

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. Л. Виноградов, А. Л. Громов

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть третья



ИЗДАТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ББК 22.161
В49

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук *А. Б. Александров* (Петерб. отд. матем. ин-та им. В. А. Стеклова), д-р физ.-мат. наук *В. В. Жук* (С.-Петербург. гос. ун-т)

*Рекомендовано к печати
Ученым советом математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Виноградов О. Л., Громов А. Л.
**В49 Курс математического анализа: в 5 частях.
Часть 3.** — СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2016. — 252 с.
ISBN 978-5-288-04871-5
ISBN 978-5-288-05648-2 (ч. 3)

Книга представляет собой третью часть курса математического анализа, читаемого на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Эта часть содержит материал, традиционно входящий в третий семестр курса, и включает следующие разделы: числовые и функциональные ряды, теория меры и интеграла.

Для студентов математических специальностей университетов.

ББК 22.161

ISBN 978-5-288-04871-5
ISBN 978-5-288-05648-2 (ч. 3)

© Санкт-Петербургский
государственный
университет, 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга представляет собой третью часть курса математического анализа, читаемого на математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. Содержание книги примерно соответствует материалу, излагаемому в конце третьего и начале четвертого семестров пятисеместрового курса (или в третьем семестре четырехсеместрового курса, в котором теория функций комплексной переменной читается отдельно). Этот том включает в себя следующие разделы: числовые и функциональные ряды, теория меры и интеграла.

Про третью часть, как и про две первых, можно сказать, что она написана в жанре подробного конспекта лекций.

Материал глав 7 и 8 о числовых и функциональных рядах традиционен. Отметим лишь, что мы рассматриваем как вещественные, так и комплексные ряды. Это относится и к степенным рядам. Здесь же впервые определяется производная функции комплексной переменной, после чего доказывается комплексная дифференцируемость суммы степенного ряда.

На математико-механическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета принято рассказывать теорию меры и интеграла в общем курсе анализа. Эта обширная тема разбита на три главы, две из которых вошли в настоящую книгу. Глава 9 посвящена теории меры, а глава 10 — общей теории интеграла. В интересах читателя материал зачастую излагается шире, чем принято в реальном лекционном курсе. Это относится прежде всего к § 2 и 3 главы 9, посвященным системам множеств и объемам. Далее излагается непосредственно теория меры, строятся меры Лебега и Лебега — Стильтеса, устанавливаются их свойства.

Особенность нашего изложения теории интеграла состоит в не совсем обычном определении интеграла по мере. Он определяется как площадь подграфика, где под площадью понимается произведение исходной меры на одномерную меру Лебега. Это определение заметно упрощает доказательство многих свойств интеграла. Однако, чтобы определить таким способом интеграл по произвольной (не обязательно σ -конечной) мере, необходимо построить и изучить

произведение мер без предположения об их σ -конечности. Преодолению возникающих при этом технических трудностей посвящен § 8 главы 9.

В главе 10 изучаются измеримые функции, строится интеграл, устанавливаются его свойства и теоремы о предельном переходе под знаком интеграла. Затем с помощью интеграла вычисляется произведение мер и доказываются теоремы об интегрировании по произведению мер. В последнем параграфе в качестве приложения интеграла рассматривается теория суммируемых семейств.

Нумерация теорем и лемм ведется отдельно в каждом параграфе; нумерация формул — отдельно в каждой главе; нумерация следствий и замечаний — отдельно к каждому утверждению или группе утверждений, к которым эти следствия и замечания относятся. Конец доказательства обозначается символом \square .

Авторы благодарны всем коллегам по кафедре математического анализа Санкт-Петербургского государственного университета, чьи методические находки использовались в этой книге.

ГЛАВА 7. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 1. Простейшие свойства рядов

До сих пор понятие суммы имело смысл лишь для конечного семейства слагаемых. Определение суммы ряда — формализация наивного представления о том, что должно получиться, если “сложить бесконечно много чисел одно за другим”.

Определение 1. Числовой ряд. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — вещественная или комплексная последовательность. Символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

называется *числовым рядом*, а числа a_k — его членами. Последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *общим членом* ряда. Числа $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ называются *частными* или *частичными суммами* ряда. Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел S (конечный или бесконечный), то S называют *суммой ряда* и символу $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ приписывают значение S . В противном случае считают, что ряд не имеет суммы, и символу $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ не приписывают никакого значения. Если последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то есть S является числом, то говорят, что ряд *сходится*; в противном случае говорят, что он *расходится*.

Итак, по определению

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k,$$

если предел существует.

Замечание 1. Нумерация общего члена ряда может начинаться не с 1, а с любого $m \in \mathbb{Z}$. Сходимость и сумма ряда вида $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$

определяется аналогично. Частные суммы такого ряда определяются равенством $S_n = \sum_{k=m}^n a_k$, $n \geq m$.

Замечание 2. Любая числовая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью частичных сумм некоторого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Общий член этого ряда однозначно восстанавливается по формулам

$$a_1 = S_1, \quad a_k = S_k - S_{k-1} \text{ при } k \geq 2.$$

Поэтому вопросы о сходимости последовательностей и рядов сводятся друг к другу.

Пример 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0 + 0 + 0 + \dots$ сходится к 0, так как все его частичные суммы равны 0.

Пример 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \dots$ расходится к $+\infty$, так как $S_n = n \rightarrow +\infty$.

Пример 3. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Для него

$$S_n = \begin{cases} 1, & n \text{ чётно,} \\ 0, & n \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Последовательность $\{S_n\}$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела, поэтому ряд расходится и, более того, не имеет суммы.

Пример 4. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим сумму *геометрической прогрессии*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots$$

При $z = 1$ и -1 получаются расходящиеся ряды из примеров 2 и 3. В случае $z \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Если $|z| < 1$, то, как было доказано в § 2 главы 2, $|z|^n \rightarrow 0$, а тогда и $z^n \rightarrow 0$. Поэтому $S_n \rightarrow \frac{1}{1-z}$ и

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Если $|z| > 1$, то $z^n \rightarrow \infty$; поэтому $S_n \rightarrow \infty$, и ряд расходится к ∞ . Расходимость ряда при $|z| = 1$ следует из необходимого условия сходимости (см. теорему 1 далее), поскольку $z^n \not\rightarrow 0$. На самом деле, при $|z| = 1$, $z \neq 1$ ряд не имеет ни конечной, ни бесконечной суммы. Этот более тонкий результат читателю предлагается доказать самостоятельно.

Пример 5. Исследуем ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Так как

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

ряд сходится к сумме 1.

Эта сумма, с которой мы уже встречались в примере § 5 главы 4, относится к так называемым *телескопическим*, то есть суммам слагаемых вида $b_{k+1} - b_k$. Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) = b_n - b_1$$

(все слагаемые, кроме крайних, взаимно уничтожаются). Пределы левой и правой частей существуют или нет одновременно, и в случае их существования

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) = \lim b_n - b_1.$$

В частности, сходимость ряда равносильна сходимости последовательности $\{b_n\}$.

Пример 6. В § 6 главы 3, посвященном формуле Тейлора, для всех $x \in \mathbb{R}$ были фактически доказаны равенства

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= e^x, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} &= \cos x, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} &= \sin x.\end{aligned}$$

В частности,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Пример 7. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

называется *гармоническим*. Его частичные суммы

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

также называются *гармоническими*.

В § 8 главы 4 было доказано, что последовательность $\{H_n\}$ не ограничена сверху. Поскольку она возрастает, $H_n \rightarrow +\infty$. Следовательно, гармонический ряд расходится к $+\infty$.

Впоследствии мы докажем расходимость гармонического ряда еще несколькими способами и исследуем поведение гармонических сумм подробнее.

Установим некоторые простейшие свойств рядов.

Σ1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то для любого $m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ тоже сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k. \quad (1)$$

Обратно, если при некотором $m \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. При всех $n > m$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k. \quad (2)$$

При $n \rightarrow \infty$ предел обеих частей равенства (2) существует или нет одновременно, то есть если один из рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ сходится, то сходится и другой. Равенство (1) получается переходом к пределу в (2). \square

Определение 2. Ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ называется *остатком* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ после m -го члена.

Свойство Σ1 утверждает, что ряд и любой его остаток сходятся или расходятся одновременно.

Σ2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$. Другими словами, *остаток сходящегося ряда стремится к нулю*.

Действительно,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^m a_k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

§3. Линейность суммирования. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Для доказательства надо перейти к пределу в равенстве для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^n a_k + \beta \sum_{k=1}^n b_k.$$

Замечание 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ расходится.

В самом деле, если бы ряд с членами $a_k + b_k$ сходил, то сходил бы и ряд с членами $a_k = (a_k + b_k) - b_k$, что неверно.

§4. Если $\{z_k\}$ — комплексная последовательность, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ равносильна одновременной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$. При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Действительно, равносильность вытекает из аналогичного утверждения о покоординатной сходимости последовательности частных сумм (см. замечание 2 к теореме 1 § 2 главы 5), а равенство для сумм — из свойства линейности.

§5. Монотонность суммирования. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ с вещественными членами имеют суммы в $\overline{\mathbb{R}}$, $a_k \leq b_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Для доказательства надо перейти к пределу в неравенстве для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \sum_{k=1}^n b_k.$$

Замечание 2. Аналогично, с помощью предельного перехода, на суммы рядов переносятся неравенства Иенсена, Гёльдера, Минковского, доказанные в главе 3.

Теорема 1. Необходимое условие сходимости ряда. *Общий член сходящегося ряда стремится к нулю: если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.*

Доказательство. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Тогда

$$a_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S - S = 0. \quad \square$$

Замечание 1. Как показывает пример гармонического ряда, стремления общего члена к нулю недостаточно для сходимости. Поэтому с помощью теоремы 1 установить сходимость ряда нельзя. Эта теорема обычно используется для доказательства расходимости ряда в следующей редакции: *если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.* Например, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ из примера 4 расходится при $|z| \geq 1$, так как в этом случае $z^n \not\rightarrow 0$.

Теорема 2. Критерий Больцано – Коши сходимости рядов. *Сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна условию*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. По определению сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна сходимости последовательности $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Воспользуемся критерием Больцано – Коши для последовательностей:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $m > n$. Остается обозначить $m = n + p$, где $p \in \mathbb{N}$, и заметить, что $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. \square

Замечание 2. Теорема 1 вытекает из критерия Больцано – Коши, если положить в нем $p = 1$. Однако, ввиду важности самого факта и простоты доказательства мы предпочли сформулировать теорему 1 отдельно.

Замечание 3. Чтобы доказать расходимость ряда, достаточно предъявить такую последовательность целых чисел $\{m_n\}$, что $m_n > n$ и $\sum_{k=n+1}^{m_n} a_k \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Часто выбирают $m_n = Kn$, где $K > 1$.

Например, поскольку

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0,$$

гармонический ряд расходится по замечанию 3.

Для конечных сумм (то есть сумм конечных семейств) справедливы сочетательный и переместительный законы: слагаемые можно группировать и переставлять. Для рядов положение усложняется. Группировку членов ряда мы обсудим сейчас, а перестановку — позже, в § 3.

Если в расходящемся ряде

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

сгруппировать его члены двумя способами, получатся сходящиеся ряды с разными суммами:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots = 0,$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Прежде чем сформулировать утверждение о группировке членов, необходимо пояснить, что означает группировка.

Пусть дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

и строго возрастающая последовательность целых чисел $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$, $n_0 = 0$. Положим

$$A_j = \sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} a_k, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда говорят, что ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \quad (4)$$

получен из ряда (3) *группировкой членов* (расстановкой скобок), а слагаемые, входящие в A_j , образуют j -ю группу.

Теорема 3. Группировка членов ряда.

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ ($S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ или $S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), то и $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S$.

2. Если $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S$ ($S \in \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$ или $S \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$), $a_n \rightarrow 0$, и существует такое $L \in \mathbb{N}$, что каждая группа содержит не более L слагаемых, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

3. Если a_k вещественны, $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = S \in \overline{\mathbb{R}}$, а члены в каждой группе одного знака, то и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$.

Условие пункта 3 о знаке понимается в нестрогом смысле и означает, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ и любых $\mu, \nu \in [n_j+1 : n_{j+1}]$ $a_\mu a_\nu \geq 0$.

Доказательство. Обозначим через S_n и T_m частные суммы рядов (3) и (4):

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_m = \sum_{j=0}^m A_j.$$

1. По определению $T_m = S_{n_{m+1}}$, то есть $\{T_m\}$ — подпоследовательность $\{S_n\}$. По теореме 3 § 2 главы 5 о пределе подпоследовательности если $S_n \rightarrow S$, то и $T_m \rightarrow S$.

Утверждения 2 и 3 для определенности докажем, когда сумма S конечна. Пусть ряд (4) сходится к S , то есть $S_{n_m} \rightarrow S$. Докажем, что $S_n \rightarrow S$.

2. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такие $M, K \in \mathbb{N}$, что

$$|S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех } m > M,$$

$$|a_k| < \frac{\varepsilon}{2L} \quad \text{для всех } k > K.$$

Пусть $n > \max\{n_{M+1}, K\}$. Обозначим через m такой номер, что $n_m \leq n < n_{m+1}$. Тогда $m > M$ и

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq |S_n - S_{n_m}| + |S_{n_m} - S| \leq \\ &\leq \sum_{k=n_m+1}^n |a_k| + |S_{n_m} - S| < \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. Возьмем $\varepsilon > 0$ и подберем такое $M \in \mathbb{N}$, что $|S_{n_m} - S| < \varepsilon$ для всех $m > M$. Пусть $n > n_{M+1}$. Обозначим через m такой номер, для которого $n_m \leq n < n_{m+1}$; тогда $m > M$. Если все члены группы A_m неотрицательны, то $S_{n_m} \leq S_n \leq S_{n_{m+1}}$, а если неположительны, то $S_{n_{m+1}} \leq S_n \leq S_{n_m}$. В обоих случаях

$$|S_n - S| \leq \max\{|S_{n_{m+1}} - S|, |S_{n_m} - S|\} < \varepsilon. \quad \square$$

Замечание. Из пункта 1 следует, что если ряд после расстановки скобок расходится, то расходится и исходный ряд. Действительно, если бы ряд (3) сходил, то и ряд (4) сходил бы к той же сумме. Если же ряд после расстановки скобок сходится, то, как показывает пример перед теоремой, про поведение исходного ряда ничего сказать нельзя. Однако, если при этом выполнены условия пунктов 2 или 3, то можно сделать и обратное заключение: ряд (3) сходится, а его сумма равна сумме ряда (4) (последнее не требует отдельного доказательства, так как выполняется по пункту 1).

§ 2. Положительные ряды

Положительным называется ряд, все члены которого неотрицательны. Этот термин общепринят, хотя было бы логичнее называть такие ряды неотрицательными.

Лемма 1. Пусть $a_k \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ равносильна ограниченности сверху последовательности его частных сумм $\{S_n\}$.

Доказательство. Последовательность $\{S_n\}$ возрастает, так как $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$ при всех n . По теореме о пределе монотонной последовательности сходимость $\{S_n\}$ равносильна ограниченности $\{S_n\}$ сверху. \square

Замечание 1. Из теоремы о пределе монотонной последовательности также следует, что положительный ряд либо сходится, либо расходится к $+\infty$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Замечание 2. Для ограниченности возрастающей последовательности сверху достаточно ограниченности сверху некоторой ее подпоследовательности.

Действительно, пусть $S_{n_m} \leq S$ при всех m . Для любого n можно подобрать такое m , что $n_m > n$, а тогда $S_n \leq S_{n_m} \leq S$.

Теорема 1. Признак сравнения для положительных рядов. Пусть $a_k, b_k \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $a_k = O(b_k)$ при $k \rightarrow \infty$.

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Доказательство. 1. По определению символа O найдутся такие $N \in \mathbb{N}$ и $K > 0$, что $a_k \leq K b_k$ при всех $k \geq N$. Следовательно,

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \leq K \sum_{k=N}^{\infty} b_k < +\infty,$$

то есть остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а тогда сходится и сам ряд.

2. Если бы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходиллся, то по пункту 1 сходиллся бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, что неверно. \square

Следствие 1. Признак сравнения в предельной форме. Пусть $a_k \geq 0$, $b_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in [0, +\infty]$.

1. Если $\ell \in [0, +\infty)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если $\ell \in (0, +\infty]$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

3. Если $\ell \in (0, +\infty)$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Очевидно, что третий пункт вытекает из первых двух. Перейдем к их доказательству.

1. Из конечности ℓ следует, что последовательность $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}$ ограничена. Остается воспользоваться теоремой 1.

2. Так как $\ell > 0$, то начиная с некоторого номера и $a_k > 0$. Остается поменять a_k и b_k ролями и свести утверждение к пункту 1. \square

Следствие 2. Положительные ряды с эквивалентными при $k \rightarrow \infty$ общими членами сходятся или расходятся одновременно.

Пример 1. При $\alpha < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится, так как $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$, а гармонический ряд расходится.

Пример 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, так как $\frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{k(k+1)}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится. Тем более, сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ при $\alpha > 2$, так как $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^2}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Сходимость ряда в оставшемся случае $\alpha \in (1, 2)$ будет вскоре доказана с помощью интегрального признака.

Пример 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^r}{a^k}$ сходится при всех $r \in \mathbb{R}$, $a > 1$, так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k^r}{a^k} : \frac{1}{k^2} \right) = 0, \text{ а ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ сходится.}$$

Теорема 2. Радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.

Пусть $a_k \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{K} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$.

1. Если $\mathcal{K} > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $\mathcal{K} < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{K} > 1$. Тогда по свойствам верхнего предела (см. § 2 главы 2) для бесконечного множества номеров $\sqrt[n]{a_n} > 1$, а значит, и $a_n > 1$. Следовательно, $a_n \not\rightarrow 0$, и поэтому ряд расходится.

2. Пусть $\mathcal{K} < 1$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1-\mathcal{K}}{2} > 0$, $q = \frac{1+\mathcal{K}}{2}$. По свойствам верхнего предела существует такое N , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} < \mathcal{K} + \varepsilon = \frac{1 + \mathcal{K}}{2} = q \in (0, 1).$$

Тогда $a_n < q^n$ при всех $n > N$, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$. \square

Замечание 1. Обычно признак Коши применяется, когда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Напомним, что верхний предел, в отличие от предела, существует у любой вещественной последовательности. Общая формулировка признака Коши с верхним пределом особенно полезна в теории степенных рядов, поскольку она позволяет вычислить радиус сходимости *любого* ряда.

Замечание 2. Если $\mathcal{K} = 1$, то признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Так, $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = 1$; при этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Теорема 3. Признак Даламбера сходимости положительных рядов. Пусть $a_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и существует предел $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$.

1. Если $\mathcal{D} > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $\mathcal{D} < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Доказательство. 1. Пусть $\mathcal{D} > 1$. Тогда найдется такой номер M , начиная с которого $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то есть $a_{n+1} > a_n$. Следовательно, $a_n \geq a_M > 0$ для всех $n \geq M$. Поэтому $a_n \not\rightarrow 0$, и ряд расходится.

2. Пусть $\mathcal{D} < 1$. Обозначим $\varepsilon = \frac{1-\mathcal{D}}{2} > 0$, $q = \frac{1+\mathcal{D}}{2}$. По определению предела существует такое N , что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \mathcal{D} + \varepsilon = \frac{1 + \mathcal{D}}{2} = q \in (0, 1)$$

и, следовательно, $a_{n+1} < qa_n$. По индукции $a_n < q^{n-N} a_N = \frac{a_N}{q^N} q^n$ при всех $n \geq N$. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения со сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$. \square

Замечание 3. На примере тех же рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ мы видим, что при $\mathcal{D} = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Пример 4. Пусть $a > 0$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ сходится, так как

$$\frac{a^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{a^k}{k!} = \frac{a}{k+1} \rightarrow 0.$$

По необходимому условию сходимости $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$ при всех $a \in \mathbb{C}$. Читатель может сопоставить признак Даламбера и этот пример с замечанием 3 к теореме о пределе монотонной последовательности из § 2 главы 2. Это замечание можно считать аналогом признака Даламбера для последовательностей.

Как известно из § 6 главы 3, сумма данного ряда при всех $a \in \mathbb{R}$ равна e^a . При выводе этого факта как раз использовалось соотношение $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$, вытекающее из признака Даламбера или его аналога для последовательностей.

Замечание 4. Пусть $a_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Если существует предел $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то предел $\mathcal{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ также существует и равен \mathcal{D} . Обратное неверно.

Это замечание остается читателю в качестве упражнения.

Таким образом, если к ряду удастся применить признак Даламбера, то удастся применить и признак Коши. В то же время, существуют ряды, к которым признак Коши применим, а признак Даламбера — нет. Однако, применять признак Даламбера часто удобнее, так как предел \mathcal{D} вычисляется легче, чем предел \mathcal{K} . Такая ситуация имеет место в примере 4.

Замечание 5. Как видно из доказательств, признаки Коши и Даламбера — просто удобные формы признака сравнения ряда с геометрической прогрессией.

Между рядами и несобственными интегралами имеется очевидная аналогия. Аналогичны определение сходимости, свойства линейности, монотонности, поведение остатка, критерий Больцано — Коши, признаки сравнения и некоторые другие утверждения. В то же время, аналог теоремы о стремлении общего члена сходящегося ряда к нулю для несобственных интегралов неверен (пример 5 § 5 главы 4). Формула замены переменной в интеграле не имеет прямого аналога для рядов, а признак Даламбера — для интегралов. Следующая теорема при определенных условиях напрямую связывает сходимость ряда и интеграла.

Теорема 4. Интегральный признак Коши сходимости рядов. Пусть f монотонна на $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Для определенности предположим, что f убывает. Если $f(x_0) < 0$ при некотором x_0 , то в силу убывания f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq f(x_0) < 0$. Следовательно,

$$\int_{x_0}^A f \leq (A - x_0)f(x_0) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad A \rightarrow +\infty,$$

то есть интеграл расходится к $-\infty$. Аналогично расходится к $-\infty$ и ряд. Поэтому можно считать, что $f \geq 0$. В этом случае и сумма, и значение интеграла существуют и принадлежат $[0, +\infty]$.

Поскольку f убывает, при всех $k \in \mathbb{N}$

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f \leq f(k).$$

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и просуммируем эти неравенства по k от 1 до n :

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f \leq \sum_{k=1}^n f(k). \quad (5)$$

Сделав в левой сумме замену индекса и устремив n к ∞ , мы получим неравенство

$$\sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq \int_1^{+\infty} f \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k),$$

откуда следует, что сумма и интеграл конечны или нет одновременно. \square

Геометрический смысл неравенств (5) ясен из рисунка 1: интеграл равен площади подграфика f , а суммы — площадям ступенчатых фигур, одна из которых содержится в подграфике (на рисунке она закрашена), а другая содержит его.

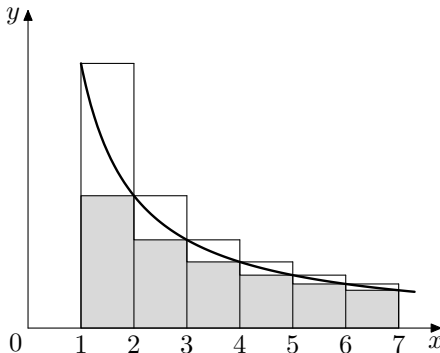


Рис. 1

Как правило, исследование сходимости интегралов проще, чем рядов, потому что для интегралов есть удобные приемы замены переменной и интегрирования по частям, а также формула Ньютона – Лейбница. Поэтому теорему 4 обычно используют именно для исследования сходимости рядов, как признак сравнения с интегралом.

Пример 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$ по признаку сравнения с интегралом $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

Ряды со степенным общим членом часто служат эталонами для сравнения при исследовании сходимости многих других рядов.

Пример 6. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} \ln^{\beta} k}$ сходится, если $\alpha > 1$, β любое или $\alpha = 1$, $\beta > 1$, и расходится в противном случае. Этот результат получается сравнением с интегралом $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x}$ из примера 4 § 5 главы 4 (проверку убывания подынтегральной функции на некотором луче мы опускаем).

Неравенства вида (5) интересны даже более самого факта одновременной сходимости ряда и интеграла. Они позволяют оценить скорость возрастания частичных сумм или убывания остатков рядов.

Замечание 1. Пусть f убывает на $[1, +\infty)$, $f \geq 0$. Обозначим

$$A_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f.$$

Последовательность $\{A_n\}$ возрастает:

$$A_{n+1} - A_n = f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f \geq 0.$$

Кроме того, по неравенствам (5)

$$0 \leq A_n = f(1) - f(n+1) + \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \int_1^{n+1} f \leq f(1) - f(n+1) \leq f(1),$$

так что последовательность $\{A_n\}$ ограничена. Следовательно, существует конечный неотрицательный предел $\{A_n\}$; обозначим его через c . Другими словами, $A_n = c + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Таким образом, для частичных сумм ряда справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^{n+1} f + c + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (6)$$

Если интеграл и ряд сходятся, то ясно, что $c = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) - \int_1^{+\infty} f$. Формула (6) становится содержательной тогда, когда интеграл и ряд расходятся. В этом случае

$$\sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^{n+1} f.$$

К сожалению, как правило, c не удается найти в явном виде.

Пример 7. Для гармонического ряда формула (6) принимает вид

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + C_{\exists} + \varepsilon_n = \ln(n+1) + C_{\exists} + \varepsilon_n.$$

Предел C_{\exists} , участвующий в равенстве, называется *постоянной Эйлера* и обычно в литературе обозначается C или γ . Мы предпочитаем обозначение C_{\exists} , поскольку оно более наглядно.

Учитывая, что $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$, формулу можно переписать в виде

$$H_n = \ln n + C_{\exists} + \delta_n, \quad \delta_n \rightarrow 0.$$

В частности,

$$H_n \sim \ln n.$$

Так как

$$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right),$$

мы получаем выражение для $C_{\mathfrak{Z}}$ в виде суммы ряда:

$$C_{\mathfrak{Z}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right).$$

Приближенное вычисление этой суммы дает

$$C_{\mathfrak{Z}} = 0,5772156649 \dots$$

Пример 8. Пусть $\alpha \in (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Формула (6) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} + c_\alpha + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Учитывая, что

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} + o(1),$$

формулу можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + d_\alpha + \delta_n, \quad \delta_n \rightarrow 0,$$

где $d_\alpha = c_\alpha - \frac{1}{1-\alpha}$. В частности,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Замечание 2. Пусть f убывает на $[1, +\infty)$, $f \geq 0$, интеграл и ряд сходятся. Тогда

$$\int_{n+1}^{+\infty} f \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f. \quad (7)$$

Пример 9. Пусть $\alpha > 1$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Поскольку при любом $m > 0$

$$\int_m^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}},$$

неравенство (7) принимает вид

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

В частности,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad \alpha > 1.$$

§ 3. Ряды с произвольными членами

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Замечание 1. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ абсолютно сходятся, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ абсолютно сходится.

Это утверждение следует из неравенства

$$|\alpha a_k + \beta b_k| \leq |\alpha| \cdot |a_k| + |\beta| \cdot |b_k|$$

и признака сравнения.

Замечание 2. Если $\{z_k\}$ — комплексная последовательность, $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$, то абсолютная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ равносильна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$.

Это утверждение следует из неравенств

$$|x_k|, |y_k| \leq |z_k| \leq |x_k| + |y_k|$$

и признака сравнения.

Замечание 3. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ имеет сумму, то

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Доказательство получается переходом к пределу в соответствующем неравенстве для частичных сумм.

Лемма 1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

Эту лемму мы докажем двумя способами.

Первое доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по критерию Больцано – Коши сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ подберем $N \in \mathbb{N}$ так, что

$$\text{для любых } n > N, p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Но тогда тем более

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по критерию Больцано – Коши. \square

Напомним, что положительная и отрицательная части числа $x \in \mathbb{R}$ определяются равенствами

$$x_+ = \max\{x, 0\}, \quad x_- = \max\{-x, 0\}.$$

Для них выполняются соотношения $x_+ - x_- = x$, $x_+ + x_- = |x|$, $0 \leq x_{\pm} \leq |x|$.

Второе доказательство. Пусть $a_k \in \mathbb{R}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится, по признаку сравнения сходятся и

ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_{\pm}$, а тогда сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ как разность двух сходящихся рядов.

Если $a_k \in \mathbb{C}$, $x_k = \operatorname{Re} a_k$, $y_k = \operatorname{Im} a_k$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ абсолютно сходятся по замечанию 2. Поэтому они сходятся, а тогда по линейности сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. \square

Замечание 4. Утверждение, обратное к лемме 1, неверно: ряд может сходиться, но не абсолютно. Соответствующие примеры будут приведены позже.

Если ряд сходится, но не абсолютно, то говорят, что он сходится *условно* или *неабсолютно*.

Замечание 5. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится абсолютно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ сходится условно.

В самом деле, если бы ряд с членами $a_k + b_k$ сходилсся абсолютно, то по замечанию 1 абсолютно сходилсся бы и ряд с членами $a_k = (a_k + b_k) - b_k$, что неверно.

Теорема 1. Радикальный признак Коши абсолютной сходимости рядов. Пусть $\mathcal{K} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

1. Если $\mathcal{K} > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $\mathcal{K} < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

Теорема 2. Признак Даламбера абсолютной сходимости рядов. Пусть $a_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и существует предел $\mathcal{D} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, +\infty]$.

1. Если $\mathcal{D} > 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.
2. Если $\mathcal{D} < 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно.

Доказательство теорем 1 и 2. Если $\mathcal{K} > 1$ ($\mathcal{D} > 1$), то, как было установлено при доказательстве одноименных признаков для

положительных рядов, $|a_n| \not\rightarrow 0$. Следовательно, $a_n \not\rightarrow 0$ и ряд расходится. Второе утверждение сразу получается применением теорем 2 и 3 § 2 к ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. \square

Для доказательства признаков Дирихле и Абеля сходимости рядов нам понадобится дискретный аналог формулы интегрирования по частям, называемый *преобразованием Абеля*. Напомним соглашение главы 1 о том, что $\sum_{k=n}^m a_k = 0$ при $m < n$.

Лемма 2. Преобразование Абеля. Пусть $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — числовые последовательности, $A_0 \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$, $A_k = \sum_{j=1}^k a_j + A_0$ при $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $m > n$

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Доказательство. Запишем цепочку равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^m (A_k - A_{k-1}) b_k = \\ &= \sum_{k=n+1}^m A_k b_k - \sum_{k=n+1}^m A_{k-1} b_k = \sum_{k=n+1}^m A_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} A_k b_{k+1} = \\ &= A_m b_m - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если последовательность $\{b_k\}$ в условиях леммы 2 монотонна, то для любых $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $m > n$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq 4 \max_{n \leq k \leq m} |A_k| \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}.$$

Доказательство. Обозначим $M = \max_{n \leq k \leq m} |A_k|$. В силу монотонности последовательности $\{b_k\}$ все разности $b_k - b_{k+1}$ одного

знака. Учитывая это обстоятельство и вычисляя телескопическую сумму, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| &\leq M \left(|b_m| + |b_{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| \right) = \\ &= M \left(|b_m| + |b_{n+1}| + \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \right| \right) = \\ &= M(|b_m| + |b_{n+1}| + |b_{n+1} - b_m|) \leq 4M \max\{|b_m|, |b_{n+1}|\}. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 1. Преобразование Абеля можно трактовать как формулу суммирования по частям, аналогичную интегральному тождеству

$$\int_n^m fg = F(m)g(m) - F(n)g(n) - \int_n^m Fg',$$

где F — первообразная f . Дискретным аналогом производной служит разность $b_{k+1} - b_k$, а первообразной — сумма A_k с переменным верхним пределом.

Теорема 3. Признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов. Пусть $\{a_k\}$ — вещественная или комплексная, а $\{b_k\}$ — вещественная последовательность.

1. Признак Дирихле. Если последовательность $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ограничена, а последовательность $\{b_k\}$ монотонна и $b_n \rightarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

2. Признак Абеля. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. 1. Применим преобразование Абеля, положив $A_0 = 0$, $n = 0$ и переименовав m в n :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Из того, что $\{A_n\}$ ограничена, а $\{b_n\}$ бесконечно мала, следует, что $A_n b_n \rightarrow 0$. Поэтому сходимость исходного ряда равносильна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Докажем, что этот ряд сходится абсолютно. Пусть K таково, что $|A_k| \leq K$ при всех k . Поскольку последовательность $\{b_k\}$ монотонна, все разности $b_k - b_{k+1}$ одного знака. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |A_k (b_{k+1} - b_k)| &\leq K \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = \\ &= K \left| \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \right| = K \left| b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right| = K |b_1| \end{aligned}$$

(в предпоследнем равенстве мы вычислили телескопическую сумму).

