  $\bar{x}$  sur  $E^*$ . Alors  $x^*$  est une solution de  $Q(G^*)$ . De plus,  $x^*$  est un point extrême de  $Q(G^*)$ . En effet, si ce n'est pas le cas, il doit alors exister deux solutions  $y', y''$  de  $Q(G^*)$  telles que  $x^* = \frac{1}{2}(y' + y'')$ . D'où  $y'(e_2) = y''(e_2) = 1$ . Considérons les solutions  $y^{*'}$ ,  $y^{**} \in \mathbb{R}^m$  données par

$$y^{*'}(e) = \begin{cases} y'(e) & \forall e \in E^*, \\ 1 & \text{si } e = e_1, \end{cases}$$

et

$$y^{*''}(e) = \begin{cases} y''(e) & \forall e \in E^*, \\ 1 & \text{si } e = e_1. \end{cases}$$

Il est clair que  $y^{*'}$ ,  $y^{*''}$  sont des solutions de  $Q(G)$ . Nous avons également  $\bar{x} = \frac{1}{2}(y^{*''} + y^{*''})$ , une contradiction. En conséquence,  $x^*$  est un point extrême de  $P(G^*)$ . Comme  $G^*$  est série-parallèle,  $|E^*| < |E|$  et  $x^*$  est fractionnaire, ceci contredit la minimalité de  $|E|$ .  $\diamond$

Par l'assertion 1,  $\bar{x}(e) > 0$  pour tout  $e \in E$ . Comme  $\bar{x}$  est un point extrême de  $Q(G)$ , par le corollaire 1.28, il doit exister un ensemble de coupes  $\{\delta(W_i), i = 1, \dots, t\}$  et un sous-ensemble d'arêtes  $E_1 \subseteq E$  tels que  $\bar{x}$  est la solution unique du système

$$\begin{cases} x(e) = 1, & \forall e \in E_1, \\ x(\delta(W_i)) = 2, & i = 1, \dots, t, \end{cases} \quad (1.29)$$

où  $|E_1| + t = |E|$ .

**Assertion 3.** Chaque variable  $x(e)$  possède un coefficient non nul dans au moins deux équations de (1.29).

**Preuve.** Il est clair que  $x(e)$  possède un coefficient non nul dans au moins une équation du système (1.29). Sinon tout point  $\bar{x}'$  tel que  $\bar{x}'(f) = \bar{x}(f)$  si  $f \in E \setminus \{e\}$  et  $\bar{x}'(e) = \bar{x}(e) + \epsilon$ , où  $\epsilon$  est un scalaire non nul, serait une solution de (1.29) différente de  $\bar{x}$ , ce qui est impossible. Supposons maintenant qu'il existe une arête  $e_0$  telle que la variable associée à  $e_0$ ,  $x(e_0)$  possède un coefficient non nul dans exactement une équation de (1.29). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'entre les extrémités de  $e_0$  il existe une seule arête qui est en l'occurrence  $e_0$ . Soit (1.29)' le système obtenu à partir de (1.29) en supprimant l'équation contenant  $x(e_0)$ . Soit  $\bar{x}^0$  la restriction de  $\bar{x}$  donnée par  $\bar{x}^0(e) = \bar{x}(e)$  pour tout  $e \in E \setminus \{e_0\}$ . Notons que  $\bar{x}^0$  est fractionnaire. En effet, ceci est clair si  $\bar{x}(e_0)$  est entier. Sinon, comme  $\bar{x}$  est solution du système (1.29) dont le second membre est entier,  $\bar{x}$  doit avoir au moins deux composantes fractionnaires, et donc  $\bar{x}^0$  est fractionnaire. De plus,  $\bar{x}^0$  est la solution unique du système (1.29)'. En conséquence,  $\bar{x}^0$  est un point extrême de  $Q(G - e_0)$ . Mais puisque  $G^0$  est série-parallèle, par notre hypothèse de minimalité,  $Q(G - e_0)$  est entier, une contradiction.  $\diamond$

Puisque  $G$  est série-parallèle et  $|E| \geq 2$ , par la remarque 1.50 et l'assertion 2, il en résulte que  $G$  contient deux arêtes multiples  $f$  et  $g$ . Aussi au plus une arête parmi  $f$

et  $g$  peut avoir une valeur fractionnaire. Si ce n'est pas le cas, comme toute coupe de  $G$  contient soit les deux arêtes  $f$  et  $g$  soit aucune, le point  $\bar{x}' \in \mathbb{R}^E$  tel que  $\bar{x}'(f) = \bar{x}(f) + \epsilon$ ,  $\bar{x}'(g) = \bar{x}(g) - \epsilon$  et  $\bar{x}'(e) = \bar{x}(e)$  si  $e \in E \setminus \{f, g\}$ , où  $\epsilon > 0$  est un scalaire suffisamment petit, serait une solution du système (1.29) différente de  $\bar{x}$ , une contradiction. En conséquence, on peut supposer, par exemple, que  $\bar{x}(f) = 1$ . Par l'assertion 3, il doit exister une coupe  $\delta(W_{i^*})$ ,  $i^* \in \{1, \dots, t\}$  qui contient  $f$ , et donc  $g$ . De plus,  $\bar{x}(g)$  est fractionnaire. En effet, si  $\bar{x}(g) = 1$ , alors d'après les assertions 1 et 2 on obtient  $2 = \bar{x}(\delta(W_{i^*})) > \bar{x}(f) + \bar{x}(g) = 2$ , ce qui est impossible. Par l'assertion 3, il doit donc exister une coupe  $\delta(W_{j^*})$ ,  $j^* \in \{1, \dots, t\}$  qui contient  $f$  et  $g$ . Soit  $\delta(W_{i^*})\Delta\delta(W_{j^*})$  la différence symétrique des coupes  $\delta(W_{i^*})$  et  $\delta(W_{j^*})$ . (Pour deux ensembles quelconques  $I$  et  $J$ , leur *différence symétrique*  $I\Delta J$  est définie par  $I\Delta J = (I \setminus J) \cup (J \setminus I)$ . Remarquons que la différence symétrique de deux coupes est une coupe.) Nous avons donc

$$\begin{aligned} 2 &\leq \bar{x}(\delta(W_{i^*})\Delta\delta(W_{j^*})) \\ &= \bar{x}(\delta(W_{i^*}) \cup \delta(W_{j^*})) - 2\bar{x}(\delta(W_{i^*}) \cap \delta(W_{j^*})) \\ &\leq 4 - 2(\bar{x}(f) + \bar{x}(g)) \\ &< 2, \end{aligned}$$

une contradiction, ce qui termine la preuve.  $\square$

#### 1.4.2.2. Preuve directe

Si le polyèdre est de pleine dimension, une autre technique plus directe, pour montrer qu'un système  $Ax \leq b$  valide pour  $P$  décrit complètement  $P$  est de montrer que toute facette de  $P$  est définie par une des contraintes du système. Comme par le corollaire 1.26, toute inégalité qui définit une facette de  $P$  est un multiple positif d'une contrainte du système  $Ax \leq b$ , on a  $P = \{x : Ax \leq b\}$ . La méthode est comme suit. Nous considérons une inégalité  $ax \leq \alpha$  qui définit une facette  $F$  de  $P$ . En utilisant la structure des points extrêmes de  $P$  (*i.e.*, les solutions du problème combinatoire sous-jacent), on montre certaines propriétés concernant  $a$ , qui impliquent que  $ax \leq \alpha$  est une contrainte du système  $Ax \leq \alpha$ . Nous allons illustrer cette méthode sur le polytope des couplages.

Étant donné un graphe  $G = (V, E)$ , un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes est appelé un *couplage*. Si chaque arête de  $G$  est munie d'un certain poids, le *problème du couplage* dans  $G$  est de déterminer un couplage dont le poids total des arêtes est maximum. Edmonds [EDM 65] a montré que ce problème peut être résolu en temps polynomial. Il a également donné un système linéaire qui décrit complètement le polytope associé.

Si  $G = (V, E)$  est un graphe, le *polytope des couplages* de  $G$ , noté par  $P^c(G)$ , est l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des couplages de  $G$ . Il n'est pas difficile de voir que si  $F$  est un couplage de  $G$ , alors son vecteur d'incidence,  $x^F$  satisfait les contraintes suivantes

$$x(e) \geq 0, \quad \forall e \in E, \quad (1.30)$$

$$x(\delta(v)) \leq 1, \quad \forall v \in V, \quad (1.31)$$

$$x(E(S)) \leq \frac{|S| - 1}{2}, \quad \forall S \subseteq V, |S| \geq 3 \text{ et impair}. \quad (1.32)$$

Le résultat suivant, établi par Edmonds [EDM 65], a été démontré par Lovász [LOV 79] en appliquant la technique décrite ci-dessus.

**THEOREME 1.52.-** *Pour tout graphe  $G = (V, E)$ , le polytope des couplages  $P^c(G)$  est donné par les inégalités (1.30)-(1.32).*

**Preuve.** Tout d'abord on peut facilement vérifier que  $P^c(G)$  est de pleine dimension. En effet, les ensembles  $\{e\}$ ,  $e \in E$  avec l'ensemble vide forment une famille de  $|E| + 1$  couplages dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants. En conséquence, par le corollaire 1.26, deux contraintes définissent la même facettes de  $P^c(G)$  si et seulement si l'une est un multiple positif de l'autre.

Soit  $ax \leq \alpha$  une contrainte qui définit une facette de  $P^c(G)$ , et soit  $\mathcal{C}_a$  l'ensemble des couplages de  $G$  dont les vecteurs d'incidence vérifient  $ax \leq \alpha$  à l'égalité. Supposons que  $ax \leq \alpha$  est différente des contraintes (1.30) et (1.31). Nous allons montrer que  $ax \leq \alpha$  est nécessairement du type (1.32).

Comme  $ax \leq \alpha$  est différente des inégalités (1.30), alors  $a(e) \geq 0$  pour tout  $e \in E$ . En effet, si  $a(e) < 0$  pour une certaine arête  $e$ , alors tout couplage dans  $\mathcal{C}_a$  ne contient pas  $e$ , et par conséquent, la face définie par  $ax \leq \alpha$  est contenue dans la face  $\{x \in P^c(G) : x(e) = 0\}$ . Mais ceci implique que  $ax \leq \alpha$  et  $x(e) \geq 0$  induisent la même facette, et donc l'une est un multiple positif de l'autre, une contradiction.

Soit  $G'$  le graphe induit par les arêtes  $e \in E$  telles que  $a(e) > 0$  et soit  $S$  l'ensemble de ses sommets. Notons que  $G'$  est connexe. Nous allons montrer que le vecteur d'incidence de tout couplage de  $\mathcal{C}_a$  vérifie

$$x(E(S)) = \frac{|S| - 1}{2}, \quad (1.33)$$

ce qui implique que  $ax \leq \alpha$  définit la même facette que (1.32).

Supposons qu'il existe un couplage  $M_1$  de  $\mathcal{C}_a$  dont le vecteur d'incidence ne satisfait pas (1.33). Sans perte de généralité, on peut supposer que  $a(e) > 0$  pour tout  $e \in M_1$ . (Si  $M_1$  contient des arêtes telles que  $a(e) = 0$ , en supprimant ces arêtes, on obtient encore un couplage qui vérifie  $ax \leq \alpha$  à l'égalité et qui ne satisfait pas (1.33)). En conséquence, il doit exister deux sommets  $u$  et  $v$  de  $S$  qui ne sont incidents à aucune arête de  $M_1$ . On peut supposer que  $M_1$  est tel que la distance dans  $G'$  (par rapport aux poids  $a(e)$ ,  $e \in E$ ) entre  $u$  et  $v$  est la plus courte possible. Puisque  $a(e) > 0$  pour toute arête  $e$  de  $G'$ , les sommets  $u$  et  $v$  ne peuvent pas être adjacents dans  $G'$ . Alors il existe un sommet  $z$  différent de  $u$  et  $v$  dans la plus courte chaîne entre  $u$  et  $v$ . Comme  $ax \leq \alpha$  est différente des contraintes (1.31), il doit exister un couplage  $M_2$  de  $\mathcal{C}_a$  qui ne couvre pas  $z$ . Sinon, tout couplage de  $\mathcal{C}_a$  couvrirait  $z$ , et, en conséquence, les contraintes  $ax \leq \alpha$  et  $x(\delta(z)) \leq 1$  induiraient la même face. Mais cela impliquerait que  $ax \leq \alpha$  est un multiple positif de  $x(\delta(z)) \leq 1$ , une contradiction.

Par le choix de  $M_1$ ,  $M_2$  doit couvrir les deux sommets  $u$  et  $v$ . Si  $M_2$  ne couvre pas, par exemple  $u$ , alors  $u$  et  $z$  seraient deux sommets non couverts par  $M_2$ . Comme la chaîne entre  $u$  et  $z$  est plus courte que celle qui est entre  $u$  et  $v$ , cela contredit le choix de  $M_1$ . Par des arguments similaires,  $M_1$  doit couvrir  $z$ . Ainsi, dans le graphe  $G^*$  formé par les arêtes de  $M_1 \cup M_2$ , les sommets  $u$ ,  $v$  et  $z$  ont tous un degré 1. Sans perte de généralité, on peut supposer que la composante connexe de  $G^*$  contenant  $u$  consiste en une chaîne  $Q$  ne passant pas par  $z$ . Considérons les deux couplages

$$\bar{M}_1 = (M_1 \setminus (M_1 \cap Q)) \cup (M_2 \cap Q),$$

$$\bar{M}_2 = (M_2 \setminus (M_2 \cap Q)) \cup (M_1 \cap Q).$$

Puisque  $\bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 = M_1 \cup M_2$ ,  $\bar{M}_1$  et  $\bar{M}_2$  sont dans  $\mathcal{C}_a$ . Mais  $\bar{M}_2$  ne couvre ni  $u$  ni  $z$ , ce qui contredit le choix du couplage  $M_1$ .  $\square$

Pour montrer l'intégrité d'un polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , il suffit également de montrer, en utilisant la dualité en programmation linéaire, que pour tout vecteur poids  $\omega \in \mathbb{R}^n$ , le programme linéaire  $\max \{\omega x : Ax \leq b\}$  admet une solution optimale entière. En effet, par le théorème 1.39, ceci implique que les points extrêmes de  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  sont tous entiers. Cette technique a été introduite par Edmonds [EDM 65] pour montrer l'intégrité du système (1.30)-(1.32) pour les couplages d'un graphe. D'autres techniques, basées sur la projection, peuvent être également utilisées pour démontrer l'intégrité d'un polyèdre [SCH 03].

## 1.5. Polyèdres entiers et relations min-max

Comme il a été souligné dans la section précédente, la motivation principale de montrer l'intégrité d'un polyèdre, est d'établir une relation combinatoire min-max entre les solutions optimales des problèmes duals sous-jacents. Cette relation duale en optimisation combinatoire était l'objet de profondes investigations, qui ont conduit à l'introduction de nouveaux concepts comme les systèmes totalement duals entiers

et les polyèdres bloquants et antibloquants. Dans cette section nous présentons ces concepts et discutons de certaines applications.

### 1.5.1. Dualité et optimisation combinatoire

Soit

$$\max \{\omega x : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (1.34)$$

un programme linéaire (dit primal) et

$$\min \{b^T y : A^T y \geq \omega^T, y \geq 0\} \quad (1.35)$$

son dual. Par la dualité en programmation linéaire, si l'un des problèmes (1.34) et (1.35) possède une solution optimale, alors l'autre en possède également une et les deux solutions optimales ont la même valeur. En d'autres termes, si (1.34) possède une solution optimale  $\bar{x}$ , alors son dual (1.35) possède une solution optimale  $\bar{y}$  telle que  $\omega^T \bar{x} = b^T \bar{y}$ . Ainsi, si deux solutions optimales sont connues pour le problème primal et le problème dual, alors on obtient une relation min-max entre les solutions optimales des deux problèmes. Ceci peut avoir des applications intéressantes quand les deux problèmes duals ont une interprétation combinatoire. En effet, si le système  $Ax \leq b$  décrit le polyèdre des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire  $\mathcal{P}_1$  et  $A^T y \geq \omega^T$  décrit celui des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire  $\mathcal{P}_2$ , et si (1.34) admet une solution optimale, alors on obtient une relation de la forme

$$\max \{\omega(F) : F \in \mathcal{F}_1\} = \min \{b(F) : F \in \mathcal{F}_2\}, \quad (1.36)$$

où  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont respectivement les ensembles de solutions des problèmes  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . Par conséquent, étant donné un programme linéaire qui formule un problème d'optimisation combinatoire, il sera toujours utile d'étudier son dual et d'examiner la possibilité d'avoir une relation de type (1.36). Comme la formulation d'un problème d'optimisation combinatoire en termes de programme linéaire n'est possible que si l'on connaît une caractérisation complète du polyèdre de ses solutions par un système linéaire, des recherches intensives ont été menées pour caractériser des matrices dont le système induit décrit un polyèdre entier. Une de ces classes est celle des matrices dites totalement unimodulaires.

### 1.5.2. Matrices totalement unimodulaires

Une matrice  $m \times n$   $A$  est dite *totalement unimodulaire* (TU) si le déterminant de toute sous-matrice carrée de  $A$  est 0, 1 ou  $-1$ . (En particulier toute entrée de  $A$  doit être 0, 1 ou  $-1$ ). Notons que si une matrice  $A$  est TU, alors son transposé  $A^T$  est aussi TU. Le théorème suivant établit un lien fondamental entre les matrices totalement unimodulaires et les polyèdres.

**THEOREME 1.53.**— (Hoffman, Kruskal [HOF 56]) *Une matrice  $m \times n$   $A$  est totalement unimodulaire si et seulement si pour tout vecteur entier  $b \in \mathbb{R}^m$ , le polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  est entier.*

Comme conséquence du théorème 1.53, si  $A$  est TU et  $b \in \mathbb{R}^m$  et  $\omega \in \mathbb{R}^n$  sont deux vecteurs entiers, alors les programmes (1.34) et (1.35) admettent des solutions optimales entières. Par conséquent une relation combinatoire min-max peut être établie entre les solutions optimales de ces programmes. Le théorème suivant, également dû à Hoffman et Kruskal [HOF 56], donne une condition suffisante pour qu'un polyèdre soit entier.

**THEOREME 1.54.**— (Hoffman, Kruskal [HOF 56]). *Si  $A$  est une matrice  $m \times n$  TU, et  $b \in \mathbb{R}^m$  est un vecteur entier, alors le polyèdre  $Ax \leq b$  est entier.*

Nous donnons dans la suite quelques exemples de matrices totalement unimodulaires. Si  $G = (V, E)$  est un graphe, la matrice d'incidence sommets-arêtes de  $G$  est la matrice  $A$  dont les lignes correspondent aux sommets de  $G$ , les colonnes aux arêtes de  $G$  et telles que pour un sommet  $i$  et une arête  $e$ , l'entrée  $A_{i,e}$  est 1 si  $i$  est une extrémité de  $e$  et 0 sinon. Si  $G$  est biparti, alors sa matrice d'incidence sommets-arêtes est TU.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe biparti. Comme les contraintes (1.30) et (1.31) sont valides pour le polytope des couplages  $P^c(G)$  dans  $G$ , nous avons  $P^c(G) \subseteq P^*(G)$  où  $P^*(G)$  est le polytope donné par les inégalités (1.30) et (1.31). Ces inégalités peuvent s'écrire également sous la forme

$$Ax \leq \mathbf{1},$$

$$x \geq 0,$$

où  $A$  est la matrice d'incidence sommets-arêtes de  $G$ . (Rappelons que  $\mathbf{1}$  désigne le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.) Comme  $A$  est TU, par le théorème 1.53,  $P^*(G)$  est entier. En conséquence, tout point extrême de  $P^*(G)$  représente un couplage de  $G$ , et ainsi  $P^*(G) \subseteq P^c(G)$ . Il en résulte alors que  $P^*(G) = P^c(G)$ .

Considérons maintenant le problème du couplage de cardinalité maximum. Comme  $P^*(G) = P^c(G)$ , ce problème est équivalent au programme linéaire

$$\max \{ \mathbf{1}^T x : Ax \leq \mathbf{1}, x \geq 0 \}. \quad (1.37)$$

Le dual de (1.37) s'écrit

$$\min \{ \mathbf{1}^T y : A^T y \geq \mathbf{1}, y \geq 0 \}. \quad (1.38)$$

Notons que les variables dans (1.38) correspondent aux sommets de  $G$  et que les contraintes correspondent aux arêtes. Comme la matrice  $A$  est TU, et que  $A^T$  l'est aussi, une solution optimale  $\bar{y}$  de (1.38) peut être supposée entière. Donc  $\bar{y}$  est un vecteur en 0-1, et on peut voir que dans ce cas,  $\bar{y}$  représente un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes du graphe. Un tel ensemble est appelé *transversal* (ou *absorbant*). Par la relation (1.36), on obtient alors le résultat suivant.

**THEOREME 1.55.-** (König [KÖN 31]). *Dans un graphe biparti, la cardinalité maximum d'un couplage est égale à la cardinalité minimum d'un transversal.*

Si  $G = (V, E)$  est un graphe orienté, la matrice d'incidence sommets-arcs de  $G$  est la matrice  $D$  dont les lignes correspondent aux sommets de  $G$ , les colonnes aux arcs de  $G$  et telle que pour un sommet  $i$  et un arc  $e$ , l'entrée  $D_{i,e}$  est 1 si  $i$  est le sommet initial de  $e$ , -1 si  $i$  est le sommet terminal de  $e$  et 0 sinon. Cette matrice est TU, et comme conséquence, on peut obtenir le célèbre théorème du flot max-coupe min [FOR 56] [FOR 62].

Toutes les matrices entières (en -1, +1, 0) ne sont, malheureusement, pas TU. Il peut exister des polyèdres entiers dont la matrice du système correspondant n'est pas TU.

Si  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$  est un polyèdre entier où  $A$  n'est pas TU, bien que le programme linéaire

$$\max \{ \omega x : Ax \leq b, x \geq 0 \} \quad (1.39)$$

admette toujours une solution optimale entière, son dual peut avoir aucune solution optimale entière (même si  $\omega$  est entier). Et, par conséquent, aucune relation combinatoire min-max ne peut être déduite. Une question naturelle qui peut donc être posée est : sous quelles conditions, le dual de (1.39) peut avoir une solution optimale entière chaque fois que (1.39) en a une pour un  $\omega$  entier ? Edmonds et Giles [EDM 77] ont étudié cette question, et ont introduit le concept de système totalement dual entier que nous discutons dans la suite.

### 1.5.3. Systèmes totalement duals entiers

Soit  $A$  une matrice rationnelle  $m \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Le système linéaire  $Ax \leq b$  est dit *totalement dual entier* (TDE) si pour tout vecteur entier  $\omega \in \mathbb{R}^n$  tel que le programme linéaire  $\max\{\omega x : Ax \leq b\}$  admet une solution optimale, alors le programme dual correspondant possède une solution optimale entière. Une condition suffisante pour qu'un polyèdre soit entier est la suivante.

**THEOREME 1.56.**— (Edmonds, Giles [EDM 77]). *Si  $Ax \leq b$  est TDE et  $b$  est entier, alors le polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  est entier.*

Le théorème 1.56 a certaines conséquences importantes. Si  $Ax \leq b$  est TDE et  $b$  est entier alors une solution optimale du programme linéaire  $\max\{\omega x : Ax \leq b\}$  peut être toujours considérée entière. En plus si  $\omega$  est entier, comme dans ce cas une solution optimale du dual peut être aussi considérée entière, ceci entraîne une relation combinatoire min-max entre les solutions optimales.

La réciproque du théorème 1.56 n'est pas vraie, il peut exister des systèmes non TDE qui induisent des polyèdres entiers. Par contre, comme le montre le théorème suivant, tout polyèdre entier peut être décrit par un système TDE.

**THEOREME 1.57.**— (Giles, Pulleyblank [GIL 79]). *Si  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  est un polyèdre rationnel, alors il existe un système linéaire  $Ax \leq b$  TDE, où  $A$  est une matrice entière, tel que  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . De plus, si  $P$  est entier, alors  $b$  peut être choisi de telle manière qu'il soit entier.*

Par le théorème 1.57, il serait parfois nécessaire d'ajouter des inégalités redondantes à un système pour qu'il devienne TDE.

Plusieurs systèmes linéaires, décrivant des polyèdres entiers associés à des problèmes d'optimisation combinatoire, ont été démontrés TDE comme, par exemple, le polytope des couplages.

**THEOREME 1.58.**— (Cunningham, March [CUN 78]). *Le système donné par (1.30)-(1.32) est TDE.*

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Une famille de sous-ensembles impairs de sommets de  $V$ ,  $\mathcal{C} = \{S_i : i \in I\}$  où  $I$  est un ensemble d'indices, est appelée *recouvrement impair* de  $G$  si pour toute arête  $e \in E$  soit  $e \in \delta(v)$  pour un certain  $v$  tel que  $\{v\}$  est dans  $\mathcal{C}$ , soit  $e \in E(S_i)$  pour un certain  $S_i$  tel que  $|S_i| \geq 3$ . On définit le poids de  $\mathcal{C}$  comme étant  $q + \frac{1}{2} \sum_{i \in I, |S_i| \geq 3} (|S_i| + 1)$  où  $q$  est le nombre de sous-ensembles de  $\mathcal{C}$  réduits à un seul élément. Comme corollaire du théorème 1.58, on obtient la relation min-max suivante.

**THEOREME 1.59.**— (Berge [BER 58]). *La cardinalité maximum d'un couplage dans  $G$  est égale au poids minimum d'un recouvrement impair dans  $G$ .*

Remarquons que ce théorème généralise le théorème 1.55 de König. Des extensions de la notion TDE ont été également étudiées. Pour plus de détails voir Schrijver [SCH 03].

#### 1.5.4. Polyèdres bloquants et antibloquants

Un autre aspect de la dualité qui a été étudié en optimisation combinatoire est celui des polyèdres bloquants et antibloquants. Ces notions, introduites par Fulkerson [FUL 71] [FUL 72], ont été à l'origine de plusieurs développements importants en optimisation combinatoire.

##### 1.5.4.1. Polyèdres bloquants

Soit  $A$  une matrice  $m \times n$  positive et  $w \in \mathbb{R}_+^m$ . Considérons le programme linéaire

$$\max \{\mathbf{1}^T x : A^T x \leq w, x \geq 0\}. \quad (1.40)$$

Le problème (1.40) est appelé *problème de pavage*. Son dual s'écrit

$$\min \{w^T y : Ay \geq \mathbf{1}, y \geq 0\}. \quad (1.41)$$

Soit  $\mathcal{B}$  le polyèdre donné par  $\{y \in \mathbb{R}_+^n : Ay \geq \mathbf{1}\}$ . Remarquons que  $\mathcal{B}$  est borné et est de pleine dimension. Par ailleurs, le système  $Ay \geq \mathbf{1}$  peut comporter des contraintes redondantes. Si  $Ay \geq \mathbf{1}$  ne contient pas d'inégalités redondantes, alors la matrice  $A$  est dite *propre*. Une matrice est aussi dite propre si elle ne contient pas de lignes (*i.e.*,  $\mathcal{B} = \mathbb{R}_+^N$  ou  $\mathcal{B} = \emptyset$ ). Si  $A$  est une matrice en 0-1 propre, alors les lignes de  $A$  peuvent être considérées comme les vecteurs d'incidence de  $m$  sous-ensembles non comparables deux à deux d'un ensemble de  $n$  éléments. Dans ce cas la famille de sous-ensembles représentée par les lignes de  $A$  est dite un “*clutter*”.