2. Так как $\{b_k\}$ монотонна и ограничена, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$. Последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k - \alpha\}$ удовлетворяют условиям признака Дирихле. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k - \alpha)$

сходится, а тогда и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится как сумма двух сходящихся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (b_k - \alpha) + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad \square$$

Замечание 2. Признаки Абеля и Дирихле можно доказать и другим способом, с помощью критерия Больцано – Коши и следствия из преобразования Абеля. В § 1 главы 8 мы применим указанный способ для доказательства обобщений этих признаков.

Ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$, где $b_k \geq 0$ при всех k , называется *знакопередающимся*.

Теорема 4. Признак Лейбница сходимости рядов.

Пусть последовательность $\{b_n\}$ монотонна, $b_n \rightarrow 0$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ сходится.

Признак Лейбница следует из признака Дирихле, если положить $a_k = (-1)^{k-1}$. Тем не менее, мы дадим независимое доказательство теоремы 4, которое позволит не только установить сходимость ряда, но и сделать полезные выводы о его остатке.

Доказательство. Для определенности предположим, что $\{b_n\}$ убывает; тогда $b_n \geq 0$. Рассмотрим последовательность $\{S_{2m}\}$. Она возрастает, поскольку

$$S_{2m} - S_{2(m-1)} = b_{2m-1} - b_{2m} \geq 0,$$

и ограничена сверху, так как

$$S_{2m} = b_1 + (-b_2 + b_3) + \dots + (-b_{2m-2} + b_{2m-1}) - b_{2m} \leq b_1.$$

Поэтому $\{S_{2m}\}$ сходится к некоторому пределу S . Но тогда и

$$S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1} \rightarrow S,$$

поскольку $b_{2m+1} \rightarrow 0$. По лемме 3 § 2 главы 2 о подпоследовательностях $S_n \rightarrow S$. \square

Замечание 1. Так как

$$S_{2m} = (b_1 - b_2) + \dots + (b_{2m-1} - b_{2m}) \geq 0 \quad \text{и} \quad S_{2m} \leq b_1,$$

по теореме о предельном переходе в неравенстве $0 \leq S \leq b_1$.

Ряды, удовлетворяющие условиям признака Лейбница, иногда называют *лейбницевскими*. Ясно, что любой остаток лейбницевского ряда является лейбницевским.

Замечание 2. *Остаток лейбницевского ряда не превосходит своего первого члена по абсолютной величине и совпадает с ним по знаку:*

$$0 \leq (-1)^n (S - S_n) \leq b_{n+1}.$$

Для доказательства нужно применить замечание 1 к остатку ряда.

Пример 1. При $\alpha \in (0, 1]$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$ сходится по признаку Лейбница. Ранее было показано, что абсолютно этот ряд не сходится.

Пример 2. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

По асимптотической формуле для гармонических сумм ($C_{\mathfrak{E}}$ — постоянная Эйлера, $\{\delta_n\}$ — бесконечно малая)

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \\ &\quad - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = H_{2n} - H_n = \\ &= \ln 2n + C_{\mathfrak{E}} + \delta_{2n} - (\ln n + C_{\mathfrak{E}} + \delta_n) = \ln 2 + \delta_{2n} - \delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln 2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Замечание 3. В § 3 главы 8, посвященном степенным рядам, будет доказана формула

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad -1 < x \leq 1.$$

Результат примера 2 получается отсюда при $x = 1$.

Исследуем теперь вопрос о перестановке членов ряда. Пусть φ — перестановка натурального ряда, то есть биекция \mathbb{N} на \mathbb{N} . Тогда говорят, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} \tag{8}$$

получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *перестановкой членов* или является *перестановкой* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Пример 3. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

получен из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ перестановкой членов. Обозначим частные суммы этих рядов соответственно через T_n и S_n . Тогда

$$\begin{aligned} T_{3m} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2} S_{2m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2, \\ T_{3m+1} &= T_{3m} + \frac{1}{2m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2, \\ T_{3m+2} &= T_{3m+1} - \frac{1}{4m+2} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $T_n \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$, то есть ряд сходится к сумме $\frac{1}{2} \ln 2$. Как видно, перестановка членов изменила сумму ряда.

Теорема 5. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится к сумме S , φ — перестановка \mathbb{N} . Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ абсолютно сходится к S .

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1. Пусть ряд положительный, то есть $a_k \geq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n a_{\varphi(k)}.$$

Для всех n выполняется неравенство

$$T_n \leq S_m \leq S,$$

где $m = \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$. Следовательно, ряд (8) сходится, и для его суммы T верно неравенство $T \leq S$.

Итак, доказано, что перестановка положительного ряда не увеличивает его сумму. Применяя это утверждение к ряду (8) и перестановке φ^{-1} , получаем неравенство $S \leq T$, откуда $T = S$.

2. Пусть члены ряда a_k вещественны. По признаку сравнения положительные ряды с членами $(a_k)_{\pm}$ сходятся. По доказанному

ряды с членами $(a_{\varphi(k)})_{\pm}$ сходятся к тем же суммам. Следовательно, ряд (8) сходится как разность двух сходящихся рядов, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_{\varphi(k)})_- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

3. Пусть члены ряда a_k комплексные, $x_k = \operatorname{Re} a_k$, $y_k = \operatorname{Im} a_k$. По замечанию 2 к определению абсолютной сходимости ряды с вещественными членами x_k и y_k абсолютно сходятся. По доказанному их суммы не меняются при перестановке, откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\varphi(k)} + i \sum_{k=1}^{\infty} y_{\varphi(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad \square$$

Замечание 1. Перестановка членов расходящегося положительного ряда приводит к расходящемуся положительному ряду. Действительно, если бы ряд после перестановки сходил, то по теореме 5 сходил бы и исходный ряд.

Итак, для абсолютно сходящихся рядов, как и для конечных сумм, выполняются и сочетательный, и переместительный законы. Как показывает пример 3, перестановка членов условно сходящегося ряда может изменить сумму. Далее мы докажем, что это верно для *любого* условно сходящегося ряда. Установим вначале одно простое свойство условно сходящихся рядов.

Замечание 2. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными членами сходится условно, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k)_-$ расходятся.

Доказательство. Если бы они оба сходились, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходил бы как сумма двух сходящихся. Если бы один из них сходил, а другой расходился, то расходился бы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ как разность сходящегося и расходящегося. \square

Теорема 6 (Б. Риман). Перестановка членов условно сходящегося ряда. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ с вещественными членами сходится условно. Тогда для любого $S \in \overline{\mathbb{R}}$ существует перестановка,

после которой ряд будет иметь сумму S . Существует также перестановка, после которой ряд не будет иметь суммы.

Доказательство. Для определенности докажем теорему, когда $S \in [0, +\infty)$; другие случаи остаются читателю в качестве упражнения. Пусть $\{b_p\}$ и $\{c_q\}$ — подпоследовательности всех неотрицательных и всех отрицательных членов ряда; $b_p = a_{n_p}$, $c_q = a_{m_q}$. По замечанию 2 оба ряда $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$ расходятся. Положим $p_0 = q_0 = 0$. Обозначим через p_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p > S,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1-1} b_p \leq S < \sum_{p=1}^{p_1} b_p.$$

Затем обозначим через q_1 наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_1} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_1} b_p,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1} c_q < S \leq \sum_{p=1}^{p_1} b_p + \sum_{q=1}^{q_1-1} c_q.$$

Такие p_1 и q_1 найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$.

Продолжим построение неограниченно. Пусть номера p_1, \dots, p_{s-1} , q_1, \dots, q_{s-1} уже выбраны. Обозначим через p_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p > S - \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s-1} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q \leq S < \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_{s-1}} c_q.$$

Затем обозначим через q_s наименьшее натуральное число, для которого

$$\sum_{q=1}^{q_s} c_q < S - \sum_{p=1}^{p_s} b_p,$$

то есть

$$\sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s} c_q < S \leq \sum_{p=1}^{p_s} b_p + \sum_{q=1}^{q_s-1} c_q.$$

Такие p_s и q_s найдутся в силу расходимости рядов $\sum_{p=1}^{\infty} b_p$ и $\sum_{q=1}^{\infty} c_q$.

Ряд

$$b_1 + \dots + b_{p_1} + c_1 + \dots + c_{q_1} + \dots + b_{p_{s-1}+1} + \dots + b_{p_s} + \\ + c_{q_{s-1}} + \dots + c_{q_s} + \dots \quad (9)$$

получен из исходного ряда перестановкой. Докажем, что он сходится к S . Сгруппировав члены одного знака, мы получим ряд

$$B_1 + C_1 + \dots + B_s + C_s + \dots,$$

где $B_s = \sum_{p=p_{s-1}+1}^{p_s} b_p$, $C_s = \sum_{q=q_{s-1}+1}^{q_s} c_q$; обозначим его частные суммы через T_n . По построению $0 < T_{2s-1} - S \leq b_{p_s}$, $c_{q_s} \leq T_{2s} - S < 0$. Поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, b_{p_s} и c_{q_s} стремятся к нулю. Следовательно, $T_n \rightarrow S$. По теореме 3 § 1 о группировке членов ряда и ряд (9) сходится к S . \square

Замечание 3. Для любого условно сходящегося ряда с комплексными членами найдется перестановка, приводящая к расходящемуся ряду.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно. Из замечания 2 к определению абсолютной сходимости следует, что хотя бы один из рядов с членами $\operatorname{Re} a_k$ или $\operatorname{Im} a_k$ сходится условно. Тогда по теореме Римана его члены можно переставить так, что получится расходящийся ряд. Та же перестановка членов a_k по свойству $\Sigma 4$ делает исходный ряд расходящимся. \square

Согласно распределительному и переместительному законам,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{j=1}^m b_j\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_k b_j.$$

При попытке распространить это равенство на произведение рядов сразу возникают вопросы, в каком порядке следует складывать всевозможные произведения $a_k b_j$ и будет ли сходиться ряд из них.

Определение 2. Произведение рядов. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ — числовые ряды, $\gamma = (\varphi, \psi)$ — биекция \mathbb{N} на \mathbb{N}^2 . Тогда ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$$

называется *произведением* рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$, соответствующим нумерации γ .

В этом определении произведением рядов назван всякий ряд, полученный какой-нибудь нумерацией произведений $a_k b_j$.

Теорема 7 (О. Коши). Умножение рядов. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся к суммам A и B , то при любой нумерации их произведение абсолютно сходится к AB .

Доказательство. Пусть $\gamma = (\varphi, \psi)$ — биекция \mathbb{N} на \mathbb{N}^2 . Обозначим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = A^*, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| = B^*.$$

При всех $\nu \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=1}^{\nu} |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right) \left(\sum_{j=1}^m |b_j|\right) \leq A^* B^*,$$

где $n = \max_{1 \leq l \leq \nu} \varphi(l)$, $m = \max_{1 \leq l \leq \nu} \psi(l)$. Таким образом, частные суммы ряда $\sum_{l=1}^{\infty} |a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}|$ ограничены сверху. Следовательно, ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ абсолютно сходится. По теореме 5 его сумма не зависит от перестановки. Поэтому если $\tilde{\gamma} = (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ — другая нумерация \mathbb{N}^2 , то ряд $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\tilde{\varphi}(l)} b_{\tilde{\psi}(l)}$, который получается из ряда $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} b_{\psi(l)}$ перестановкой $\gamma^{-1} \circ \tilde{\gamma}$, тоже абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Для вычисления этой суммы рассмотрим нумерацию “по квадратам” (рисунок 2а) и частичные суммы порядка n^2 :

$$S_{n^2} = \sum_{k,j=1}^n a_k b_j = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} AB \quad (10)$$

как предел произведения. \square

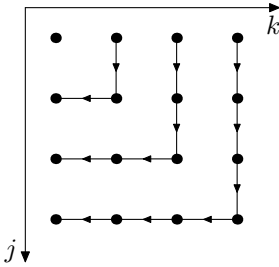


Рис. 2а

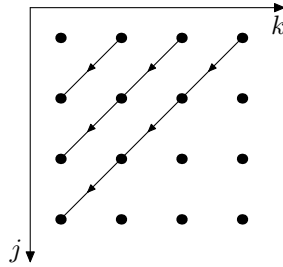


Рис. 2б

Замечание 1. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ сходятся к суммам A и B , то их произведение “по квадратам” сходится к AB .

Подчеркнем, что в этом утверждении не требуется абсолютной сходимости рядов.

Доказательство. Обозначим через A_n и B_n частные суммы исходных рядов, а через S_n — частные суммы ряда “по квадратам”

(рисунок 2а). По соотношению (10) $S_{n^2} \rightarrow AB$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $m_n = [\sqrt{n}]$. Тогда $S_n = S_{m_n^2} + \theta_n$, где

$$\theta_n = a_{m_n+1}B_J + b_{m_n+1}(A_K - A_M)$$

при некоторых $J, K, M \in \mathbb{Z}_+$. Частные суммы сходящихся рядов ограничены, а их общие члены стремятся к нулю. Поэтому $\theta_n \rightarrow 0$, то есть $S_n \rightarrow AB$. \square

Особенно часто используется нумерация “по диагоналям” (см. рисунок 2б).

Определение 3. Произведение по Коши. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j},$$

называется *произведением по Коши* рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$.

Произведение по Коши тесно связано с произведением степенных рядов (см. § 3 главы 8). Поэтому чаще всего произведением рядов называют именно произведение по Коши.

Следствие 1. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся к суммам A и B , то их произведение по Коши абсолютно сходится к AB .

Для доказательства следствия надо заметить, что произведение по Коши получено нумерацией произведений $a_k b_j$ “по диагоналям” и группировкой слагаемых, расположенных на одной диагонали.

Замечание 2. В определении произведения по Коши удобнее начинать нумерацию с нуля: произведением рядов $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ по Коши называется ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, где

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Пример 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ сходится по признаку Лейбница, но не абсолютно. Рассмотрим его квадрат по Коши, то есть ряд с членами

$$c_k = \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^{j-1}}{\sqrt{j}} \cdot \frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k+1-j}} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{j(k+1-j)}}.$$

Поскольку

$$|c_k| \geq \sum_{j=1}^k \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{k}} = 1,$$

$c_k \not\rightarrow 0$, и по необходимому условию сходимости (теорема 1 § 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ расходится.

В то же время, по замечанию 1 произведение исходного ряда на себя “по квадратам” сходится.

Таким образом, требование абсолютной сходимости в теореме 7 и следствии 1 опустить нельзя: произведение условно сходящихся рядов может оказаться расходящимся, и результат, вообще говоря, зависит от нумерации \mathbb{N}^2 . Тем не менее, для произведения по Коши это требование можно ослабить.

Замечание 3. Если два ряда сходятся, причем хотя бы один из них — абсолютно, то их произведение по Коши сходится.

Замечание 4. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся к A и B , а их произведение по Коши — к C , то $C = AB$.

Замечание 3 мы оставим без доказательства, а замечание 4 будет обосновано в § 3 главы 8 с использованием степенных рядов.

Замечание 5. Произведение по Коши двух расходящихся рядов может оказаться абсолютно сходящимся. Примером служит произведение рядов с членами

$$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2^{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad b_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ -1, & j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Действительно, $a_k, b_j \not\rightarrow 0$, и поэтому ряды-сомножители расходятся. В то же время, $c_0 = 1$, а при $k \in \mathbb{N}$

$$c_k = -1 - \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-1} + 2^{k-1} = 0.$$

Теорема о перестановке членов ряда позволяет определить сумму *числового семейства*. Хотя ничто не мешает нам уже сейчас построить теорию суммирования семейств в полном объеме, мы отложим это построение до главы 10, посвященной интегралу. Сейчас мы лишь определим сумму неотрицательного счетного семейства.

Напомним, что числовое семейство $\{a_x\}_{x \in X}$ — это функция a , заданная на множестве X . Семейство называется *счетным*, если множество X счетно.

Понятие суммы счетного семейства естественно возникает при попытке сложить все числа, помеченные элементами счетного множества X , на котором нет заданной нумерации. Примером такого множества служит целочисленная решетка \mathbb{Z}^m .

Определение 4. Сумма неотрицательного счетного семейства. Пусть $a = \{a_x\}_{x \in X}$ — неотрицательное счетное семейство. Занумеруем множество X натуральными числами, то есть рассмотрим биекцию $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow X$. *Сумма семейства a* определяется равенством

$$\sum_{x \in X} a_x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Употребляется и совсем короткое обозначение $\sum_X a$.

Таким образом, сумма неотрицательного счетного семейства существует и принадлежит $[0, +\infty]$. По теореме 5 и замечанию 1 к ней сумма определена корректно, поскольку не зависит от нумерации X .

ГЛАВА 8. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 1. Определение и признаки равномерной сходимости

В этой главе рассматриваются *функциональные последовательности*, то есть последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, членами которых являются функции. Мы будем предполагать, что все члены последовательности определены на одном и том же множестве X . Запись $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) означает, что задана функциональная последовательность.

Определение 1. Поточечная сходимость. Пусть X — множество, $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ *поточечно сходится* к функции f на множестве X , если для любого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$:

$$\forall x \in X \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

В силу определения предела последовательности поточечная сходимость означает, что

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Поточечную сходимость обозначают обычной стрелкой, при необходимости указывая множество: $f_n \rightarrow f$ (X) или $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ (X).

При изучении функциональных последовательностей возникают вопросы о перенесении свойств членов последовательности на предельную функцию. Приведем три наиболее важных вопроса такого типа.

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$, все функции f_n непрерывны (в точке или на множестве). Будет ли f непрерывна?

2. Пусть $X \subset \mathbb{R}$, все функции f_n дифференцируемы (в точке или на множестве). Будет ли f дифференцируема? Если да, то верно ли, что $f'_n \rightarrow f'$?

3. Пусть все функции f_n интегрируемы на $[a, b]$. Будет ли f интегрируема? Если да, то верно ли, что $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$?

В общем случае ответ на все поставленные вопросы отрицательный, то есть поточечная сходимость не обеспечивает сохранения свойств непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости, а также возможности предельного перехода под знаком производной и интеграла. Приведем пример, относящийся к непрерывности.

Пример 1. Пусть $X = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$. Тогда

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Таким образом, все функции f_n непрерывны на $[0, 1]$, а их поточечный предел разрывен в точке 1.

Для сохранения непрерывности требуется более сильное условие, чем поточечная сходимость.

Определение 2. Равномерная сходимость. Пусть X — множество, $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится* к функции f на множестве X , и пишут

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \quad (X),$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Как видно, утверждения (1) и (2) отличаются порядком записи переменных с кванторами. В определении поточечной сходимости номер N зависит от ε и от точки x . В определении равномерной сходимости по ε можно подобрать номер N , *общий* для всех точек x .

Замечание 1. Из сказанного ясно, что если $\{f_n\}$ сходится к f равномерно, то сходится и поточечно. Обратное неверно. Читатель может сразу доказать, что для последовательности из примера 1 условие равномерной сходимости не выполняется. Мы проверим это чуть позже.

Замечание 2. Определение равномерной сходимости останется равносильным исходному, если в неравенстве $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ заменить знак на нестрогий (см. замечание 3 к определению предела в § 1 главы 2).

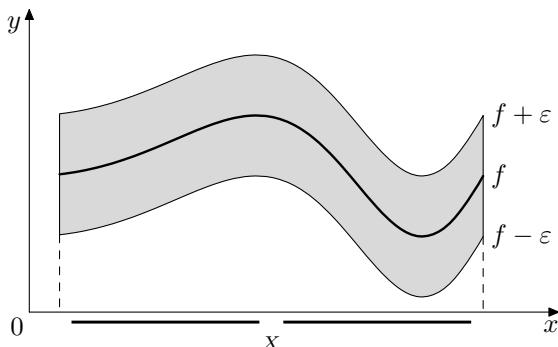


Рис. 3

Равномерную сходимость можно проиллюстрировать так. На рисунке 3 изображена полоса ширины 2ε , окружающая график f . При равномерной сходимости графики всех функций f_n , начиная с некоторого номера, лежат в такой полосе.

Замечание 3. Если $\{\alpha_n\}$ — сходящаяся числовая последовательность, $\alpha_n \rightarrow \alpha$, то последовательность постоянных функций $f_n \equiv \alpha_n$ равномерно сходится на любом множестве к постоянной же функции $f \equiv \alpha$. В самом деле, номер из определения предела α_n подходит и в определение равномерной сходимости f_n . Поэтому можно говорить о равномерной сходимости числовой последовательности, трактуя ее как последовательность постоянных функций.

Замечание 4. Равномерная сходимость последовательности комплекснозначных функций равносильна одновременной равномерной сходимости последовательностей их вещественных и мнимых частей.

Доказательство этого утверждения аналогично случаю числовых последовательностей.

Определение 3. Функциональный ряд. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — функциональная последовательность, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Символ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ называется *функциональным рядом*. Функции

$$S_n = \sum_{k=1}^n f_k: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ (}\mathbb{C}\text{)}$$

называются *частными* или *частичными суммами* функционального ряда. При каждом $x \in X$ функциональный ряд порождает числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$. Множество

$$E = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ сходится} \right\}$$

называют *множеством сходимости* функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Функция $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, заданная на E , называется *суммой* функционального ряда и обозначается тем же символом $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, что и сам ряд.

Пусть $f_k, S: X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$. Говорят, что функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *равномерно (поточечно) сходится* на множестве X к сумме S , если последовательность его частных сумм $\{S_n\}$ равномерно (поточечно) сходится на X к S .

Запишем определение равномерной сходимости функционального ряда на ε -языке. Применяя определение (2) к последовательности $\{S_n\}$ и функции S и учитывая, что $S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$, мы получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (3)$$

Как и для числовых рядов, ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ называется *остатком* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ после n -го члена. Таким образом, утверждение (3) означает, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится поточечно на X и последовательность его остатков равномерно стремится к нулю на X .

Определение 4. Равномерная норма. Пусть X — множество, $f: X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$. Величина

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

называется *равномерной* или *чебышёвской нормой* функции f .

Пока другие нормы в пространствах функций не рассматриваются, поэтому прилагательное к слову “норма” обычно будет опускаться.

Из определения следует, что конечность нормы f равносильна ограниченности f . По теореме Вейерштрасса всякая непрерывная на компакте функция ограничена, поэтому норма такой функции конечна.

Примем соглашение $0 \cdot \infty = 0$.

Замечание 1. Равномерная норма функции обладает тремя свойствами нормы (см. замечание 3 § 1 главы 5).

Доказательство. 1. *Положительная определенность.* Неравенство $\|f\| \geq 0$ очевидно. Соотношение $\|f\| = 0$ равносильно тому, что $f \equiv 0$ на X .

2. *Положительная однородность.* Если $\lambda \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$, то

$$\|\lambda f\| = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \|f\|.$$

3. *Неравенство треугольника.* Для любого $x \in X$

$$|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|,$$

поэтому $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. \square

Подчеркнем, что соотношения пунктов 2 и 3 верны как для ограниченных, так и для неограниченных функций.

Замечание 2. Если $f, g: X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$, то $\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$.

Доказательство. Действительно, для любого $x \in X$

$$|(fg)(x)| = |f(x)| |g(x)| \leq \|f\| \|g\|.$$

Переходя к супремуму, получаем требуемое. \square

Следующее замечание сводит исследование равномерной сходимости функциональной последовательности к проверке сходимости числовой последовательности. Предварительно отметим, что, хотя

в определении равномерной сходимости могут участвовать неограниченные функции, равномерная сходимость f_n к f гарантирует ограниченность разности $f_n - f$, начиная с некоторого номера.

Замечание 3. Пусть $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Тогда

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ (X)} \iff \|f_n - f\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что по определению супремума

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \iff \|f_n - f\|_X \leq \varepsilon,$$

и воспользоваться замечанием 2 к определению равномерной сходимости. \square

Замечание 3 указывает следующий способ исследования равномерной сходимости. Пусть дана последовательность функций $\{f_n\}$. Сначала следует найти ее поточечный предел f . Затем надо составить разность $f_n - f$ и найти или оценить величины $\alpha_n = \|f_n - f\|$. Для функций одной или нескольких вещественных переменных это обычно делается средствами дифференциального исчисления. Наконец, остается выяснить, стремится ли последовательность $\{\alpha_n\}$ к нулю.

Следующее замечание очевидно, так как при переходе к подмножеству супремум не увеличивается.

Замечание 4. Пусть $X_0 \subset X$, $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Если $f_n \Rightarrow f$ (X), то $f_n \Rightarrow f$ (X_0). Если $f_n \not\Rightarrow f$ (X_0), то $f_n \not\Rightarrow f$ (X).

Пример 1 (продолжение). Исследуем равномерную сходимость последовательности $f_n(x) = x^n$ на различных подмножествах отрезка $[0, 1]$. Ее поточечный предел f выражается равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Поскольку

$$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0,1]} x^n = 1 \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$f_n \not\Rightarrow 0$ на $[0, 1)$. Тем более, по замечанию 4 последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно на $[0, 1]$. Для любого $q \in (0, 1)$

$$\sup_{[0, q]} |f_n - f| = \sup_{x \in [0, q]} x^n = q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

поэтому $f_n \Rightarrow 0$ на $[0, q]$.

Замечание 5. Если $f_n \Rightarrow f$, $g_n \Rightarrow g$ (X), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}), то $\alpha f_n + \beta g_n \Rightarrow \alpha f + \beta g$ (X).

Действительно, по свойствам нормы и теореме о пределе суммы

$$\|(\alpha f_n + \beta g_n) - (\alpha f + \beta g)\| \leq |\alpha| \|f_n - f\| + |\beta| \|g_n - g\| \rightarrow 0. \quad \square$$

Замечание 6. Если $f_n \Rightarrow f$ (X), а функция g ограничена на X , то $f_n g \Rightarrow f g$ (X).

Для доказательства надо учесть, что по замечанию 2

$$\|f_n g - f g\| = \|(f_n - f)g\| \leq \|f_n - f\| \|g\|. \quad \square$$

Далее некоторые утверждения будут формулироваться в двух вариантах: для последовательностей и для рядов. Во втором случае утверждение будет иметь тот же номер, что в первом, но со штрихом.

Теорема 1. Критерий Больцано – Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей. Пусть X — множество, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Тогда равномерная сходимость последовательности $\{f_n\}$ на X равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Свойство (4) называют *равномерной сходимостью в себе*.

Доказательство. Проверим необходимость. Перепишем (4) в эквивалентной форме:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m > N \quad \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon.$$

Обозначим $f = \lim f_n$, $\alpha_n = \|f_n - f\|$. По условию $\alpha_n \rightarrow 0$. По $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N , что $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n > N$. Тогда для любых $n, m > N$ по неравенству треугольника

$$\|f_n - f_m\| = \|f_n - f + f - f_m\| \leq \alpha_n + \alpha_m < \varepsilon,$$

то есть выполняется соотношение (4).

Установим достаточность. Из условия (4) вытекает, что при любом $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в себе. В силу полноты \mathbb{R} или \mathbb{C} она сходится. Обозначим ее предел через $f(x)$. Тем самым на множестве X определена функция f . Докажем, что $f_n \rightrightarrows f$. По $\varepsilon > 0$ подберем номер N из условия (4). Зафиксировав $n > N$, $x \in X$ и устремив в последнем неравенстве m к ∞ , получим $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Это и означает, что $f_n \rightrightarrows f$. \square

Теорема 1'. Критерий Больцано – Коши равномерной сходимости функциональных рядов. Пусть X — множество, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}). Тогда равномерная сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ на X равносильна условию

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon. \quad (5)$$

Для доказательства надо применить теорему 1 к последовательности частичных сумм $\{S_n\}$, обозначить $m = n + p$ и учесть, что

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k.$$

Замечание 7. Условие (5) можно записать в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| < \varepsilon.$$

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на X , то $f_n \rightrightarrows 0$ на X .

Для доказательства надо положить $p = 1$ в теореме 1'.

Как и в случае числовых рядов, критерий Больцано – Коши обычно используется для опровержения равномерной сходимости ряда.

Пример 2. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1-x}$ неравномерно на $[0, 1)$ и, тем более, на $(-1, 1)$, так как $x^n \not\rightarrow 0$ на $[0, 1)$.

Теорема 2. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов. Пусть X — множество, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < +\infty.$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на X .

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию Больцано – Коши сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ найдется такое N , что

$$\text{для всех } n > N, p \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon.$$

По неравенству треугольника

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|f_k\| < \varepsilon,$$

то есть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X по критерию Больцано – Коши. \square

Следствие 1. Пусть X — множество, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$, последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$\text{для всех } k \in \mathbb{N}, x \in X \quad |f_k(x)| \leq a_k$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на X .

Другими словами, если члены функционального ряда мажорируются членами сходящегося числового ряда, то функциональный ряд равномерно сходится.

Доказательство. По условию для всех $k \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\|f_k\| \leq a_k$. По признаку сравнения ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$ сходится, то есть выполняются условия теоремы 2. \square

Следствие 1 тоже называют признаком Вейерштрасса.

Замечание 1. Числа $\|f_k\|$ — наименьшие из чисел a_k , удовлетворяющих условию следствия. Для практических целей следствие 1 удобнее теоремы 2, так как нормы часто удается оценить, не вычисляя их.

Пример 3. Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ сходятся равномерно на \mathbb{R} по признаку Вейерштрасса, так как для всех $x \in \mathbb{R}$ верны оценки $|\frac{\sin kx}{k^2}|, |\frac{\cos kx}{k^2}| \leq \frac{1}{k^2}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Замечание 2. В условиях признака Вейерштрасса ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится на X не только равномерно, но и абсолютно. Более того, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ сходится равномерно на X , так как он тоже удовлетворяет условиям признака. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < +\infty$, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится мажорированно.

Существуют как ряды, которые сходятся абсолютно, но не равномерно, так и ряды, которые сходятся равномерно, но не абсолютно. Примером первой ситуации служит ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ на $(-1, 1)$, а второй — любой условно сходящийся числовой ряд, рассматриваемый как функциональный. Кроме того, существует ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, который

сходится абсолютно и равномерно, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ сходится неравномерно (в частности, ряд не сходится мажорированно). Наконец, существует положительный ряд, который сходится равномерно, но не мажорированно. Два последних примера мы приведем в конце параграфа.

Замечание 3. Определения равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов переносятся на отображения со значениями в \mathbb{R}^m . При этом величину $|f_n(x) - f(x)|$ надо заменить на $\|f_n(x) - f(x)\|_m$, где $\|\cdot\|_m$ — евклидова норма в \mathbb{R}^m . Аналогом чебышевской нормы будет величина

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_m.$$

Критерий Больцано — Коши и признак Вейерштрасса вместе с доказательствами остаются верными, так как в них используется лишь свойство полноты пространства, которым обладает и \mathbb{R}^m .

Определение 5. Равномерная ограниченность. Последовательность функций $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) называется *равномерно ограниченной* на X , если последовательность норм g_n ограничена.

Последнее равносильно тому, что

$$\exists M \in [0, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Теорема 3. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости рядов. Пусть X — множество, $f_k: X \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}), $g_k: X \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Признак Дирихле. Если

1) последовательность $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ равномерно ограничена на X ;

2) при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $g_n \rightarrow 0$ (X),

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X .

2. Признак Абеля. Если

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на X ;

2) при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна и $\{g_k\}$ равномерно ограничена на X ,

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ равномерно сходится на X .

Доказательство. В обоих случаях проверим выполнение условия Больцано – Коши равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$. Возьмем $\varepsilon > 0$.

1. При каждом $x \in X$ применим преобразование Абеля (лемму 2 § 3 главы 7), положив $a_k = f_k(x)$, $b_k = g_k(x)$, $A_0 = 0$. Тогда $A_k = F_k(x)$. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{F_n\}$

$$\exists K > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |F_k(x)| \leq K,$$

а в силу равномерного стремления g_n к нулю

$$\exists N \quad \forall k > N \quad \forall x \in X \quad |g_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4K}.$$

По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N$, $m > n$, $x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) g_k(x) \right| < 4K \cdot \frac{\varepsilon}{4K} = \varepsilon.$$

2. Снова применим при каждом $x \in X$ преобразование Абеля, положив на этот раз $a_k = f_k(x)$, $b_k = g_k(x)$, $A_0 = -\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$. Тогда

$A_k = -\sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x)$ есть остаток равномерно сходящегося ряда. В силу равномерной ограниченности последовательности $\{g_k\}$

$$\exists L > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |g_k(x)| \leq L,$$

а в силу равномерного стремления остатка ряда к нулю

$$\exists N \quad \forall k > N \quad \forall x \in X \quad \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} f_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{4L}.$$

По следствию преобразования Абеля при всех $m, n > N$, $m > n$, $x \in X$

$$\left| \sum_{k=n+1}^m f_k(x) g_k(x) \right| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4L} \cdot L = \varepsilon. \quad \square$$

Напомним, что ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$, где $b_k \geq 0$ при всех k , называется *знакопередающим*.

Следствие 1. Признак Лейбница равномерной сходимости рядов. Пусть X — множество, $g_k: X \rightarrow \mathbb{R}$, при любом $x \in X$ последовательность $\{g_k(x)\}$ монотонна, $g_n \rightarrow 0(X)$. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} g_k$ равномерно сходится на X .

Признак Лейбница следует из признака Дирихле, если положить $f_k(x) = (-1)^{k-1}$ при всех $x \in X$.

Замечание 1. Признаки Дирихле и Абеля сходимости числовых рядов (теорема 3 § 3 главы 7) следуют из теоремы 3, если в качестве f_k и g_k взять постоянные функции. Признак Лейбница сходимости числовых рядов (теорема 4 § 3 главы 7) вытекает из следствия 1, если в качестве g_k взять постоянные функции.

Пример 4. Исследуем при $x \in \mathbb{R}$ ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

где последовательность $\{b_k\}$ убывает к нулю, двумя способами.

Первый способ. Для определенности рассмотрим ряд с косинусами. Если $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$, то по признаку Вейерштрасса он равномерно сходится на \mathbb{R} (при этом монотонность $\{b_k\}$ не нужна). В общем случае применим признак Дирихле к функциям $f_k(x) = \cos kx$, $g_k(x) = b_k$. При $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, вычисляя телескопическую сумму, имеем

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} F_n(x) &= 2 \sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) = \\ &= \sin \frac{x}{2} + \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x, \end{aligned}$$

откуда

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{x}{2} + \sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}, \quad |F_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Если $[a, b] \subset (2m\pi, 2(m+1)\pi)$, где $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\min_{x \in [a, b]} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \min \left\{ \left| \sin \frac{a}{2} \right|, \left| \sin \frac{b}{2} \right| \right\} = \rho > 0.$$

Поэтому $\max_{[a, b]} |F_n| \leq \frac{1}{\rho}$. По признаку Дирихле ряд равномерно сходится на каждом таком отрезке $[a, b]$.

Аналогичный результат верен и для ряда с синусами. Для его получения используется тождество

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Второй способ. Далее в § 4 будет определена экспонента комплексного аргумента, для которой верно тождество

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

называемое *формулой Эйлера*. По формуле Муавра при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx = (e^{ix})^k.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikx}. \quad (6)$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty$, то по признаку Вейерштрасса он равномерно сходится на \mathbb{R} , так как $|e^{ikx}| = 1$ (при этом монотонность $\{b_k\}$ не нужна). В общем случае применим признак Дирихле к функциям $f_k(x) = e^{ikx}$, $g_k(x) = b_k$. Вычислим и оценим частичные суммы:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}},$$

$$|F_n(x)| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|} = \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

если $e^{ix} \neq 1$, то есть $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. В последнем равенстве мы вычислили модуль комплексного числа:

$$\begin{aligned} |1 - e^{ix}| &= |1 - \cos x - i \sin x| = \sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \\ &= \sqrt{2(1 - \cos x)} = 2 \left| \sin \frac{x}{2} \right|. \end{aligned}$$

Если $[a, b] \subset (2m\pi, 2(m+1)\pi)$, где $m \in \mathbb{Z}$, то

$$\min_{x \in [a, b]} \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \min \left\{ \left| \sin \frac{a}{2} \right|, \left| \sin \frac{b}{2} \right| \right\} = \rho > 0.$$

Поэтому $\max_{[a, b]} |F_n| \leq \frac{1}{\rho}$. По признаку Дирихле ряд (6) равномерно сходится на каждом таком отрезке $[a, b]$.

Отсюда вытекает, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos kx$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ тоже равномерно сходятся на каждом таком отрезке как вещественная и мнимая части ряда (6).

Из доказанного не следует, что ряд (6) равномерно сходится на интервалах $(2m\pi, 2(m+1)\pi)$, где $m \in \mathbb{Z}$. В связи с этим сделаем следующее замечание.

Замечание 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $f_n \in C(\text{Cl } D)$, $\{f_n\}$ сходится равномерно на D . Тогда $\{f_n\}$ сходится равномерно на $\text{Cl } D$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$ и по критерию Больцано – Коши подберем такое N , что для всех $n, m > N$, $x \in D$ верно неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Если $x_0 \in \text{Cl } D$, то найдется последовательность $\{x_\nu\}$ точек из D , сходящаяся к x_0 . Делая предельный переход в неравенстве

$$|f_n(x_\nu) - f_m(x_\nu)| \leq \varepsilon$$

и пользуясь непрерывностью f_n и f_m , мы получаем

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \varepsilon.$$

По критерию Больцано – Коши это и означает равномерную сходимость $\{f_n\}$ на $\text{Cl } D$. \square

Аналогичное замечание справедливо и для рядов. Именно, *если* $D \subset \mathbb{R}^m$, $f_k \in C(\text{Cl } D)$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится равномерно на D , то он сходится равномерно на $\text{Cl } D$.

Пример 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ сходится на $(1, +\infty)$, но неравномерно. Действительно, если бы он сходился равномерно на $(1, +\infty)$, то по замечанию 2 он сходил бы равномерно и на $[1, +\infty)$, а при $x = 1$ он расходится.

Пример 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k$ сходится на $(0, 1)$ абсолютно и равномерно. Первое очевидно, а второе следует из признака Абеля, примененного к функциям $f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k}$ и $g_k(x) = x^k$. Вместе с тем, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, сходится на $(0, 1)$ неравномерно по замечанию 2, так как при $x = 1$ он расходится.

Пример 7. Рассмотрим положительный ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x}{1 + (x k \ln k)^2}$$

на $(0, +\infty)$. Исследуем его мажорированную сходимость. Обозначим $A = k \ln k$. Поскольку

$$\left(\frac{x}{1 + A^2 x^2} \right)' = \frac{1 - A^2 x^2}{(1 + A^2 x^2)^2},$$

максимум k -го члена ряда достигается в точке $x = \frac{1}{A}$ и равен $a_k = \frac{1}{2k \ln k}$. Так как ряд $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ расходится (см. пример 6 в § 2 главы 7), исходный ряд не сходится мажорированно на $(0, +\infty)$.

Докажем, что он, тем не менее, сходится равномерно. Для этого мы проверим, что его остаток равномерно стремится к нулю. Воспользуемся неравенством (7) в § 2 главы 7, увеличим подынтегральную функцию и сделаем замену $u = x t \ln n$. При $n \geq 2$ мы

получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x}{1 + (x k \ln k)^2} &\leq \int_n^{+\infty} \frac{x}{1 + (x t \ln t)^2} dt \leq \\ &\leq \int_n^{+\infty} \frac{x}{1 + (x t \ln n)^2} dt = \frac{1}{\ln n} \int_{x n \ln n}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} \leq \frac{\pi}{2 \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

что доказывает равномерную сходимость ряда.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Утверждения этого параграфа формулируются в двух вариантах: для последовательностей и для рядов. Во втором случае формулировка имеет тот же номер, что в первом, но со штрихом. Для доказательства утверждения о рядах следует применить его аналог для последовательностей к частичным суммам ряда.

Теорема 1. Перестановка пределов. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, x_0 — предельная точка D , $f, f_n: D \rightarrow \mathbb{R} (\mathbb{C})$ и выполнены следующие условия:

- 1) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(D)$;
- 2) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n \in \mathbb{R} (\mathbb{C})$.

Тогда пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существуют, конечны и совпадают, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. По критерию Больцано — Коши найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\text{для всех } n, m \in \mathbb{N}, x \in D \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремляя x к x_0 и пользуясь непрерывностью модуля, мы получим, что для всех $n, m > N$ верно неравенство $|A_n - A_m| \leq \varepsilon$.

Ввиду произвольности ε это значит, что последовательность $\{A_n\}$ сходится в себе. В силу полноты \mathbb{R} или \mathbb{C} она сходится; обозначим ее предел через A .

Остается доказать, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$. По $\varepsilon > 0$ подберем такой номер L , что

$$\text{для всех } l > L, x \in D \quad |f_l(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и такой номер K , что

$$\text{для всех } k > K \quad |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим $M = 1 + \max\{L, K\}$. Тогда при любом $x \in D$

$$|f_M(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

По определению предела функции найдется такая окрестность V_{x_0} точки x_0 , что

$$\text{для всех } x \in \dot{V}_{x_0} \cap D \quad |f_M(x) - A_M| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда при любом $x \in \dot{V}_{x_0} \cap D$

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - A_M| + |A_M - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε это и значит, что $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$. \square

Теорема 1'. **Почленный переход к пределу.** Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, x_0 — предельная точка D , $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

- 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S ;
- 2) для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k \in \mathbb{R}$ (\mathbb{C}).

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к некоторой сумме A , а предел $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x)$ существует и равен A , то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Замечание 1. В теоремах 1 и 1' не исключается случай, когда $x_0 = \infty$, а если $D \subset \mathbb{R}$, то еще случаи $x_0 = \pm\infty$.

Следствие 1. Непрерывность предельной функции в точке. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $f, f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

- 1) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(D)$;
- 2) все функции f_n непрерывны в точке x_0 .

Тогда функция f непрерывна в точке x_0 .

Доказательство. Для изолированной точки x_0 утверждение тривиально. Если x_0 — предельная точка D , то выполнены условия теоремы 1, причем $A_n = f_n(x_0)$. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = f(x_0),$$

что и означает непрерывность f в точке x_0 . \square

Следствие 1'. Непрерывность суммы ряда в точке. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

- 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S ;
- 2) все функции f_k непрерывны в точке x_0 .

Тогда функция S непрерывна в точке x_0 .

Следствие 2. Непрерывность предельной функции на множестве. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $f, f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}), и выполнены следующие условия:

- 1) $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(D)$;
- 2) все функции f_n непрерывны на D .

Тогда функция f непрерывна на D .

Другими словами, равномерный предел последовательности непрерывных функций непрерывен.

Следствие 2'. Непрерывность суммы ряда на множестве. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$, $f_k: D \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{C}) и выполнены следующие условия:

- 1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на D к сумме S ;

2) все функции f_k непрерывны на D .

Тогда функция S непрерывна на D .

Другими словами, сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна.

Следствие 2 часто называют теоремой Стокса – Зейделя.

Замечание 2. В условиях и заключениях следствий 2 и 2' непрерывность можно одновременно заменить на равномерную непрерывность.

Доказательство. По $\varepsilon > 0$ выберем $L \in \mathbb{N}$, как в теореме 1, и положим $M = L + 1$. В силу равномерной непрерывности f_M найдется такое $\delta > 0$, что

$$\text{если } x, x_0 \in D, \|x - x_0\| < \delta, \text{ то } |f_M(x) - f_M(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $x, x_0 \in D, \|x - x_0\| < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_M(x)| + |f_M(x) - f_M(x_0)| + \\ &\quad + |f_M(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 3. Теоремы 1 и 1', их следствия и замечание 2 верны и для $D \subset \mathbb{C}$, поскольку \mathbb{C} можно отождествить с \mathbb{R}^2 .

Замечание 4. Теоремы 1, 1', их следствия и замечание 2 вместе с доказательствами распространяются на отображения со значениями в \mathbb{R}^l .

Замечание 5. Как мы видели в примере 1 § 1, поточечной сходимости недостаточно для непрерывности предельной функции, а тем самым и для перестановки пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 1-} x^n = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

Вместе с тем, условие равномерной сходимости не является необходимым для непрерывности предельной функции. Действительно, последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0, 1]$. Предельная функция непрерывна, но сходимость неравномерна:

$$\|f_n\| \geq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \neq 0.$$

Сформулируем без доказательства теорему Дини, в которой равномерная сходимость выводится из непрерывности предельной функции или суммы ряда. В этой теореме речь идет о вещественнозначных функциях.

Теорема 2 (У. Дини) для последовательностей. Пусть K — компакт в \mathbb{R}^m , $f, f_n \in C(K)$, $f_n \rightarrow f(K)$, для любого $x \in K$ последовательность $\{f_n(x)\}$ возрастает. Тогда $f_n \Rightarrow f(K)$.

Теорема 2' (У. Дини) для рядов. Пусть K — компакт в \mathbb{R}^m , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ с непрерывными неотрицательными на K членами сходится к непрерывной на K сумме. Тогда ряд равномерно сходится на K .

Теорема 3. Предельный переход под знаком интеграла. Пусть $f_n \in C[a, b]$, $f_n \Rightarrow f$ на $[a, b]$. Тогда $\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$.

Заключение теоремы можно записать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n,$$

что объясняет ее название.

Доказательство. По теореме Стокса – Зейделя $f \in C[a, b]$, поэтому интеграл $\int_a^b f$ имеет смысл. Возьмем $\varepsilon > 0$. По определению равномерной сходимости существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\text{для любых } n > N, x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому для всех $n > N$

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \quad \square$$

Теорема 3'. Почленное интегрирование равномерно сходящихся рядов. Пусть $f_k \in C[a, b]$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k.$$

Иными словами, *равномерно сходящийся ряд непрерывных функций можно интегрировать почленно.*

Замечание 7. Теоремы 3 и 3' остаются справедливыми, если вместо непрерывности функций f_n потребовать их интегрируемость по Риману на $[a, b]$. Для доказательства сначала надо установить, что *равномерный предел последовательности интегрируемых функций интегрируем.* Это можно сделать с помощью критерия Лебега (теорема 5 § 2 главы 4). Затем само предельное соотношение доказывается, как в теореме 3. Читателю предлагается доказать это замечание самостоятельно.

Вопрос о предельном переходе под знаком интеграла будет рассмотрен подробнее в главе 10.

Следующие два примера показывают, что поточечной сходимости недостаточно для предельного перехода под знаком интеграла.

Примеры.

1. Последовательность $f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0, 1]$. В то же время,

$$\int_0^1 f_n = n^2 \int_0^1 x(1-x^2)^n dx = n^2 \left[-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = \frac{n^2}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

2. Последовательность $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ поточечно стремится к нулю на $[0, 1]$, но

$$\int_0^1 f_n = \frac{n}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}.$$

3. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ сходится к сумме $\frac{1}{1+x}$ на $(-1, 1)$. При $x = 1$ он расходится, но его почленное интегрирование по отрезку $[0, 1]$ приводит к верному равенству:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^1 x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

Последняя сумма вычислялась в § 3 главы 7.

Этот пример показывает, что условие равномерной сходимости, и даже сходимости в каждой точке, не является необходимым для почленного интегрирования ряда.

Теорема 4. Пределный переход под знаком производной. Пусть E — ограниченный промежуток, $f_n, \varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$, функции f_n дифференцируемы на E , $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на E и существует такое $c \in E$, что последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на E к некоторой функции f .

2) f дифференцируема на E .

3) $f' = \varphi$.

Равенство $f' = \varphi$ можно записать в виде

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n,$$

что объясняет название теоремы.

Доказательство. Зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$g_n(x) = g_{n,x_0}(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in E \setminus \{x_0\}.$$

Докажем, что последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $x \in E \setminus \{x_0\}$ по формуле Лагранжа, примененной к функции $f_n - f_m$, найдется такое ξ между x и x_0 , что

$$(g_n - g_m)(x) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_m)'(\xi).$$

Поэтому

$$\sup_{E \setminus \{x_0\}} |g_n - g_m| \leqslant \sup_E |f'_n - f'_m|.$$

Последовательность $\{f'_n\}$ равномерно сходится и, значит, равномерно сходится в себе на E . Следовательно, последовательность $\{g_n\}$ равномерно сходится в себе на $E \setminus \{x_0\}$. По критерию Больцано — Коши она равномерно сходится на $E \setminus \{x_0\}$.

В частности, при $x_0 = c$ последовательность $\{g_{n,c}\}$ равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Поскольку умножение на ограниченную функцию $x \mapsto x - c$ не нарушает равномерной сходимости (замечание 6 § 1), последовательность $\{f_n - f_n(c)\}$ также равномерно сходится на $E \setminus \{c\}$. Так как в точке c все ее члены равны нулю, она равномерно сходится на E . По условию последовательность $\{f_n(c)\}$ сходится; трактуя ее как последовательность постоянных функций, можно сказать, что она равномерно сходится на E . Тогда и последовательность

$$f_n = (f_n - f_n(c)) + f_n(c)$$

равномерно сходится на E по замечанию 5 § 1 как сумма двух равномерно сходящихся последовательностей. Первое утверждение теоремы доказано.

Обозначим $f = \lim f_n$. Снова зафиксируем $x_0 \in E$ и положим

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

По доказанному $g_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} h$ на $E \setminus \{x_0\}$, а по определению производной $g_n(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} f'_n(x_0)$. По теореме 1 существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \varphi(x_0).$$

По определению производной $f'(x_0)$ существует и равняется $\varphi(x_0)$. В силу произвольности x_0 второе и третье утверждения теоремы доказаны. \square

Замечание 8. Если в условиях теоремы 4 функции f_n непрерывно дифференцируемы на E , то ее доказательство упрощается.

В самом деле, по формуле Ньютона – Лейбница при всех $x \in E$

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f'_n.$$

По теореме Стокса – Зейделя $\varphi \in C(E)$. По теореме 3, примененной к отрезку $[c, x]$ (мы, как обычно, понимаем под этим $[x, c]$, если

$x < c$), последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторому пределу, который мы обозначим $f(x)$. При этом

$$f(x) = f(c) + \int_c^x \varphi.$$

По теореме Барроу (теорема 2 § 3 главы 4) $f' = \varphi$. То, что сходимость f_n к f равномерна, доказывается, как в теореме 3. \square

Теорема 4'. Почленное дифференцирование рядов.

Пусть E — ограниченный промежуток, функции f_k дифференцируемы на E , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k$ равномерно сходится на E и существует такое $c \in E$, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ сходится. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ равномерно сходится на E .
- 2) Его сумма дифференцируема на E .
- 3) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k$.

Примеры.

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1' = \sum_{k=1}^{\infty} 0$ сходится равномерно на любом промежутке.

Этот пример показывает, что в теоремах 4 и 4' условие сходимости исходной последовательности (ряда) хотя бы в одной точке опустить нельзя.

2. Последовательность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ равномерно сходится к 0 на \mathbb{R} , так как $\|f_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Однако, последовательность $f'_n(x) = \cos nx$ не имеет предела при $\frac{x}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$.

3. Последовательность $f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ равномерно сходится к 0 на $[0, 1]$, так как $\|f_n\| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$. Последовательность же $f'_n(x) = x^n$ сходится на $[0, 1]$ неравномерно, и в точке 1 ее предел равен 1, а не 0.

Примеры 2 и 3 показывают, что из равномерной сходимости последовательности дифференцируемых функций не следует ни сходимость последовательности их производных, ни законность предельного перехода под знаком производной.

4. Пусть f_0 — 1-периодическая функция, а ее сужение на $[0, 1]$ задается равенством

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Положим $f_k(x) = \frac{1}{4^k} f_0(4^k x)$, $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$.

По признаку Вейерштрасса ряд равномерно сходится на \mathbb{R} , так как $\|f_k\| = \frac{1}{2 \cdot 4^k}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^k} < +\infty$. Кроме того, $f_k \in C(\mathbb{R})$. Следовательно, $f \in C(\mathbb{R})$.

Докажем, что f не дифференцируема ни в одной точке. Возьмем $a \in \mathbb{R}$ и проверим, что f не дифференцируема в точке a . Для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$ построим такой отрезок $\Delta_n = [\frac{q_n-1}{2 \cdot 4^n}, \frac{q_n}{2 \cdot 4^n}]$, что $q_n \in \mathbb{Z}$ и $a \in \Delta_n$. Поскольку длина отрезка Δ_n равна $\frac{1}{2 \cdot 4^n}$, на нем найдется точка x_n , отстоящая от a на $\frac{1}{4^{n+1}}$. Если $k > n$, то число $\frac{1}{4^{n+1}}$ является периодом функции f_k , откуда

$$\frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{x_n - a} = 0.$$

Если $0 \leq k \leq n$, то функция f_k линейна на Δ_n , а ее угловой коэффициент ε_{kn} равен ± 1 . Поэтому

$$A_n = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^n \frac{f_k(x_n) - f_k(a)}{x_n - a} = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{kn}.$$

Следовательно, A_n и A_{n+1} — целые числа разной четности и потому различаются по крайней мере на 1. Отсюда ясно, что последовательность $\{A_n\}$ не может иметь предела. \square

Первый, более сложный пример такой функции был построен Вейерштрассом, этот пример принадлежит Б. Ван-дер-Вардену.

§ 3. Степенные ряды

Определение 1. Степенной ряд. Ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad (7)$$

где $c_k, z, a \in \mathbb{C}$, называется *степенным рядом*. Числа c_k называются его *коэффициентами*, а a — *центром*. Если $c_k, x, a \in \mathbb{R}$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k \quad (8)$$

называется *вещественным степенным рядом*.

Степенной ряд является обобщением многочлена $\sum_{k=0}^n c_k (z - a)^k$ и сводится к последнему, если, начиная с некоторого номера, $c_k = 0$.

После определения степенного ряда возникает три вопроса.

- 1) Каково множество сходимости степенного ряда?
- 2) Какими свойствами обладает сумма степенного ряда?
- 3) Можно ли представить данную функцию степенным рядом и, если можно, то как?

Заметим, что при $z = a$ ряд (7) сходится к сумме c_0 , так как слагаемые с номерами $k \in \mathbb{N}$ равны нулю.

Определение 2. Радиус сходимости. Величина $R \in [0, +\infty]$ называется *радиусом сходимости* ряда (7), если

- 1) для всех z , таких что $|z - a| < R$, ряд (7) сходится;
- 2) для всех z , таких что $|z - a| > R$, ряд (7) расходится.

В следующей теореме мы принимаем соглашение $\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{0} = +\infty$.

Теорема 1. Формула Коши – Адамара. *Всякий степенной ряд (7) имеет радиус сходимости, и он выражается формулой*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Доказательство. Докажем, что величина R , задаваемая формулой Коши – Адамара, удовлетворяет определению радиуса сходимости. Пусть $z \neq a$. Воспользуемся радикальным признаком Коши. Вынося положительный не зависящий от n множитель $|z - a|$ за знак верхнего предела, имеем

$$\mathcal{K} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n(z - a)^n|} = \overline{\lim} (|z - a| \sqrt[n]{|c_n|}) = |z - a| \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Если $|z - a| < R$, то $\mathcal{K} < 1$, и ряд (7) сходится, а если $|z - a| > R$, то $\mathcal{K} > 1$, и ряд (7) расходится. \square

Замечание 1. По признаку Коши при $|z - a| < R$ ряд (7) сходится абсолютно.

Доказанная теорема позволяет сделать выводы о множестве сходимости степенного ряда.

Напомним, что при $R \in (0, +\infty)$ символом $V_a(R)$ обозначается открытый круг радиуса R с центром в точке a :

$$V_a(R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}.$$

Мы будем использовать это обозначение и термин “круг” и при $R = +\infty$ или $R = 0$.

Определение 3. Круг сходимости. Пусть дан степенной ряд (7), R — его радиус сходимости. Множество $V_a(R)$ называется *кругом сходимости* ряда (7).

По определению круг сходимости открыт. Если $R = +\infty$, то он совпадает с \mathbb{C} , а ряд (7) абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$. Если $R = 0$, то круг сходимости пуст, а ряд сходится только при $z = a$. Если $R \in (0, +\infty)$, то ряд (7) абсолютно сходится при $|z - a| < R$ и расходится при $|z - a| > R$. В этом случае множество сходимости ряда представляет собой круг сходимости, возможно, с добавлением некоторых точек граничной окружности. Поведение ряда при $|z - a| = R$ может быть различным, что будет подтверждено примерами.

Для вещественного степенного ряда неравенство $|x - a| < R$ задает интервал $(a - R, a + R)$ на вещественной прямой, который называется *интервалом сходимости* степенного ряда. Если $R = +\infty$,

то он совпадает с \mathbb{R} , а ряд абсолютно сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. Если $R = 0$, то интервал сходимости пуст, а ряд сходится только при $x = a$. Если $R \in (0, +\infty)$, то ряд абсолютно сходится при $|x - a| < R$ и расходится при $|x - a| > R$. В этом случае множество сходимости ряда есть один из промежутков вида $\langle a - R, a + R \rangle$.

Замечание 2. Часто радиус сходимости можно найти не только по формуле Коши – Адамара, но и с помощью признака Даламбера. Именно,

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad (9)$$

если предел в правой части существует. Читатель легко докажет это утверждение самостоятельно.

Примеры.

1. Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

При $|z| \geq 1$ ряд расходится. Поэтому радиус сходимости этого ряда равен 1, а множество сходимости совпадает с кругом сходимости.

2. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ равен 1. На окружности $|z| = 1$ он абсолютно сходится.

3. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$ также равен 1. При $z = 1$ получается гармонический ряд, который расходится. При $|z| = 1$, $z \neq 1$ ряд сходится по признаку Дирихле, так как $\frac{1}{k}$ убывает к нулю, а

$$\left| \sum_{k=1}^n z^k \right| = \left| \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}.$$

Эта сходимость неабсолютна. Таким образом, множество сходимости этого ряда есть замкнутый единичный круг без точки 1.

4. С помощью замечания 2 легко убедиться, что радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ равен $+\infty$, то есть этот ряд абсолютно сходится для всех $z \in \mathbb{C}$.

5. Аналогично, радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} k!z^k$ равен нулю, то есть этот ряд расходится для всех $z \neq 0$.

Замечание 3. Заменой переменной $z - a = w$ ряд (7) приводится к степенному ряду относительно w с центром в нуле. Поэтому при выводе свойств степенных рядов можно, не уменьшая общности, считать, что $a = 0$.

Теорема 2. Равномерная сходимость степенных рядов. Пусть дан степенной ряд (7), $R \in (0, +\infty]$ — его радиус сходимости. Тогда для любого $r \in (0, R)$ ряд (7) равномерно сходится в круге $\overline{V_a(r)}$.

Доказательство. Если $|z - a| \leq r$, то

$$|c_k(z - a)^k| \leq |c_k| r^k.$$

По замечанию 1 к определению радиуса сходимости $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k < +\infty$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (7) равномерно сходится в круге $\overline{V_a(r)}$. \square

Следствие 1. Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

Доказательство. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k, \quad |z - a| < R.$$

Возьмем такое z_1 , что $|z_1 - a| < R$, и подберем такое r , что $|z_1 - a| < r < R$. Из равномерной сходимости ряда на $\overline{V_a(r)}$ по следствию 2' теоремы 1' § 2 вытекает непрерывность сужения f на $\overline{V_a(r)}$ и, в частности, непрерывность f в точке z_1 . В силу произвольности z_1 функция f непрерывна в круге сходимости. \square

Это следствие будет далее усилено.

Теорема 3 (Н.Абель). О степенных рядах. Пусть дан вещественный степенной ряд (8), $R \in (0, +\infty)$ — его радиус сходимости. Если ряд (8) сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то

он равномерно сходится на $[a, a+R]$ или $[a-R, a]$ соответственно, а его сумма непрерывна в точке $a+R$ слева (соответственно, в точке $a-R$ справа).

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $a=0$. Преобразуем члены ряда:

$$c_k x^k = c_k R^k \left(\frac{x}{R}\right)^k.$$

Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k$ сходится, а его члены постоянны, он сходится равномерно на $[0, R]$. Последовательность $\left\{\left(\frac{x}{R}\right)^k\right\}$ равномерно ограничена на $[0, R]$ и убывает в силу неравенства $0 \leq \frac{x}{R} \leq 1$. Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ равномерно сходится на $[0, R]$.

Утверждение о непрерывности суммы ряда следует из теоремы Стокса – Зейделя. \square

Замечание 1. Иногда теорему 3 называют *второй теоремой Абеля* о степенных рядах. При этом *первой теоремой Абеля* называют следующее утверждение. Если ряд (7) сходится при $z = z_1$, то он абсолютно сходится для всех таких z , что $|z - a| < |z_1 - a|$. Первая теорема Абеля позволяет доказать существование радиуса сходимости, не используя понятие верхнего предела.

Следствие 2. Интегрирование степенных рядов. Пусть дан вещественный степенной ряд (8), $R \in (0, +\infty]$ — его радиус сходимости. Тогда ряд (8) можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости: если $[A, B] \subset (a - R, a + R)$, то

$$\int_A^B \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(B-a)^{k+1} - (A-a)^{k+1}}{k+1}. \quad (10)$$

Если, кроме того, ряд (8) сходится при $x = a + R$ или $x = a - R$, то равенство (10) верно и при $B = a + R$ или $A = a - R$ соответственно.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$. Обозначим $r = \max\{|A|, |B|\}$. Тогда

$$[A, B] \subset [-r, r] \subset (-R, R).$$

По теореме 2 ряд (8) равномерно сходится на $[A, B]$. Следовательно, его можно интегрировать по $[A, B]$ почленно.

Если $B = R$, то ряд равномерно сходится на отрезке $[0, B]$ по теореме 3, а на отрезке с концами A и 0 — по теореме 2. Поэтому ряд равномерно сходится на $[A, B]$. Аналогично рассматривается случай $A = -R$. \square

Замечание 2. Вещественность коэффициентов c_k в следствии 2 несущественна и предполагалась лишь потому, что интеграл от комплекснозначной функции пока не определялся.

Теорема Абеля позволяет доказать замечание 4 к теореме 7 § 3 главы 7 об умножении рядов, которое ранее было сформулировано без доказательства.

Следствие 3. Если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся к A и B , а их произведение по Коши — к C , то $C = AB$.

Доказательство. При $x \in [0, 1]$ положим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right) x^k.$$

По условию ряды сходятся при $x = 1$. Следовательно, их радиусы сходимости не меньше 1, и при $x \in [0, 1)$ ряды сходятся абсолютно. Третий ряд есть произведение по Коши первых двух. По следствию 1 теоремы 7 § 3 главы 7 об умножении рядов $h(x) = f(x)g(x)$ при всех $x \in [0, 1)$. Кроме того, по теореме Абеля функции f , g и h непрерывны слева в точке 1. Переходя к пределу, мы получаем требуемое равенство:

$$AB = f(1)g(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} h(x) = h(1) = C. \quad \square$$

Замечание 3. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} R^{k+1}$ сходится, то существует (возможно, несобственный) интеграл $\int_0^{\rightarrow R} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k dx$ и

$$\int_0^{\rightarrow R} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} R^{k+1}.$$

Сам ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k R^k$ может при этом расходиться. Это замечание предлагается читателю как упражнение.

Прежде чем формулировать теорему о дифференцировании степенных рядов, дадим определение дифференцируемости функции комплексной переменной.

Определение 4. Комплексная дифференцируемость.

Пусть $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $a \in \text{Int } D$. Если существует предел $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$, то он называется *производной* функции f в точке a и обозначается $f'(a)$. Функция, имеющая конечную производную в точке a , называется *дифференцируемой* или, подробнее, *комплексно дифференцируемой* в точке a .

Итак,

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Отсюда ясно, что если $a \in \mathbb{R}$, f дифференцируема в точке a в комплексном смысле, то сужение f на вещественную окрестность a дифференцируемо в точке a в вещественном смысле и производные совпадают.

Докажем по определению формулу

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (11)$$

При $n = 0$ она очевидна, а при $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{z^n - a^n}{z - a} = z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1} \xrightarrow{z \rightarrow a} na^{n-1}.$$

На функции комплексной переменной переносятся вместе с доказательствами правила дифференцирования арифметических действий. Из этих правил формула (11) получается при всех $n \in \mathbb{Z}$. При отрицательных n исключается значение $z = 0$.

Пусть $D \subset \mathbb{C}$, D открыто. Функция f называется дифференцируемой на множестве D , если она дифференцируема в каждой точке D . Производные высших порядков определяются так же, как и в вещественном случае.

Лемма 1. *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-a)^{k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z-a)^{k+1}$$

равны.