Soit

$$\hat{\mathcal{B}} = \{z \in \mathbb{R}_+^n : z^T x \geq 1, \forall x \in \mathcal{B}\}. \quad (1.42)$$

L'ensemble  $\hat{\mathcal{B}}$  est appelé *le bloquant* de  $\mathcal{B}$ . Noter que si  $\mathcal{B} = \emptyset$  alors  $\hat{\mathcal{B}} = \mathbb{R}_+^n$ , et si  $\mathcal{B} = \mathbb{R}_+^n$  alors  $\hat{\mathcal{B}} = \emptyset$ . En conséquence,  $\hat{\mathcal{B}}$  peut être vu comme le dual de  $\mathcal{B}$  et vice versa. Fulkerson [FUL 71] a établi les relations suivantes entre  $\mathcal{B}$  et son bloquant  $\hat{\mathcal{B}}$ .

**THEOREME 1.60.-** (Fulkerson [FUL 71]). *Soit  $A$  une matrice propre dont les lignes sont  $a^1, \dots, a^m$ . Soient  $b^1, \dots, b^r$  les points extrêmes de  $\mathcal{B}$ , et soit  $B$  la matrice  $q \times n$  dont les lignes sont  $b^1, \dots, b^q$ . Alors*

- 1)  $\hat{\mathcal{B}} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Bx \geq \mathbf{1}\}$ ,
- 2)  $B$  est propre,
- 3) les points extrêmes de  $\hat{\mathcal{B}}$  sont  $a^1, \dots, a^m$ .

Remarquons que par l'assertion 1),  $\hat{\mathcal{B}}$  est un polyèdre. Aussi par 1) et 3) nous avons  $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ . En conséquence, étant donnée une matrice  $A$ , on peut construire la matrice bloquante  $B$  de  $A$  telle que le polyèdre bloquant formé par l'une des matrices possède comme points extrêmes les lignes de l'autre. Les polyèdres  $\hat{\mathcal{B}}$  et  $\mathcal{B}$  jouent donc un rôle symétrique, ils forment ce que l'on appelle une *paire bloquante de polyèdres*. Et la paire des matrices  $A$  et  $B$  est dite une *paire bloquante de matrices*. Notons que si  $A$  est une matrice entière et les points extrêmes de  $\mathcal{B}$  sont tous entiers, alors le bloquant de  $\mathcal{B}$ ,  $\hat{\mathcal{B}}$  a tous ses points extrêmes entiers.

Soient  $A$  une matrice  $m \times n$  et  $B$  une matrice  $q \times n$ . Supposons que  $A$  et  $B$  sont propres. Soient  $a^1, \dots, a^m$  et  $b^1, \dots, b^q$  les lignes respectives de  $A$  et  $B$ . On dit que la relation *max-min* est satisfaite pour  $A$  et  $B$  (dans cet ordre) si pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}_+^n$ , le problème de pavage (1.40) admet une solution optimale  $\bar{x}$  telle que

$$\mathbf{1}^T \bar{x} = \min \{b^j w; j = 1, \dots, q\}. \quad (1.43)$$

Si  $A$  et  $B$  forment une paire bloquante de matrices, alors les vecteurs  $b^1, \dots, b^q$  sont les points extrêmes du bloquant  $\mathcal{B}$  de  $A$ . Comme le polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^m : A^T x \leq w, x \geq 0\}$  est borné pour tout  $w \in \mathbb{R}_+^n$ , le programme (1.40) admet une solution optimale pour tout  $w \in \mathbb{R}_+^n$ . Ainsi le programme dual (1.41) admet également une solution optimale pour tout  $w \in \mathbb{R}_+^n$ , et la relation (1.43) est ainsi vérifiée. La réciproque est aussi vraie comme le montre le résultat suivant.

**THEOREME 1.61.**— (Fulkerson [FUL 71]). *La relation max-min est satisfaite pour deux matrices  $A$  et  $B$  (dans cet ordre) si et seulement si  $A$  et  $B$  forment une paire bloquante de matrices.*

Le théorème 1.61 donne une caractérisation des paires bloquantes de matrices. Une conséquence directe de ce théorème est que si la relation (1.43) est satisfaite pour deux matrices  $A$  et  $B$ , alors elle est aussi satisfaite pour  $B$  et  $A$ . Ce théorème constitue un outil fondamental pour établir des relations duales combinatoires entre les solutions de polyèdres bloquants.

Le cas le plus important des matrices bloquantes est quand la matrice  $A$  est entière (en 0-1) et le problème de pavage admet une solution optimale entière quand  $w$  est entier. En effet dans ce cas une relation combinatoire min-max peut être directement établie. L'exemple type de matrices bloquantes vérifiant cette propriété est celui des

matrices représentant les chaînes minimales entre deux sommets  $s$  et  $t$  d'un graphe et les coupes minimales séparant ces deux sommets.

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $s$  et  $t$  deux sommets de  $V$ . Soit  $A$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidence des chaînes minimales entre  $s$  et  $t$ . Et soit  $B$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidence des coupes minimales séparant  $s$  et  $t$ . Notons que les deux matrices  $A$  et  $B$  sont des matrices 0-1. Soit  $w \in \mathbb{R}_+^n$  où  $n = |E|$ . En considérant  $w$  comme un vecteur capacités associé aux arêtes de  $G$ , le problème (1.40) correspondant à  $A$  et  $w$  n'est rien d'autre que celui du flot maximum entre  $s$  et  $t$  dans  $G$  par rapport au vecteur de capacités  $w$ . D'après le théorème du flot max-coupe min de Fulkerson, on sait que la valeur maximum d'un flot entre  $s$  et  $t$  est égale à la capacité minimale d'une coupe entre  $s$  et  $t$ , où la capacité d'une coupe est la somme des capacités des arêtes formant la coupe. Par conséquent, la relation max-min (1.43) est satisfaite pour  $A$  et  $B$ . Ce qui implique que  $A, B$  est une paire bloquante.

Si  $w = \mathbf{1}^T$ , les programmes (1.40) et (1.41) pour  $A$  s'écrivent

$$\max \{\mathbf{1}^T x : A^T x \leq \mathbf{1}, x \geq 0\} \quad (1.44)$$

et

$$\min \{\mathbf{1}^T y : Ay \geq \mathbf{1}, y \geq 0\}. \quad (1.45)$$

Notons que les variables dans (1.44) correspondent aux chaînes minimales de  $G$  entre  $s$  et  $t$ , et celles dans (1.45) correspondent aux arêtes de  $G$ . Notons également que le problème de pavage (1.44) admet une solution optimale entière. Une telle solution représente un pavage de chaînes entre  $s$  et  $t$ , i.e., un ensemble de chaînes entre  $s$  et  $t$  deux à deux disjointes.

Comme  $A$  et  $B$  forment une paire bloquante, par le théorème 1.60, les points extrêmes du polyèdre  $\{y \in \mathbb{R}_+^n : Ay \geq \mathbf{1}\}$  sont précisément les coupes minimales séparant  $s$  et  $t$ . Par (1.43), on obtient ainsi la relation min-max suivante qui n'est rien d'autre que le théorème 1.49 de Menger.

**THEOREME 1.62.** – *Le nombre minimum d'arêtes dans une coupe séparant  $s$  et  $t$  est égal au nombre maximum de chaînes deux à deux disjointes entre  $s$  et  $t$ .*

D'une manière similaire, en utilisant la fait que la relation max-min est aussi satisfaite pour  $B$  et  $A$  on obtient la relation suivante.

**THEOREME 1.63.** – *Le nombre minimum d'arêtes dans une chaîne entre  $s$  et  $t$  est égal au nombre maximum de coupes deux à deux disjointes séparant  $s$  et  $t$ .*

D'autres exemples de paires bloquantes de matrices sont donnés dans [FUL 71] [SCH 03].

#### 1.5.4.2. Polyèdres antibloquants

Soit  $A$  une matrice positive  $m \times n$ , et  $w \in \mathbb{R}_+^m$ . Considérons le programme linéaire

$$\min \{\mathbf{1}^T x : A^T x \geq w, x \geq 0\}. \quad (1.46)$$

Le problème (1.46) est appelé *problème de recouvrement*. Son dual s'écrit

$$\max \{w^T y : Ay \leq \mathbf{1}, y \geq 0\}. \quad (1.47)$$

Considérons le polyèdre  $\mathcal{A} = \{y \in \mathbb{R}_+^n : Ay \leq \mathbf{1}\}$ . Le polyèdre  $\mathcal{A}$  est borné si et seulement si  $A$  ne contient pas une colonne nulle. Dans la suite, on suppose que  $\mathcal{A}$  est borné. Soit

$$\bar{\mathcal{A}} = \{z \in \mathbb{R}_+^n : z^T y \leq \mathbf{1} \ \forall y \in \mathcal{A}\},$$

$\bar{\mathcal{A}}$  est appelé *l'antibloquant de  $\mathcal{A}$* . Soient  $b^1, \dots, b^q$  les points extrêmes de  $\mathcal{A}$ , et soit  $B$  la matrice dont les lignes sont  $b^1, \dots, b^q$ . Le théorème suivant est analogue au théorème 1.60.

THEOREME 1.64.– (Fulkerson [FUL 71]).

- 1)  $B$  est positive et ne contient pas de colonne nulle,
- 2)  $\bar{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}_+^n : Bx \leq \mathbf{1}\}$ ,
- 3)  $\bar{\bar{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$ .

Par 1) et 2),  $\bar{\mathcal{A}}$  est un polytope. La paire de polyèdres  $\mathcal{A}$  et  $\bar{\mathcal{A}}$  est dite *paire antibloquante de polyèdres*, et la paire de matrices  $A$  et  $B$  est dite *paire antibloquante de matrices*. Notons que nous n'avons pas ici une correspondance biunivoque entre les lignes de  $A$  et les points extrêmes de son polyèdre antibloquant  $\bar{\mathcal{A}}$  comme c'est le cas pour les polyèdres bloquants. En d'autres termes,  $\bar{\mathcal{A}}$  peut avoir des points extrêmes qui ne sont pas des lignes de  $A$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices positives  $m \times n$  et  $q \times n$  respectivement. Soient  $a^1, \dots, a^m$  et  $b^1, \dots, b^q$  respectivement les lignes de  $A$  et de  $B$ , et supposons que ni  $A$  ni  $B$  ne contient de colonne nulle. On dit que la relation *min-max* est satisfaite pour  $A$  et  $B$  (dans cet ordre) si pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}_+^m$ , le problème de recouvrement (1.46) admet une solution optimale  $x$  telle que

$$\mathbf{1}^T x = \max \{b^j w; j = 1, \dots, q\}. \quad (1.48)$$

THEOREME 1.65.– (Fulkerson [FUL 71]). *La relation min-max (1.48) est satisfaite pour deux matrices  $A$  et  $B$  (dans cet ordre) si et seulement si  $A$  et  $B$  forment une paire antibloquante de matrices.*

Si la relation (1.48) est satisfaite pour  $A$  et  $B$ , par le théorème 1.65, elle est aussi satisfaite pour  $B$  et  $A$ .

Pour illustrer ce concept, considérons le polyèdre des couplages. On a vu dans la section 4, que si  $G = (V, E)$  est un graphe, le polytope des couplages de  $G$ ,  $P^c(G)$  est donné par les inégalités (1.30)-(1.32).  $P^c(G)$  peut aussi s'écrire sous la forme  $P^c(G) = \{x \in \mathbb{R}^E : Bx \leq \mathbf{1}, x \geq 0\}$ . Si l'on dénote par  $A$  la matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidence des couplages dans  $G$ , la relation min-max (1.48) n'est rien d'autre que celle établie par la dualité. En conséquence  $A$  et  $B$  forment une paire antibloquante de matrices. Si  $w = \mathbf{1}$ , la relation min-max pour  $A$  et  $B$  implique le théorème 1.59 de Berge.

### 1.6. Méthode de coupes

Étant donné un problème d'optimisation combinatoire, il est généralement difficile de caractériser le polyèdre associé par un système d'inégalités linéaires. Aussi, si le problème est NP-complet, il y a très peu d'espoir d'obtenir une telle description. En plus, même s'il est caractérisé, le système décrivant le polyèdre peut comporter un nombre très grand (voire exponentiel) d'inégalités, et ne peut donc être entièrement exploité pour résoudre le problème comme un programme linéaire. Cependant, en utilisant une *méthode de coupes*, une description partielle du polyèdre peut être suffisante pour résoudre le problème à l'optimum. Dans la suite, nous discutons de cette méthode.

Considérons un problème d'optimisation combinatoire de la forme

$$\max \{\omega x : Ax \leq b, x \text{ entier}\} \quad (1.49)$$

où  $A$  est une matrice  $m \times n$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $P$  l'enveloppe convexe des solutions de (1.49). Par la proposition 1.8 et le théorème 1.32, le problème (1.49) est équivalent au programme  $\max\{\omega x : x \in P\}$ . Si les inégalités du système  $Ax \leq b$  suffisent pour décrire le polyèdre  $P$ , alors tout point extrême du polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  est entier, et, par conséquent, le problème (1.49) est équivalent à sa relaxation linéaire

$$\max \{\omega x : Ax \leq b\}. \quad (1.50)$$

Ceci n'est, malheureusement, pas toujours le cas, et le polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  peut en effet comporter des points extrêmes fractionnaires. Par conséquent, une

solution optimale de (1.50), disons  $x^*$ , peut être fractionnaire. Dans ce cas, il doit exister une contrainte valide pour  $P$  qui est violée par  $x^*$ . Celle-ci peut être ajoutée au système  $Ax \leq b$  et cela nous permet ainsi d'obtenir une plus “forte” relaxation linéaire. Une telle contrainte est appelée une *coupe*. Le nom “coupe” vient du fait que l’ajout de la contrainte violée au système  $Ax \leq b$  permet de “couper” une partie inutile du polyèdre des solutions de la relaxation linéaire contenant  $x^*$ .

L’étape cruciale dans une méthode de coupes est la génération des contraintes valides pour le polytope  $P$ . Une première technique, pour identifier des contraintes valides pour des programmes en nombres entiers, a été introduite par Gomory [GOM 58] [GOM 60]. En se basant sur cette technique, Chvátal [CHV 73] a développé une procédure générale pour générer des contraintes valides pour un polyèdre combinatoire. La procédure est basée sur le fait que si  $p$  est entier et  $p \leq q$ , alors  $p \leq \lfloor q \rfloor$ .

### 1.6.1. Méthode de Chvátal-Gomory

Considérons, par exemple, le problème du stable. Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $C$  un cycle de  $G$ . Soit  $\{v_1, \dots, v_k\}$  l’ensemble des sommets de  $C$ . Supposons que  $k$  est impair. Les contraintes suivantes sont donc valides pour le polytope des stables  $P(G)$ .

$$\begin{aligned} x(v_1) + x(v_2) &\leq 1 \\ x(v_2) + x(v_3) &\leq 1 \\ &\vdots \\ x(v_k) + x(v_1) &\leq 1. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités (et en divisant par 2), on obtient la contrainte

$$\sum_{i=1}^k x(v_i) \leq \frac{k}{2}.$$

Puisque  $\sum_{i=1}^k x(v_i)$  est entier pour toute solution du problème du stable, alors l’inégalité

$$\sum_{i=1}^k x(v_i) \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k-1}{2} \quad (1.51)$$

est valide pour le polytope des stables.

Cette procédure peut être présentée dans un cadre plus général de la manière suivante. Soit  $y$  un vecteur positif de  $\mathbb{R}^m$ . Toute solution de (1.49) vérifie l’inégalité

$$\sum_{j=1}^n y A^j x_j \leq y b, \quad (1.52)$$

obtenue comme combinaison linéaire des contraintes du système  $Ax \leq b$ . Comme  $yA^j - \lfloor yA^j \rfloor \geq 0$  et  $x_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, n$ , alors la contrainte

$$\sum_{j=1}^n \lfloor yA^j \rfloor x_j \leq yb \quad (1.53)$$

est également satisfaite par les solutions de (1.49). Comme le premier membre de (1.53) est entier, il en résulte que l'inégalité

$$\sum_{j=1}^n \lfloor yA^j \rfloor x_j \leq \lfloor yb \rfloor \quad (1.54)$$

est valide pour  $P$ . Les inégalités de type (1.54) sont dites *inégalités de Chvátal-Gomory*, et la procédure ci-dessus est appelée *méthode de Chvátal-Gomory*.

Comme le montre le théorème suivant, toute contrainte valide pour  $P$  peut être obtenue par la méthode de Chvátal-Gomory.

**THEOREME 1.66.-** (Schrijver [SCH 80]). Soit  $ax \leq \alpha$  une inégalité valide pour  $P \neq \emptyset$  avec  $(a, \alpha) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Alors  $ax \leq \alpha$  est une inégalité de Chvátal-Gomory.

Une inégalité valide pour  $P$ , équivalente à (ou dominée par) une combinaison linéaire positive de  $Ax \leq b$  est dite *de rang de Chvátal 0* par rapport à  $Ax \leq b$ . Une inégalité  $ax \leq \alpha$  valide pour  $P$  est dite *de rang de Chvátal k* par rapport à  $Ax \leq b$  si  $ax \leq \alpha$  n'est pas de rang de Chvátal inférieur ou égal à  $k - 1$ , et elle est soit équivalente à (soit dominée par) une combinaison linéaire positive d'inégalités chacune pouvant être obtenue par la méthode de Chvátal-Gomory à partir d'inégalités de rang de Chvátal inférieur ou égal à  $\leq k - 1$ . En d'autres termes, une inégalité valide pour  $P$  est de rang de Chvátal  $k$  si  $k$  applications de la méthode de Chvátal-Gomory sont nécessaires pour obtenir cette inégalité. Ainsi les contraintes de rang de Chvátal 1 sont celles qui ne sont pas de rang 0 mais qui sont soit équivalentes soit dominées par une combinaison linéaire positive de contraintes de  $Ax \leq b$  et d'inégalités obtenues par la procédure de Chvátal-Gomory à partir de contraintes de  $Ax \leq b$ . On peut noter par exemple que les contraintes (1.53) sont de rang de Chvátal 1 par rapport à  $Ax \leq b$ . Les inégalités valides qui interviennent dans la résolution d'un problème combinatoire, dans le cadre d'une méthode de coupes, sont généralement de rang de Chvátal  $\leq 1$ .

Le théorème 1.66 implique que toute contrainte valide pour le polyèdre  $P$  est de rang de Chvátal fini par rapport à  $Ax \leq b$ . Le rang de Chvátal maximum par rapport à  $Ax \leq b$  d'une contrainte valide (facette) pour  $P$  est appelé *le rang de Chvátal* du polyèdre  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ . Notons que le rang de  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  est 0 si et seulement si  $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ , c'est-à-dire si  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$  est entier.

Supposons, par exemple, que  $P$  est le polytope des couplages dans un graphe  $G = (V, E)$ , et soit  $Ax \leq b$  le système donné par les inégalités (1.30),(1.31). Il n'est pas difficile de voir que les inégalités (1.32) sont de rang de Chvátal 1 par rapport à  $Ax \leq b$ . Comme les contraintes (1.30)-(1.32) décrivent entièrement  $P$ , il s'ensuit que le polyèdre  $Ax \leq b$  est de rang 1.

### 1.6.2. Algorithmes de coupes

La procédure de Chvátal-Gomory, présentée ci-dessus, est souvent utilisée pour identifier des inégalités valides pour le polytope associé à un problème d'optimisation combinatoire. Ces contraintes sont alors utilisées dans un *algorithme de coupes* pour résoudre le problème. Cet algorithme peut être présenté comme suit.

Supposons que l'on dispose de certaines classes d'inégalités valides pour le polytope  $P$  associé au problème (1.49), et soit  $\bar{A}x \leq \bar{b}$  le système formé par ces inégalités. Supposons que ce système contient les contraintes de base  $Ax \leq b$  du problème. Chaque itération de l'algorithme consiste à résoudre un programme linéaire défini par un sous-ensemble de contraintes de  $\bar{A}x \leq \bar{b}$ . Si la solution trouvée est entière et vérifie  $Ax \leq b$ , alors elle est optimale pour le problème. Sinon d'autres contraintes doivent être ajoutées au programme linéaire.

On commence par considérer un sous-système  $\bar{A}'x \leq \bar{b}'$  de  $\bar{A}x \leq \bar{b}$  contenant un nombre réduit de contraintes, et on résout le programme linéaire  $\max\{\omega x : \bar{A}'x \leq \bar{b}'\}$ . Si la solution optimale de ce programme, disons  $x^1$ , est réalisable pour (1.49) (*i.e.*, si  $x^1$  est entière et solution du système  $Ax \leq b$ ) alors elle est optimale pour (1.49). Sinon, on détermine alors une contrainte du système  $\bar{A}x \leq \bar{b}$ , disons  $a^1x \leq \alpha^1$ , qui soit violée par  $x^1$ . On ajoute cette contrainte au programme et on résout le nouveau programme linéaire  $\max\{\omega x : \bar{A}'x \leq \bar{b}', a^1x \leq \alpha^1\}$ . Si la solution optimale, disons  $x^2$ , de ce programme est réalisable pour (1.49), alors elle est optimale. Sinon, on détermine une contrainte  $a^2x \leq \alpha^2$  de  $\bar{A}x \leq \bar{b}$  qui soit violée par  $x^2$ . On considère par la suite le programme linéaire  $\max\{\omega x : \bar{A}'x \leq \bar{b}', a^1x \leq \alpha^1, a^2x \leq \alpha^2\}$  et ainsi de suite. Cette procédure continue jusqu'à ce que soit on trouve une solution entière qui soit réalisable pour (1.49) et donc optimale, soit il n'est plus possible de générer de contraintes violées. Dans ce cas, on utilise des techniques de programmation en nombres entiers, comme la méthode de séparation et d'évaluation, pour déterminer une solution optimale du problème.

Remarquons que si le système  $Ax \leq b$  contient un nombre réduit (polynomial) de contraintes, il peut donc être utilisé pour initialiser l'algorithme de coupes. Ainsi le premier programme linéaire serait la relaxation linéaire du problème. À chaque étape de l'algorithme, il suffit donc de vérifier si la solution optimale du programme linéaire courant est entière. Si c'est le cas, alors elle est optimale. Les problèmes du stable et du couplage maximum sont de ce type, la relaxation linéaire de chaque problème

comporte  $n + m$  contraintes où  $n$  (resp.  $m$ ) est le nombre des sommets (resp. arêtes) du graphe.

Remarquons aussi que la solution optimale de la relaxation linéaire, obtenue à chaque itération de l'algorithme, donne une borne supérieure sur la valeur optimale du problème. Pour obtenir une relaxation linéaire plus serrée d'une itération à l'autre, et améliorer au maximum cette borne, il est utile d'introduire des contraintes violées qui définissent des facettes du polyèdre  $P$ . En effet, celles-ci permettent de couper au maximum des solutions non-réalisables du problème.

### 1.6.3. Algorithmes de coupes et branchements

Si l'algorithme de coupes ne permet pas de fournir une solution optimale du problème, il est nécessaire d'utiliser une technique de séparation et d'évaluation pour en déterminer une. Cette technique permet de construire un arbre de résolution où chaque sommet de l'arbre correspond à un sous-problème, le problème initial étant celui associé à la racine. Cette technique est basée sur deux procédures essentielles :

– *Branchemen*t (*branching*) : Cette procédure est simple, elle permet juste de diviser le problème associé à un sommet donné de l'arbre en deux sous-problèmes disjoints en fixant une des variables  $x_i$  à 1 pour l'un des problèmes et à 0 pour l'autre. Une solution optimale du problème (correspondant à ce sommet de l'arbre) sera ainsi optimale pour l'un des sous-problèmes.

– *Evaluation* (*bounding*) : Le but de cette procédure est de déterminer une borne supérieure (borne inférieure en cas de minimisation) pour la valeur optimale du problème associé à un sommet de l'arbre.

Pour résoudre le problème (1.49), on peut commencer par résoudre une relaxation linéaire du problème en utilisant un algorithme de coupes. Si une solution optimale n'est pas trouvée dans cette phase (appelée *phase de coupes*) on choisit une variable fractionnaire  $x_i$ , et on applique la procédure de séparation. On crée ainsi deux sous-problèmes (deux sommets de l'arbre de résolution que l'on relie à la racine). On détermine une borne supérieure pour chaque sous-problème en résolvant les programmes relaxés. Si pour un des sous-problèmes, la solution optimale est entière, on arrête son exploration. Sinon on choisit un des sommets, disons  $S$  et on sépare le problème associé en deux sous-problèmes. Ainsi on crée deux nouveaux sommets, disons  $S_1$  et  $S_2$  que l'on relie au sommet *père*  $S$ . En répétant cette procédure, on construit un arbre où les sommets correspondent aux sous-problèmes créés. Si la solution optimale pour un des problèmes est réalisable pour le problème initial ou moins bonne qu'une solution réalisable déjà trouvée, alors on arrête le développement du sommet correspondant. Celui-ci est déclaré *stérile*. À chaque étape, on choisit un sommet pendant de l'arbre qui n'est pas stérile, on sépare le problème correspondant en deux sous-problèmes et on calcule une borne pour chacun des sous-problèmes créés. L'algorithme s'arrête

quand tous les sommets pendants de l'arbre sont stériles. Dans ce cas, la meilleure solution réalisable trouvée est optimale.

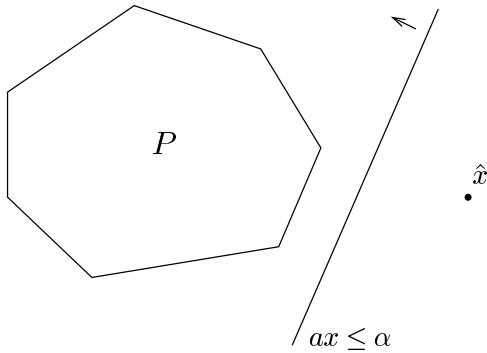
Pour calculer une borne pour chaque sommet de l'arbre, on peut se contenter de la résolution du programme linéaire obtenu à partir du programme du sommet père en rajoutant soit l'équation  $x_i = 0$  soit l'équation  $x_i = 1$ . Cependant, cette borne peut être faible, et conduire à un processus de résolution très lent, surtout quand le problème est de grande taille. Par contre, si l'on ajoute des contraintes violées à cette relaxation, on peut obtenir de meilleures bornes et accélérer davantage la résolution du problème. *Un algorithme de coupes et branchements (Branch-and-Cut algorithm)* est une technique de séparation et d'évaluation dans laquelle on applique l'algorithme de coupes pour calculer la borne de chaque sous-problème. Cette méthode, introduite par Padberg et Rinaldi [PAD 91] pour le problème du voyageur de commerce, s'est avérée très efficace, et elle est maintenant largement utilisée pour résoudre d'une manière exacte des problèmes d'optimisation combinatoire.

Comme on peut le noter, une étape importante dans chaque itération d'un algorithme de coupes et branchements concerne la génération de contraintes violées. L'efficacité de l'algorithme dépend très étroitement de la manière dont ces contraintes sont déterminées. Ainsi, comme le polytope associé au problème combinatoire sous-jacent peut avoir un nombre exponentiel de facettes, on peut se demander s'il serait quand même possible de résoudre dans ce cas le problème en temps polynomial à l'aide d'un algorithme de coupes et branchements. Comme on va le voir dans la section suivante, ceci est possible si le problème dit de séparation associé au polytope des solutions peut être résolu en temps polynomial.

#### 1.6.4. Séparation et optimisation

Un des grands développements dans les approches polyédrales au cours des vingt-cinq dernières années a été l'introduction des techniques de séparation pour les problèmes d'optimisation combinatoire. En effet, ces techniques permettent de résoudre efficacement des problèmes difficiles dans le cadre d'algorithmes de coupes et branchements. Elles sont une conséquence directe du résultat puissant de Grötschel et al. [GRÖ 81] qui établit une équivalence entre le problème d'optimisation sur un polyèdre et le problème dit de séparation associé à ce polyèdre. Dans ce qui suit, nous discutons de cette forte relation entre séparation et optimisation et des conséquences algorithmiques pour les problèmes d'optimisation combinatoire.