Доказательство. Докажем совпадение радиусов сходимости первых двух рядов. По формуле Коши – Адамара для этого достаточно проверить равенство

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{n|c_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, найдется такой номер N , что для всех $n > N$

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \sqrt[n]{n|c_n|} \leq (1 + \varepsilon) \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{n|c_n|} \leq (1 + \varepsilon) \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|},$$

откуда в силу произвольности ε вытекает требуемое равенство. Совпадение радиусов сходимости первого и третьего ряда проверяется аналогично. \square

Теорема 4. **Дифференцирование степенных рядов.**

Пусть $R \in (0, +\infty]$ — радиус сходимости ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Тогда f бесконечно дифференцируема в круге $V_a(R)$ и ряд можно дифференцировать почленно любое число раз:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, \quad |z-a| < R$$

при всех $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Поскольку по лемме 1 при дифференцировании радиус сходимости ряда не меняется, достаточно доказать утверждение при $m = 1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = 0$, то есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < R.$$

Возьмем $z_1 \in V_0(R)$ и докажем дифференцируемость f в точке z_1 и формулу для производной. Пусть $|z| < R$, $z \neq z_1$. Зафиксируем такое ρ , что $|z|, |z_1| < \rho < R$. Составим разностное отношение и преобразуем его:

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{z^k - z_1^k}{z - z_1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

Суммирование начинается с единицы, потому что свободные члены взаимно уничтожаются. Справедлива оценка

$$|c_k(z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1})| \leq k|c_k|\rho^{k-1}$$

(в сумме в скобках k слагаемых, по модулю не превосходящих ρ^{k-1}).

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k|c_k|\rho^{k-1}$ сходится, так как $\rho < R$, а в круге сходимости степенной ряд сходится абсолютно. По признаку Вейерштрасса

ряд (11) равномерно сходится на $\overline{V_0(\rho)}$ и, тем более, на $V_0(\rho) \setminus \{z_1\}$. По теореме 1' § 2 о почленном переходе к пределу существует

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_1} c_k (z^{k-1} + z^{k-2}z_1 + \dots + zz_1^{k-2} + z_1^{k-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z_1^{k-1}. \end{aligned}$$

В силу произвольности точки z_1 функция f дифференцируема в круге $V_0(R)$, и ряд можно дифференцировать почленно. \square

Перейдем к вопросу о разложении функции в степенной ряд.

Теорема 5. Единственность разложения функции в степенной ряд. Пусть $R \in (0, +\infty]$,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad |z - a| < R.$$

Тогда коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad (12)$$

Доказательство. По теореме 4 при всех $m \in \mathbb{Z}_+$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1)c_k(z-a)^{k-m}, \quad |z-a| < R.$$

При подстановке $z = a$ слагаемые с номерами $k \geq m+1$ обнуляются. Поэтому $f^{(m)}(a) = c_m m!$, что равносильно доказываемому. \square

Замечание. Теоремы 4 и 5 вместе с доказательствами справедливы и в вещественном случае. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $R \in (0, +\infty]$ — радиус сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - a)^k.$$

Тогда $f \in C^\infty(a - R, a + R)$, а коэффициенты c_k определяются единственным образом по формуле (12).

Определение 5. Ряд Тейлора. Пусть f имеет в точке a производные всех порядков. Числа $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ называются *коэффициентами Тейлора*, а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$ — *рядом Тейлора* функции f с центром в точке a .

Ряд Тейлора с центром в нуле называется еще *рядом Маклорена*.

Далее остановимся подробнее на представлении функций вещественными степенными рядами. Из теорем 4 и 5 следует, что если функция раскладывается в степенной ряд в окрестности точки a , то она бесконечно дифференцируема в этой окрестности, а ряд есть ее ряд Тейлора. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $R \in (0, +\infty]$, $f \in C^\infty(a - R, a + R)$. Тогда можно построить ряд Тейлора функции f :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

и задаться вопросом о его поведении. При $x = a$ он сходится к $f(a)$. При $x \neq a$ возможны три случая.

1. *Ряд сходится к $f(x)$.* Примером служит равенство

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \quad |x| < 1.$$

2. *Ряд расходится.* Примером служит тот же ряд при $|x| \geq 1$.

Этот пример показывает, что для объяснения поведения степенного ряда приходится привлекать функции комплексной переменной. Функция $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ не может раскладываться в степенной ряд с центром в нуле в круге радиуса больше 1, так как $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \pm i} \infty$. Такое поведение непонятно, если рассматривать лишь вещественные значения переменной.

3. *Ряд сходится, но не к $f(x)$.* Примером служит функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Сначала докажем по индукции равенство

$$f^{(n)}(x) = P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \neq 0,$$

где P_n — некоторый многочлен. База индукции ($n = 0$) очевидна. Индукционный переход от n к $n + 1$ делается так. Если для некоторого n требуемая формула верна, то

$$f^{(n+1)}(x) = \left(P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} \right)' = \left(P_n' \left(\frac{1}{x} \right) \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-1/x^2}.$$

Множитель при экспоненте есть многочлен от $\frac{1}{x}$; его мы и возьмем в качестве P_{n+1} .

Докажем теперь по индукции, что для всех $n \in \mathbb{Z}_+$ производная $f^{(n)}(0)$ существует и равна нулю. База индукции ($n = 0$) выполняется по определению функции f . Сделаем индукционный переход. Известно (см. пример 2 к правилу Лопиталья в § 5 главы 3), что при всех $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^{k/2} e^{-y} = 0.$$

Поэтому

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = 0.$$

Таким образом, все тейлоровские коэффициенты функции f равны нулю. Поэтому ее ряд Тейлора сходится к нулю всюду, и равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

справедливо только при $x = 0$. \square

Частная сумма ряда Тейлора

$$T_{a,n} f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

есть многочлен Тейлора. По определению суммы ряда сходимость ряда Тейлора к $f(x)$ означает, что $T_{a,n}f(x) \rightarrow f(x)$. Следующая теорема была фактически доказана в § 6 главы 3 в терминах сходимости последовательности многочленов Тейлора. В ней, как и в § 6 главы 3, через $\tilde{\Delta}_{a,x}$ обозначается интервал с концами a и x .

Теорема 6. Признак разложимости функции в ряд Тейлора. Пусть $f \in C^\infty\langle A, B \rangle$, $a, x \in \langle A, B \rangle$, $a \neq x$ и существует такое $M \in (0, +\infty)$, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \tilde{\Delta}_{a,x}$ выполняется неравенство $|f^{(n)}(t)| \leq M$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(x).$$

Доказательство. Согласно лемме 2 § 6 главы 3, справедлива оценка

$$|f(x) - T_{a,n}f(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x-a|^{n+1},$$

откуда и следует требуемая сходимость. \square

Определение 6. Пусть $-\infty \leq A < B \leq +\infty$, $f: (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in (A, B)$. Функция f называется *аналитической* или *вещественно-аналитической в точке a* , если она раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности a , то есть существуют такие числа $r > 0$ и $c_k \in \mathbb{R}$, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad x \in (a-r, a+r).$$

Функция $f: (A, B) \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аналитической* или *вещественно-аналитической на промежутке (A, B)* , если она аналитична в каждой точке (A, B) .

Аналогично определяются комплексно-аналитические функции. Они будут обсуждаться в теории функций комплексной переменной.

Множество $\mathcal{A}(A, B)$ вещественно-аналитических на (A, B) функций содержится в $C^\infty(A, B)$ по теореме 4. Существование бесконечно дифференцируемых функций, не равных сумме своего ряда

Тейлора, показывает, что это включение строгое, то есть

$$\mathcal{A}(A, B) \subsetneq C^\infty(A, B).$$

§ 4. Разложения элементарных функций

Прежде чем перейти к конкретным разложениям, сделаем одно простое наблюдение. Если при $|z| < R$ верны разложения

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k,$$

$\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, то также при $|z| < R$

$$\begin{aligned} (f+g)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (c_k + d_k) z^k, & \lambda f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda c_k) z^k, \\ (fg)(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k c_j d_{k-j} \right) z^k. \end{aligned}$$

Первые два равенства очевидны ввиду линейности операции суммирования, а третье представляет собой умножение рядов по Коши, которое законно в силу их абсолютной сходимости.

Очень просты и правила дифференцирования и интегрирования степенных рядов (теорема 4 и следствие 2 теоремы 3 § 3). Для степенного ряда частного и композиции таких удобных формул нет, и мы не будем затрагивать эти вопросы.

1. Экспонента, синус, косинус. В § 6 главы 3 (см. также § 1 главы 7) были получены тейлоровские разложения экспоненты, синуса и косинуса вещественного аргумента. Равенство каждой из этих функций сумме своего ряда Тейлора устанавливалось тем же способом, что и теорема 6 § 3. Эти равенства можно принять за определения экспоненты, синуса и косинуса комплексного аргумента.

Определение 1. При $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \sin z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \\ \cos z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Наряду с e^z употребляется обозначение $\exp z$.

Экспонента, синус и косинус корректно определены на \mathbb{C} . Действительно, в силу формулы (9) радиусы сходимости всех этих рядов бесконечны, то есть ряды абсолютно сходятся для любого $z \in \mathbb{C}$.

Многие свойства этих функций вещественной переменной переносятся на комплексный случай.

T1. *Функции \exp , \sin , \cos бесконечно дифференцируемы на \mathbb{C} и*

$$(e^z)' = e^z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Доказательство. По теореме 4 § 3 сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в круге сходимости. Производные находятся почленным дифференцированием рядов:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kz^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\ (\sin z)' &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)!} z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \cos z, \\ (\cos z)' &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{(2k)!} z^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} z^{2k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1} = -\sin z. \quad \square \end{aligned}$$

Т2. Основное свойство степени.

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Доказательство. Записывая произведение рядов по Коши, получаем

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^j}{j!} \frac{z_2^{k-j}}{(k-j)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k C_k^j z_1^j z_2^{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}. \quad \square \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой бинома Ньютона.

Т3. *Синус — нечетная функция, а косинус — четная.*

Это свойство очевидно из определения.

Т4. Формулы Эйлера.

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

Доказательство. Учитывая, что $i^{2k} = (-1)^k$, запишем разложения синуса и косинуса в виде

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!}, \quad i \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

и сложим их. Получим как раз степенной ряд для e^{iz} .

Для доказательства второй и третьей формул Эйлера заменим z на $-z$ и воспользуемся свойством Т3:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Остается взять полусумму выражений для e^{iz} и e^{-iz} и их полуразность, деленную на i . \square

Укажем частные случаи формулы Эйлера:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\frac{i\pi}{2}} = i, \quad e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i.$$

Напомним, что комплексное число z может быть записано в алгебраической форме

$$z = x + iy, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

и в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

По формуле Эйлера последнее выражение можно переписать в виде

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Такая форма записи комплексного числа называется *показательной*.

Т5. Известные из школьного курса тождества для тригонометрических функций остаются справедливыми при комплексных значениях аргумента. Докажем, например, формулу для косинуса суммы

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

Доказательство. По формулам Эйлера и основному свойству степени

$$\begin{aligned} & \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 = \\ &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)} \right) + \\ &+ \frac{1}{4} \left(e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(z_2-z_1)} + e^{-i(z_1+z_2)} \right) = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Проверку других тригонометрических тождеств мы предоставляем читателю. \square

Определение 2. Функции ch и sh , определяемые формулами

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

называются *гиперболическим косинусом* и *гиперболическим синусом*.

По формулам Эйлера

$$\operatorname{ch} z = \cos iz, \quad \cos z = \operatorname{ch} iz, \quad i \operatorname{sh} z = \sin iz, \quad i \sin z = \operatorname{sh} iz.$$

Отсюда получаются разложения гиперболических функций в степенные ряды

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

абсолютно сходящиеся на \mathbb{C} . Производные этих функций равны

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

На рисунке 4 изображены графики гиперболических функций вещественной переменной.

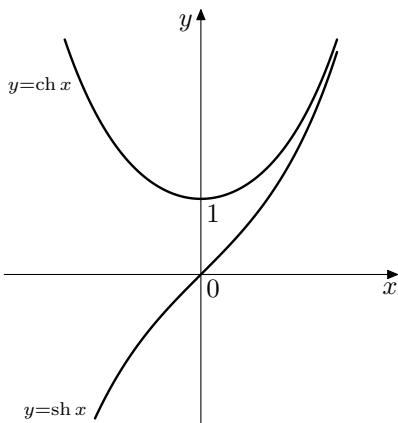


Рис. 4

Т6. *Функции $\cos u$ и \sin не ограничены на \mathbb{C} .*

Доказательство. Действительно, если $y \in \mathbb{R}$, то

$$\cos iy = \operatorname{ch} y \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} +\infty, \quad |\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} +\infty. \quad \square$$

Т7. *Экспонента не имеет нулей. Синус и косинус не имеют нулей, отличных от вещественных.*

Доказательство. Если $z = x + iy$, то $e^z = e^x e^{iy}$, откуда $|e^z| = e^x > 0$.

Решим уравнение $\cos z = 0$. В силу Т5 и связи между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

Приравнявая к нулю вещественную часть и учитывая, что $\operatorname{ch} y > 0$ при $y \in \mathbb{R}$, мы получим $\cos x = 0$, то есть $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\sin x \neq 0$. Равенство нулю мнимой части дает $\operatorname{sh} y = 0$, откуда $y = 0$. Для синуса доказательство проводится аналогично. \square

Т8. *Экспонента имеет периоды $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и не имеет других периодов. Синус и косинус имеют периоды $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и не имеют других периодов.*

Доказательство. По формуле Эйлера при всех $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{2ik\pi} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1.$$

Следовательно, для любого $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z+2ik\pi} = e^z e^{2ik\pi} = e^z,$$

то есть числа $2ik\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, — периоды экспоненты.

Докажем, что других периодов нет. Пусть T — период экспоненты, то есть $T \neq 0$ и $e^{z+T} = e^z$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Подставляя $z = 0$, находим $e^T = 1$. Запишем $T = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда $e^\alpha e^{i\beta} = 1$.

Приравнивая модули, получаем $e^\alpha = 1$, откуда $\alpha = 0$, $e^{i\beta} = 1$. По формуле Эйлера

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta = 1,$$

что дает $\cos \beta = 1$, $\beta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, то есть $T = 2ik\pi$.

Доказательство утверждений для синуса и косинуса остается читателю в качестве легкого упражнения. \square

Тангенс и *котангенс* комплексного аргумента определяются равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, & z &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, & z &\neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Аналогично определяются *гиперболические тангенс* и *котангенс*. Читатель может сам выразить эти гиперболические функции через тригонометрические и обратно.

2. Логарифм и арктангенс. Запишем формулу для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1. \quad (13)$$

Заменяя в ней x на $-t$, мы получим

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k, \quad |t| < 1.$$

Возьмем теперь $x \in (-1, 1)$ и проинтегрируем получившееся равенство по t от 0 до x . Напомним, что степенной ряд можно интегрировать почленно по любому отрезку, лежащему в интервале сходимости. Поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}. \quad (14)$$

По признаку Лейбница ряд в правой части (14) сходится при $x = 1$. Следовательно, по теореме Абеля и непрерывности логарифма равенство верно и при $x = 1$, то есть

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Эта формула была получена другим способом в § 3 главы 7. Перепишем разложение $\ln(1+x)$ в стандартном виде, сдвинув индекс суммирования:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad -1 < x \leq 1.$$

При $x = -1$ получается расходящийся гармонический ряд.

Равенство (14) с заменой x на $-x$ дает

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad -1 \leq x < 1.$$

Если взять полуразность разложений $\ln(1+x)$ и $\ln(1-x)$, то останутся лишь слагаемые с четными номерами. Отсюда получается ряд для высокого логарифма:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{2l+1}}{2l+1}, \quad -1 < x < 1.$$

Подставим $x = \frac{1}{2n+1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{n}$. Поэтому

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}}. \quad (15)$$

Последний ряд сходится быстрее, чем ряд (14) при $x = \frac{1}{n}$, и потому он предпочтительнее для приближенного вычисления логарифмов.

Теорема 1. Формула Стирлинга. Если $n \in \mathbb{N}$, то существует такое $\theta \in (0, 1)$, что

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Доказательство. Перепишем равенство (15) в виде

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)(2n+1)^{2l}}$$

и оценим сумму:

$$\begin{aligned} 1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) &< 1 + \frac{1}{3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2l}} = \\ &= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}. \end{aligned}$$

Мы учли, что $\frac{1}{2l+1} \leq \frac{1}{3}$ для всех $l \in \mathbb{N}$, причем при $l \geq 2$ неравенство строгое, и вычислили сумму геометрической прогрессии. Применив к неравенству экспоненту, мы получим

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Обозначим

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}},$$

откуда

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Левое неравенство означает, что последовательность $\{a_n\}$ строго убывает, а правое — что последовательность $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ строго возрастает. Так как $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$, по теореме о пределе монотонной последовательности обе они сходятся к общему пределу a , причем

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n.$$

Другими словами,

$$1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}},$$

что равносильно

$$a_n = ae^{\frac{\theta}{12n}}, \quad \theta = \theta_n \in (0, 1). \quad (16)$$

Вспомнив определение a_n , перепишем последнее равенство в виде

$$n! = a\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Это и есть формула Стирлинга с неопределенной пока константой a .

Остается найти a . Для этого воспользуемся формулой Валлиса (теоремой 2 § 4 главы 4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \pi.$$

Выразим двойные факториалы через однократные, а последние — по формуле (16):

$$\begin{aligned} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} &= \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \\ &= \frac{2^{2n} \left(a\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \right)^2}{a\sqrt{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\tau}{24n}}} = a\sqrt{\frac{n}{2}} e^{\frac{4\theta - \tau}{24n}}, \end{aligned}$$

где $\theta, \tau \in (0, 1)$. Возводя в квадрат, деля на n и переходя к пределу, из формулы Валлиса мы находим, что $\pi = \frac{a^2}{2}$ или $a = \sqrt{2\pi}$. \square

Выведем теперь разложение арктангенса. Заменяя в (13) x на $-t^2$, мы получим

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}, \quad |t| < 1.$$

Возьмем $x \in (-1, 1)$ и проинтегрируем получившееся равенство по t от 0 до x . Тогда

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

По признаку Лейбница ряд в правой части равенства сходится при $x = \pm 1$. Следовательно, по теореме Абеля и непрерывности арктангенса равенство верно и при $x = \pm 1$, то есть

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Сумму этого ряда впервые вычислил Лейбниц.

Ряд Лейбница, как и формула Валлиса, дает способ сколь угодно точного приближения числа π рациональными числами. Эти формулы могут использоваться для приближенного вычисления числа π , хотя ряд сходится довольно медленно. Подставляя в степенной ряд для арктангенса другие аргументы, можно получать разложения π , сходящиеся быстрее. Например, при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right).$$

Читатель может сам проверить равенства

$$\begin{aligned} \pi &= 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}, \\ \pi &= 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}, \end{aligned}$$

первое из которых называется *формулой Мэшина*, и вывести из них разложения π в ряды.

3. Степенная функция. В теореме 4 § 6 главы 3 была получена формула Тейлора для степенной функции с остатком в форме Пеано. Эта форма остатка не позволяет судить о сходимости ряда Тейлора. Теперь мы выведем разложение степенной функции в ряд.

Напомним, что обобщенные биномиальные коэффициенты определяются равенством

$$C_{\alpha}^k = \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

При $k = 0$ дробь считается равной 1 как пустое произведение.

Теорема 2. Биномиальный ряд Ньютона. При $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$ справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} C_\alpha^k x^k. \quad (17)$$

Замечание 1. При $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $k > \alpha$ числа C_α^k равны нулю, поэтому формула (17) представляет собой бином Ньютона. В этом случае ограничение $-1 < x < 1$ излишне.

Доказательство. В силу замечания 1 остается проверить формулу при $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$. Найдем радиус сходимости R биномиального ряда. По формуле (9)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_\alpha^n}{C_\alpha^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

Обозначим сумму ряда через $S(x)$ и докажем, что

$$S(x) = (1+x)^\alpha.$$

Почленное дифференцирование $S(x)$ дает

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} kx^{k-1}.$$

Применим к этому равенству две операции: сдвиг индекса суммирования и умножение на x . Мы придем к соотношениям

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{k!} x^k, \\ xS'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} kx^k. \end{aligned}$$

Складывая их, получаем дифференциальное уравнение

$$(1+x)S'(x) = \alpha S(x).$$

Чтобы решить его, обозначим

$$g(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\alpha}.$$

Тогда

$$g'(x) = \frac{(1+x)^\alpha S'(x) - \alpha(1+x)^{\alpha-1} S(x)}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)S'(x) - \alpha S(x)}{(1+x)^{\alpha+1}} = 0,$$

откуда функция g постоянна на $(-1, 1)$. Поскольку $g(0) = S(0) = 1$, мы получим $g \equiv 1$, то есть $S(x) = (1+x)^\alpha$. \square

Выпишем биномиальное разложение для нескольких конкретных значений α . Случай $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ уже упоминался в замечании 1.

Пример 1. При $\alpha = -1$ после упрощения биномиальных коэффициентов снова получается формула суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad -1 < x < 1. \quad (18)$$

Ее обобщение

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{n+k-1}^k x^k, \quad -1 < x < 1,$$

соответствующее $\alpha = -n$, $n-1 \in \mathbb{N}$, может быть получено еще и $(n-1)$ -кратным дифференцированием ряда (18). Подробные выкладки остаются читателю.

Пример 2. Возьмем $\alpha = \frac{1}{2}$. При $k \in \mathbb{N}$, приводя множители к общему знаменателю, имеем:

$$\begin{aligned} C_{1/2}^k &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - k + 1 \right) \frac{1}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{k! 2^k} (2k-3)!! = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}. \end{aligned}$$

Отсюда получается разложение квадратного корня

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^k.$$

По формуле Валлиса

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}. \quad (19)$$

Следовательно, ряд абсолютно сходится при $x = \pm 1$ и, таким образом, равенство верно при $-1 \leq x \leq 1$.

Пример 3. Возьмем $\alpha = -\frac{1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}_+$, приводя множители к общему знаменателю, имеем:

$$\begin{aligned} C_{-1/2}^k &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(-\frac{1}{2} - k + 1 \right) \frac{1}{k!} = \\ &= \frac{(-1)^k}{k! 2^k} (2k-1)!! = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \end{aligned}$$

Отсюда получается разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k.$$

При $x = -1$ ряд расходится в силу (19), а при $x = 1$ сходится по признаку Лейбница. Следовательно, равенство верно при $-1 < x \leq 1$.

Пример 4. Разложение арксинуса. Полагая в предыдущем примере $x = -t^2$, $-1 < t < 1$, запишем

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} t^{2k}.$$

Интегрируя по t от 0 до $x \in (-1, 1)$, получаем разложение арксинуса

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

При $x = \pm 1$ ряд сходится (и даже абсолютно) в силу (19). Значит, по теореме Абеля и непрерывности арксинуса равенство верно при $-1 \leq x \leq 1$.

Замечание 2. Если биномиальный ряд сходится при $x = 1$ или $x = -1$, то по теореме Абеля его сумма равна $(1 + x)^\alpha$ и в этих точках. Перечислим без доказательства все возможные случаи поведения биномиального ряда при $x = \pm 1$.

1. Если $\alpha \geq 0$, то ряд абсолютно сходится при $x = \pm 1$.
2. Если $\alpha \in (-1, 0)$, то ряд условно сходится при $x = 1$ и расходится при $x = -1$.
3. Если $\alpha \leq -1$, то ряд расходится при $x = \pm 1$.

ГЛАВА 9. ТЕОРИЯ МЕРЫ

§ 1. Введение

В § 7 главы 4 мы занимались вычислением площадей и объемов с помощью интеграла Римана. При изложении этой темы остались два нерешенных вопроса.

1) Не было дано строгого определения квадрируемых фигур на плоскости и кубируемых тел в пространстве.

2) Отсутствуют какие-либо способы практической проверки, что некоторое множество имеет площадь или объем.

Решению этих вопросов посвящена глава 9. Постановку задачи можно обобщить. Во-первых, вместо отдельного изучения площадей и объемов мы введем n -мерный объем, нормированный на n -мерных параллелепипедах (такой объем будет называться *классическим*). Во-вторых, вместо \mathbb{R}^n можно рассматривать произвольные множества и измерять их подмножества. Такая ситуация и будет объектом нашего рассмотрения. Приведем краткий план изложения материала.

Пусть X — некоторое множество. Задача, грубо говоря, состоит в том, чтобы подмножествам X приписать неотрицательные значения (возможно, бесконечные). Иными словами, необходимо ввести *функции множества*, аналогичные *функциям отрезка*, рассмотренным в главе 4. Такие функции будут определяться на специальных системах подмножеств X , называемых *измеримыми*. В § 2 мы изучим четыре разновидности систем множеств — *полукольца*, *кольца*, *алгебры* и *сигма-алгебры*. Каждая из них имеет свои преимущества и недостатки, но в соответствующих ситуациях все они будут необходимы. Далее, на функции множества мы будем накладывать условия *аддитивности* (по аналогии с аддитивными функциями отрезка) или *счетной аддитивности*. В первом случае функция множества будет называться *объемом*, во втором — *мерой*. Объемы и меры изучаются в параграфах 3 и 4 соответственно. Обобщением классического объема является *мера Лебега*, играющая важную роль в математике. Ее свойства рассматриваются в § 6. Мера Лебега на прямой является частным случаем *меры Лебега – Стильеса*, которой посвящен § 7.

Естественными областями определения мер являются сигма-алгебры. Однако такие системы часто имеют сложную структуру, и задавать меры непосредственно на них сложно. Поэтому определение мер обычно происходит в два этапа. Вначале мера задается на полукольце, допускающем простое описание. Затем к ней применяется стандартная процедура продолжения на сигма-алгебру. Эта процедура рассматривается в § 5. Там же обсуждаются вопросы единственности и минимальности продолжения, а также дается описание измеримых множеств.

Важной конструкцией является также *произведение мер*. Оно будет использоваться при изучении меры Лебега, вычислении кратных интегралов и в ряде других вопросов. Построение произведения мер мы проведем в § 8.

Используя понятие меры, мы в следующей главе введем общую конструкцию *интеграла по мере*, принадлежащую Лебегу.

До сих пор нам встречались функции, принимающие конечные значения. При изучении меры и интеграла мы будем обычно оперировать функциями со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Поэтому необходимо обобщить на такие функции алгебраические и аналитические операции. Приведем краткий обзор этих обобщений.

Сложение и умножение. В § 2 главы 1 мы ввели арифметические операции в $\overline{\mathbb{R}}$. Дополним эти определения еще одним важным соглашением:

$$0 \cdot x = 0 \text{ для любого } x \in \overline{\mathbb{R}}$$

(оно не имеет никакого отношения к раскрытию неопределенностей). Мы будем пользоваться этим правилом всегда, если не оговорено противное. Запишем теперь наши соглашения явным образом. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{R}}$, причем хотя бы одно из a_k бесконечно (например, a_1). Сумма $a_1 + \dots + a_n$ имеет смысл тогда и только тогда, когда среди слагаемых не встречается бесконечностей разных знаков, и в этом случае она равна a_1 . Произведение $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ определено всегда. Оно равно нулю, если хотя бы один из множителей нулевой, и бесконечности в противном случае. Знак произведения есть произведение знаков множителей.

Пусть теперь f_1, \dots, f_n — функции, действующие из некоторого множества E в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда операции $f_1 + \dots + f_n$ и $f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ вводятся поточечно, как функции, сопоставляющие $x \in E$ сумму

или произведение величин $f_1(x), \dots, f_n(x)$. Произведение f_1, \dots, f_n определено всюду на E , а сумма — для таких $x \in E$, что среди $f_1(x), \dots, f_n(x)$ нет бесконечностей разных знаков (это множество может оказаться и пустым).

Предел функции. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ — предельная точка множества E , $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathbb{R}$. Определение равенства $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ на языке окрестностей, данное в § 4 главы 5 для конечнозначных функций, без изменения переносится на функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Сохраняется определение и в случае $A = \pm\infty$, если мы примем соглашение $A \in V_\varepsilon(A)$ при любом $\varepsilon > 0$. Все основные утверждения теории пределов легко распространяются на функции, действующие в $\overline{\mathbb{R}}$. Мы будем ссылаться на соответствующие теоремы, оставляя их доказательства читателю.

Рассмотрим отдельно наиболее важный для нас случай последовательностей. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность в $\overline{\mathbb{R}}$. Мы по-прежнему будем под $\sup_{k \in \mathbb{N}} a_k$ понимать наименьшую верхнюю границу $\{a_k\}$. В частности, $\sup_{k \in \mathbb{N}} a_k = +\infty$, если последовательность принимает значение $+\infty$. Отметим, что супремум последовательности может быть равен и $-\infty$, если все ее элементы равны $-\infty$ (для последовательностей в \mathbb{R} такого быть не может). Аналогичным образом определяется инфимум $\{a_k\}$. Сохраняются и определения верхнего и нижнего пределов последовательности:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k; \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k.$$

Доказательство существования этих пределов не изменяется, поскольку теорема о пределе монотонной последовательности, на которой оно основано, верна и для последовательностей в $\overline{\mathbb{R}}$. Предлагаем читателю доказать для таких $\{a_n\}$ аналог теоремы о верхнем и нижнем пределах (см. § 2 главы 2). Эту теорему можно обобщить и на функциональные последовательности, если понимать предельные операции поточечно.

Ряды в $\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность в $\overline{\mathbb{R}}$. Если среди a_n не встречаются бесконечности разных знаков, то сумма ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ определяется так же, как и для числовых рядов. В противном случае она не существует. Наиболее часто мы будем иметь дело

с неотрицательными рядами. Для них сохраняются основные свойства неотрицательных числовых рядов. В частности, справедлива теорема о перестановке ряда. Определение суммы неотрицательно-го счетного семейства сохраняется для семейств в $[0, +\infty]$.

Сумма функционального ряда, общим членом которого является последовательность функций вида $f_n: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, определяется поточечно. Если все функции f_n неотрицательны на E , то сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ задана всюду на E . В главе 10, посвященной интегралу, мы изучим такие ряды более подробно.

§ 2. Системы множеств

Под *системой подмножеств* множества X мы будем понимать любое множество подмножеств X . Такой термин благозвучнее, чем “множество подмножеств”. Кроме того, для систем множеств мы расширим стандартный набор теоретико-множественных операций, введенный в § 1 главы 1. Системы множеств будут обозначаться готическими или рукописными буквами, чтобы их было легче выделять в тексте. Систему *всех* подмножеств X мы будем обозначать символом $\mathfrak{A}(X)$.

Пусть \mathfrak{A} — система подмножеств X . Мы будем называть ее *замкнутой* относительно операции пересечения, объединения или разности, если для любых множеств $A, B \in \mathfrak{A}$ результат соответствующей операции над этими множествами также попадает в \mathfrak{A} . Это понятие будет удобно при описании систем множеств специального типа.

С системами множеств связано несколько общих понятий. Поскольку они будут использоваться на протяжении всей главы, мы обсудим их сразу. Пусть X — некоторое множество, \mathfrak{A} — система его подмножеств.

Дизъюнктные системы. Множества A и B называются *дизъюнктными*, если $A \cap B = \emptyset$. Для объединения дизъюнктных множеств будет использоваться обозначение $A \vee B$. Более того, такая запись *предполагает* дизъюнктность A и B , и мы не всегда будем явно оговаривать это условие.

Система \mathfrak{A} называется *дизъюнктной*, если любые два различных ее элемента дизъюнкты. Для объединения всех множеств, входя-

щих в дизъюнктную систему \mathfrak{A} , будет использоваться запись $\bigvee_{A \in \mathfrak{A}} A$.
 В частности, если $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и элементы семейства $\{A_n\}_{n=1}^N$ попарно дизъюнктны, их объединение обозначается символом $\bigvee_{n=1}^N A_n$.

Разбиения множеств. Пусть $A \subset X$. Система \mathcal{E} подмножеств X называется *разбиением* A , если она дизъюнктна и $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = A$.

При дополнительном условии $\mathcal{E} \subset \mathfrak{A}$ систему \mathcal{E} называют \mathfrak{A} -*разбиением* E , а про множество A говорят, что оно *допускает* \mathfrak{A} -*разбиение*. Разбиение называют *конечным* или *счетным*, если таковой является система \mathcal{E} .

Замечание. Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\{A_n\}_{n=1}^N$ — последовательность множеств, $A = \bigcup_{n=1}^N A_n$. Тогда система множеств B_n , определяемых равенствами

$$B_1 = A_1, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \quad (n \in \mathbb{N}, n \leq N), \quad (1)$$

является разбиением A .