Le *problème de séparation* associé à un polyèdre  $P \subseteq \mathbb{R}^n$  peut être énoncé comme suit. Étant donné une solution  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ , déterminer si  $\hat{x} \in P$ , et sinon trouver une inégalité  $ax \leq \alpha$  valide pour  $P$  qui soit violée par  $\hat{x}$ . En d'autres termes, dans le cas où  $\hat{x} \notin P$ , le problème consiste à trouver un hyperplan qui sépare  $\hat{x}$  et  $P$  (voir figure



**Figure 1.3.** Hyperplan séparant  $P$  et  $\hat{x}$

1.3). Si  $P$  est donné par un système d'inégalités  $Ax \leq b$ , alors on parle de problème de séparation associé au système  $Ax \leq b$ .

Dans un algorithme de coupes et branchements, on résout une séquence de problèmes de séparation au niveau de chaque sommet de l'arbre de branchements, chaque problème permettant de générer une (ou plusieurs) contrainte violée. La complexité de l'algorithme va donc dépendre naturellement de celle du problème de séparation des différentes classes de contraintes utilisées dans l'algorithme. En utilisant la méthode des ellipsoïdes introduite par Khachian [KHA 79] pour la programmation linéaire, Grötschel et al. [GRÖ 81] ont montré que si l'on peut résoudre le problème de séparation en temps polynomial pour un polyèdre  $P$ , alors on peut résoudre le problème d'optimisation sur  $P$ ,  $\max\{\omega x : x \in P\}$  en temps polynomial. La réciproque de ce résultat est également vraie. Si l'on peut optimiser en temps polynomial, on peut également séparer en temps polynomial. En conséquence, la complexité d'un algorithme de coupes sur un polyèdre  $\{x \in R^n : Ax \leq b\}$  ne dépend pas du nombre de contraintes dans le système  $Ax \leq b$  (même s'il est exponentiel), mais de la complexité du problème de séparation qui lui est associé. Ainsi, pour résoudre un problème d'optimisation de la forme  $\max\{\omega x : Ax \leq b\}$ , à l'aide d'un algorithme de coupes, nous n'avons pas besoin de connaître explicitement le système  $Ax \leq b$ . Il suffit juste de pouvoir vérifier si une solution  $\hat{x}$  satisfait  $A\hat{x} \leq b$ , et sinon de déterminer une contrainte parmi  $Ax \leq b$  qui soit violée par  $\hat{x}$ .

Pour illustrer ce concept, considérons de nouveau le problème du stable dans un graphe  $G = (V, E)$ . La formulation en nombres entiers du problème, donnée par les inégalités (1.18) et (1.19), comporte un nombre polynomial de contraintes et, par conséquent, le problème de séparation correspondant à ces contraintes peut être résolu en temps polynomial. Considérons en plus les contraintes de type (1.51), qui sont aussi

valides pour le polytope des stables, *i.e.*, les inégalités de la forme

$$x(V(C)) \leq \frac{|V(C)| - 1}{2}, \quad \forall C \text{ cycle impair de } G. \quad (1.55)$$

Les contraintes (1.55) sont appelées *inégalités de cycle impair*. Comme cela va être montré ci-dessous, le problème de séparation pour ces contraintes peut être également résolu en temps polynomial.

**THEOREME 1.67.-** (Grötschel et al. [GRÖ 88]). *Les inégalités (1.55) peuvent être séparées en temps polynomial.*

**Preuve.** Soit  $\hat{x} \in \mathbb{R}^V$ . Comme les inégalités (1.18) et (1.19) peuvent être séparées en temps polynomial, pour résoudre le problème de séparation pour les contraintes (1.55), on peut supposer que  $\hat{x} \geq 0$  et que  $\hat{x}$  satisfait les inégalités (1.18). Si  $e = ij \in E$ , soit  $z(e) = 1 - \hat{x}(i) - \hat{x}(j)$ . Ainsi  $z(e) \geq 0$  pour toute arête  $e \in E$ . Aussi, les inégalités (1.55) peuvent s'écrire sous la forme

$$\sum_{e \in C} z(e) \geq 1, \quad \forall C \text{ cycle impair de } G. \quad (1.56)$$

Le problème de séparation des contraintes (1.55) par rapport au vecteur  $\hat{x}$  est donc équivalent au problème de séparation des contraintes (1.56) par rapport au vecteur  $z$ . Considérant  $z(e)$  comme un poids sur l'arête  $e$ , le problème de séparation des contraintes (1.55) se ramène donc à la recherche d'un cycle impair de poids minimum dans un graphe muni de poids positifs. Ce dernier problème peut être résolu en temps polynomial. Pour ce faire, considérons le graphe biparti  $\tilde{G} = (V' \cup V'', \tilde{E})$  obtenu à partir de  $G = (V, E)$  de la manière suivante : Pour chaque sommet  $v$  de  $V$ , on considère deux sommets  $v' \in V'$  et  $v'' \in V''$ . Et pour chaque arête  $uv \in E$ , on considère les arêtes  $u'v''$  et  $u''v'$  dans  $\tilde{E}$  avec le même poids  $\tilde{z}(u'v'') = \tilde{z}(u''v') = z(uv)$ . Comme  $\tilde{G}$  est biparti, toute chaîne dans  $\tilde{G}$  entre  $v'$  et  $v''$  pour tout  $v \in V$  correspond à un cycle impair dans  $G$  de même poids, et vice versa. Par conséquent déterminer un cycle impair dans  $G$  de poids minimum par rapport à  $z$  est équivalent à déterminer une chaîne de poids minimum dans  $\tilde{G}$  par rapport à  $\tilde{z}$ . Comme  $\tilde{z} \geq 0$ , ce dernier problème peut être résolu en temps polynomial en utilisant, par exemple, l'algorithme de Dijkstra [DIJ 59]. Si  $C$  est un cycle impair de  $G$  de poids minimum ainsi obtenu, et si  $z(C) \geq 1$  alors toutes les contraintes (1.56) sont vérifiées par  $z$ , et donc (1.55) sont satisfaites par  $\hat{x}$ . Si  $z(C) < 1$ , alors la contrainte de type (1.55) induite par  $C$  est violée.  $\square$

Une conséquence directe du théorème 1.67 est que le problème du stable maximum peut être résolu en temps polynomial, à l'aide d'un algorithme de coupes, dans les graphes  $G$  dont le polytope  $P(G)$  est décrit par les contraintes (1.18), (1.19) et (1.55). Ces graphes sont appelés *t-parfaits*. Une discussion plus détaillée sur ces graphes peut être trouvée dans [SCH 03].

## 1.7. Le problème de coupe maximum

Dans les deux prochaines sections, nous discutons de certaines applications des techniques présentées dans les sections précédentes à deux problèmes d'optimisation combinatoire. Le premier est *le problème de coupe maximum*. Celui-ci consiste, étant donnés un graphe  $G = (V, E)$  et des poids  $(\omega(e), e \in E)$  sur les arêtes, à trouver une coupe  $\delta(W)$ ,  $W \subset V$ , telle que  $\sum_{e \in \delta(W)} \omega(e)$  est maximum. Ce problème était, durant ces vingt dernières années, l'objet de recherches intensives [DEZ 97]. Il a de nombreuses applications, par exemple dans les modèles de verres de spins en physique statistique et les circuits VLSI.

### 1.7.1. Modèles de verres de spins et le problème de coupe maximum

Un *verre de spins* est un système obtenu par une faible dilution (1%) d'un matériau magnétique (Fer) dans un matériau non magnétique (Or). L'intérêt des physiciens pour ce matériau vient de l'observation d'un pic dans la courbe de ce qu'on appelle la *susceptibilité* magnétique en fonction de la température. Un tel pic est généralement l'indice d'une transition de phase, d'un changement d'état du système. D'où la recherche de modèles susceptibles d'expliquer ce phénomène.

Dans un verre de spins, les atomes magnétiques sont disposés aléatoirement dans l'espace. Entre deux atomes  $i, j$ , il existe une énergie d'interaction

$$H_{ij} = -J(R)S_i S_j,$$

où  $S_i$  ( $S_j$ ) est le moment magnétique (spin) de l'atome  $i$  ( $j$ ), et  $J(R)$  est une fonction qui dépend de la distance  $R$  entre les deux atomes. Pour modéliser ces systèmes, les physiciens ont construit un modèle simplifié : ils supposent que les spins sont situés aux noeuds d'un maillage régulier (au lieu d'être répartis aléatoirement) et sont définis par des vecteurs unidimensionnels (au lieu d'être tridimensionnels)  $S_i$  prenant les valeurs +1 et -1. Ces maillages sont généralement carrés ou cubiques. Ils supposent en plus que les interactions entre les spins n'ont lieu qu'entre les plus proches voisins, et que leurs énergies ( $J_{ij}$ ) sont des variables aléatoires pouvant prendre des valeurs positives ou négatives. Les interactions correspondent alors aux liaisons du maillage.

À une configuration  $S$  des spins (*i.e.*, une affectation +1 et -1 aux spins) correspond une énergie du système donnée par

$$H(S) = - \sum_{ij \in L} J_{ij} S_i S_j, \tag{1.57}$$

où  $L$  est l'ensemble des liaisons et  $J_{ij}$  l'interaction entre les spins  $i$  et  $j$ . Le problème que posent les physiciens est de déterminer une configuration  $S$  qui minimise l'énergie (1.57) du système. Une telle configuration est dite *l'état fondamental du système*

et le problème est appelé *problème de l'état fondamental*. Les physiciens utilisent traditionnellement des heuristiques de type Monte-Carlo pour déterminer des solutions approchées pour ce problème même dans le cas où le maillage est carré (planaire). Comme il est montré dans la suite, ce problème peut se ramener au problème de coupe maximum.

À un système de verre de spins, on peut associer un graphe  $G = (V, E)$  où les sommets correspondent aux spins, et deux sommets sont liés par une arête s'il existe une liaison entre les spins correspondant aux sommets. On associe à chaque liaison  $ij$  le poids  $\omega_{ij} = -J_{ij}$ . Le problème de l'état fondamental est par conséquent équivalent au programme

$$\min \left\{ H(S) = \sum_{ij \in E} \omega_{ij} S_i S_j : S_i \in \{-1, 1\}, \forall i \in V \right\}. \quad (1.58)$$

Ainsi le problème est de déterminer une affectation de  $+1$  et  $-1$  aux sommets du graphe de telle manière que  $\sum_{ij \in E} \omega_{ij} S_i S_j$  soit minimum.

Soit  $S$  une affectation de  $+1$  et  $-1$  aux sommets de  $V$ . Soit  $V_+ = \{i \in V : S_i = +1\}$  et  $V_- = \{i \in V : S_i = -1\}$ . Alors

$$\begin{aligned} H(S) &= \sum_{ij \in E} \omega_{ij} S_i S_j = \sum_{i,j \in V_+} \omega_{ij} + \sum_{i,j \in V_-} \omega_{ij} - \sum_{i \in V_+, j \in V_-} \omega_{ij} \\ &= \sum_{ij \in E} \omega_{ij} - 2 \sum_{ij \in \delta(V_+)} \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_{ij \in E} \omega_{ij}$  est une constante, minimiser  $H(S)$  est, par conséquent, équivalent à maximiser  $\sum_{ij \in \delta(V_+)} \omega_{ij}$ , le poids de la coupe induite par  $V_+$ . Ainsi, le problème de l'état fondamental se ramène au problème de coupe maximum dans  $G$ .

Le problème de coupe maximum est un des premiers problèmes démontrés NP-complets. Il a été montré qu'il peut être résolu en temps polynomial dans les graphes planaires [HAD 75] et dans les graphes qui ne sont pas contractibles à  $K_5$  [BAR 83], c'est-à-dire les graphes qui ne peuvent pas être réduits à  $K_5$  (le graphe complet sur 5 sommets) par contractions et suppressions d'arêtes. Dans la suite, nous discutons d'une approche polyédrale pour ce problème. La plupart des résultats présentés dans cette section sont tirés de Barahona et Mahjoub [BAR 86].

### 1.7.2. Le polytope des coupes

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $\omega \in \mathbb{R}^E$  un vecteur poids associé aux arêtes de  $G$ . Notons par  $P_c(G)$  le polytope des coupes de  $G$ , i.e., l'enveloppe convexe des

vecteurs d'incidence des coupes de  $G$ . Le problème de coupe maximum dans  $G$  est donc équivalent au programme linéaire  $\max\{\omega x : x \in P_c(G)\}$ . Le polytope  $P_c(G)$  est de pleine dimension [BAR 85].

Soient  $C$  un cycle de  $G$  et  $F \subseteq C$  tel que  $|F|$  est impair. Soit  $\delta(W)$  une coupe de  $G$ . Comme  $\delta(W)$  intersecte  $C$  en un nombre pair d'arêtes, si  $F \subset \delta(W)$ , alors  $\delta(W) \cap (C \setminus F) \neq \emptyset$ . En conséquence, les contraintes suivantes sont valides pour le polytope  $P_c(G)$ .

$$x(F) - x(C \setminus F) \leq |F| - 1 \quad \forall C \text{ cycle de } G, F \subseteq C, |F| \text{ impair}, \quad (1.59)$$

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E. \quad (1.60)$$

Il n'est pas difficile de voir que toute solution entière du système ci-dessus représente une coupe de  $G$ . Et par conséquent, ces contraintes induisent une formulation en nombres entiers du problème de coupe maximum. Les contraintes (1.59) sont appelées *inégalités de cycle*. Étant donné un cycle  $C$ , une *corde* de  $C$  est une arête dont les deux extrémités sont dans  $C$  et ne sont pas consécutives en parcourant  $C$ . Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que les contraintes (1.59) et (1.60) définissent des facettes de  $P_c(G)$ .

#### THEOREME 1.68.-

1) Une inégalité (1.59) définit une facette de  $P_c(G)$  si et seulement si  $C$  est sans corde.