Действительно, множества B_n дизъюнктны, поскольку для любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n \leq N$

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad B_m \subset A_m \subset \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k,$$

откуда $B_n \cap B_m = \emptyset$. Проверим равенство

$$\bigcup_{k=1}^N B_k = \bigcup_{k=1}^N A_k.$$

Так как $B_k \subset A_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, левая часть искомого равенства содержится в правой. Обратно, пусть $x \in \bigcup_{k=1}^N A_k$. Обозначим через

n наименьший индекс, для которого $x \in A_n$. Если $n = 1$, то $x \in B_1$, а при остальных n

$$x \in A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k = B_n.$$

В обоих случаях $x \in B_n \subset \bigcup_{k=1}^N B_k$. \square

Сравнение систем множеств. Пусть \mathfrak{B} — система подмножеств X , причём $\bigcup_{E \in \mathfrak{A}} E = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$. Говорят, что \mathfrak{A} *мельче* \mathfrak{B} или \mathfrak{A} *подчинена* \mathfrak{B} , если для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ либо множества A и B дизъюнкты, либо $A \subset B$. Докажем несколько простых свойств отношения мелкости.

1) Если \mathfrak{A} мельче \mathfrak{B} , то для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$B = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}: A \subset B} A.$$

В случае дизъюнктности системы \mathfrak{A} верно и обратное.

Действительно, если \mathfrak{A} мельче \mathfrak{B} и $B \in \mathfrak{B}$, то

$$B = \left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \right) \cap B = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} (A \cap B) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}: A \cap B \neq \emptyset} (A \cap B) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}: A \subset B} A.$$

Докажем обратное утверждение. Если оно неверно, то существуют такие $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$, что $A \not\subset B$ и $A \cap B \neq \emptyset$. Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$, и в силу дизъюнктности системы \mathfrak{A}

$$x \notin \bigcup_{A' \in \mathfrak{A}: A' \subset B} A' = B,$$

что невозможно. \square

2) Отношение мелкости является транзитивным: если системы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ имеют одинаковое объединение элементов, причём \mathfrak{A} мельче \mathfrak{B} и \mathfrak{B} мельче \mathfrak{C} , то \mathfrak{A} мельче \mathfrak{C} . Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}$, $C \in \mathfrak{C}$ и $A \cap C \neq \emptyset$. По предыдущему свойству множество C есть

объединение элементов системы \mathfrak{B} , лежащих в C . Поэтому найдется такое $B \in \mathfrak{B}$, что $A \cap B \neq \emptyset$, откуда $A \subset B \subset C$. \square

3) Если $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ — разбиения одного и того же множества, то существует разбиение \mathfrak{C} того же множества, которое мельче \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Действительно, положим

$$\mathfrak{C} = \{A \cap B: A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Дизъюнктность системы \mathfrak{C} очевидна. Кроме того,

$$\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} (A \cap B) = \left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \right) \cap \left(\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \right) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A.$$

Проверим для определенности, что \mathfrak{C} мельче \mathfrak{A} . Пусть множества $C \in \mathfrak{C}$ и $A \in \mathfrak{A}$ пересекаются. Тогда в силу дизъюнктности \mathfrak{A} множество C имеет вид $A \cap B$ при некотором $B \in \mathfrak{B}$, откуда $C \subset A$. \square

Симметричные системы. Напомним читателю, что дополнением множества $A \subset X$ называется $A^c = X \setminus A$ (см. § 1 главы 1). Система \mathfrak{A} называется *симметричной*, если для любого множества $A \in \mathfrak{A}$ его дополнение A^c также входит в \mathfrak{A} . Симметричными будут наиболее важные для нас системы — алгебры и сигма-алгебры.

Произведение систем. Пусть Y — множество, \mathfrak{B} — система подмножеств Y . Рассмотрим систему подмножеств $X \times Y$

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = \{A \times B: A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}.$$

Она называется *произведением систем* \mathfrak{A} и \mathfrak{B} . Такие системы будут использоваться при построении произведения мер.

Замечание. Не следует путать произведение систем с декартовым произведением множеств. Мы не будем использовать декартово произведение систем множеств, поэтому введенное обозначение не приведет к путанице.

Как выбирать системы множеств, чтобы с ними было удобно работать? Во-первых, система должна быть достаточно “богатой”, например, замкнутой относительно пересечения, объединения и разности. Во-вторых, желательно, чтобы система допускала достаточно простое конструктивное описание, иначе будет трудно

задавать на ней функции. Эти два требования не всегда можно удовлетворить одновременно. Поиск компромисса между ними привел к определению четырех типов систем множеств. Мы рассмотрим их по порядку.

Определение 1. Полукольцо подмножеств. Пусть X — множество, \mathcal{P} — система подмножеств X , удовлетворяющая трем аксиомам:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{P}$;
- 2) если $A, B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{P}$;
- 3) для любых $A, B \in \mathcal{P}$ существует такая конечная дизъюнктивная система $\{P_1, \dots, P_n\} \subset \mathcal{P}$, что

$$A \setminus B = \bigvee_{k=1}^n P_k.$$

Тогда \mathcal{P} называется *полукольцом* подмножеств X .

Замечание. В аксиоме 3 можно считать, что $B \subset A$. Действительно, $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, а множество $A \cap B$ принадлежит \mathcal{P} и содержится в A .

По определению полукольцо замкнуто относительно пересечения. Разность элементов \mathcal{P} допускает конечное \mathcal{P} -разбиение, но в \mathcal{P} может не лежать. Далее мы покажем, что то же самое верно для объединения элементов полукольца. Симметрией полукольцо тоже, вообще говоря, не обладает. Все это будет ясно из примеров, приводимых ниже.

Докажем вначале утверждение, обобщающее третью аксиому полукольца.

Теорема 1. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , $n \in \mathbb{N}$, $A, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}$. Тогда существует конечная дизъюнктивная система $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, для которой

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k = \bigvee_{Q \in \mathcal{Q}} Q.$$

Замечание. Для практических целей удобнее записать утверждение теоремы так:

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcap_{k=1}^m Q_k, \quad \text{где } Q_1, \dots, Q_m \in \mathcal{P}.$$

Доказательство. Можно не умаляя общности считать, что $B_k \subset A$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$, иначе заменим множества B_k на $B_k \cap A$. Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 1$ достаточно сослаться на аксиому 3 из определения полукольца. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ утверждение доказано, то есть

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcap_{k=1}^m C_k, \quad \text{где } C_1, \dots, C_m \in \mathcal{P}.$$

Тогда

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k \right) \setminus B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^m C_k \setminus B_{n+1} = \bigcap_{k=1}^m (C_k \setminus B_{n+1}).$$

Для любого $k \in \{1, \dots, m\}$ по определению полукольца

$$C_k \setminus B_{n+1} = \bigcap_{j=1}^{s_k} Q_{kj}, \quad \text{где } s_k \in \mathbb{N}, \quad Q_{kj} \in \mathcal{P} \quad \text{при всех } j = 1, \dots, s_k.$$

Таким образом,

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k = \bigcap_{k=1}^m \bigcap_{j=1}^{s_k} Q_{kj}.$$

Множества Q_{kj} образуют конечную дизъюнктную систему элементов \mathcal{P} ; ее и следует взять в качестве \mathcal{Q} . \square

Следствие. Пусть $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\{A_n\}_{n=1}^N$ — семейство множеств из полукольца \mathcal{P} , $A = \bigcup_{n=1}^N A_n$. Тогда существуют такие конечные дизъюнктные системы $\{\mathcal{Q}_n\}_{n=1}^N$ в \mathcal{P} , что

$$A = \bigcap_{n=1}^N \bigcap_{B \in \mathcal{Q}_n} B.$$

Доказательство. Определим множества B_n формулами (1). Ранее было доказано равенство $A = \bigvee_{n=1}^N B_n$. По теореме 1 каждое из множеств B_n допускает конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{Q}_n . Эти \mathcal{Q}_n и будут искомыми. \square

Доказанное следствие позволяет строить \mathcal{P} -разбиения не более чем счетных объединений элементов \mathcal{P} . Полученные таким образом разбиения не обязательно подчинены системе $\{A_n\}$. Оказывается, что для конечных объединений существуют конечные \mathcal{P} -разбиения, подчиненные $\{A_n\}$. Докажем соответствующее утверждение.

Теорема 2. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$, $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Тогда существует конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{E} множества A , подчиненное системе $\{A_1, \dots, A_n\}$.

Доказательство проведем индукцией по n . База индукции очевидна. Допустим, что уже построено конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{Q} множества $A' = \bigcup_{k=1}^n A_k$, подчиненное $\{A_1, \dots, A_n\}$. Положим

$$\mathcal{E}'_1 = \{E \cap A_{n+1} : E \in \mathcal{Q}\}, \quad \mathcal{E}'_2 = \{E \setminus A_{n+1} : E \in \mathcal{Q}\}.$$

Достаточно доказать, что система

$$\mathcal{E}' = \{A_{n+1} \setminus A'\} \cup \mathcal{E}'_1 \cup \mathcal{E}'_2$$

является разбиением A , подчиненным $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$. Действительно, по теореме 1 множества $A_{n+1} \setminus A'$ и $E \setminus A_{n+1}$ при $E \in \mathcal{Q}$ допускают конечное \mathcal{P} -разбиение. Заменяя в \mathcal{E}' эти множества соответствующими разбиениями, мы получим новую систему \mathcal{E} , которая уже будет \mathcal{P} -разбиением A . Кроме того, она мельче \mathcal{E}' , и в силу транзитивности мельче, чем $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$.

Проверим свойства системы \mathcal{E}' . Покажем вначале, что \mathcal{E}' является разбиением A . Заметим, что

$$\begin{aligned} \bigcup_{E \in \mathcal{E}'} E &= (A_{n+1} \setminus A') \cup \bigcup_{E \in \mathcal{Q}} (E \cap A_{n+1}) \cup (E \setminus A_{n+1}) = \\ &= (A_{n+1} \setminus A') \cup \bigcup_{E \in \mathcal{Q}} E = (A_{n+1} \setminus A') \cup A' = A_{n+1} \cup A' = A. \end{aligned}$$

Докажем дизъюнктность \mathcal{E}' . Системы \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 дизъюнкты по определению. Пусть $E_1 \in \mathcal{E}'_1$ и $E_2 \in \mathcal{E}'_2$. Множества E_1 и E_2 не пересекаются с $A_{n+1} \setminus A'$, так как они оба содержатся в A' . Между собой E_1 и E_2 также не пересекаются, поскольку $E_1 \subset A_{n+1}$, а E_2 дизъюнктно с A_{n+1} .

Осталось проверить, что система \mathcal{E}' подчинена $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$. Пусть $k \in \{1, \dots, n+1\}$ и множество $B \in \mathcal{E}'$ пересекается с A_k . Если $k \leq n$, то либо $B = E \cap A_{n+1}$, либо $B = E \setminus A_{n+1}$ при некотором $E \in \mathcal{Q}$. Поскольку $B \subset E$, множество E пересекается с A_k . По определению \mathcal{Q} отсюда вытекает, что $E \subset A_k$ и, тем более, $B \subset A_k$. Если же $k = n+1$, то либо $B \in \mathcal{E}'_1$, либо $B = A_{n+1} \setminus A'$. В любом случае $B \subset A_{n+1}$. \square

Для построения содержательных примеров нам потребуется утверждение, что произведение полуколец есть полукольцо. Сформулируем его.

Теорема 3. Произведение полуколец. Пусть X_1, X_2 — множества, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — полукольца подмножеств X_1, X_2 соответственно. Тогда $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ — полукольцо подмножеств $X_1 \times X_2$.

Доказательство. Положим $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ и проверим для \mathcal{P} аксиомы полукольца. Первая из них тривиальна: $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$. Вторая аксиома также очевидна: если $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_1$ и $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}_2$, то $P_1 \cap P_2 \in \mathcal{P}_1$ и $Q_1 \cap Q_2 \in \mathcal{P}_2$, откуда

$$(P_1 \times Q_1) \cap (P_2 \times Q_2) = (P_1 \cap P_2) \times (Q_1 \cap Q_2) \in \mathcal{P}.$$

Осталось проверить третью аксиому. Пусть $A = P \times Q \in \mathcal{P}$ и $B = P_0 \times Q_0 \in \mathcal{P}$. По замечанию к определению 1 можно считать $B \subset A$, то есть $P_0 \subset P$ и $Q_0 \subset Q$. По определению полукольца мы можем подобрать такие $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}_1$ и $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}_2$, что

$$P \setminus P_0 = \bigvee_{j=1}^m P_j, \quad Q \setminus Q_0 = \bigvee_{k=1}^n Q_k.$$

Тогда

$$A = P \times Q = \left(\bigvee_{j=0}^m P_j \right) \times \left(\bigvee_{k=0}^n Q_k \right) = \bigvee_{j=0}^m \bigvee_{k=0}^n (P_j \times Q_k).$$

Вычитая из обеих частей этого равенства множество $B = P_0 \times Q_0$, мы получим требуемое представление для $A \setminus B$. \square

Обратимся теперь к примерам полуколец. Для любого множества X самое “бедное” множествами полукольцо состоит только из пустого множества, а самое “богатое” содержит все подмножества X . Рассмотрим теперь более содержательный и важный для нас пример — *полукольцо ячеек*. Рекомендуем читателю вспомнить описание n -мерных параллелепипедов из § 3 главы 5.

Определение 2. Ячейки в \mathbb{R}^n . Пусть $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, причем $a_k \leq b_k$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда параллелепипед $[a, b)$ мы будем называть *n -мерной ячейкой* или *ячейкой в \mathbb{R}^n* . Если все ребра $[a, b)$ имеют одинаковую длину, то ячейка называется *кубической*. Мы будем обозначать множество всех ячеек в \mathbb{R}^n через \mathcal{P}^n , а множество всех кубических ячеек — через \mathcal{P}_0^n .

Замечание 1. В теории меры и интеграла будет удобно использовать слово “куб” как синоним термина “кубическая ячейка”, если не оговорено противное. Это не соответствует соглашениям главы 5, где кубами назывались кубические параллелепипеды произвольного вида.

Замечание 2. Договоримся для $a, b \in \mathbb{R}^n$ использовать запись $a \leq b$, которая означает

$$a_k \leq b_k \quad \text{при всех } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Аналогичное соглашение будет действовать и для строгих неравенств.

Докажем теперь, что n -мерные ячейки образуют полукольцо подмножеств \mathbb{R}^n .

Теорема 4. Для любого $n \in \mathbb{N}$ система \mathcal{P}^n образует полукольцо подмножеств \mathbb{R}^n .

Доказательство проведем индукцией по n . Проверим вначале базу индукции. Ясно, что $\emptyset = [1, 1) \in \mathcal{P}^1$. Очевидно также, что пересечение полуинтервалов есть полуинтервал. Если $[a, b) \subset [c, d)$, то $[c, d) \setminus [a, b) = [c, a) \cup [b, d)$. Таким образом, \mathcal{P}^1 есть полукольцо.

Предположим теперь, что $n \in \mathbb{N}$ и для $k \in \{1, \dots, n\}$ доказано, что \mathcal{P}^k является полукольцом. Так как $\mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^1$, по индукционному предположению и теореме 3 полукольцом окажется и система \mathcal{P}^{n+1} . \square

Замечание 1. Кубические ячейки в \mathbb{R}^n при $n > 1$ полукольца не образуют. Тем не менее, во многих рассуждениях они оказываются удобнее произвольных ячеек благодаря своей геометрической простоте.

Замечание 2. Полукольцо \mathcal{P}^n не замкнуто относительно объединения и разности даже при $n = 1$. Ясно также, что система \mathcal{P}^n не обладает симметрией: дополнение ячейки в \mathbb{R}^n ячейкой не является. Польза полукольца \mathcal{P}^n заключается в том, что ячейки имеют простую геометрическую структуру. Это будет использовано в следующем параграфе при определении классического объема.

Рассмотрим теперь системы множеств, замкнутые относительно основных теоретико-множественных операций.

Определение 3. Кольцо подмножеств. Пусть X — множество, \mathcal{R} — непустая система подмножеств X , замкнутая относительно операций пересечения, объединения и разности. Тогда \mathcal{R} называется *кольцом* подмножеств X .

Замечание 1. Любое кольцо является полукольцом: $\emptyset = A \setminus A$ для $A \in \mathcal{R}$, а остальные аксиомы очевидны. Обратное неверно: система n -мерных ячеек кольцом не является.

Теорема 5. Пусть X — множество, \mathcal{R} — кольцо подмножеств X , $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность элементов \mathcal{R} .

1) Система $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, определяемая формулами (1), является \mathcal{R} -разбиением множества $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

2) Множества $C_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ и $D_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ лежат в \mathcal{R} при всех $n \in \mathbb{N}$, и верны равенства

$$\bigcup_{n=1}^\infty C_n = \bigcup_{n=1}^\infty A_n, \quad \bigcap_{n=1}^\infty D_n = \bigcap_{n=1}^\infty A_n.$$

Доказательство. По индукции легко проверяется, что конечные объединения и пересечения элементов \mathcal{R} попадают в \mathcal{R} . Поэтому множества B_n , C_n и D_n лежат в \mathcal{R} при любом $n \in \mathbb{N}$. Пусть $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Первое утверждение очевидно, поскольку ранее было доказано, что множества B_n разбивают A . Во втором утверждении ограничимся проверкой первого соотношения. Заметим, что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A = A.$$

Тогда все включения обращаются в равенства и, в частности, $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = A$. \square

Замечание 2. По второму утверждению теоремы 5 конечные объединения и пересечения элементов \mathcal{R} также попадают в \mathcal{R} . Это свойство называют *замкнутостью \mathcal{R} относительно конечных объединений и пересечений*.

Замечание 3. Множества B_n попарно дизъюнкты, а C_n и D_n *монотонны*, то есть

$$C_n \subset C_{n+1}, \quad D_n \supset D_{n+1} \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, в счетных объединениях элементов кольца можно считать множества дизъюнктными или возрастающими, а в счетных пересечениях — убывающими.

Иногда бывает полезно расширить полукольцо до кольца наиболее экономным способом. Покажем, как это можно сделать.

Теорема 6. Кольцо, порожденное полукольцом. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X ,

$$\mathcal{R} = \{A_1 \cup \dots \cup A_n : n \in \mathbb{N}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Система \mathcal{R} — кольцо подмножеств X , $\mathcal{R} \supset \mathcal{P}$.
- 2) Если \mathcal{R}' — другое кольцо подмножеств X , содержащее \mathcal{P} , то $\mathcal{R}' \supset \mathcal{R}$.

Замечание 1. Утверждение 2 говорит о том, что \mathcal{R} — наименьшее из колец, содержащих \mathcal{P} . Его называют *кольцом, порожденным \mathcal{P}* .

Доказательство. Второе утверждение очевидно: если множества A_1, \dots, A_n принадлежат \mathcal{P} , то они попадают и в \mathcal{R}' , а тогда в \mathcal{R}' входит и их объединение. Ясно также, что $\mathcal{R} \supset \mathcal{P}$. Поэтому достаточно проверить, что \mathcal{R} является кольцом. Пусть $A, B \in \mathcal{R}$. Запишем их в виде

$$A = \bigcup_{j=1}^m A_j, \quad B = \bigcup_{k=1}^n B_k, \quad \text{где } A_j, B_k \in \mathcal{P}.$$

Очевидно, что $A \cup B \in \mathcal{R}$. Кроме того,

$$A \cap B = \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{k=1}^n (A_j \cap B_k) \in \mathcal{R}.$$

Наконец,

$$A \setminus B = \bigcup_{j=1}^m \left(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^n B_k \right).$$

По теореме 1 каждая из разностей в правой части есть конечное объединение элементов \mathcal{P} . Поэтому в таком виде представляется и множество $A \setminus B$, то есть $A \setminus B \in \mathcal{R}$. \square

Замечание 2. В определении кольца, порожденного полукольцом, можно считать множества A_1, \dots, A_n дизъюнктивными. Это вытекает из следствия теоремы 1.

Пример. Пусть \mathcal{R} — система всех ограниченных в \mathbb{R}^n множеств. Тогда \mathcal{R} образует кольцо подмножеств \mathbb{R}^n .

Поскольку дополнение ограниченного в \mathbb{R}^n множества не ограничено, система ограниченных подмножеств \mathbb{R}^n не симметрична. Таким образом, симметричность и замкнутость относительно теоретико-множественных операций — независимые свойства. Рассмотрим их взаимосвязь более подробно.

Лемма 1. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — симметричная система подмножеств X . Равносильны следующие утверждения.

- 1) \mathfrak{A} замкнута относительно разности.
- 2) \mathfrak{A} замкнута относительно пересечения.
- 3) \mathfrak{A} замкнута относительно объединения.

Таким образом, для симметричной системы подмножеств X замкнутость относительно одной из теоретико-множественных операций автоматически влечет замкнутость относительно двух других.

Доказательство. Проверим вначале равносильность 1) и 2). Пусть $A, B \in \mathfrak{A}$. Справедливы равенства

$$A \cap B = A \setminus (A \setminus B), \quad A \setminus B = A \cap B^c.$$

Из первого вытекает, что 1) влечет 2), из второго в силу симметрии \mathfrak{A} — что 2) влечет 1). Докажем теперь равносильность 2) и 3). Для любых $A, B \in \mathfrak{A}$ в силу правил де Моргана (см. § 1 главы 1)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Пусть вначале выполнено утверждение 2). Из симметрии системы $A^c, B^c \in \mathfrak{A}$. Тогда в силу 2)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in \mathfrak{A}, \quad \text{откуда } A \cup B \in \mathfrak{A}.$$

Переход 3) \Rightarrow 2) проверяется аналогично. \square

Определение 4. Алгебра подмножеств. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — непустая симметричная система подмножеств X , замкнутая относительно операции пересечения, объединения или разности. Тогда \mathfrak{A} называется *алгеброй подмножеств* X .

Замечание 1. В силу леммы 1 алгебру можно определить как *симметричное кольцо*. Другая эквивалентная характеристика алгебры такова: это *кольцо, содержащее X* . Действительно, из симметрии системы вытекает, что $X = \emptyset^c \in \mathfrak{A}$. Обратно, если $X \in \mathfrak{A}$, то $A^c = X \setminus A \in \mathfrak{A}$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.

Замечание 2. Любое кольцо \mathcal{R} подмножеств X можно минимальным образом расширить до алгебры с помощью следующей процедуры симметризации. Положим

$$\mathfrak{A} = \mathcal{R} \cup \{A^c: A \in \mathcal{R}\}.$$

Тогда справедливы следующие рассуждения.

- 1) \mathfrak{A} — алгебра подмножеств X .
- 2) Если \mathfrak{A}' — другая алгебра подмножеств X , содержащая \mathcal{R} , то $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$.

Таким образом, \mathfrak{A} — наименьшая из алгебр подмножеств X , содержащих \mathcal{R} . Ее называют *алгеброй, порожденной кольцом \mathcal{R}* .

Докажем это замечание. Второе утверждение очевидно: вместе с любым множеством из \mathcal{R} симметричная система \mathfrak{A}' содержит и его дополнение. Проверим, что \mathfrak{A} образует алгебру. Действительно, для любых $A, B \in \mathcal{R}$

$$A \cap B^c = A \setminus B \in \mathfrak{A}, \quad A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathfrak{A}.$$

Таким образом, система \mathfrak{A} замкнута относительно пересечения и симметрична. В силу леммы 1 отсюда вытекает, что она является алгеброй. \square

Пример. Пусть

$$\mathfrak{A} = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ ограничено или } A^c \text{ ограничено}\}. \quad (2)$$

Система \mathfrak{A} является алгеброй подмножеств \mathbb{R}^n , поскольку она получена симметризацией кольца ограниченных подмножеств \mathbb{R}^n .

Ранее мы видели, что кольца и алгебры замкнуты относительно конечных объединений и пересечений. Полезно усилить эти свойства, заменив конечные операции *счетными*.

Определение 5. Сигма-алгебра подмножеств. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — алгебра подмножеств, *замкнутая относительно счетных объединений*, то есть

$$\text{если } A_k \in \mathfrak{A} \text{ при любом } k \in \mathbb{N}, \text{ то } \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}.$$

Тогда \mathfrak{A} называется *сигма-алгеброй* (или, более кратко, *σ -алгеброй*) подмножеств X .

Замечание 1. Сигма-алгебра \mathfrak{A} *замкнута относительно счетных пересечений*, то есть

$$\text{если } A_k \in \mathfrak{A} \text{ при любом } k \in \mathbb{N}, \text{ то } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}.$$

Действительно, в силу правил де Моргана

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^c \right)^c \in \mathfrak{A}.$$

Замечание 2. Очевидно, что σ -алгебра является алгеброй. Обратное неверно. Рассмотрим алгебру (2) при $n = 1$. Множества $A_k = [0, k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ ограничены и потому входят в \mathfrak{A} , однако

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = [0, +\infty) \notin \mathfrak{A},$$

поскольку не ограничено ни само это множество, ни его дополнение.

Замечание 3. Сигма-алгебра — это симметричная система, замкнутая относительно не более чем счетных объединений. Равносильность такого определения исходному вытекает из леммы 1.

Пример. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — система таких множеств $A \subset X$, что либо A , либо A^c не более чем счетно. Тогда \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств X . Проверка этого утверждения предоставляется читателю.

Ранее мы описали, как наиболее экономным образом расширить полукольцо до кольца (теорема 6) и кольцо до алгебры (замечание 2 к определению 4). Рассмотрим теперь аналогичную задачу о минимальном расширении системы множеств до σ -алгебры.

Определение 6. Порожденные σ -алгебры. Пусть X — множество, \mathcal{E} — система подмножеств X , \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств X , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) $\mathfrak{A} \supset \mathcal{E}$;
- 2) если \mathfrak{A}' — σ -алгебра, содержащая \mathcal{E} , то $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}$.

Тогда \mathfrak{A} называется σ -алгеброй, порожденной системой \mathcal{E} .

Иными словами, σ -алгебра, порожденная \mathcal{E} , — это наименьшая из σ -алгебр, содержащих систему \mathcal{E} .

Замечание 1. Для любой системы \mathcal{E} порожденная ей σ -алгебра существует и единственна.

Доказательство. Единственность очевидна: если σ -алгебры \mathfrak{A} и \mathfrak{A}' порождены системой \mathcal{E} , то в силу их минимальности $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, откуда $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Докажем теперь существование. Обозначим через Ω множество всех σ -алгебр, содержащих \mathcal{E} ; оно непусто, поскольку содержит $\mathfrak{A}(X)$. Положим

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{\mathfrak{A}' \in \Omega} \mathfrak{A}'.$$

Так как система \mathfrak{A} удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 6, достаточно проверить, что она является σ -алгеброй.

Покажем, что система \mathfrak{A} симметрична. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда множество A входит в любую алгебру $\mathfrak{A}' \in \Omega$, а вместе с ним в \mathfrak{A}' входит и A^c . Ввиду произвольности \mathfrak{A}' отсюда вытекает включение $A^c \in \mathfrak{A}$.

Докажем, что \mathfrak{A} есть σ -алгебра. Пусть \mathcal{Q} — не более чем счетная система элементов \mathfrak{A} . В силу замечания 3 к определению 5 достаточно проверить, что $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} Q \in \mathfrak{A}$. Любая σ -алгебра $\mathfrak{A}' \in \Omega$ содержит все элементы \mathcal{Q} и, значит, объединение множеств из \mathcal{Q} . Отсюда ввиду произвольности \mathfrak{A}' вытекает требуемое включение. \square

Замечание 2. Аналогичным образом можно расширить произвольную систему подмножеств X до алгебры.

Приведем важнейший пример порожденной σ -алгебры.

Определение 7. Борелевская σ -алгебра. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Сигма-алгебра подмножеств \mathbb{R}^n , порожденная системой всех открытых в \mathbb{R}^n множеств, называется *борелевской σ -алгеброй* в \mathbb{R}^n и обозначается символом \mathfrak{B}^n . Множества, входящие в \mathfrak{B}^n , называются *борелевскими*.

Отметим, что построение порожденных колец и алгебр проводилось конструктивно, а порожденных σ -алгебр — нет. В нашем распоряжении нет явного описания элементов порожденных σ -алгебр и, в частности, борелевских множеств. Тем не менее, сейчас мы рассмотрим несколько важных систем подмножеств \mathbb{R}^n , заведомо входящих в \mathfrak{B}^n .

1. Открытые и замкнутые множества. Открытые множества являются борелевскими по определению, а замкнутые — как

дополнения открытых. В частности, одноточечные множества являются замкнутыми и, значит, борелевскими. Более интересные примеры борелевских множеств — открытые и замкнутые шары в \mathbb{R}^n (см. § 3 главы 5).

2. Конечные и счетные множества. Любое не более чем счетное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ представимо в виде

$$A = \bigcup_{k=1}^N \{x^k\}, \quad \text{где } x^k \in \mathbb{R}^n, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Одноточечные множества являются борелевскими, и их не более чем счетные объединения — тоже. Разумеется, борелевским будет и множество A^c .

3. Множества типа G_δ и F_σ . Множеством типа G_δ называется счетное пересечение открытых в \mathbb{R}^n множеств, а множеством типа F_σ — счетное объединение замкнутых в \mathbb{R}^n множеств. Множества типа G_δ или F_σ — борелевские, поскольку таковыми являются открытые и замкнутые множества. Отметим еще два полезных свойства этих множеств.

1) Подмножество \mathbb{R}^n имеет тип G_δ тогда и только тогда, когда его дополнение имеет тип F_σ . Действительно, если $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность открытых множеств, то

$$\left(\bigcap_{k=1}^\infty G_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^\infty (\mathbb{R}^n \setminus G_k) \text{ — множество типа } F_\sigma.$$

Обратный переход проверяется аналогично.

2) Множество типа F_σ есть счетное объединение компактных множеств. Действительно, пусть $\{F_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность замкнутых множеств, $F = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$. Тогда система

$$\mathcal{E} = \{F_k \cap [-m, m]^n : k, m \in \mathbb{N}\}$$

счетна, состоит из компактных множеств, а объединение ее элементов дает F .

Замечание. Множество типа G_δ есть пересечение *убывающей* последовательности открытых множеств, а множество типа F_σ — объединение *возрастающей* последовательности замкнутых (или даже компактных) множеств. Это вытекает из теоремы 5 и замечания к ней, поскольку конечные пересечения открытых множеств открыты, а конечные объединения замкнутых множеств замкнуты. Утверждение про компактные множества получается из свойства 2.

4. Параллелепипеды в \mathbb{R}^n . Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$. Параллелепипеды (a, b) и $[a, b]$ — борелевские множества, поскольку первый из них открыт, а второй — замкнут (см. § 3 главы 5). Параллелепипеды $[a, b]$ и $(a, b]$ — тоже борелевские множества. Для $[a, b]$ это будет вытекать из следующей леммы. Случай $(a, b]$ разбирается аналогично.

Лемма 2. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, $P = [a, b]$. Тогда существуют последовательности открытых параллелепипедов $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ и замкнутых параллелепипедов $\{Q_k\}_{k=1}^\infty$, для которых

$$\bigcap_{k=1}^\infty P_k = P = \bigcup_{k=1}^\infty Q_k.$$

В частности, мы получаем, что любая ячейка — множество как типа G_δ , так и типа F_σ .

Доказательство. Обозначим $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ и положим

$$P_k = (a - \frac{1}{k}e, b), \quad Q_k = [a, b - \frac{1}{k}e] \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Эти последовательности — искомые. Мы ограничимся проверкой первого равенства в утверждении леммы. Так как при любом $k \in \mathbb{N}$ $P \subset P_k$, мы получаем включение

$$\bigcap_{k=1}^\infty P_k \supset P.$$

Обратно, пусть $x \in \bigcap_{k=1}^\infty P_k$. Тогда $x \in P_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, откуда

$$a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i \quad \text{для любых } k \in \mathbb{N} \text{ и } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $k \rightarrow \infty$, мы получим $a_i \leq x_i < b_i$ при всех $i \in \{1, \dots, n\}$, то есть $x \in P$. Тем самым доказано обратное включение. \square

В § 6 главы 4 мы использовали термины “квадрируемые фигуры” и “кубируемые тела”. Далее мы приведем теорему, частично поясняющую их смысл. Будет доказано, что любое непустое открытое в \mathbb{R}^n множество представимо в виде счетного объединения дизъюнктивных кубов. Для этого нам потребуется специальная система кубических ячеек, называемых *двоичными*.

Определение 8. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Кубические ячейки вида

$$\left[\frac{k_1}{2^m}, \frac{k_1 + 1}{2^m} \right) \times \dots \times \left[\frac{k_n}{2^m}, \frac{k_n + 1}{2^m} \right) \quad (k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$

называются *двоичными n -мерными ячейками ранга m* . Символом \mathcal{D}_m^n мы будем обозначать систему всех двоичных n -мерных ячеек ранга m . Положим также $\mathcal{D}^n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{D}_m^n$.

Замечание. Система \mathcal{D}^n счетна. Действительно, при любом $m \in \mathbb{Z}_+$ отображение, сопоставляющее (k_1, \dots, k_n) ячейку (3), есть биекция \mathbb{Z}^n на \mathcal{D}_m^n . Поэтому система \mathcal{D}_m^n равносильна \mathbb{Z}^n и, значит, счетна. Тогда система \mathcal{D}^n счетна как счетное объединение счетных множеств (см. § 4 главы 1). \square

Лемма 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ система \mathcal{D}_m^n является разбиением \mathbb{R}^n .
- 2) Если $m, s \in \mathbb{Z}_+$, $m > s$, то система \mathcal{D}_m^n мельче, чем \mathcal{D}_s^n .

Доказательство. 1) Дизъюнктивность системы \mathcal{D}_m^n очевидна, поэтому достаточно доказать, что \mathcal{D}_m^n покрывает \mathbb{R}^n . Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Для любого $i \in \{1, \dots, n\}$ положим $k_i = [2^m x_i]$. Тогда

$$\frac{k_i}{2^m} \leq x_i < \frac{k_i + 1}{2^m} \quad \text{при всех } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Таким образом, x принадлежит двоичной ячейке ранга m вида (3).

2) Можно ограничиться случаем $n = 1$: при произвольном n достаточно применить одномерный результат к координатным полуинтервалам ячеек. Будем также считать, что $m = s + 1$: общий случай легко получится по индукции ввиду транзитивности отношения мелкости. Пусть теперь $P = [\frac{k}{2^s}, \frac{k+1}{2^s}) \in \mathcal{D}_s^n$. Тогда

$$P = \left[\frac{2k}{2^m}, \frac{2k+1}{2^m} \right) \cup \left[\frac{2k+1}{2^m}, \frac{2k+2}{2^m} \right).$$

Ячейки, стоящие в правой части, содержатся в P , а остальные ячейки ранга m не пересекаются с P по дизъюнктности \mathcal{D}_m^n . \square

Теорема 7. Структура открытых множеств. Пусть $n \in \mathbb{N}$, G — непустое открытое подмножество \mathbb{R}^n . Тогда существует счетная дизъюнктная система $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_0^n$, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) замыкание любой ячейки $P \in \mathcal{E}$ содержится в G ;
- 2) $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P = G$.

Договоримся символом $P \Subset G$ обозначать условие, что P лежит в G вместе с замыканием.

Доказательство. Назовем *максимальной для G* двоичную ячейку $P \Subset G$, удовлетворяющую следующему условию:

$$\text{если } Q \in \mathcal{D}^n \text{ и } P \subset Q \Subset G, \text{ то } P = Q$$

(оно означает, что нельзя расширить P до большей двоичной ячейки, лежащей в G вместе с замыканием). Положим

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{D}^n: P \text{ максимальна для } G\}.$$

Условие 1) выполняется для \mathcal{E} по определению. Докажем остальные свойства \mathcal{E} .

Проверим дизъюнктность \mathcal{E} . Пусть $P, Q \in \mathcal{E}$, $P \cap Q \neq \emptyset$. По лемме 3 одна из ячеек содержится в другой (например, $P \subset Q$). Тогда $P = Q$ в силу максимальной P .

Докажем, что $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P = G$. Так как все элементы \mathcal{E} содержатся в G , достаточно проверить, что $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P \supset G$. Пусть $x \in G$. Построим

вначале двоичную ячейку P (не обязательно максимальную), для которой

$$P \in G \quad \text{и} \quad x \in P. \quad (4)$$

Множество G открыто и потому содержит некоторую окрестность $V_x(r)$ точки x . Так как $2^{-m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $2^{-m}\sqrt{n} < r$. По первому утверждению леммы 3 найдется ячейка P вида (3), содержащая x . Тогда для любого y из замыкания P

$$\|y - x\| \leq \text{diam } P = 2^{-m}\sqrt{n} < r, \quad \text{откуда} \quad y \in V_x(r) \subset G.$$

Таким образом, $P \in G$, то есть ячейка P — искомая.

Построим теперь *максимальную* ячейку P , содержащую x . Обозначим через J множество рангов всех ячеек, удовлетворяющих (4). По доказанному выше $J \neq \emptyset$, поэтому в J есть наименьший элемент m , а в \mathcal{D}_m^n — ячейка P , удовлетворяющая (4). Покажем, что она максимальна. Пусть $Q \in \mathcal{D}^n$, $P \subset Q \in G$. Если $Q \neq P$, то по лемме 3 ранг Q меньше m , что невозможно по определению m .

Осталось проверить счетность \mathcal{E} . Заметим, что \mathcal{E} не более чем счетно как подмножество счетного множества \mathcal{D}^n (см. § 4 главы 1). Поэтому достаточно показать, что система \mathcal{E} бесконечна. Если это не так, то найдется конечная система ячеек $\{P_1, \dots, P_N\}$, для которой

$$G = \bigcup_{k=1}^N P_k, \quad P_k \in G \quad \text{при всех} \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Обозначим через Q_k замыкание P_k . Тогда

$$G = \bigcup_{k=1}^N P_k \subset \bigcup_{k=1}^N Q_k \subset G,$$

откуда $G = \bigcup_{k=1}^N Q_k$. Такое равенство невозможно, поскольку в левой его части стоит открытое множество, а в правой — непустое замкнутое множество, отличное (в силу его ограниченности) от \mathbb{R}^n (см. пример 1 открытых и замкнутых множеств в § 3 главы 5). Полученное противоречие завершает доказательство. \square

Следствие. Для любого $n \in \mathbb{N}$ σ -алгебры, порожденные системами \mathcal{P}^n и \mathcal{P}_0^n , совпадают с \mathfrak{B}^n .

Доказательство. Обозначим через \mathfrak{A} и \mathfrak{A}_0 σ -алгебры, порожденные \mathcal{P}^n и \mathcal{P}_0^n соответственно. Достаточно доказать, что

$$\mathfrak{B}^n \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{B}^n.$$

Ранее было проверено, что все ячейки — борелевские множества. Поэтому \mathfrak{B}^n содержит и σ -алгебру, порожденную ячейками, то есть \mathfrak{A} . Кроме того, $\mathcal{P}_0^n \subset \mathfrak{A}$, а тогда σ -алгебра \mathfrak{A}_0 , порожденная \mathcal{P}_0^n , тоже содержится в \mathfrak{A} . Наконец, по теореме 7 все открытые множества входят в \mathfrak{A}_0 , откуда $\mathfrak{B}^n \subset \mathfrak{A}_0$. \square

§ 3. Объем

Площадь и объем, изучавшиеся в главе 4, описывались как функции множества, удовлетворяющие аксиоме аддитивности. Понятие объема, которое мы рассмотрим в этом параграфе, является формализацией аддитивной функции множества. Перейдем к точным формулировкам.

Определение 1. Объем. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , $\mu: \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ — функция, удовлетворяющая двум аксиомам:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) *аддитивность*: если $A \in \mathcal{P}$, \mathcal{E} — конечное \mathcal{P} -разбиение A , то

$$\mu(A) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu(E).$$

Тогда μ называется *объемом на \mathcal{P}* .

Замечание 1. У аргумента объема принято опускать скобки, то есть писать μA вместо $\mu(A)$. Мы будем придерживаться этого соглашения.

Замечание 2. Аксиому аддитивности можно записать иначе:

$$\mu \left(\bigvee_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu A_k, \quad \text{где } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} \text{ и } \bigvee_{k=1}^n A_k \in \mathcal{P}.$$

Если \mathcal{P} является кольцом, то последнее включение всегда выполнено ввиду замкнутости кольца относительно конечных объединений.

Замечание 3. Объем множества может быть равен неотрицательному числу или $+\infty$. Если $X \in \mathcal{P}$ и $\mu X < +\infty$, то объем называется *конечным*.

Рассмотрим теперь некоторые свойства объемов. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — объем на \mathcal{P} .

1. Усиленная монотонность объема. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{P}$, A_1, \dots, A_n — дизъюнктивная система в \mathcal{P} , $A \supset \bigcup_{k=1}^n A_k$. Тогда

$$\mu A \geq \sum_{k=1}^n \mu A_k.$$

Доказательство. По теореме 1 § 2 множество $A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k$ допускает конечное \mathcal{P} -разбиение. Поэтому существует конечная дизъюнктивная система $\{B_1, \dots, B_m\} \subset \mathcal{P}$, для которой

$$A = \bigvee_{j=1}^m B_j \vee \bigvee_{k=1}^n A_k.$$

Теперь по аддитивности объема

$$\mu A = \sum_{j=1}^m \mu B_j + \sum_{k=1}^n \mu A_k \geq \sum_{k=1}^n \mu A_k. \quad \square$$

Замечание 1. Аналогичное утверждение верно для счетной системы множеств A_k :

$$\text{если } A \supset \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{то } \mu A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Для доказательства надо применить свойство усиленной монотонности к системе $\{A_k\}_{k=1}^n$, а затем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

Замечание 2. Применяя доказанное утверждение при $n = 1$, мы получим следующее:

$$\text{если } A, B \in \mathcal{P}, \quad A \supset B, \quad \text{то } \mu A \geq \mu B.$$

Это свойство называют *монотонностью объема*, что согласуется с терминологией § 6 главы 4.

2. Полуаддитивность объема. Пусть $A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$,
 $A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$. Тогда

$$\mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu A_k.$$

Отметим, что дизъюнктность множеств A_k не предполагается.

Доказательство. Можно не умаляя общности считать, что $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. Действительно, если в такой редакции утверждение доказано, то положим $A'_k = A \cap A_k$ при $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда

$$\bigcup_{k=1}^n A'_k = A \cap \bigcup_{k=1}^n A_k = A,$$

и по монотонности объема

$$\mu A \leq \sum_{k=1}^n \mu A'_k \leq \sum_{k=1}^n \mu A_k.$$

Пусть $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$. По теореме 2 § 2 существует конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{E} множества A , подчиненное системе $\{A_1, \dots, A_n\}$. Тогда для любого $k \in \{1, \dots, n\}$

$$A_k = \bigvee_{E \in \mathcal{E}: E \subset A_k} E, \quad \text{откуда } \mu A_k = \sum_{E \subset A_k} \mu E.$$

Заметим, что по определению подчиненной системы любое множество $E \in \mathcal{E}$ содержится хотя бы в одном из множеств A_k . Тогда

$$\sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^n \sum_{E \subset A_k} \mu E \geq \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E = \mu \left(\bigvee_{E \in \mathcal{E}} E \right) = \mu A. \quad \square$$

3. Объем разности множеств. Пусть $A, B \in \mathcal{P}$, $A \setminus B \in \mathcal{P}$, $\mu B < +\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) $\mu(A \setminus B) \geq \mu A - \mu B$.
- 2) Если $A \supset B$, то $\mu(A \setminus B) = \mu A - \mu B$.

Доказательство. 1) Заметим, что

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup B.$$

Тогда из полуаддитивности объема $\mu A \leq \mu(A \setminus B) + \mu B$. Осталось вычесть из обеих частей неравенства число μB .

2) Если $A \supset B$, то $A = (A \setminus B) \vee B$, и по аддитивности объема $\mu A = \mu(A \setminus B) + \mu B$. \square

Замечание. Если \mathcal{P} является алгеброй, то условие $A \setminus B \in \mathcal{P}$ из формулировки можно исключить.

4. Продолжение объема на кольцо. Пусть \mathcal{R} — кольцо, порожденное полукольцом \mathcal{P} . Тогда на \mathcal{R} существует единственный объем ν , совпадающий с μ на \mathcal{P} .

Доказательство. Напомним, что \mathcal{R} состоит из множеств, дополняющих конечное \mathcal{P} -разбиение (см. замечание к теореме 6 § 2). Единственность объема ν очевидна: он однозначно определен на \mathcal{P} , и по аддитивности — на конечных дизъюнктивных объединениях элементов \mathcal{P} . Докажем существование ν . Положим

$$\nu A = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E, \text{ где } A \in \mathcal{R}, \mathcal{E} \text{ — конечное } \mathcal{P}\text{-разбиение } A. \quad (5)$$

Проверим вначале, что такое определение корректно, то есть не зависит от выбора разбиения. Пусть $A \in \mathcal{R}$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — конечные \mathcal{P} -разбиения A . Тогда найдется конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{E} множества A , которое мельче \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (см. свойство 3 разбиений в § 2). Достаточно доказать, что

$$\sum_{B \in \mathcal{E}_1} \mu B = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E = \sum_{B \in \mathcal{E}_2} \mu B.$$

В силу равноправности \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 можно проверить лишь одно из равенств (например, первое). Для $B \in \mathcal{E}_1$ обозначим через $\mathcal{E}(B)$

систему всех элементов \mathcal{E} , содержащихся в B . По аддитивности μ

$$\sum_{B \in \mathcal{E}_1} \mu B = \sum_{B \in \mathcal{E}_1} \mu \left(\bigvee_{E \in \mathcal{E}(B)} E \right) = \sum_{B \in \mathcal{E}_1} \sum_{E \in \mathcal{E}(B)} \mu E = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E,$$

поскольку множества $\mathcal{E}(B)$ дизъюнкты, а их объединение есть \mathcal{E} .

Покажем теперь, что ν — объем на \mathcal{R} . Для этого достаточно доказать аддитивность ν . Пусть

$$A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}, \quad A = \bigvee_{k=1}^n A_k.$$

Для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ существует конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{E}_k множества A_k . Тогда $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \vee \dots \vee \mathcal{E}_n$ — конечное \mathcal{P} -разбиение A , и в силу (5)

$$\nu A = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E = \sum_{k=1}^n \sum_{E \in \mathcal{E}_k} \mu E = \sum_{k=1}^n \nu A_k. \quad \square$$

Опишем теперь важную конструкцию — *произведение объемов*.

Теорема 1. Произведение объемов. Пусть X_1, X_2 — множества, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ — полукольца подмножеств X_1, X_2 , а μ_1, μ_2 — объемы на $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ соответственно. Тогда функция μ , действующая по формуле

$$\mu(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_2 B, \quad \text{где } A \in \mathcal{P}_1, \quad B \in \mathcal{P}_2, \quad (6)$$

является объемом на $\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$.

Напомним, мы придерживаемся соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Замечание. Объем μ , определяемый формулой (6), называют *произведением объемов* μ_1 и μ_2 .

Доказательство. Положим $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. Необходимо доказать аддитивность функции μ на \mathcal{P} . Пусть

$$C = A \times B \in \mathcal{P}, \quad C = \bigvee_{k=1}^n C_k, \quad \text{где } C_k = A_k \times B_k \in \mathcal{P} \quad (k = 1, \dots, n).$$

Заметим, что $\bigcup_{k=1}^n A_k = A$. Действительно, левая часть содержится в правой, поскольку $A_k \subset A$ при любом $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть теперь $x \in A$. Тогда $(x, y) \in C$ при любом $y \in B$, и найдется такой индекс j , что $(x, y) \in C_j$. Поэтому $x \in A_j \subset \bigcup_{k=1}^n A_k$, что дает обратное включение.

По теореме 2 § 2 существует конечное \mathcal{P}_1 -разбиение \mathcal{E} множества A , подчиненное системе $\{A_1, \dots, A_n\}$. Докажем, что

$$B = \bigvee_{k: A_k \supset E} B_k \quad \text{для любого непустого множества } E \in \mathcal{E}.$$

Дизъюнктность множеств B_k в правой части очевидна: если $k \neq j$ и $A_k, A_j \supset E$, то $B_k \cap B_j = \emptyset$, иначе $C_k \cap C_j \neq \emptyset$. Пусть $y \in B$. Выберем произвольный $x \in E$. Тогда $(x, y) \in C$, и найдется такой индекс k , что $(x, y) \in C_k$. Отсюда $y \in B_k$ и $A_k \supset E$, поскольку $A_k \cap E \neq \emptyset$. Таким образом, y принадлежит правой части доказываемого равенства. Обратное включение очевидно.

Заметим, что $A_k = \bigvee_{E \in \mathcal{E}: E \subset A_k} E$ для любого $k \in \{1, \dots, n\}$. По аддитивности μ_1 и μ_2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mu C_k &= \sum_{k=1}^n \mu_1 A_k \cdot \mu_2 B_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{E \in \mathcal{E}: E \subset A_k} \mu_1 E \right) \mu_2 B_k = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_1 E \left(\sum_{k: A_k \supset E} \mu_2 B_k \right) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_1 E \cdot \mu_2 B = \mu_1 A \cdot \mu_2 B = \mu C. \quad \square \end{aligned}$$

Разберем теперь несколько важных примеров объемов.

1. Объем, порожденный функцией. Пусть X — интервал в \mathbb{R} , $\mathcal{P} = \{\Delta \in \mathcal{P}^1: \text{Cl} \Delta \subset X\}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Тогда функция μ , действующая по формуле

$$\mu[a, b] = g(b) - g(a), \quad [a, b] \in \mathcal{P},$$

является объемом на полукольце \mathcal{P} .

Доказательство. В силу возрастания g функция μ неотрицательна. Кроме того, $\mu\emptyset = \mu[0, 0] = g(0) - g(0) = 0$. Проверим аддитивность μ . Если ячейка $P = [a, b]$ разбита на n дизъюнктивных ячеек P_k , то они имеют вид

$$P_k = [x_k, x_{k+1}), \quad k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \text{где } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu P_k = \sum_{k=0}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k)) = g(x_n) - g(x_0) = \mu P. \quad \square$$

Замечание. Аналогичным образом проверяется, что функция

$$[a, b] \mapsto g(b - 0) - g(a - 0), \quad [a, b] \in \mathcal{P} \quad (7)$$

является объемом на \mathcal{P} . Этот объем будет использоваться в § 7 при построении меры Лебега – Стильеса.

2. Классический объем. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}^n$. Тогда функция λ_n , действующая по формуле

$$\lambda_n[a, b] = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n), \quad [a, b] \in \mathcal{P}^n, \quad (8)$$

является объемом на \mathcal{P}^n .

Доказательство проведем индукцией по n . При $n = 1$ достаточно сослаться на предыдущий пример, положив в нем $g(x) = x$. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ утверждение доказано. Так как $\mathcal{P}^{n+1} = \mathcal{P}^n \times \mathcal{P}^1$, любую ячейку $P \in \mathcal{P}^{n+1}$ можно представить в виде

$$P = P_1 \times P_2, \quad \text{где } P_1 = [a, b] \in \mathcal{P}^n, \quad P_2 = [a_{n+1}, b_{n+1}] \in \mathcal{P}^1.$$

Тогда в силу (8)

$$\lambda_{n+1}P = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) \cdot (b_{n+1} - a_{n+1}) = \lambda_n P_1 \cdot \lambda_1 P_2.$$

Таким образом, функция λ_{n+1} есть произведение объемов λ_n и λ_1 , и по теореме 1 она также является объемом. \square

Замечание. При $n = 2$ классический объем (8) есть площадь прямоугольника, а при $n = 3$ — объем трехмерного параллелепипеда.

3. Объем на алгебре ограниченных множеств и множеств с ограниченным дополнением. Пусть $X = \mathbb{R}^n$, \mathfrak{A} — алгебра, определяемая формулой (2). Тогда функция

$$\mu A = \begin{cases} 0, & A \text{ ограничено,} \\ +\infty, & A^c \text{ ограничено} \end{cases} \quad (A \in \mathfrak{A}) \quad (9)$$

является объемом на \mathfrak{A} .

Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

§ 4. Мера

Свойства аддитивности, которому удовлетворяет объем, во многих важных ситуациях оказывается недостаточно. Естественным усилением понятия аддитивности будет *счетная аддитивность*. Объем, удовлетворяющий этому дополнительному условию, мы и назовем мерой.

Определение 1. Мера. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , $\mu: \mathcal{P} \rightarrow [0, +\infty]$ — функция, удовлетворяющая двум аксиомам:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- 2) *счетная аддитивность*: если $A \in \mathcal{P}$, \mathcal{E} — счетное \mathcal{P} -разбиение множества A , то

$$\mu(A) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu(E).$$

Тогда μ называется *мерой на \mathcal{P}* .

Замечание 1. Аксиому счетной аддитивности можно записать иначе:

$$\mu \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathcal{P} \ (k \in \mathbb{N}) \text{ и } \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{P}$$

(если \mathcal{P} является σ -алгеброй, то последнее включение не нужно).

Замечание 2. Из счетной аддитивности функции μ вытекает ее аддитивность. Действительно, мы можем дополнить конечную дизъюнктивную систему до счетной пустыми множествами и воспользоваться счетной аддитивностью μ .

Замечание 3. В силу замечания 2 мера является объемом, поэтому к мерам применима вся теория, изложенная в § 3. Обратное неверно, то есть объем может не быть мерой. В качестве примера рассмотрим объем (9) (см. § 3). Покажем, что он не является счетно-аддитивным. По лемме 3 § 2 множество \mathbb{R}^n есть счетное объединение двоичных ячеек. Но каждая ячейка имеет нулевой объем, а объем \mathbb{R}^n равен $+\infty$.

Наиболее важными для нас будут меры Лебега и Лебега – Стильеса, которым посвящены параграфы 6 и 7. Сейчас мы разберем два более простых, но полезных примера мер.

1. Точечная нагрузка. Пусть X — множество, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(X)$, $a \in X$. Тогда функция μ , действующая по формуле

$$\mu A = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A \end{cases} \quad (A \in \mathfrak{A})$$

является мерой на \mathfrak{A} .

Доказательство. Пусть $A \subset X$, \mathcal{E} — счетное разбиение A . Докажем, что

$$\mu A = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E.$$

Если $a \notin A$, то a не лежит ни в одном из множеств системы \mathcal{E} , поэтому левая и правая части равенства будут нулевыми. Пусть теперь $a \in A$. Тогда в \mathcal{E} существует множество, содержащее a , причем ровно одно ввиду дизъюнктивности \mathcal{E} . Поэтому в семейство $\{\mu E\}$ входит единственный ненулевой элемент, равный 1. Значит, сумма того семейства есть 1, что совпадает с μA . \square

Замечание. Точечная нагрузка имеет следующий физический смысл. Пусть X — тело, имеющее массу, а мера описывает массы различных частей X . Точечная нагрузка соответствует ситуации, когда вся масса тела сосредоточена в точке a и равна 1.

2. Считающая мера. Пусть X — множество, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(X)$. Тогда функция μ , действующая по формуле

$$\mu A = \begin{cases} \text{число элементов } A, & A \text{ конечно,} \\ +\infty, & A \text{ бесконечно} \end{cases} \quad (A \in \mathfrak{A})$$

является мерой на \mathfrak{A} .

Меру μ называют *считающей мерой* на X .

Доказательство. Пусть $A \subset X$, \mathcal{E} — счетное разбиение A . Необходимо доказать равенство

$$\mu A = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E.$$

Если множество A конечно, то система \mathcal{E} содержит лишь конечное число непустых множеств. В этом случае утверждение очевидно. Пусть теперь A бесконечно. Если система \mathcal{E} содержит бесконечное множество, то правая часть искомого равенства равна $+\infty$, то есть μA . В противном случае \mathcal{E} содержит последовательность $\{E_k\}$ непустых множеств. Сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k$ равна $+\infty$, поскольку все его члены не меньше 1. Поэтому сумма семейства $\{\mu E\}_{E \in \mathcal{E}}$ тоже равна $+\infty$. \square

В § 3 мы построили продолжение объема с полукольца на кольцо, порожденное этим полукольцом. Покажем теперь, что если исходный объем был мерой, то мерой окажется и продолженный объем.

Лемма 1. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , \mathcal{R} — кольцо, порожденное \mathcal{P} , μ — мера на \mathcal{P} . Тогда объем ν , определенный формулой (5), является мерой на \mathcal{R} .

Доказательство. Достаточно проверить счетную аддитивность объема ν . Пусть

$$A \in \mathcal{R}, \quad A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathcal{R} \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Воспользуемся теоремой 2 § 2. Множество A допускает конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{F} . Кроме того, при любом $k \in \mathbb{N}$ множество A_k допускает конечное \mathcal{P} -разбиение \mathcal{E}'_k . Пусть $\mathcal{E}' = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}'_k$. Ясно, что система

$$\mathcal{E} = \{E \cap F: E \in \mathcal{E}', F \in \mathcal{F}\}$$

является \mathcal{P} -разбиением A , подчиненным как \mathcal{F} , так и $\{A_k: k \in \mathbb{N}\}$. Тогда \mathcal{E} есть дизъюнктивное объединение систем

$$\mathcal{E}_k = \{E \cap F: E \in \mathcal{E}'_k, F \in \mathcal{F}\} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

каждая из которых — конечное \mathcal{P} -разбиение множества A_k . В силу счетной аддитивности μ

$$\nu A = \sum_{B \in \mathcal{F}} \mu B = \sum_{B \in \mathcal{F}} \mu \left(\bigcup_{\substack{E \in \mathcal{E}: \\ E \subset B}} E \right) = \sum_{B \in \mathcal{F}} \sum_{\substack{E \in \mathcal{E}: \\ E \subset B}} \mu E = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E.$$

Запишем последнюю сумму в виде ряда, складывая сначала по элементам \mathcal{E}_1 , потом — по элементам \mathcal{E}_2 , и так далее. Тогда

$$\sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{E \in \mathcal{E}_k} \mu E = \sum_{k=1}^{\infty} \nu \left(\bigvee_{E \in \mathcal{E}_k} E \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k.$$

Из двух последних формул вытекает равенство

$$\nu A = \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k. \quad \square$$

Замечание. Лемма 1 является следствием теоремы Лебега — Каратеодори, которая будет доказана в § 5. Тем не менее, мы привели прямое доказательство этой леммы.

Согласно определению 1, мера есть объем, обладающий счетной аддитивностью. Однако есть и другие свойства, характеризующие объем как меру. Перейдем к их рассмотрению.

Теорема 1. Мера как счетно-полуаддитивный объем. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — объем на \mathcal{P} . Тогда равносильны следующие утверждения.

1) μ — мера на \mathcal{P} .

2) Если $A \in \mathcal{P}$, $A_k \in \mathcal{P}$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$\mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Замечание. Второе утверждение теоремы называют *счетной полуаддитивностью* μ . Таким образом, мера есть счетно-полуаддитивный объем.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) Будем не умаляя общности считать, что $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (см. доказательство аддитивности объема в § 3). В силу леммы 1 мы можем продолжить μ до меры ν на кольце \mathcal{R} , порожденном полукольцом \mathcal{P} . Выберем в соответствии с (1) последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{R} . Для нее верны соотношения

$$A = \bigvee_{k=1}^{\infty} B_k \quad \text{и} \quad B_k \subset A_k \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда по счетной аддитивности ν

$$\mu A = \nu A = \sum_{k=1}^{\infty} \nu B_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

2) \Rightarrow 1) Проверим счетную аддитивность объема, удовлетворяющего условию 2). Пусть

$$A \in \mathcal{P}, \quad A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathcal{P} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда по замечанию 1 к свойству усиленной монотонности объема

$$\mu A \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k.$$

Неравенство в обратную сторону вытекает из условия 2). \square

Далее мы рассмотрим еще два важных свойства мер, называемых непрерывностью. Для этого нам потребуется обсудить связанные с ними понятия.

Монотонные последовательности. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств.

1) $\{A_k\}$ называется *возрастающей*, если $A_k \subset A_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. *Пределом* возрастающей последовательности $\{A_k\}$ называется множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

2) $\{A_k\}$ называется *убывающей*, если $A_k \supset A_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. *Пределом* убывающей последовательности $\{A_k\}$ называется множество $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$.

Непрерывные объемы. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — объем на \mathcal{P} . Определим три свойства объема μ .

1) *Непрерывность снизу*: если возрастающая последовательность множеств $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ее предел лежат в \mathcal{P} , то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k.$$

2) *Непрерывность сверху*: если убывающая последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ лежит в \mathcal{P} вместе со своим пределом и содержит хотя бы одно множество конечной меры, то

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k.$$

3) *Непрерывность сверху на \emptyset* : если убывающая последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ лежит в \mathcal{P} и содержит хотя бы одно множество конечной меры, а ее предел есть \emptyset , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu A_k = 0.$$

Это свойство является более слабым вариантом предыдущего.

Замечание. Термин “непрерывность” оправдан тем, что мера предельного множества последовательности $\{A_k\}$ оказывается равной пределу мер A_k . Слова “снизу” и “сверху” указывают, каким образом аргумент меры “приближается” к предельному значению: при возрастании — снизу, при убывании — сверху.

Теорема 2. Мера как непрерывный снизу объем. Пусть X — множество, \mathcal{R} — кольцо подмножеств X , μ — объем на \mathcal{R} . Тогда равносильны следующие утверждения.

- 1) Объем μ является мерой на \mathcal{R} .
- 2) Объем μ непрерывен снизу.

Доказательство. 1) \Rightarrow 2). Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность в \mathcal{R} , $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Мы должны доказать, что $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$. Если существует индекс $m \in \mathbb{N}$, для которого $\mu A_m = +\infty$, то по монотонности μ

$$\mu A_n = +\infty \text{ для любого } n \geq m, \quad \mu A = +\infty,$$

и доказываемое равенство очевидно. Пусть теперь $\mu A_n < +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Определим множества B_n формулами (1). Так как последовательность $\{A_n\}$ возрастает, соотношения (1) примут вид

$$B_1 = A_1, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Тогда в силу счетной аддитивности μ и свойства 3 объемов

$$\begin{aligned} \mu A &= \mu \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} B_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu B_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu B_k = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mu A_1 + \sum_{k=2}^n (\mu A_k - \mu A_{k-1}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n. \end{aligned}$$

2) \Rightarrow 1) Пусть

$$A \in \mathcal{R}, \quad A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathcal{R} \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Положим $B_n = \bigvee_{k=1}^n A_k$ ($n \in \mathbb{N}$). По теореме 5 § 2 последовательность $\{B_n\}$ возрастает, а ее предел есть A . Тогда по непрерывности объема μ снизу

$$\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigvee_{k=1}^n A_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu A_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \quad \square$$

Замечание. Будет ли справедлива теорема 2, если объем μ задан на полукольце \mathcal{P} , а не на кольце? Импликация 1) \Rightarrow 2) останется верной и в этом случае. Действительно, в силу леммы 1 мы можем продолжить μ до меры ν на кольце \mathcal{R} , порожденном полукольцом \mathcal{P} . Если $\{A_n\}$ — возрастающая последовательность в \mathcal{P} , $A \in \mathcal{P}$ — ее предел, то по теореме 2

$$\mu A = \nu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n.$$

Обратная импликация, вообще говоря, неверна, что подтверждает следующий пример. Пусть $X = \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{P} = \{P \cap \mathbb{Q} : P \in \mathcal{P}^1\}, \quad \mu([a, b) \cap \mathbb{Q}) = b - a.$$

Тогда μ — объем на \mathcal{P} (это доказывается так же, как для одномерного классического объема). Предлагаем читателю самостоятельно проверить непрерывность μ снизу. Покажем, однако, что объем μ не обладает счетной полуаддитивностью (тогда в силу теоремы 1 он не является мерой). Пусть $A = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Множество A счетно, поэтому его элементы можно записать в виде последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $A_n = [x_n, x_n + 3^{-n})$ ($n \in \mathbb{N}$). Очевидно, что $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тем не менее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = \frac{1}{2} < 1 = \mu A.$$

Теорема 3. Непрерывность меры сверху. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — алгебра подмножеств X , μ — объем на \mathfrak{A} . Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Если объем μ является мерой, то он непрерывен сверху.
 2) Если объем μ конечен и непрерывен сверху на \emptyset , то он будет мерой.

Доказательство. 1) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность в \mathfrak{A} , $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ и $\mu A_m < +\infty$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\mu A = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n$. Заметим, что удаление из $\{A_n\}$ нескольких элементов не изменит ни левую, ни правую часть этого равенства. Поэтому можно не умаляя общности считать $m = 1$. Тогда из убывания $\{A_n\}$ вытекает, что $\mu A_n < +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\mu A < +\infty$. Положим

$$B_n = A_1 \setminus A_n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad B = A_1 \setminus A.$$

Все эти множества входят в \mathfrak{A} . Очевидно, что последовательность $\{B_n\}$ возрастает, и по правилу де Моргана

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = A_1 \setminus A = B.$$

Применяя к $\{B_n\}$ теорему 2, мы получим

$$\mu A_1 - \mu A = \mu B = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu B_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu A_1 - \mu A_n) = \mu A_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu A_n,$$

что равносильно искомому равенству.