2) Une inégalité  $x(e) \geq 0$  ( $x(e) \leq 1$ ) définit une facette de  $P_c(G)$  si et seulement si  $e$  n'appartient pas à un triangle.

Comme les contraintes (1.59) et (1.60) formulent le problème de coupe maximum sous forme d'un programme en nombres entiers, et, par le théorème 1.68, peuvent définir des facettes, il serait utile d'avoir un algorithme de séparation polynomial pour ces contraintes. Cela permettrait de les utiliser efficacement dans le cadre d'une méthode de coupes pour le problème. Il est clair que les contraintes (1.60) sont séparables en temps polynomial. Dans la suite, nous montrons que les contraintes (1.59) peuvent également être séparées en temps polynomial.

En faisant un changement de variable  $x(e)$  en  $1 - x(e)$ , les contraintes (1.59) peuvent s'écrire

$$\sum_{e \in C \setminus F} x(e) + \sum_{e \in F} (1 - x(e)) \geq 1, \quad \forall C \text{ cycle de } G, F \subseteq C, |F| \text{ impair.} \quad (1.61)$$

Si  $\hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$ , le problème de séparation des contraintes (1.59) par rapport à  $\hat{x}$  se ramène à vérifier si pour tout cycle  $C$ , en associant un poids  $1 - \hat{x}(e)$  à un nombre impair

d'arêtes de  $C$  et un poids  $\hat{x}(e)$  aux autres arêtes de  $C$ , le poids total de  $C$  est supérieur ou égal à 1. Pour résoudre ce problème, nous allons considérer un graphe auxiliaire.

Soit  $G' = (V', E')$  le graphe obtenu à partir de  $G$  de la manière suivante. Pour tout sommet  $i$  de  $G$ , on considère deux sommets  $i'$  et  $i''$  dans  $G'$ . Et pour toute arête  $ij$  de  $G$  on considère les arêtes  $i'j'$  et  $i''j''$  avec un poids  $x(ij)$  et les arêtes  $i'j''$  et  $i''j'$  avec un poids  $1 - x(ij)$ . Comme on va le voir ci-après, le problème de séparation des contraintes (1.61) se ramène à déterminer une plus courte chaîne dans  $G'$  entre deux sommets  $i'$  et  $i''$ . En effet, notons par  $E_{ij}$  l'ensemble d'arêtes  $\{i'j', i'j'', i''j', i''j''\}$  pour  $ij \in E$ . Remarquons que toute chaîne dans  $G'$  entre deux sommets  $i'$  et  $i''$ , qui utilise au plus une arête de chaque ensemble  $E_{ij}$ , correspond à un cycle dans  $G$  passant par le sommet  $i$ . Désignons maintenant par  $V'_1$  (resp.  $V'_2$ ) l'ensemble des sommets  $i'$  (resp.  $i''$ ) pour  $i$  dans  $V$ . Remarquons qu'une arête  $e$  dans  $G'$  a un poids  $1 - \hat{x}(e)$  si et seulement si  $e$  est entre  $V'_1$  et  $V'_2$ . Soit  $\Lambda$  une chaîne de  $G'$  entre un sommet  $i'$  et un sommet  $i''$ .  $\Lambda$  utilise alors un nombre impair d'arêtes  $e$  avec un poids  $1 - \hat{x}(e)$ . En plus, si le poids de  $\Lambda$  est strictement inférieur à 1, alors  $\Lambda$  ne peut pas utiliser deux arêtes de types  $i'j''$  et  $i''j'$ . Et si  $\Lambda$  passe par deux arêtes de type  $i'i''$  et  $j'j''$ , alors il doit exister une chaîne  $\Lambda' \subset \Lambda$  liant soit  $i'$  et  $i''$  soit  $j'$  et  $j''$ , et n'utilisant qu'une seule arête parmi  $i'j''$  et  $i''j'$ . Ceci implique que si  $\Lambda$  est une plus courte chaîne entre deux sommets  $i'$  et  $i''$  ayant un poids strictement inférieur à 1, alors  $\Lambda$  peut être choisie de telle manière qu'elle intersecte chaque  $E_{ij}$  en au plus une arête, et par conséquent, elle correspond à un cycle  $C$  dans  $G$ . En considérant  $F$  comme étant l'ensemble des arêtes  $e$  de  $\Lambda$  ayant un poids  $1 - \hat{x}(e)$ , alors  $C$  et  $F$  induisent dans ce cas une contrainte de type (1.61) violée par  $\hat{x}$ .

D'autre part, il est facile de voir que toute paire  $C, F$ , où  $C$  est un cycle de  $G$  et  $F$  est un sous-ensemble impair de  $C$ , qui induit une contrainte violée de type (1.61), correspond à une chaîne entre deux sommets  $i'$  et  $i''$  de  $G'$  utilisant au plus une arête de chaque  $E_{ij}$  et de poids strictement inférieur à 1.

En conséquence, pour séparer les contraintes (1.59), on calcule dans  $G'$  une plus courte chaîne entre chaque paire de sommets  $i'$ ,  $i''$ , et on considère la plus courte parmi toutes ces chaînes. Si le poids de cette dernière est supérieur ou égal à 1, alors toutes les contraintes (1.59) sont vérifiées par  $\hat{x}$ . Sinon, une contrainte violée est alors trouvée. Comme les poids dans  $G'$  sont tous positifs, le calcul d'une plus courte chaîne entre deux sommets peut être réalisé en  $O(n^2)$  (où  $n = |V|$ ). La séparation des contraintes (1.59) peut donc être effectuée en  $O(n^3)$ .

Comme les contraintes (1.59) et (1.60) peuvent être séparées en temps polynomial, le problème de coupe maximum peut donc être résolu en temps polynomial pour les graphes dont le polytope des coupes est donné par ces contraintes. Le théorème suivant caractérise ces graphes.

**THEOREME 1.69.**— *Les contraintes (1.59) et (1.60) décrivent complètement le polytope  $P_c(G)$  si et seulement si  $G$  n'est pas contractible à  $K_5$ .*

Par le théorème 1.69, le problème de coupe maximum peut être résolu en temps polynomial par un algorithme de coupes dans les graphes qui ne sont pas contractibles à  $K_5$ . Comme les graphes planaires font parti de cette classe, ce théorème implique également que le problème de coupe maximum peut être résolu en temps polynomial par un algorithme de coupe dans ces graphes.

Un graphe est appelé un *bicycle p-roue* s'il consiste en un cycle de longueur  $p$  et de deux sommets adjacents entre eux et adjacents à tout sommet du cycle.

**THEOREME 1.70.-** *Soit  $(W, T)$  un bicycle  $(2k + 1)$ -roue,  $k \geq 1$ . contenu dans  $G$ . Alors l'inégalité*

$$x(T) \leq 2(2k + 1) \quad (1.62)$$

*définit une facette de  $P_c(G)$ .*

Gerards [GER 85] a montré que le problème de séparation des contraintes (1.62) peut se ramener à une séquence polynomiale de problèmes de plus courtes chaînes, et peut donc être résolu en temps polynomial.

**THEOREME 1.71.-** *Soit  $K_p = (W, T)$  un sous-graphe complet de  $G$  d'ordre  $p$ . Alors l'inégalité*

$$x(T) \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \lceil \frac{p}{2} \rceil \quad (1.63)$$

*est valide pour  $P_c(G)$ . De plus, elle définit une facette de  $P_c(G)$  si et seulement si  $p$  est impair.*

Les inégalités (1.63) peuvent être séparées en temps polynomial si  $p$  est fixé.

Des algorithmes de coupes et branchements, basés sur ces classes de facettes (et d'autres familles de contraintes valides), ont été développés pour résoudre des instances planaires et non planaires du problème de l'état fondamental du verre de spins [BAR 88] [SIM 95] [JÜN 98] [LIE 03]. Cette approche s'est avérée la plus efficace pour ce problème.

## 1.8. Le problème de conception d'un réseau fiable

Avec l'introduction de la technologie optique, le domaine des télécommunications a vu une évolution importante ces dernières années. En effet, les fibres optiques offrent une large capacité de transmission, et permettent ainsi le transfert de grandes quantités d'informations. Ainsi, les réseaux actuels tendent à avoir une topologie creuse

(presque un arbre). Par contre, la défaillance d'une ou plusieurs liaisons (ou nœuds) d'un réseau de télécommunications peut avoir des conséquences catastrophiques si le réseau n'est pas en mesure de fournir des chemins de rerouting. Pour cela, la conception d'un réseau suffisamment fiable, c'est-à-dire qui peut continuer à fonctionner en cas de panne, est devenue aujourd'hui un des objectifs des opérateurs de télécommunications.

La fiabilité est généralement exprimée en termes de connexité dans les réseaux. On exige qu'il existe entre chaque paire de noeuds, suivant leur importance dans le réseau, un nombre minimum de chaînes disjointes, de telle manière qu'en cas de panne, il y ait toujours au moins une chaîne qui permet d'écouler le trafic entre les noeuds. Si la réalisation de chaque liaison dans le réseau entraîne un certain coût, le problème qui se pose alors est de concevoir un réseau dont la topologie vérifie les conditions de fiabilité et qui soit de coût minimum.

Ce problème a suscité une grande attention ces dernières années. Plusieurs méthodes de résolution ont été développées, en particulier des techniques polyédrales. Celles-ci ont été efficaces pour résoudre à l'optimum des instances de grande taille [GRÖ 92b] [GRÖ 92a] [KER 04b]. Dans la suite, nous discutons de ces techniques pour certaines variantes du problème. Tout d'abord, nous donnons une formulation du problème en termes de graphes.

### 1.8.1. Formulation et polyèdre associé

Pour modéliser la fiabilité dans les réseaux, Grötschel et Monma [GRÖ 90] ont introduit le concept de type de connexité des sommets. Si  $G = (V, E)$  est le graphe qui représente les nœuds et toutes les liaisons possibles entre les nœuds, on suppose qu'un entier positif  $r(s)$  est associé à chaque sommet  $v \in V$ . Cet entier est appelé *le type de connexité* de  $s$  et il représente le nombre de liaisons minimum qui doivent lier le sommet  $s$  au réseau final. On dit qu'un sous-graphe vérifie les *conditions d'arête-fiabilité* (resp. *sommet-fiabilité*) si pour toute paire de sommets  $s, t$  de  $V$ , il existe au moins

$$r(s, t) = \min \{r(s), r(t)\}$$

chaînes arête (resp. sommet)-disjointes, entre  $s$  et  $t$ . Un sous-graphe qui satisfait les conditions d'arête-fiabilité (resp. sommet-fiabilité) est dit *sous-graphe arête-fiable* (resp. *sommet-fiable*).

Si chaque arête  $e$  du graphe est munie d'un coût  $c(e)$ , le *problème de conception d'un réseau arête-fiable* (resp. *sommet-fiable*) est de déterminer un sous-graphe arête-fiable (resp. sommet-fiable) dont le coût total des arêtes est minimum. On notera ce problème par PSGAF (resp. PSGSF).

Plusieurs problèmes combinatoires, bien connus dans la littérature, sont des cas particuliers de ce modèle général.

– Si le type de connexité est égal à 1 pour deux sommets donnés  $s$  et  $t$  du graphe et 0 pour les autres, le problème n'est rien d'autre que celui de la plus courte chaîne entre  $s$  et  $t$ .

– Si le type de connexité est 1 pour un sous-ensemble de sommets (dits *terminaux*) et 0 pour les autres, le problème n'est rien d'autre que le problème de l'arbre de Steiner. Et si les types de connexités sont tous 1, nous avons le problème de l'arbre couvrant.

– Si pour chaque sommet le type de connexité est égal à  $k$ , pour  $k$  fixé, il s'agit alors du problème du sous-graphe  $k$ -arête (sommet)-connexe.

Comme certains de ces problèmes sont NP-difficiles, le problème PSGAC (PSGSC) est aussi NP-difficile.

Dans la suite, on suppose qu'il existe au moins deux sommets dans le graphe ayant un type de connexité maximum. Le problème peut toujours se ramener à ce cas. On se limite également au cas de l'arête fiabilité. La plupart des résultats liés à ce problème peuvent être aisement étendus au cas de la sommet-fiabilité.

Pour  $W \subseteq V$ , soit

$$\begin{aligned} r(W) &= \max \{r(s) : s \in W\}, \\ con(W) &= \min \{r(W), r(V \setminus W)\}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.49 de Menger, le PSGAF est équivalent au programme en nombres entiers suivant :

$$\min \sum_{e \in E} c(e)x(e) \quad (1.64)$$

$$0 \leq x(e) \leq 1, \quad \forall e \in E, \quad (1.64)$$

$$x(\delta(W)) \geq con(W), \quad \forall W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V, \quad (1.65)$$

$$x(e) \in \{0, 1\}, \quad \forall e \in E. \quad (1.66)$$

Les contraintes (1.65) sont appelées *inégalités de coupe*.

Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $r = (r(v), v \in V)$  un vecteur de types de connexité. Soit

$$\text{PSGAF}(G) = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^E : x \text{ satisfait (1.64) -- (1.66)}\},$$

l'enveloppe convexe des solutions du problème PSGAF.  $\text{PSGAF}(G)$  est appelé *le polytope des sous-graphes arête-fiables*.

Étant donnés un graphe  $G = (V, E)$  et un vecteur  $r = (r(v), v \in V)$ , on dit qu'une arête  $e \in E$  est *essentielle* si le graphe  $G - e$  n'est pas arête fiable. Les arêtes essentielles doivent donc appartenir à toute solution du problème. Si  $E^*$  dénote l'ensemble des arêtes essentielles dans  $G$ , alors nous avons le résultat suivant.