- 2) Проверим счетную аддитивность μ . Пусть

$$A \in \mathfrak{A}, \quad A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathfrak{A} \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Положим $B_n = A \setminus \bigvee_{k=1}^n A_k$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что последовательность $\{B_n\}$ убывает. В силу конечности объема $\mu B_1 < +\infty$. Наконец, по правилу де Моргана

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(A \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k \right) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n) = A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \emptyset.$$

Из непрерывности μ сверху на \emptyset вытекает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu B_n = 0$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ по аддитивности μ

$$\mu A = \mu \left(\bigvee_{k=1}^n A_k \vee B_n \right) = \sum_{k=1}^n \mu A_k + \mu B_n.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получим

$$\mu A = \sum_{k=1}^{\infty} \mu A_k. \quad \square$$

Замечание 1. Для *конечного* объема μ равносильны три свойства: счетная аддитивность, непрерывность сверху и непрерывность сверху на \emptyset . Если $\mu X = +\infty$, то непрерывность объема μ сверху уже не влечет его счетную аддитивность. В качестве контрпримера рассмотрим объем (9). Свойству непрерывности сверху он, очевидно, удовлетворяет, но мерой не является (см. замечание 3 к определению меры).

Замечание 2. Возможна ситуация, когда все множества убывающей последовательности имеют бесконечные меры, а их пересечение — конечную. Действительно, пусть μ — считающая мера на \mathbb{N} , $A_n = \mathbb{N} \cap [n, +\infty)$. Тогда $\mu A_n = +\infty$ при всех $n \in \mathbb{N}$, но $\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \mu \emptyset = 0$. Поэтому такие последовательности в определении непрерывности сверху исключены из рассмотрения.

Замечание 3. Первое утверждение теоремы и его доказательство остаются верными и в случае, когда \mathfrak{A} — кольцо. Более того, это утверждение справедливо даже для мер, заданных на полукольце, поскольку мы можем продолжить меру на кольцо (см. замечание к теореме 2). Второе утверждение теоремы 3 уже неверно для объемов, заданных на полукольце. Рассмотрим объем из замечания к теореме 2, суженный на полукольцо

$$\mathcal{P}_0 = \{[a, b) \cap \mathbb{Q} : [a, b) \subset [0, 1)\}.$$

Так как $\mu([a, b) \cap \mathbb{Q}) = \lambda_1[a, b)$, непрерывность сверху объема μ вытекает из непрерывности сверху меры Лебега (см. § 6). Мерой, однако, μ не является.

§ 5. Продолжение мер

В предыдущем параграфе мы изучили свойства мер, но привели мало примеров. Дело в том, что задавать содержательные меры не так просто. С одной стороны, меры желательно определять на системах, “достаточно богатых” множествами. В качестве таких систем удобно использовать σ -алгебры: они обычно весьма обширны и замкнуты относительно теоретико-множественных операций. С другой стороны, как сами σ -алгебры, так и входящие в них множества часто имеют сложную структуру. Поэтому задавать меру непосредственно на σ -алгебре удается нечасто.

Проиллюстрируем эту трудность на примере двумерного классического объема, который для краткости назовем площадью. Пока мы определили площадь только для прямоугольников, чего для практических нужд явно недостаточно. Было бы желательно продолжить площадь на некоторую σ -алгебру. Однако любая такая σ -алгебра содержит все борелевские и, в частности, все замкнутые множества, которые могут иметь весьма сложную структуру. Но даже для достаточно простых замкнутых множеств (например, криволинейных трапеций) площадь вычисляется с помощью интеграла (см. главу 4). Это наводит на мысль, что не существует какого-то элементарного способа задать площадь на борелевских множествах.

Преодолению возникшей трудности и посвящен § 5. Мы укажем стандартную схему определения мер. Прежде чем переходить к деталям, опишем процедуру в целом. Она состоит из трех шагов. Пусть X — некоторое множество.

1) На полукольце подмножеств X вводится мера μ_0 . Обычно элементы полукольца имеют простую структуру, и задать на них меру можно аналитически. Примерами являются классический объем и объем, порожденный функцией, которые на самом деле являются мерами (это будет доказано в параграфах 6 и 7).

2) Мера μ_0 продолжается до функции ν , определенной на *всех* подмножествах X . Функция ν может уже не быть счетно-аддитивной, однако она остается счетно-полуаддитивной. Мы будем называть ее *внешней мерой*.

3) Для внешней меры ν строится σ -алгебра \mathfrak{A} подмножеств X , на которой функция ν является мерой. Таким образом, сужение ν

на \mathfrak{A} будет продолжением μ_0 до меры на σ -алгебре \mathfrak{A} .

Второй и третий шаги описанной схемы называют *стандартным продолжением* меры μ_0 . Нам будет удобно рассмотреть эти шаги в обратном порядке: сначала мы изучим внешние меры, а потом опишем продолжение меры до внешней меры. Напомним, что символ $\mathfrak{A}(X)$ обозначает множество всех подмножеств X .

Определение 1. Внешняя мера. Пусть X — множество, $\nu: \mathfrak{A}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ — функция, удовлетворяющая двум аксиомам.

1) $\nu \emptyset = 0$.

2) *Счетная полуаддитивность*: если $A \subset X$, $A_k \subset X$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$$\nu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu A_k.$$

Тогда ν называется *внешней мерой* в X .

Отметим, что аргумент внешней меры тоже принято писать без скобок.

Замечание. Сформулируем два полезных свойства внешней меры ν . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положив в аксиоме счетной полуаддитивности $A_k = \emptyset$ при $k > n$, мы получим свойство *полуаддитивности*:

$$\text{если } A \subset \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad \text{то } \nu A \leq \sum_{k=1}^n \nu A_k.$$

При $n = 1$ полуаддитивность превращается в *монотонность* ν :

$$\text{если } A \subset A_1 \subset X, \quad \text{то } \nu A \leq \nu A_1.$$

Наша ближайшая задача — выделить среди подмножеств X систему множеств, на которой внешняя мера ν окажется мерой. Опишем эту систему.

Определение 2. Пусть ν — внешняя мера в множестве X .

1) Если $A, E \subset X$, причем

$$\nu E = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A), \quad (10)$$

то говорят, что A *аддитивно разбивает* множество E .

2) Множество $A \subset X$, аддитивно разбивающее любое множество $E \subset X$, называют ν -измеримым (или просто *измеримым*). Систему всех ν -измеримых множеств мы будем обозначать через \mathfrak{A}_ν .

Замечание 1. Условие (10) можно записать в виде

$$\nu E \geq \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A), \quad (11)$$

поскольку обратное неравенство следует из полуаддитивности ν . Справедлива также симметричная форма условия (10):

$$\nu E = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c). \quad (12)$$

Замечание 2. Если $A \subset X$, $\nu A = 0$, то множество A ν -измеримо. Действительно, в силу монотонности ν для любого $E \subset X$

$$\nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) \leq \nu A + \nu E = \nu E,$$

что и дает измеримость A . \square

Докажем теперь основной результат, касающийся внешних мер.

Теорема 1. Пусть X — множество, ν — внешняя мера в X . Тогда система \mathfrak{A}_ν всех ν -измеримых подмножеств X образует σ -алгебру, а сужение ν на \mathfrak{A}_ν является мерой.

Доказательство разобьем на несколько шагов.

1) Проверим, что \mathfrak{A}_ν образует алгебру. В силу (12) система \mathfrak{A}_ν симметрична, и по лемме 1 § 2 достаточно доказать замкнутость \mathfrak{A}_ν относительно объединения. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_\nu$, $E \subset X$. Дважды используя (12), мы получим

$$\nu E = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c \cap B) + \nu(E \cap A^c \cap B^c).$$

По правилу де Моргана $E \cap A^c \cap B^c = E \cap (A \cup B)^c$. Сумму первых двух слагаемых оценим, используя полуаддитивность ν :

$$\nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c \cap B) \geq \nu((E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B)) = \nu(E \cap (A \cup B)),$$

поскольку $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$. Таким образом,

$$\nu E \geq \nu(E \cap (A \cup B)) + \nu(E \cap (A \cup B)^c) \quad \text{для любого } E \subset X,$$

откуда и вытекает включение $A \cup B \in \mathfrak{A}_\nu$.

2) Докажем, что сужение ν на \mathfrak{A}_ν будет мерой. По теореме 1 § 4 нам достаточно показать, что ν является объемом на \mathfrak{A}_ν . Так как \mathfrak{A}_ν есть алгебра, необходимо проверить равенство

$$\nu(A \vee B) = \nu A + \nu B, \quad \text{где } A, B \in \mathfrak{A}_\nu.$$

Заметим, что для любого $E \subset X$

$$E \cap (A \vee B) \cap A = E \cap A, \quad E \cap (A \vee B) \cap A^c = E \cap B,$$

и из измеримости A в силу (12) вытекает, что

$$\nu(E \cap (A \vee B)) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B). \quad (13)$$

Полагая в этом равенстве $E = X$, мы получим

$$\nu(A \vee B) = \nu A + \nu B.$$

3) Осталось доказать, что \mathfrak{A}_ν образует σ -алгебру. Пусть A есть объединение последовательности множеств из \mathfrak{A}_ν . По теореме 5 § 2 множество A допускает счетное \mathfrak{A}_ν -разбиение, то есть

$$A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k \in \mathfrak{A}_\nu \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Из (13) по индукции вытекает, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $E \subset X$

$$\nu \left(E \cap \bigvee_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \nu(E \cap A_k).$$

Отсюда в силу измеримости конечных объединений множеств A_k

$$\begin{aligned} \nu E &= \nu \left(E \cap \bigvee_{k=1}^n A_k \right) + \nu \left(E \setminus \bigvee_{k=1}^n A_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \nu(E \cap A_k) + \nu \left(E \setminus \bigvee_{k=1}^n A_k \right) \geq \sum_{k=1}^n \nu(E \cap A_k) + \nu(E \setminus A). \end{aligned}$$

Устремляя n к бесконечности и пользуясь счетной полуаддитивностью ν , мы получим

$$\begin{aligned}\nu E &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(E \cap A_k) + \nu(E \setminus A) \geq \\ &\geq \nu \left(E \cap \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k \right) + \nu(E \setminus A) = \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A),\end{aligned}$$

откуда и вытекает измеримость A . \square

Введем еще одно важное свойство мер — *полноту*.

Определение 3. Полная мера. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — мера на \mathcal{P} , удовлетворяющая следующему условию:

$$\text{если } A \in \mathcal{P}, \mu A = 0, B \subset A, \text{ то } B \in \mathcal{P}.$$

Тогда мера μ называется *полной*.

Таким образом, полнота меры означает, что любое подмножество множества нулевой меры измеримо (и, разумеется, его мера тоже равна нулю).

Замечание. Сужение внешней меры ν на \mathfrak{A}_ν является *полной мерой*. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}_\nu$, $\nu A = 0$ и $B \subset A$. Тогда $\nu B = 0$ в силу монотонности ν , и по замечанию 2 к определению 2 множество B измеримо. \square

Перейдем теперь к другой части нашей схемы — продолжению меры, заданной на полукольце, до внешней меры. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — мера на \mathcal{P} . Положим для $E \subset X$

$$\mu^* E = \inf \left\{ \sum_{P \in \mathcal{E}} \mu_0 P : \mathcal{E} \subset \mathcal{P} \text{ — счетное покрытие } E \right\}. \quad (14)$$

Если множество E нельзя покрыть счетной системой элементов полукольца, то мы считаем $\mu^* E = +\infty$, что согласуется с определением инфимума пустого множества (см. § 2 главы 2). Функцию μ^* можно эквивалентным образом записать через последовательности:

$$\mu^* E = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P} \text{ при всех } k \in \mathbb{N} \right\}. \quad (15)$$

Замечание. В правых частях (14) и (15) допустимы и конечные покрытия E , поскольку их можно дополнить до счетных пустыми множествами.

Функция μ^* , определяемая формулами (14) или (15), и окажется той внешней мерой, которая продолжает μ_0 с полукольца. Проверим вначале, что она удовлетворяет аксиомам внешней меры.

Теорема 2. Продолжение меры до внешней меры. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — мера на \mathcal{P} . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Функция μ^* , задаваемая на $\mathfrak{A}(X)$ формулой (14) или (15), является внешней мерой в X .

2) Полукольцо \mathcal{P} содержится в σ -алгебре \mathfrak{A}_{μ^*} .

3) $\mu^*P = \mu_0P$ для любого $P \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Проверим вначале утверждение 3). Пусть $P \in \mathcal{P}$. В силу предыдущего замечания мы можем положить в (14) $\mathcal{E} = \{P\}$, откуда $\mu^*P \leq \mu_0P$. Обратно, пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств из \mathcal{P} , покрывающая P . В силу счетной полуаддитивности μ_0

$$\mu_0P \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0P_k.$$

Переходя в этом неравенстве к инфимуму по всем таким последовательностям, в силу (15) мы получим $\mu_0P \leq \mu^*P$.

Покажем теперь, что μ^* — внешняя мера. По доказанному выше $\mu^*\emptyset = \mu_0\emptyset = 0$, поэтому достаточно проверить счетную полуаддитивность μ^* . Пусть

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A \subset X, \quad A_k \subset X \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Необходимо доказать, что

$$\mu^*A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*A_k.$$

Будем считать, что $\mu^* A_k < +\infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$, иначе это неравенство очевидно. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу (15) для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется последовательность $\{P_{km}\}_{m=1}^\infty$ в \mathcal{P} , покрывающая A_k , для которой

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^* P_{km} < \mu^* A_k + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Тогда $\{P_{km}\}_{k,m \in \mathbb{N}}$ — счетное покрытие A . Нумеруя семейство $\{\mu^* P_{km}\}_{k,m \in \mathbb{N}}$ “по квадратам” (см. § 3 главы 7), мы получим

$$\begin{aligned} \mu^* A &\leq \sum_{k,m \in \mathbb{N}} \mu^* P_{km} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \mu^* P_{km} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^* P_{km} < \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* A_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* A_k + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда ввиду произвольности ε вытекает требуемое неравенство.

Осталось проверить утверждение 2), то есть доказать μ^* -измеримость всех множеств из \mathcal{P} . Пусть $P \in \mathcal{P}$. Нужно показать, что

$$\mu^* E \geq \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P) \quad \text{для любого } E \subset X.$$

Рассмотрим вначале случай $E \in \mathcal{P}$. Тогда множество $E \setminus P$ допускает конечное \mathcal{P} -разбиение, то есть существуют $Q_1, \dots, Q_n \in \mathcal{P}$, для которых

$$E \setminus P = \bigvee_{k=1}^n Q_k \quad \text{и} \quad E = (E \cap P) \vee \bigvee_{k=1}^n Q_k.$$

В силу утверждения 3), аддитивности μ_0 и полуаддитивности μ^*

$$\begin{aligned} \mu^* E &= \mu_0 E = \mu_0(E \cap P) + \sum_{k=1}^n \mu_0 Q_k = \mu^*(E \cap P) + \sum_{k=1}^n \mu^* Q_k \geq \\ &\geq \mu^*(E \cap P) + \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^n Q_k \right) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P). \end{aligned}$$

Пусть теперь множество E произвольно. Мы будем считать, что $\mu^*E < +\infty$, иначе искомое неравенство очевидно. Пусть $\varepsilon > 0$. Подберем последовательность $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ в \mathcal{P} , покрывающую E , для которой

$$\mu^*E + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^* P_k.$$

По доказанному выше множества P_k аддитивно разбиваются элементами полукольца. Тогда в силу счетной полуаддитивности и монотонности μ^*

$$\begin{aligned} \mu^*E + \varepsilon &> \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(P_k \cap P) + \mu^*(P_k \setminus P) \right) \geq \mu^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right) \cap P \right) + \\ &+ \mu^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right) \setminus P \right) \geq \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P). \end{aligned}$$

Осталось перейти в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Замечание. Обозначим через μ сужение внешней меры μ^* на σ -алгебру \mathfrak{A}_{μ^*} . По теореме 1 функция μ является мерой, а по теореме 2 она реализует продолжение μ_0 на \mathfrak{A}_{μ^*} . Таким образом, мы приходим к понятию стандартного продолжения меры.

Определение 4. Стандартное продолжение меры. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — мера на \mathcal{P} , μ^* — внешняя мера, задаваемая формулой (14) или (15). Тогда сужение μ^* на σ -алгебру \mathfrak{A}_{μ^*} называют *стандартным продолжением* меры μ_0 .

Далее мы несколько снизим общность изложения, наложив на меру дополнительное условие σ -конечности. Определим это понятие.

Определение 5. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ — объем на \mathcal{P} . Если существует такая не более чем счетная система \mathcal{E} подмножеств X , что

$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E = X \quad \text{и} \quad \mu E < +\infty \quad \text{для любого} \quad E \in \mathcal{E},$$

то объем μ называется σ -конечным.

Замечание 1. Конечность объема μ влечет его σ -конечность. Обратное неверно: считающая мера на \mathbb{N} будет σ -конечной, но не конечной.

Замечание 2. Эквивалентное определение σ -конечности μ таково: существует последовательность $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P} , для которой

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = X \quad \text{и} \quad \mu P_k < +\infty \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Если \mathcal{P} является кольцом, то по теореме 5 § 2 последовательность $\{P_k\}$ можно считать возрастающей.

Замечание 3. Систему \mathcal{E} в определении 5 можно считать дизъюнктной. Это вытекает из следствия теоремы 1 § 2.

Перейдем к изучению свойств стандартного продолжения меры. Рассмотрим вначале вопрос о единственности продолжения.

Теорема 3. Единственность продолжения меры. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — σ -конечная мера на \mathcal{P} , μ — стандартное продолжение μ_0 . Если μ' — продолжение μ_0 на некоторую σ -алгебру \mathcal{A}' , то меры μ и μ' совпадают на $\mathcal{A}_{\mu^*} \cap \mathcal{A}'$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mu^*}$. Покажем вначале, что $\mu' \leq \mu$ на $\mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$. Пусть $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$. Если $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в \mathcal{P} , покрывающая A , то в силу счетной полуаддитивности μ'

$$\mu' A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu' P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k.$$

Переходя к инфимуму по всем таким последовательностям, мы получим $\mu' A \leq \mu A$.

Проверим теперь, что для любого $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$

$$\mu(P \cap A) = \mu'(P \cap A), \quad \text{где } P \in \mathcal{P}, \quad \mu_0 P < +\infty.$$

По доказанному выше

$$\mu'(P \cap A) \leq \mu(P \cap A), \quad \mu'(P \setminus A) \leq \mu(P \setminus A).$$

Складывая эти неравенства, мы получим

$$\mu P = \mu' P = \mu'(P \cap A) + \mu'(P \setminus A) \leq \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu P.$$

Поэтому в обоих неравенствах должны быть равенства, откуда $\mu'(P \cap A) = \mu(P \cap A)$.

Осталось доказать, что $\mu = \mu'$ на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. В силу σ -конечности μ_0 существует такая последовательность $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P} , что

$$X = \bigvee_{k=1}^{\infty} P_k \quad \text{и} \quad \mu P_k < +\infty \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ по доказанному выше

$$\begin{aligned} \mu A &= \mu \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} P_k \cap A \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(P_k \cap A) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu'(P_k \cap A) = \mu' \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} P_k \cap A \right) = \mu' A. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем теперь к описанию измеримых множеств. Для этого нам потребуются следующие понятия.

Определение 6. Пусть X — множество, \mathcal{E} — система подмножеств X . Назовем счетные пересечения элементов \mathcal{E} *множествами типа \mathcal{E}_{δ}* , а счетные объединения элементов \mathcal{E} — *множествами типа \mathcal{E}_{σ}* . Кроме того, пересечение последовательности множеств типа \mathcal{E}_{σ} называется *множеством типа $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$* .

Замечание 1. Множества типов \mathcal{E}_{δ} , \mathcal{E}_{σ} и $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ входят в σ -алгебру, порожденную системой \mathcal{E} (и, значит, в любую σ -алгебру, содержащую \mathcal{E}).

Замечание 2. Если система \mathcal{E} образует полукольцо, то множество типа $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ есть пересечение *убывающей* последовательности

множеств типа \mathcal{E}_σ . Действительно, пусть $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, где E_k — множества типа \mathcal{E}_σ . Тогда

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n, \quad \text{где } F_n = \bigcap_{k=1}^n E_k \text{ при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому достаточно проверить, что пересечение множеств типа \mathcal{E}_σ тоже имеет тип \mathcal{E}_σ . Это доказывается так же, как в теореме 6 § 2.

Лемма 1. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — σ -конечная мера на \mathcal{P} , μ — стандартное продолжение μ_0 на σ -алгебру \mathfrak{A} , $A \in \mathfrak{A}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) По любому $\varepsilon > 0$ найдется такое множество C_ε типа \mathcal{P}_σ , что

$$C_\varepsilon \supset A \quad \text{и} \quad \mu(C_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon.$$

2) Существует такое множество C типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$, что

$$C \supset A \quad \text{и} \quad \mu(C \setminus A) = 0.$$

Таким образом, любое измеримое множество хорошо приближается по мере снаружи множествами типа \mathcal{P}_σ .

Доказательство. Заметим вначале, что второе утверждение вытекает из первого. Действительно, положим

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_{\frac{1}{k}}.$$

Ясно, что C — множество типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$, содержащее A . Кроме того, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \mu(C \setminus A) \leq \mu(C_{\frac{1}{n}} \setminus A) < \frac{1}{n}.$$

Устремляя n к бесконечности, мы получим $\mu(C \setminus A) = 0$.

Перейдем к доказательству первого утверждения. Пусть $\varepsilon > 0$. Предположим вначале, что $\mu A < +\infty$. По определению стандартного продолжения найдется такая последовательность $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P} , что

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k < \mu A + \varepsilon.$$

Положим $C_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k$. Ясно, что C_ε — множество типа \mathcal{P}_σ , содержащее A . Кроме того, в силу счетной полуаддитивности μ

$$\mu(C_\varepsilon \setminus A) = \mu C_\varepsilon - \mu A \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu P_k - \mu A < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь случай $\mu A = +\infty$. В силу σ -конечности μ_0 найдется такая последовательность $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P} , что

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{и} \quad \mu_0 Q_k < +\infty \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Так как меры множеств $A_k = A \cap Q_k$ конечны при всех $k \in \mathbb{N}$, к каждому из A_k мы можем применить утверждение 1). Тогда существует такая последовательность $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ множеств типа \mathcal{P}_σ , что

$$B_k \supset A_k \quad \text{и} \quad \mu(B_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим $C_\varepsilon = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Ясно, что C_ε — множество типа \mathcal{P}_σ и

$$C_\varepsilon \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right) = A \cap X = A.$$

Кроме того, в силу счетной полуаддитивности и монотонности μ

$$\begin{aligned} \mu(C_\varepsilon \setminus A) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \setminus A\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \setminus A) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Из доказанной леммы вытекают два важных утверждения.

Следствие 1. Структура измеримых множеств.

Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , \mathfrak{B} — σ -алгебра, порожденная \mathcal{P} , μ_0 — σ -конечная мера на \mathcal{P} , μ — стандартное продолжение μ_0 на σ -алгебру \mathfrak{A} . Тогда для любого $A \in \mathfrak{A}$ существуют такие множества $B, C \in \mathfrak{B}$, что

$$B \subset A \subset C, \quad \mu(A \setminus B) = \mu(C \setminus A) = 0.$$

Доказательство. Существование множества C сразу вытекает из леммы 1, поскольку множества типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$ входят в \mathfrak{B} . Применяя лемму 1 к множеству A^c , мы найдем такое $C' \in \mathfrak{B}$, что $A^c \subset C'$ и $\mu(C' \setminus A^c) = 0$. Положим $B = X \setminus C'$. Тогда $B \in \mathfrak{B}$, $B \subset A$ и

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A \cap B^c) = \mu(A \cap C') = \mu(C' \setminus A^c) = 0. \quad \square$$

Следствие 2. Минимальность стандартного продолжения. Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — σ -конечная мера на \mathcal{P} , μ — стандартное продолжение μ_0 на σ -алгебру \mathfrak{A} . Если μ' — полная мера на некоторой σ -алгебре \mathfrak{A}' , продолжающая μ_0 , то $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

Таким образом, стандартное продолжение μ_0 имеет самую узкую область определения среди всех полных мер, продолжающих μ_0 .

Доказательство. Заметим, что \mathfrak{A} и \mathfrak{A}' содержат σ -алгебру \mathfrak{B} , порожденную полукольцом \mathcal{P} . Возьмем произвольное множество $A \in \mathfrak{A}$ и покажем, что оно лежит в \mathfrak{A}' . По следствию 1

$$A = C \setminus E, \quad \text{где } C \in \mathfrak{B}, \quad \mu E = 0.$$

Достаточно проверить, что $E \in \mathfrak{A}'$. Применяя следствие 1 еще раз, мы найдем такое множество $\tilde{E} \in \mathfrak{B}$, что $\tilde{E} \supset E$ и $\mu(\tilde{E} \setminus E) = 0$. Так как $\tilde{E} \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$, из теоремы 3 вытекает, что $\mu' \tilde{E} = \mu \tilde{E} = 0$. Поскольку множество E содержится в \tilde{E} , оно входит в σ -алгебру \mathfrak{A}' ввиду полноты μ' . \square

Для удобства читателя сформулируем основные свойства стандартного продолжения меры в виде одной теоремы.

Теорема 4. (А. Лебег, К. Каратеодори). Пусть X — множество, \mathcal{P} — полукольцо подмножеств X , μ_0 — σ -конечная мера на \mathcal{P} . Тогда существуют σ -алгебра \mathfrak{A} подмножеств X и полная мера μ на \mathfrak{A} , обладающие следующими свойствами.

- 1) $\mathfrak{A} \supset \mathcal{P}$ и $\mu P = \mu_0 P$ при всех $P \in \mathcal{P}$.
- 2) Для любого $A \in \mathfrak{A}$ справедливо равенство

$$\mu A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0 P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P} \text{ при всех } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

3) Если μ' — продолжение μ_0 на некоторую σ -алгебру \mathfrak{A}' , то меры μ и μ' совпадают на $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$.

4) Если μ' — полная мера на некоторой σ -алгебре \mathfrak{A}' , продолжающая μ_0 , то $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

Доказательство. Пусть μ — стандартное продолжение меры μ_0 на σ -алгебру \mathfrak{A} . Оно удовлетворяет условию 1) по теореме 2. Равенство в 2) вытекает из (15), поскольку μ и μ^* совпадают на \mathfrak{A} . Третье утверждение вытекает из теоремы 3, а четвертое — из следствия 2 леммы 1. \square

Замечание. Задача о продолжении меры была решена французским математиком А. Лебегом и немецким математиком К. Каратеодори. Лебег определил измеримые подмножества вещественной прямой и ввел на них длину. Каратеодори обобщил результаты Лебега и предложил общую конструкцию измеримых множеств, использованную в теоремах 1 и 2. Поэтому стандартное продолжение меры называют также *продолжением по Каратеодори*.

Существование стандартного продолжения позволяет нам ограничиться изучением мер, заданных на σ -алгебрах, что мы и будем делать в дальнейшем. В связи с этим нам будет удобна следующая терминология.

Определение 7. Пространство с мерой. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств X , μ — мера на \mathfrak{A} . Тройка (X, \mathfrak{A}, μ) называется *пространством с мерой*. Элементы \mathfrak{A} мы будем называть \mathfrak{A} -измеримыми множествами (или просто *измеримыми*, если из контекста ясно, о какой σ -алгебре идет речь).

§ 6. Мера Лебега

Классический объем, определенный в § 3, был задан лишь на полукольце ячеек. В этом параграфе мы продолжим его на некоторую σ -алгебру и получим меру, которая и будет называться *мерой Лебега*. Для ее построения будет использовано стандартное продолжение меры, описанное в § 5.

Материал параграфа состоит из трех частей. Вначале мы определим меру Лебега, используя конструкцию Каратеодори, описанную в § 5. Затем будут рассмотрены простейшие утверждения и примеры, касающиеся меры Лебега. Последняя часть параграфа посвящена наиболее важному свойству меры Лебега — *регулярности*, а также описанию структуры измеримых множеств. Перейдем к реализации этого плана. Договоримся всюду под n понимать натуральное число.

1. Построение меры Лебега. Напомним читателю, что символом λ_n обозначается классический объем на \mathcal{P}^n . Чтобы применить к нему процедуру стандартного продолжения, необходимо вначале доказать, что λ_n есть мера на \mathcal{P}^n . Для этого нам потребуется простое утверждение о непрерывной зависимости объема ячейки от ее размеров.

Лемма 1. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a < b$, $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n[a - te, b] = \lambda_n[a, b] = \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n[a, b + te].$$

Доказательство. Ограничимся проверкой левого равенства. Положим

$$p(t) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k + t), \quad t > 0.$$

Функция p непрерывна на \mathbb{R} как многочлен, откуда

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_n[a - te, b] = \lim_{t \rightarrow 0} p(t) = p(0) = \lambda_n[a, b]. \quad \square$$

Теорема 1. Классический объем λ_n является σ -конечной мерой на полукольце \mathcal{P}^n .

Доказательство. По лемме 3 § 2 множество \mathbb{R}^n есть счетное объединение ячеек, откуда вытекает σ -конечность λ_n . Покажем, что λ_n есть мера. Для этого в силу теоремы 1 § 4 достаточно проверить ее счетную полуаддитивность. Пусть

$$P = [a, b] \in \mathcal{P}^n, \quad P \neq \emptyset, \quad P_k = [a^k, b^k] \in \mathcal{P}^n \quad (k \in \mathbb{N}), \quad P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Мы должны доказать неравенство

$$\lambda_n P \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу леммы 1 найдутся такие $c \in [a, b]$ и $c^k < a^k$ ($k \in \mathbb{N}$), что

$$\lambda_n P < \lambda_n [a, c] + \varepsilon, \quad \lambda_n [c^k, b^k] < \lambda_n P_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$[a, c] \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a^k, b^k] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (c^k, b^k).$$

Таким образом, последовательность открытых параллелепипедов (c^k, b^k) покрывает компакт $[a, c]$. Поэтому из нее можно выбрать конечное подпокрытие, то есть найти такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$[a, c] \subset \bigcup_{k=1}^N (c^k, b^k) \quad \text{и, тем более,} \quad [a, c] \subset \bigcup_{k=1}^N [c^k, b^k].$$

Используя полуаддитивность объема λ_n , мы получим

$$\lambda_n [a, c] \leq \sum_{k=1}^N \lambda_n [c^k, b^k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n [c^k, b^k].$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n [c^k, b^k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k + \varepsilon.$$

Тогда

$$\lambda_n P < \lambda_n[a, c) + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, мы получим искомое неравенство. \square

Доказанное утверждение означает, что классический объем λ_n удовлетворяет условиям теоремы Лебега – Каратеодори. Поэтому мы можем дать следующее определение.

Определение 1. Мера Лебега. Стандартное продолжение классического объема λ_n с полукольца \mathcal{P}^n называется *мерой Лебега*. Мы будем обозначать ее также символом λ_n , а σ -алгебру, на которой мера Лебега задана, — символом \mathfrak{M}^n . Множества, входящие в \mathfrak{M}^n , называются *измеримыми по Лебегу*.

Замечание 1. Из теоремы Лебега – Каратеодори вытекает формула для вычисления меры Лебега измеримого множества: если $A \in \mathfrak{M}^n$, то

$$\lambda_n A = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}^n \text{ при всех } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Для практических целей, однако, она неудобна. Эффективный способ вычисления меры Лебега мы опишем позже, после введения интеграла.

Замечание 2. При $n = 1$ мера Лебега будем также называться *длиной*, при $n = 2$ — *площадью*, при $n = 3$ — *трехмерным объемом*. Это согласуется с терминологией главы 4.

Перейдем теперь к изучению свойств меры Лебега и измеримых по Лебегу множеств.

2. Свойства меры Лебега. Напомним, что символом \mathfrak{B}^n мы обозначаем борелевскую σ -алгебру.

1) $\mathfrak{M}^n \supset \mathfrak{B}^n$. Действительно, \mathfrak{M}^n содержит полукольцо \mathcal{P}^n , а борелевская σ -алгебра порождается этим полукольцом в силу следствия теоремы 7 § 2. \square

Из свойства 1) вытекает измеримость по Лебегу открытых, замкнутых и не более чем счетных множеств, множеств типа G_δ и F_σ ,

а также параллелепипедов любого вида. Отметим без доказательства, что включение в 1) строгое, то есть существуют измеримые по Лебегу множества, не являющиеся борелевскими.

2) Если $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \leq b$, то $\lambda_n \langle a, b \rangle = \lambda_n [a, b]$. Действительно, измеримость по Лебегу параллелепипеда $\langle a, b \rangle$ доказана выше. Пусть $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Если $a < b$, то при любом $t > 0$

$$[a + te, b) \subset \langle a, b \rangle \subset [a, b + te),$$

откуда

$$\lambda_n [a + te, b) \leq \lambda_n \langle a, b \rangle \leq \lambda_n [a, b + te).$$

Осталось заметить, что по лемме 1 левая и правая часть двойного неравенства стремятся к $\lambda_n [a, b]$ при $t \rightarrow 0$. В случае $a = b$ левую часть двойного неравенства нужно заменить нулем. \square

Таким образом, мера Лебега параллелепипеда равна произведению длин его ребер независимо от того, входит в параллелепипед граница или нет.