**PROPOSITION 1.72.-** (Grötschel, Monma [GRÖ 90]). *La dimension de PSGAF( $G$ ) est égale à  $|E| - |E^*|$ .*

### 1.8.2. Inégalités valides et séparation

Pour alléger la présentation, nous considérons dans la suite le cas de la *fiabilité faible*, c'est-à-dire que  $r(v) \in \{0, 1, 2\}$  pour chaque sommet  $v \in V$ . La plupart des résultats établis dans ce cas peuvent être facilement étendus au cas général. De plus, étant donné que les conditions de fiabilité dans ce cas induisent une topologie qui s'est avérée suffisamment performante en pratique, cette variante a été intensivement investiguée.

Une première classe d'inégalités valides pour le polytope PSGAF( $G$ ) est celle donnée par les inégalités de coupe (1.65). Le problème de séparation pour ces contraintes est équivalent au problème de coupe minimum avec des poids positifs sur les arêtes, et peut donc être résolu en temps polynomial. En effet, étant donné une solution  $\hat{x} \in \mathbb{R}^E$ , on associe à chaque arête  $e$  une capacité  $\hat{x}(e)$ , et on calcule le flot maximum entre chaque paire de sommets. Par le théorème de flot max-coupe min, si pour une paire  $s, t$ , le flot entre  $s$  et  $t$  est strictement inférieur à  $\min\{r(s), r(t)\}$ , alors la contrainte (1.65) induite par la coupe minimum entre  $s$  et  $t$  est violée par  $\hat{x}$ . Cette séparation peut être implémentée en  $O(n^4)$  en utilisant l'arbre de Gomory-Hu [GOM 61].

#### 1.8.2.1. Inégalités de multicoupe

Soit  $(V_1, \dots, V_p)$  une partition de  $V$ , i.e.,  $V_i \neq \emptyset$  pour  $i = 1, \dots, p$ ,  $V_i \cap V_j = \emptyset$  pour tout  $i, j \in \{1, \dots, p\}$   $i \neq j$ , et  $V_1 \cup \dots \cup V_p = V$ . Si  $\text{con}(V_i) = 1$  pour  $i = 1, \dots, p$ , le graphe obtenu d'une solution du PSGAF en contractant les sous-graphes induits par  $V_i, i = 1, \dots, p$ , doit être connexe. En conséquence, les contraintes suivantes sont valides pour le polytope PSGAF( $G$ ).

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1, \quad \text{pour toute partition } (V_1, \dots, V_p) \quad (1.67)$$

telle que  $\text{con}(V_i) = 1, i = 1, \dots, p,$

où  $\delta(V_1, \dots, V_p)$  est l'ensemble des arêtes entre les éléments de la partition. Les inégalités (1.67) sont appellées *inégalités de multicoupe*. Dans [GRÖ 90], Grötschel et Monma ont montré que les inégalités (1.67) et les inégalités (1.64) suffisent pour

décrire le polytope  $\text{PSGAF}(G)$  quand  $r(v) = 1$  pour tout sommet  $v \in V$ . Aussi Nash-Williams [NAS 61] a montré que ces inégalités avec les contraintes de positivité,  $x(e) \geq 0$  pour tout  $e \in E$ , caractérisent le dominant de  $\text{PSGAF}(G)$  dans ce cas.

Cunningham [CUN 85] a montré que si  $r(v) = 1$  pour tout  $v \in V$ , le problème de séparation des contraintes (1.67) peut se ramener à une séquence de  $|E|$  problèmes de coupe minimum, et peut donc être résolu en temps polynomial. Dans [BAR 92], Barahona a montré que le problème peut se ramener à  $|V|$  problèmes de coupe minimum, et donc être résolu en  $O(n^4)$ .

#### 1.8.2.2. Inégalités de partition

Grötschel et al. [GRÖ 92b] ont introduit une classe d'inégalités appelées inégalités de partition, qui généralise les contraintes de coupe (1.65). Ces inégalités peuvent être définies comme suit. Soit  $(V_1, \dots, V_p)$ ,  $p \geq 3$ , une partition de  $V$  telle que  $1 \leq \text{con}(V_i) \leq 2$  pour  $i = 1, \dots, p$ . Soit  $I_2 = \{i : \text{con}(V_i) = 2, i = 1, \dots, p\}$ . L'inégalité de partition induite par  $(V_1, \dots, V_p)$  est donnée par

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ p & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.68)$$

Remarquons que si  $p = 2$ , la contrainte (1.68) n'est rien d'autre qu'une contrainte de coupe (1.65). Aussi, si les types de connexité sont tous égaux à 2, la contrainte (1.68) est redondante par rapport aux contraintes de coupe  $x(\delta(V_i)) \geq 2, i = 1, \dots, p$ .

Le problème de séparation des contraintes (1.68) est NP-difficile dans le cas général. Kerivin et Mahjoub [KER 02] ont montré que, si  $r \in \{1, 2\}^V$ , le problème de séparation des contraintes

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p \quad \text{si } I_2 \neq \emptyset \quad (1.69)$$

où  $(V_1, \dots, V_p)$  est une partition de  $V$ , peut se ramener à la minimisation d'une fonction sous-modulaire, et peut donc être résolu en temps polynomial. (Une fonction  $f : 2^S \rightarrow \mathbb{R}$  où  $S$  est un ensemble fini, est dite *sous-modulaire* si  $f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$  pour tous sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $S$ ). Récemment, Barahona et Kerivin [BAR ] ont donné un algorithme polynomial combinatoire pour séparer les contraintes (1.69) dans ce cas.

Comme conséquence des complexités des problèmes de séparation de (1.67) et (1.69), le problème de séparation des contraintes (1.68) est polynomial si  $r \in \{1, 2\}^V$ .

### 1.8.2.3. Inégalités de $F$ -partition

Supposons maintenant que les types de connexité sont tous égaux à 2, c'est-à-dire  $r(v) = 2$  pour tout  $v \in V$ . Une classe d'inégalités valides pour le PSGAF( $G$ ) dans ce cas a été introduite par Mahjoub [MAH 94] comme suit. Considérons une partition  $(V_0, V_1, \dots, V_p)$  de  $V$  et soit  $F \subseteq \delta(V_0)$  de cardinalité impaire. En sommant les inégalités valides suivantes

$$\begin{aligned} x(\delta(V_i)) &\geq 2, \quad \forall i = 1, \dots, p, \\ -x(e) &\geq -1, \quad \forall e \in F, \\ x(e) &\geq 0, \quad \forall e \in \delta(V_1) \setminus F. \end{aligned}$$

nous obtenons

$$2x(\Delta) \geq 2p - |F|,$$

où  $\Delta = \delta(V_0, \dots, V_p) \setminus F$ . En divisant par 2 et arrondissant le second membre à l'entier supérieur, on obtient

$$x(\Delta) \geq p - \lfloor \frac{|F|}{2} \rfloor. \tag{1.70}$$

Les inégalités (1.70) sont appelées *inégalités de  $F$ -partition*. Remarquons que ces inégalités sont de rang de Chvátal 1 par rapport au système donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupe. Remarquons aussi que si  $|F|$  est paire, l'inégalité (1.70) peut être obtenue à partir des inégalités triviales et des inégalités de coupe.

Les inégalités (1.70) sont un cas particulier d'une classe plus générale d'inégalités valides donnée par Grötschel et al. [GRÖ 92b] pour le PSGAF( $G$ ). Kerivin et al. [KER 04b] ont considéré une sous-classe de contraintes de  $F$ -partition appelées *inégalités de roue impaire* et ont donné des conditions suffisantes pour que ces dernières définissent des facettes. Ils ont également étendu ces inégalités au cas où les types de connexité sont 1 ou 2 pour chaque sommet du graphe.

Le problème de séparation pour les contraintes de  $F$ -partition est encore un problème ouvert. Cependant si  $F$  est fixé, comme il a été montré par Baïou et al. [BAÏ 00], le problème peut être résolu en temps polynomial.

### 1.8.3. Un algorithme de coupes et branchements

En utilisant les résultats ci-dessus, Kerivin et al. [KER 04b] ont développé un algorithme de coupes et branchements pour le problème PSGAF quand les types de connexité sont 1 ou 2 pour chaque sommet du graphe. Ce problème, que nous désignons dans la suite par (1, 2)-PSGAF, a des applications pratiques importantes comme il est mentionné dans [MON 89].

L'algorithme commence par résoudre le programme linéaire réduit aux contraintes triviales et contraintes de coupe associées aux sommets du graphe, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \text{Min } & cx \\ x(\delta(v)) &\geq r(v), \quad \forall v \in V, \\ 0 \leq x(e) &\leq 1, \quad \forall e \in E. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Si la solution optimale, disons  $\bar{x}$  de ce programme est une solution du problème (1, 2)-PSGAF, c'est-à-dire elle est entière et vérifie les contraintes de coupe (1.65), alors elle est optimale. En général, la solution  $\bar{x}$  n'est pas réalisable pour le problème (1, 2)-PSGAF, et par conséquent, à chaque itération de l'algorithme de coupes et branchements, il est nécessaire de générer des contraintes valides pour le (1, 2)-PSGAF qui sont violées par  $\bar{x}$ . Ces contraintes sont générées parmi les contraintes de coupe (1.65), les contraintes de multicoupe (1.67), les contraintes de partition (1.68), les contraintes de  $F$ -partition (1.70) et les contraintes suivantes qui sont une extension directe des contraintes (1.70) quand  $r(v) \in \{1, 2\}$  pour tout  $v \in V$ ,

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq p - \lfloor \frac{p_1 + |F|}{2} \rfloor, \tag{1.72}$$

où  $p_1$  est égal au nombre d'éléments, à l'exception de  $V_0$ , de la partition  $(V_0, \dots, V_p)$  ayant un type de connexité égal à 1.

Les procédures de séparation utilisées dans l'algorithme de coupes et branchements sont soit exactes soit heuristiques suivant la classe de contraintes. Dans certains cas, la séparation peut être effectuée en temps polynomial, mais l'utilisation d'une heuristique peut être beaucoup plus efficace pour accélérer le processus de séparation, et ainsi la résolution du problème.

La séparation des contraintes de coupe est réalisée en calculant l'arbre de Gomory-Hu en utilisant l'algorithme de flot-max de Goldberg et Tarjan [GOL 88]. Pour la séparation des contraintes de partition (1.68), Kerivin et al. ont développé une heuristique où ils considèrent deux cas suivant le second membre de l'inégalité. Leur heuristique est basée sur l'algorithme de Barahona [BAR 92] pour les contraintes de multicoupe.

Pour séparer les contraintes de  $F$ -partition (1.70) et (1.72), Kerivin et al. [KER 04b] proposent deux heuristiques. La première est basée sur le concept des points extrêmes critiques introduit par Fonlupt et Mahjoub [FON 99]. La procédure consiste à appliquer certaines opérations de réduction de graphes, et à chercher des cycles impairs formés d'arêtes dont la valeur est fractionnaire. Si un tel cycle est trouvé, alors une contrainte de  $F$ -partition violée par  $\bar{x}$  est détectée. La deuxième heuristique permet de transformer des coupes, avec autant d'arêtes  $e \in E$  avec  $\bar{x}(e) = 1$  que possible, en des  $F$ -partitions. Ceci se fait en calculant un arbre de Gomory-Hu par rapport aux poids  $(1 - \bar{x}(e), e \in E)$ . Si  $\delta(W)$  est une coupe de l'arbre de Gomory-Hu, la contrainte de  $F$ -partition est donc générée en considérant la partition donnée par  $W$  et les sommets dans  $V \setminus W$ , et en choisissant un ensemble d'arêtes  $F \subseteq \delta(W)$ . (Le même processus peut être appliqué pour la partition induite par  $V \setminus W$  et les sommets dans  $W$ .)

Les résultats numériques présentés dans [KER 04b], portant sur des instances uniformes où  $r(v) = 2$  pour tout  $v \in V$  ayant jusqu'à 417 sommets et des instances avec  $r \in \{1, 2\}^V$  ayant jusqu'à 101 sommets, montrent que ces différentes classes d'inégalités sont utiles pour résoudre le problème à l'optimum. En particulier, dans le cas où  $r(v) = 2$  pour tout  $v \in V$ , les contraintes de  $F$ -partition semblent jouer un rôle décisif pour déterminer la solution optimale. Elles permettent d'améliorer la borne à la racine de l'arbre de branchements, et de diminuer ainsi sa taille. Quand  $r \in \{1, 2\}^V$ , les contraintes de partition (1.68) semblent être les plus déterminantes dans la résolution du problème. Comme les contraintes de  $F$ -partitions pour le cas uniforme, ces contraintes permettent de réduire significativement la borne à la racine, et de diminuer considérablement la taille de l'arbre de branchements.

## 1.9. Conclusion

Nous avons discuté dans ce chapitre des approches polyédrales en optimisation combinatoire. Nous nous sommes intéressés en particulier aux descriptions de polyèdres en termes de facettes et en termes de points extrêmes et à leurs implémentations dans le cadre d'une technique de coupes et branchements. Comme il a été souligné, ces approches se sont avérées puissantes pour résoudre d'une manière exacte des problèmes d'optimisation combinatoire difficiles. En exemple, nous avons présenté des applications aux problèmes de verres de spins en physique statistique et de conception d'un réseau fiable, pour lesquelles ces approches sont particulièrement efficaces.

Pour certains problèmes, il se peut qu'un algorithme de coupes et branchements ne donne pas une solution optimale même après un temps énorme de calcul. Il est alors intéressant d'avoir dans de tels cas une solution approchée avec une erreur relative très faible. Pour cela, il est utile que l'on puisse calculer, à chaque itération de l'algorithme, une solution réalisable du problème. Celle-ci donne (en cas de maximisation) une borne inférieure sur la valeur optimale. Cette borne avec celle donnée par la relaxation linéaire permettent de calculer l'erreur relative de la solution courante. Une

des techniques les plus utilisées pour le calcul de solutions réalisables, est celle dite *d'arrondissement aléatoire*, (*random rounding*). La méthode consiste à transformer une solution fractionnaire en une solution entière réalisable en changeant aléatoirement les composantes fractionnaires de la solution en valeurs entières. D'autres méthodes heuristiques et métahéuristiques peuvent également être utilisées pour calculer des solutions réalisables.

Dans certains cas, les contraintes du problème étudié peuvent être données d'une manière explicite alors que le nombre de variables peut être très grand (exponentiel). Ceci est par exemple le cas des problèmes de multiflows où les contraintes sont les égalités de conservation de flots et les contraintes de capacité, et les variables représentent tous les chemins dans le réseau. Dans ce type de situations, les approches polyédrales sont généralement combinées avec les méthodes dites de génération de colonnes [WOL 98]. Ces dernières consistent à résoudre une séquence de problèmes ayant chacun un nombre réduit de variables.

Enfin les approches polyédrales peuvent également être utilisées dans le cadre des méthodes de projections *lift-and-project*. Ces techniques, introduites par Balas et al. [BAL 96], consistent à considérer une formulation du problème (et une description linéaire du polyèdre des solutions) dans un espace de dimension supérieure, et d'utiliser des techniques de coupes et de projections pour résoudre le problème.

**Remerciements :** Je remercie Sylvie Borne, Pierre Fouilhoux et Hervé Kerivin pour la lecture soignée d'une première version de ce manuscrit et leurs commentaires pertinents.

## 1.10. Bibliographie

- [APP 98] APPLEGATE D., BIXBY R., CHVÁTAL V., COOK W., « On the solution of traveling salesman problems », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berlin 1998-Volume III : Invited Lectures, Documenta Mathematica Extra Volume ICM 1998 III*, Fischer G., Rehmann U., p. 645-656, 1998.
- [BAÏ 00] BAÏOU M., BARAHONA F., MAHJOUB A. R., « Separation of partition inequalities », *Mathematics of Operations Research*, vol. 25, p. 243-254, 2000.
- [BAL 76] BALAS E., PADBERG M. W., « Set partitioning : a survey », *SIAM Review*, vol. 18, p. 710-760, 1976.
- [BAL 96] BALAS E., CERIA S., CORNUÉJOLS G., « Mixed 0 – 1 Programming by Lift-and-Project in a Branch-and-Cut Framework », *Management Science*, vol. 42, p. 1229-1246, 1996.
- [BAR J] BARAHONA F., KERIVIN H., « Separation of partition inequalities with terminals », *Discrete Optimization, à paraître. Aussi disponible à IBM comme rapport de recherche N RC22984*, .

- [BAR 83] BARAHONA F., « The max-cut problem on graphs not contractible to  $K_5$  », *Operations Research Letters*, vol. 2, p. 107-111, 1983.
- [BAR 85] BARAHONA F., GRÖTSCHEL M., MAHJOUB A. R., « Facets of the bipartite subgraph polytope », *Mathematics of Operations Research*, vol. 10, p. 340-358, 1985.
- [BAR 86] BARAHONA F., MAHJOUB A. R., « On the cut polytope », *Mathematical Programming*, vol. 36, p. 157-173, 1986.
- [BAR 88] BARAHONA F., GRÖTSCHEL M., JÜNGER M., REINELT G., « An application of Combinatorial Optimization to Statistical Physics and Circuit Layout Design », *Operations Research*, vol. 36, p. 493-513, 1988.
- [BAR 92] BARAHONA F., « Separating from the dominant of the spanning tree polytope », *Operations Research Letters*, vol. 12, p. 201-203, 1992.
- [BER 58] BERGE C., « Sur le couplage maximum d'un graphe », *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Paris, series I, Mathématiques*, vol. 247, p. 258-259, 1958.
- [CHV 73] CHVÁTAL V., « Edmonds Polytopes and a Hierarchy of Combinatorial Problems », *Discrete Mathematics*, vol. 4, p. 305-337, 1973.
- [COO 98] COOK W., CUNNINGHAM W., PULLEYBLANCK W. R., SCHRIJVER A., *Combinatorial Optimization*, Wiley, 1998.
- [COR 01] CORNUÉJOLS G., *Combinatorial Optimization, Packing and Covering*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 2001.
- [CUN 78] CUNNINGHAM W. H., MARSH A. B., « A primal algorithm for optimum matching », *Mathematical Programming Study*, vol. 8, p. 50-72, 1978.
- [CUN 85] CUNNINGHAM W. H., « Optimal attack and reinforcement of a network », *Journal of the ACM*, vol. 32, p. 185-192, 1985.
- [DAN 51] DANTZIG G. B., « Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities », *Activity Analysis of Production and Allocation- Proceedings Conference on Linear Programming*, Chicago, Illinois, 1949, Tj. C. Koopmans ed., Wiley, p. 359-373, 1951.
- [DAN 63] DANTZIG G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
- [DEZ 97] DEZA M., LAURENT M., *Geometry of Cuts and Metrics*, Springer, Berlin, 1997.
- [DIJ 59] DIJKSTRA E., « A note on two problems in connexion with graphs », *Numerisches Mathematik*, vol. 1, p. 269-271, 1959.
- [EDM 65] EDMONDS J., « Maximum matching and a polyhedron with 0—1 vertices », *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 69, n°B, p. 125-130, 1965.
- [EDM 77] EDMONDS J., GILES R., « A min-max relation for submodular functions on graphs », *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 1, p. 185-204, 1977.
- [FON 99] FONLUPT J., MAHJOUB A. R., « Critical extreme points of the 2-edge connected spanning subgraph polytope », *Proceedings IPCO'99, LNCS 1610*, p. 166-183, 1999.

- [FOR 56] FORD L. R. J., FULKERSON D. R., « Maximal flow through a network », *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 8, p. 399-404, 1956.
- [FOR 62] FORD L. R. J., FULKERSON D. R., *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, 1962.
- [FUL 71] FULKERSON D. R., « Blocking and anti-blocking of polyhedra », *Mathematical Programming*, vol. 1, p. 168-194, 1971.
- [FUL 72] FULKERSON D. R., « Anti-blocking polyhedra », *Journal of Combinatorial Theory Series B*, vol. 12, p. 50-71, 1972.
- [GER 85] GERARDS A. M. H., « Testing the odd-bycycle wheel inequalities for the bipartite subgraph polytope », *Mathematics of Operations Research*, vol. 10, p. 359-360, 1985.
- [GIL 79] GILES R., PULLEYBLANK W. R., « Total dual integrality and integer polyhedra », *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 25, p. 191-196, 1979.
- [GOL 88] GOLDBERG A. V., TARJAN R. E., « A new approach to the maximum-flow problem », *Journal of the ACM*, vol. 35, p. 921-940, 1988.
- [GOM 58] GOMORY R. E., « Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs », *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 64, p. 275-278, 1958.
- [GOM 60] GOMORY R. E., « Solving Linear Programming Problems in Integers », *Combinatorial Analysis*, p. 211-216, R. E. Bellman and M. Hall, Jr. eds, American Mathematical Society, 1960.
- [GOM 61] GOMORY R. E., HU T. C., « Multi-terminal network flows », *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 9, p. 551-570, 1961.
- [GRA 95] GRAHAM R. L., GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L., *Handbook of Combinatorics, Volume II, Part IV : Applications*, Elsevier, North Holland, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1995.
- [GRÖ 81] GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L., SCHRIJVER A., « The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization », *Combinatorica*, vol. 1, p. 70-89, 1981.
- [GRÖ 88] GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L., A. SCHRIJVER, *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer, Berlin, 1988.
- [GRÖ 90] GRÖTSCHEL M., MONMA C. L., « Integer polyhedra associated with certain network design problem with connectivity constraints », *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, vol. 3, p. 502-523, 1990.
- [GRÖ 91] GRÖTSCHEL M., HOLLAND O., « Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems », *Mathematical Programming*, vol. 51, p. 141-202, 1991.
- [GRÖ 92a] GRÖTSCHEL M., MONMA C. L., STOER M., « Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints », *Operations Research*, vol. 40, p. 309-330, 1992.
- [GRÖ 92b] GRÖTSCHEL M., MONMA C. L., STOER M., « Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints », *SIAM Journal on Optimization*, vol. 2, n°3, p. 474-504, 1992.

- [GRÖ 95] GRÖTSCHEL M., MONMA C. L., STOER M., « Design of survivable networks », *Handbook in Operations Research and Management Science*, vol. 7, p. 617-671, M. O. Ball et al. eds., North-Holland, 1995.
- [HAD 75] HADLOK M., « Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time », *SIAM Journal on Computing*, vol. 4, p. 221-225, 1975.
- [HOF 56] HOFFMAN A. J., KRUSKAL J., « Integer boundary points of convex polyhedra », *Linear Inequalities and related Systems*, p. 223-246, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds., Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [JÜN 98] JÜNGER M., RINALDI G., « Relaxation of the Max-Cut Problem and Computation of Spin Glass Ground States », *Operations Research Proceedings*, p. 74-83, P. Kischka, H. W. Lorenz, U. Derigs, W. Domschke, P. Kleinschmidh and R. Möring, eds., Springer, 1998.
- [KER 02] KERIVIN H., MAHJOUB A. R., « Separation of the Partition Inequalities for the (1,2)-Survivable Network Design Problem », *Operations Research Letters*, vol. 30, p. 265-268, 2002.
- [KER 04a] KERIVIN H., MAHJOUB A. R., « Design of Survivable Networks : A Survey », *Preprint*, 2004.
- [KER 04b] KERIVIN H., MAHJOUB A. R., NOCQ C., « (1,2)-Survivable Networks : Facets and Branch-and-Cut », *The Sharpest Cut : The Impact of Manfred Padberg and his work*, p. 121-152, MPS-SIAM, 2004.
- [KHA 79] KHACHIAN L. G., « A polynomial Algorithm in Linear Programming », *Soviet Mathematics Doklady*, p. 191-194, 1979.
- [KÖN 31] KÖNIG D., « Graphok és matrixok », *Matematikai és Fizikai Lapok*, vol. 38, p. 116-119, 1931.
- [LAW 85] LAWLER E. L., LENSTRA J. K., KAN A. H. G. R., SHMOYS D. B., *The traveling Salesman Problem - A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, Chichester, 1985.
- [LIE 03] LIERS F., JÜNGER M., REINELT G., RINALDI G., « Computing Exact Ground States of Hard Ising Spin Glasse by Branch-and-Cut », *Preprint*, 2003.
- [LOV 79] LOVÁSZ L., « Graph theory and integer programming », *Discrete Optimization I, Annals of Discrete Mathematics 4*, p. 146-158, P. L. Hammer , E. L. Johnson and B. H. Korte, eds., 1979.
- [MAH 94] MAHJOUB A. R., « Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra », *Mathematical Programming*, vol. 64, p. 199-208, 1994.
- [MAR 90] MARTELLO S., TOTH P., *Knapsack Problems : Algorithms and Computer Implementation*, Wiley, 1990.
- [MEN 27] MENGER K., « Zur Allgemeinen Kurventheorie », *Fundamanta Mathematicae*, vol. 10, p. 96-115, 1927.
- [MIN ] MINKOWSKI H., *Geometrie der Zahlen (Erste Lieferung)*, Teubner, Leipzig, .
- [MON 89] MONMA C. L., SHALLCROS D. F., « Methods for designing communication networks with certain two-connected survivability constraints », *Operations Research*, vol. 37,

- p. 531-541, 1989.
- [NAS 61] NASH-WILLIAMS C. S. J. A., « Edge-disjoint spanning trees of finite graphs », *Journal of the London Mathematical Society*, vol. 36, p. 445-450, 1961.
- [NEM 88] NEMHAUSER G. L., WOLSEY L. A., *Integer and Combinatorial Optimization*, Wiley, 1988.
- [PAD 91] PADBERG M., RINALDI G., « A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems », *SIAM Review*, vol. 33, p. 60-100, 1991.
- [SCH 80] SCHRIJVER A., « On Cutting Planes », *Annals of Discrete Mathematics*, vol. 9, p. 291-296, 1980.
- [SCH 03] SCHRIJVER A., *Combinatorial Optimization, Polyhedra and Efficiency*, Springer, 2003.
- [SIM 95] SIMONE C. D., DIEHL M., JÜNGER M., MUTZEL P., REINELT G., RINALDI G., « Exact ground states in spin glasses : New experimental results with a branch-and-cut algorithm », *Journal of Statistical Physics*, vol. 80, p. 487-496, 1995.
- [WEYL 50] WEYL H., « Elementare Theorie der konvexen Polyeder », *Commentarii Mathematici Helvetici* 7 (1935) 290-306, p. 3-18, Traduction en anglais : “The elementary theory of convex polyhedra”, dans *Contributions to the Theory of Games I* (H. W. Kuhn and A. W. Tucker eds., Princeton University Press, Princeton,), 1950.
- [WOL 98] WOLSEY L. A., *Integer Programming*, Wiley, 1998.

## Index

### C

cône 25

### D

dimension d'un polyèdre 16, 19, 20, 23, 24, 30–32, 34–37, 41, 42, 48, 62, 67

### E

enveloppe convexe 11, 13, 14, 17, 18, 28, 29, 34, 38, 42, 52, 61, 66

### F

face 19–21, 23, 24, 27, 30–32, 35–37, 42, 43

facette 15, 21–24, 33–37, 41, 42, 54, 56, 57, 62, 64, 69, 71

### M

matrice totalement unimodulaire 15, 44, 45  
méthodes de Chvátal-Gomory 54, 55

de coupes 14, 33, 52–59, 62, 64

de coupes et branchements 14, 15, 57, 58, 64, 70, 71

### P

point extrême 13, 17, 20, 24, 27, 28, 31–33, 38–41, 43, 45, 48–52, 71

points affinement indépendants 16–18, 30, 35, 36

polyèdre 13–16, 18–20, 22–24, 29, 30, 33, 38, 41, 43–45, 47–58, 71, 72

bloquants 15, 44, 48, 49  
entier 15, 43–47, 54

polytope 16, 19, 24, 27–29, 33–36, 38, 39, 41, 42, 45, 47, 51–53, 55, 57, 59, 61–63, 66–68

problème de séparation 14, 57–59, 62–64, 67–69

### R

rang de Chvátal 54, 55, 69

rayon extrême 30–33

relation min-max 11, 14, 15, 33, 44–47, 49–52

### S

système totalement dual entier 46, 47