3) Если множество $A \subset \mathbb{R}^n$ не более чем счетно, то $\lambda_n A = 0$. Действительно, в силу счетной аддитивности меры Лебега достаточно доказать утверждение для одноточечного множества. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $A = \{a\}$. Тогда по предыдущему свойству

$$\lambda_n A = \lambda_n [a, a] = \lambda_n [a, a] = \lambda_n \emptyset = 0. \quad \square$$

4) Пусть $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Если $E \subset \mathbb{R}^m$ и $c \in \mathbb{R}^{n-m}$, то

$$E \times \{c\} \in \mathfrak{M}^n \quad \text{и} \quad \lambda_n (E \times \{c\}) = 0.$$

Действительно, по лемме 3 § 2 мы можем покрыть \mathbb{R}^m последовательностью $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ m -мерных ячеек. Положим $Q_k = P_k \times [c, c]$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Все параллелепипеды Q_k измеримы по Лебегу и имеют нулевую меру, поскольку содержат ребра нулевой длины. Пусть $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$. Тогда $\lambda_n Q = 0$ в силу счетной полуаддитивности λ_n . Кроме того,

$$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \times \{c\} = \mathbb{R}^m \times \{c\} \supset E \times \{c\}.$$

Из полноты меры Лебега вытекает, что множество $E \times \{c\}$ измеримо по Лебегу и имеет нулевую меру. \square

Свойство 4) допускает следующее обобщение: *если $m < n$ и множество E содержится в m -мерном линейном подпространстве \mathbb{R}^n , то $E \in \mathfrak{M}^n$ и $\lambda_n E = 0$* . Это будет вытекать из инвариантности меры Лебега относительно движений (см. далее). В частности, любое подмножество прямой имеет нулевую площадь, а плоское множество в \mathbb{R}^3 — нулевой объем.

5) *Если G — открытое подмножество \mathbb{R}^n , $G \neq \emptyset$, то $\lambda_n G > 0$* . Действительно, по теореме 7 § 2 множество G содержит непустую ячейку P , поэтому $\lambda_n G \geq \lambda_n P > 0$. \square

Отметим также, что мера непустого открытого подмножества \mathbb{R}^n есть сумма мер ячеек, на которые оно разбивается в соответствии с теоремой 7 § 2.

6) *Если $A \in \mathfrak{M}^n$, A ограничено в \mathbb{R}^n , то $\lambda_n A < +\infty$* . Действительно, ограниченное множество A содержится в некотором кубе P (см. § 2 главы 5). Поэтому $\lambda_n A \leq \lambda_n P < +\infty$. \square

7) Назовем *движением* в \mathbb{R}^n композицию сдвига и ортогонального преобразования в \mathbb{R}^n . Справедливо следующее утверждение: *если $A \in \mathfrak{M}^n$, U — движение в \mathbb{R}^n , то*

$$U(A) \in \mathfrak{M}^n \quad \text{и} \quad \lambda_n U(A) = \lambda_n A.$$

Это свойство называется *инвариантностью меры Лебега относительно движений*. Его доказательство будет приведено в главе 11.

8) *Существует подмножество \mathbb{R}^n , не измеримое по Лебегу*. Для простоты построим такое множество в \mathbb{R} . Будем называть $x, y \in [0, 1]$ *эквивалентными*, если $x - y \in \mathbb{Q}$. Тогда отрезок $[0, 1]$ есть объединение дизъюнктивных классов эквивалентных чисел. Выберем из каждого такого класса по одному элементу и обозначим их множество через A . Покажем, что A не измеримо по Лебегу. Допустим, что $A \in \mathfrak{M}^1$. Положим

$$Q = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \quad B = \bigvee_{r \in Q} (A + r).$$

По предыдущему свойству $A + r \in \mathfrak{M}^1$ при любом $r \in Q$. Тогда в силу счетности Q измеримо и множество B .

Проверим, что $B \supset [0, 1]$. Если $x \in [0, 1]$, то найдется число $y \in A$, эквивалентное x . Тогда $x - y \in \mathbb{Q}$ и $|x - y| \leq 1$, то есть $x \in B$. С учетом включения $B \subset [-1, 2]$ мы получаем, что $0 < \lambda_1 B < +\infty$. С другой стороны, в силу инвариантности λ_1 относительно сдвигов

$$\lambda_1 B = \sum_{r \in Q} \lambda_1(A + r) = \sum_{r \in Q} \lambda_1 A = \begin{cases} 0, & \lambda_1 A = 0, \\ +\infty, & \lambda_1 A > 0. \end{cases}$$

Полученное противоречие опровергает измеримость A . \square

Предлагаем читателю обобщить этот пример на многомерный случай.

3. Регулярность меры Лебега. В § 5 мы описали структуру измеримых множеств (см. лемму 1 и ее следствие). Для множеств, измеримых по Лебегу, этой структуре можно придать более естественный вид, связав ее с открытыми и замкнутыми множествами.

Теорема 2. *Для любых $A \in \mathfrak{M}^n$ и $\varepsilon > 0$ справедливы следующие утверждения.*

- 1) *Существует такое открытое в \mathbb{R}^n множество G , что*

$$G \supset A \quad \text{и} \quad \lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon.$$

- 2) *Существует такое замкнутое в \mathbb{R}^n множество F , что*

$$F \subset A \quad \text{и} \quad \lambda_n(A \setminus F) < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) По лемме 1 § 5 существует такое множество C типа \mathcal{P}_σ^n , что

$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a^k, b^k] \supset A \quad \text{и} \quad \lambda_n(C \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

По лемме 1 найдутся такие $c^k < a^k$ ($k \in \mathbb{N}$), что

$$\lambda_n(c^k, b^k) < \lambda_n[a^k, b^k] + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Положим $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (c^k, b^k)$. В силу счетной полуаддитивности λ_n

$$\begin{aligned} \lambda_n(G \setminus C) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n\left((c^k, b^k) \setminus C\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n\left((c^k, b^k) \setminus [a^k, b^k]\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_n(c^k, b^k) - \lambda_n[a^k, b^k]\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\lambda_n(G \setminus A) = \lambda_n((G \setminus C) \vee (C \setminus A)) = \lambda_n(G \setminus C) + \lambda_n(C \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Применяя первое утверждение к множеству A^c , мы найдем такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, что $A^c \subset G$ и $\mu(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Положим $F = G^c$. Тогда F замкнуто, $F \subset A$ и

$$\mu(A \setminus F) = \mu(A \cap F^c) = \mu(A \cap G) = \mu(G \setminus A^c) < \varepsilon. \quad \square$$

Замечание 1. Смысл теоремы заключается в следующем: каждое измеримое по Лебегу множество можно приблизить по мере с любой точностью открытым множеством снаружи и замкнутым изнутри. Это свойство называют *регулярностью* меры Лебега. Отметим, что поменять местами открытые и замкнутые множества нельзя. Пусть, например, $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. В силу счетности \mathbb{Q}

$$\lambda_1 A = 1 - \lambda_1([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1.$$

С другой стороны, единственное открытое множество, содержащееся в A , пусто. Это следует из свойства плотности рациональных чисел (см. § 2 главы 1).

Замечание 2. Несложно доказать, что если $\lambda_n A < +\infty$, то множество F во втором утверждении теоремы 2 можно выбрать компактным. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Рассмотрим некоторые следствия регулярности меры Лебега.

Следствие 1. *Меру любого множества $A \in \mathfrak{M}^n$ можно вычислять по формулам*

$$\begin{aligned}\lambda_n A &= \inf \{ \lambda_n G : G \text{ открыто в } \mathbb{R}^n, G \supset A \}, \\ \lambda_n A &= \sup \{ \lambda_n F : F \text{ замкнуто в } \mathbb{R}^n, F \subset A \}, \\ \lambda_n A &= \sup \{ \lambda_n F : F \text{ компактно в } \mathbb{R}^n, F \subset A \}.\end{aligned}$$

Доказательство. Проверим первое равенство. Обозначим его правую часть через $\varphi(A)$. Очевидно, что $\varphi(A) \geq \lambda_n A$. Докажем обратное неравенство. Будем не умаляя общности считать, что $\lambda_n A < +\infty$. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 2 найдется открытое множество $G \supset A$, для которого $\lambda_n(G \setminus A) < \varepsilon$. Тогда

$$\varphi(E) \leq \lambda_n G = \lambda_n A + \lambda_n(G \setminus A) < \lambda_n A + \varepsilon,$$

откуда $\varphi(A) \leq \lambda_n A$ ввиду произвольности ε . Если $\lambda_n A < +\infty$, то второе равенство аналогичным образом вытекает из теоремы 2, а третье — из замечания 2 к ней. В противном случае по теореме 2 найдется такое замкнутое множество $E \subset A$, что $\lambda_n E = +\infty$. Кроме того, множества $F_k = E \cap [-k, k]^n$ компактны при всех $k \in \mathbb{N}$, а их меры стремятся к бесконечности. Поэтому правые части второго и третьего равенств равны $+\infty$, то есть $\lambda_n A$. \square

Следствие 2. Структура множеств, измеримых по Лебегу. *Для любого множества $A \in \mathfrak{M}^n$ существуют такие множества B и C типов F_σ и G_δ соответственно, что*

$$B \subset A \subset C \quad \text{и} \quad \lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(C \setminus A) = 0.$$

Доказательство. Построим вначале множество C . В силу регулярности λ_n для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое открытое множество G_k , что $G_k \supset A$ и $\lambda_n(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}$. Положим

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k.$$

Ясно, что C — множество типа G_δ , содержащее A . Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \lambda_n(C \setminus A) \leq \lambda_n(G_k \setminus A) < \frac{1}{k}.$$

Устремляя k к бесконечности, мы получим $\lambda_n(C \setminus A) = 0$.

Теперь определим множество B . Применим доказанную часть утверждения к множеству A^c . Мы найдем множество E типа G_δ , для которого $A^c \subset E$ и $\lambda_n(E \setminus A^c) = 0$. Положим $B = E^c$. Тогда B — множество типа F_σ , $B \subset A$ и

$$\lambda_n(A \setminus B) = \lambda_n(A \cap B^c) = \lambda_n(A \cap E) = \lambda_n(E \setminus A^c) = 0. \quad \square$$

Замечание. Утверждение следствия 2 можно записать иначе: существуют множества B типа F_σ и C типа G_δ , для которых

$$A = B \vee E = C \setminus E', \quad \text{где } E' \subset C, \quad \lambda_n E = \lambda_n E' = 0.$$

В заключение приведем описание множеств нулевой лебеговой меры, удобное для практических целей.

Теорема 3. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- 1) $E \in \mathfrak{M}^n$ и $\lambda_n E = 0$.
- 2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ кубических ячеек в \mathbb{R}^n , что

$$E \subset \bigcup_{k=1}^\infty P_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^\infty \lambda_n P_k < \varepsilon.$$

Доказательство. 1) \Rightarrow 2) Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 2 найдется такое открытое в \mathbb{R}^n множество G , что $G \supset E$ и $\lambda_n(G \setminus E) < \varepsilon$. По теореме 7 § 2 множество G есть объединение некоторой последовательности $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ дизъюнктивных кубических ячеек. Тогда $\{P_k\}$ покрывает E и

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_n P_k = \lambda_n G = \lambda_n(G \setminus E) < \varepsilon.$$

2) \Rightarrow 1) Пусть λ_n^* — внешняя мера, построенная по классическому объему в соответствии с теоремой 2 § 5. По $\varepsilon > 0$ подберем

последовательность $\{P_k\}$ в соответствии с условием 2). Тогда в силу счетной полуаддитивности λ_n^*

$$\lambda_n^* E \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n^* P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n P_k < \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε мы получаем $\lambda_n^* E = 0$, откуда множество E измеримо по Лебегу и $\lambda_n E = 0$. \square

§ 7. Мера Лебега – Стильеса

В этом параграфе мы рассмотрим семейство мер, включающее в себя одномерную меру Лебега. В § 3 было показано, что формула (7) определяет объем на одномерных ячейках. Мы продолжим его на некоторую σ -алгебру и получим меру, которая и будет называться *мерой Лебега – Стильеса*. Для ее построения будет использовано стандартное продолжение меры, описанное в § 5.

Материал параграфа состоит из двух частей. Вначале мы определим меру Лебега – Стильеса и рассмотрим ее простейшие свойства. Затем будет показано, что некоторые ранее введенные меры (в том числе и меру Лебега) можно реализовать как меру Лебега – Стильеса, выбирая подходящим образом порождающую ее функцию. Перейдем к реализации этого плана.

Пусть X — интервал в \mathbb{R} , $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция, $\mathcal{P} = \{\Delta \in \mathcal{P}^1: \text{Cl } \Delta \subset X\}$. Функция μ_g , определяемая формулой

$$\mu_g[a, b) = g(b - 0) - g(a - 0), \quad [a, b) \in \mathcal{P},$$

является объемом на \mathcal{P} (см. § 3). Чтобы применить к нему процедуру стандартного продолжения, необходимо вначале доказать, что μ_g есть мера на \mathcal{P} . Для этого нам потребуется простое утверждение о непрерывной зависимости объема ячейки от ее концов.

Лемма 1. Пусть X — интервал в \mathbb{R} , $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция, $[a, b) \subset X$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \mu_g[a - t, b) = \mu_g[a, b) = \lim_{t \rightarrow 0+} \mu_g[a, b - t).$$

Доказательство. Ограничимся проверкой левого равенства. Если $x, y \in X$, $x < y$, то $g(x) \leq g(y - 0)$, так как функция g возрастает (см. § 3 главы 2). Тогда

$$g(a - 2t) \leq g(a - t - 0) \leq g(a - 0), \quad \text{где } t > 0, \quad a - 2t \in X.$$

При $t \rightarrow 0+$ левая часть двойного неравенства стремится к $g(a - 0)$, поэтому такой же предел имеет и $g(a - t - 0)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \mu_g[a - t, b] &= \lim_{t \rightarrow 0+} (g(b - 0) - g(a - t - 0)) = \\ &= g(b - 0) - g(a - 0) = \mu_g[a, b]. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть X — интервал в \mathbb{R} , $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ — возрастающая функция. Тогда объем μ_g является σ -конечной мерой на полукольце ячеек \mathcal{P} .

Доказательство. По теореме 7 § 2 интервал X есть счетное объединение ячеек, откуда вытекает σ -конечность μ_g . Покажем, что μ_g есть мера. Для этого в силу теоремы 1 § 4 достаточно проверить ее счетную полуаддитивность. Пусть

$$P = [a, b] \in \mathcal{P}, \quad P \neq \emptyset, \quad P_k = [a_k, b_k] \in \mathcal{P} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad P \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k.$$

Мы должны доказать неравенство

$$\mu_g P \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g P_k.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу леммы 1 найдутся такие $c \in [a, b]$ и $c_k < a_k$ ($k \in \mathbb{N}$), что

$$\mu_g P < \mu_g[a, c] + \varepsilon, \quad \mu_g[c_k, b_k] < \mu_g P_k + \frac{\varepsilon}{2^k} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$[a, c] \subset [a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, b_k).$$

Таким образом, последовательность интервалов (c_k, b_k) покрывает компакт $[a, c]$. Поэтому из нее можно выбрать конечное подпокрытие, то есть найти такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$[a, c] \subset \bigcup_{k=1}^N (c_k, b_k) \quad \text{и, тем более,} \quad [a, c] \subset \bigcup_{k=1}^N [c_k, b_k).$$

Используя полуаддитивность объема μ_g , мы получим

$$\mu_g[a, c] \leq \sum_{k=1}^N \mu_g[c_k, b_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g[c_k, b_k).$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_g[c_k, b_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g P_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g P_k + \varepsilon.$$

Тогда

$$\mu_g P < \mu_g[a, c] + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_g P_k + 2\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, мы получим искомое неравенство. \square

Замечание 1. Функция, задаваемая более простой формулой

$$\tilde{\mu}_g[a, b] = g(b) - g(a), \quad [a, b] \in \mathcal{P},$$

тоже является объемом на \mathcal{P} (см. § 3). Мерой она, однако, может не быть. Действительно, положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

и покажем, что функция $\tilde{\mu}_g$ не будет непрерывной сверху. Пусть

$$A = [0, 1), \quad A_k = \left[-\frac{1}{k}, 1\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Тогда

$$A_k \supset A_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}), \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A, \quad \tilde{\mu}_g A_1 = 1 < +\infty.$$

Тем не менее,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_g A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(g(1) - g\left(\frac{1}{k}\right) \right) = 1, \quad \text{но} \quad \tilde{\mu}_g A = g(1) - g(0) = 0.$$

Замечание 2. Если функция g непрерывна слева во всех точках интервала X , то $\mu_g = \tilde{\mu}_g$. Несложно показать, что любую возрастающую на X функцию g можно переопределить в точках разрыва так, чтобы она стала непрерывной слева на X . При этом, очевидно, мера μ_g не изменится. Поэтому мы могли бы изначально ограничиться непрерывными слева функциями g , а вместо μ_g использовать $\tilde{\mu}_g$. В приводимых ниже примерах мы именно так и будем поступать. Отметим также, что добавление к g постоянной функции не меняет μ_g .

Из теоремы 1 вытекает, что объем μ_g удовлетворяет условиям теоремы Лебега – Каратеодори. Поэтому мы можем дать следующее определение.

Определение 1. Мера Лебега – Стильеса. Стандартное продолжение объема μ_g с полукольца ячеек \mathcal{P} называется *мерой Лебега – Стильеса*. Мы будем обозначать ее также символом μ_g , а σ -алгебру, на которой мера Лебега – Стильеса задана, — символом \mathfrak{A}_g .

Рассмотрим теперь простейшие свойства меры Лебега – Стильеса.

1) \mathfrak{A}_g содержит все борелевские подмножества X . Действительно, σ -алгебра \mathfrak{A}_g содержит полукольцо ячеек \mathcal{P} , а борелевская σ -алгебра порождается этим полукольцом. \square

2) Если $a \in X$, то $\mu_g\{a\} = g(a+0) - g(a-0)$. Действительно, в силу возрастания g

$$g(a+0) \leq g(a+t-0) \leq g(a+t), \quad \text{где } t > 0, \quad a+t \in X.$$

Так как $\lim_{t \rightarrow 0+} g(a+t) = g(a+0)$, такой же предел имеет и $g(a+t-0)$. Отсюда по непрерывности меры μ_g сверху

$$\begin{aligned}\mu_g\{a\} &= \mu_g\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{k}\right)\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g(a + \frac{1}{k} - 0) - g(a - 0)) = g(a + 0) - g(a - 0). \quad \square\end{aligned}$$

3) Справедливы формулы

$$\begin{aligned}\mu_g[a, b] &= g(b + 0) - g(a - 0), \\ \mu_g(a, b) &= g(b - 0) - g(a + 0), \\ \mu_g(a, b] &= g(b + 0) - g(a + 0).\end{aligned}$$

Докажем, например, последнее равенство. По предыдущему свойству и аддитивности μ_g

$$\begin{aligned}\mu_g(a, b] &= \mu_g[a, b) + \mu_g\{b\} - \mu_g\{a\} = \\ &= g(b - 0) - g(a - 0) + g(b + 0) - g(b - 0) - g(a + 0) + g(a - 0) = \\ &= g(b + 0) - g(a + 0). \quad \square\end{aligned}$$

Мера μ_g имеет довольно специальный вид. Тем не менее, подбирая подходящим образом функцию g , мы можем реализовать некоторые важные меры как меру Лебега - Стильеса. Приведем несколько примеров, подтверждающих это.

1. Мера Лебега. Если $g(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $\mu_g = \lambda_1$. Действительно, при таком выборе g формула (7) определяет одномерный классический объем, то есть μ_g и λ_1 совпадают на \mathcal{P}^1 . Поэтому равны и их стандартные продолжения. \square

2. Точечная нагрузка. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и мера ν задается формулой

$$\nu A = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A \end{cases} \quad \text{при всех } A \subset \mathbb{R}.$$

Тогда $\nu = \mu_g$, где

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mu_g \mathbb{R} = 1 = \nu \mathbb{R}, \quad \mu_g \{a\} = 1 = \nu \{a\}.$$

Поэтому

$$\mu_g(\mathbb{R} \setminus \{a\}) = 0 = \nu(\mathbb{R} \setminus \{a\}).$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Если $a \notin A$, то в силу полноты меры μ_g

$$A \in \mathfrak{A}_g, \quad \mu_g A = 0 = \nu A.$$

В противном случае $A = \{a\} \cup (A \setminus \{a\}) \in \mathfrak{A}_g$ и

$$\mu_g A = \mu_g \{a\} + \mu_g (A \setminus \{a\}) = \mu_g \{a\} = 1 = \nu A. \quad \square$$

3. Дискретная мера с нагрузками в точках \mathbb{N} . Положим для $A \subset \mathbb{R}$

$$\nu A = \begin{cases} \text{число элементов } A \cap \mathbb{N}, & A \cap \mathbb{N} \text{ конечно,} \\ +\infty, & A \cap \mathbb{N} \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Тогда $\nu = \mu_g$, где $g(x) = \nu(-\infty, x)$ для любых $x \in \mathbb{R}$.

Функцию g , график которой показан на рисунке 5, называют *функцией скачков*.

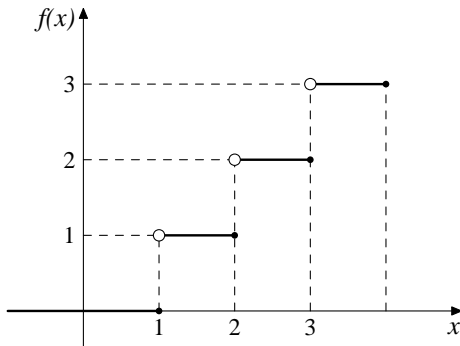


Рис. 5

Доказательство. Необходимо проверить, что любое множество $A \subset \mathbb{R}$ лежит в \mathfrak{A}_g и для него $\mu_g A = \nu A$. Заметим, что

$$\mu_g(-\infty, 1) = \mu_g\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} [-k, -k+1)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_g[-k, -k+1) = 0.$$

Кроме того, для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_g\{n\} = 1, \quad \mu_g(n, n+1) = 0.$$

Тогда $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \in \mathfrak{A}_g$ и

$$\mu_g(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mu_g(-\infty, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(n, n+1) = 0.$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}$. Множество $A \setminus \mathbb{N}$ лежит в \mathfrak{A}_g в силу полноты меры μ_g , а множество $A \cap \mathbb{N}$ — поскольку оно не более чем счетно. Поэтому $A \in \mathfrak{A}_g$ и

$$\mu_g A = \mu_g(A \setminus \mathbb{N}) + \mu_g(A \cap \mathbb{N}) = \mu_g(A \cap \mathbb{N}) = \sum_{n \in A \cap \mathbb{N}} 1 = \nu A. \quad \square$$

В заключение покажем, как определить меру Лебега – Стильтеса для функции, заданной на промежутке произвольного вида. Пусть g — возрастающая функция на $\langle a, b \rangle$. Положим $g(x) = g(a)$ при $x < a$, если точка a входит в промежуток, и $g(x) = g(b)$ при $x > b$, если точка b входит в промежуток. Продолженная таким образом функция будет возрастать на интервале, содержащем $\langle a, b \rangle$, поэтому она порождает меру Лебега – Стильтеса. Сужение этой меры на σ -алгебру $\{A \in \mathfrak{A}_g: A \subset \langle a, b \rangle\}$ мы будем называть мерой Лебега – Стильтеса, порожденной исходной функцией g .

§ 8. Произведение мер

В § 3 мы ввели произведение объемов, задаваемое формулой (6). Для построения теории интеграла нам потребуется развить эту конструкцию. Вначале будет доказано, что если перемножаемые объемы являются мерами, то и их произведение будет мерой. Применяя

к этой мере процедуру стандартного продолжения, мы получим новую меру, которую и назовем произведением исходных мер. Затем мы докажем, что произведение мер Лебега λ_m и λ_n равно λ_{m+n} . Этот результат будет важен в дальнейшем при изучении кратных интегралов. В заключение параграфа мы покажем, что произведение мер является ассоциативной операцией. Это утверждение нам потребуется в § 5 главы 10 при вычислении интегралов по произведению мер. Перейдем к реализации намеченного плана.

Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с мерами. Положим

$$\mathcal{P}_1 = \{A \in \mathfrak{A}_1: \mu_1 A < +\infty\}, \quad \mathcal{P}_2 = \{B \in \mathfrak{A}_2: \mu_2 B < +\infty\}. \quad (16)$$

Тогда \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 — полукольца подмножеств X_1 и X_2 соответственно. Обозначим через \mathcal{P} произведение \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 (оно было определено в § 2). По теореме 3 § 2 система \mathcal{P} есть полукольцо подмножеств множества $X = X_1 \times X_2$. Положим в соответствии с формулой (6)

$$\mu(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_2 B \quad \text{при любых } A \in \mathcal{P}_1, B \in \mathcal{P}_2.$$

По теореме 1 § 3 функция μ является объемом на \mathcal{P} . Ключевым в этом параграфе будет утверждение о том, что μ есть мера на \mathcal{P} . Для его доказательства нам необходимо ввести и обсудить два важных понятия.

Определение 1. Сечение и проекция. Пусть $E \subset X_1 \times X_2$.

1) Множества вида

$$E_x = \{y \in X_2: (x, y) \in E\} \quad (x \in X_1)$$

мы будем называть *сечениями* E , *параллельными* X_2 . Множества

$$E^y = \{x \in X_1: (x, y) \in E\} \quad (y \in X_2)$$

называются *сечениями* E , *параллельными* X_1 .

2) Множества

$$\text{Pr}_1 E = \{x \in X_1: E_x \neq \emptyset\}, \quad \text{Pr}_2 E = \{y \in X_2: E^y \neq \emptyset\}$$

называются *проекциями* E на X_1, X_2 соответственно.

Геометрический смысл проекций и сечений ясен из рисунков 6а и 6б.

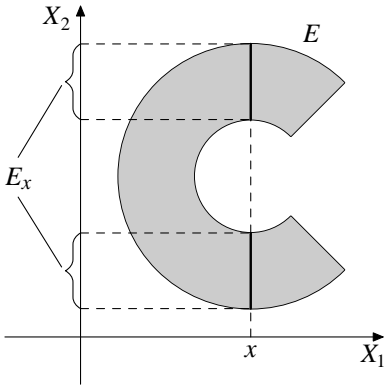


Рис. 6а

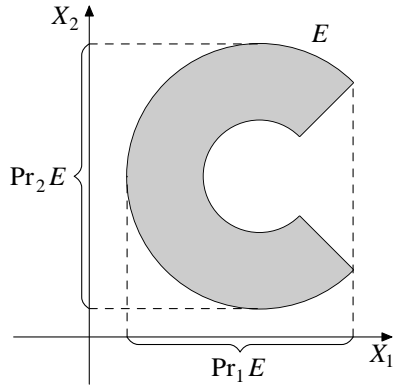


Рис. 6б

Обозначим через \mathcal{R} кольцо, порожденное полукольцом \mathcal{P} (см. теорему 6 § 2). Докажем утверждение, дающее оценку объемов множеств из \mathcal{R} через меры их сечений и проекций.

Лемма 1. Для любого $C \in \mathcal{R}$ верны следующие утверждения.

1) Проекция C на X_1 является \mathfrak{A}_1 -измеримой, а все сечения C , параллельные X_2 , — \mathfrak{A}_2 -измеримыми.

2) При любом $t > 0$ множество

$$C(t) = \{x \in X_1: \mu_2 C_x \geq t\}$$

будет \mathfrak{A}_1 -измеримым.

3) Справедливо неравенство

$$\mu C \leq \mu_1(\text{Pr}_1 C) \cdot \sup_{x \in X_1} \mu_2 C_x.$$

Доказательство. По определению \mathcal{R} мы можем записать

$$C = \bigvee_{k=1}^n (A_k \times B_k), \quad \text{где } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}_1, \quad B_1, \dots, B_n \in \mathcal{P}_2.$$

Положим

$$C_k = A_k \times B_k \text{ при } k \in \{1, \dots, n\}, \quad A = \bigcup_{k=1}^n A_k.$$

Заметим, что при любом $k \in \{1, \dots, n\}$

$$(C_k)_x = \begin{cases} B_k, & x \in A_k, \\ \emptyset, & x \notin A_k. \end{cases}$$

Докажем утверждение 1). Оно будет вытекать из соотношений

$$\text{Pr}_1 C = A, \quad C_x = \bigvee_{k: x \in A_k} B_k \text{ при всех } x \in X_1. \quad (17)$$

Первое из них очевидно, поскольку

$$\text{Pr}_1 C = \bigcup_{k=1}^n \text{Pr}_1 C_k = \bigcup_{k=1}^n A_k = A.$$

Проверим второе равенство. Для любого $x \in X_1$

$$C_x = \bigcup_{k=1}^n (C_k)_x = \bigcup_{k: x \in A_k} B_k.$$

Осталось доказать, что множества B_k в правой части дизъюнкты. Если $k \neq j$ и $x \in A_k \cap A_j$, то $B_k \cap B_j = \emptyset$; в противном случае мы получим $C_k \cap C_j \neq \emptyset$, что невозможно.

Проверим теперь утверждения 2) и 3). По теореме 2 § 2 существует конечное \mathcal{P}_1 -разбиение \mathcal{E} множества A , подчиненное системе $\{A_1, \dots, A_n\}$. Положим

$$S_E = \sum_{k: A_k \supset E} \mu_2 B_k, \quad \text{где } E \in \mathcal{E}.$$

Заметим, что для любых $E \in \mathcal{E}$ и $k \in \{1, \dots, n\}$ либо $A_k \supset E$, либо $A_k \cap E = \emptyset$. Пусть $x \in X_1$, а множество $E \in \mathcal{E}$ таково, что $x \in E$. В силу (17)

$$\mu_2 C_x = \sum_{k: x \in A_k} \mu_2 B_k = \sum_{k: A_k \supset E} \mu_2 B_k = S_E.$$

Тогда для любого $t > 0$ верно равенство

$$C(t) = \bigcup_{E \in \mathcal{E}: S_E \geq t} E,$$

откуда вытекает \mathfrak{A}_1 -измеримость множества $C(t)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \mu C &= \sum_{k=1}^n \mu C_k = \sum_{k=1}^n \mu_1 A_k \cdot \mu_2 B_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{E \in \mathcal{E}: E \subset A_k} \mu_1 E \right) \cdot \mu_2 B_k = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_1 E \cdot \left(\sum_{k: A_k \supset E} \mu_2 B_k \right) = \\ &= \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_1 E \cdot S_E \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu_1 E \cdot \sup_{x \in X_1} \mu_2 C_x = \mu_1 A \cdot \sup_{x \in X_1} \mu_2 C_x. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем теперь к главному результату этого параграфа, позволяющему построить произведение мер.

Теорема 1. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с мерами, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$, где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ определяются равенствами (16). Тогда объем μ , задаваемый формулой (6), является мерой на полукольце \mathcal{P} .

Доказательство мы проведем в два этапа.

1. *Случай конечных мер.* Пусть $\mu_1 X_1 < +\infty$, $\mu_2 X_2 < +\infty$. Если μ_1 или μ_2 — нулевая мера, то объем μ также нулевой, и утверждение очевидно. Поэтому мы можем не умаляя общности считать, что $\mu_1 X_1 = \mu_2 X_2 = 1$. Пусть \mathcal{R} — кольцо, порожденное полукольцом \mathcal{P} , ν — продолжение μ на \mathcal{R} , задаваемое формулой (5). Покажем, что ν является мерой на \mathcal{R} . Так как $\nu X = 1$, по теореме 3 § 4 нам достаточно проверить, что объем ν непрерывен сверху на \emptyset . Пусть $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств из \mathcal{R} , $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Мы должны доказать, что

$$\nu C_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Допустим, что это не так. Поскольку последовательность $\{\nu C_k\}$ убывает, она имеет некоторый предел $2\delta > 0$, причем

$$\nu C_k \geq 2\delta \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Положим для любого $k \in \mathbb{N}$

$$E_k = \{x \in X_1: \mu_2(C_k)_x \geq \delta\}, \quad F_k = \{x \in X_1: \mu_2(C_k)_x < \delta\}.$$

Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} C_k &= C_k \cap X = C_k \cap ((E_k \times X_2) \cup (F_k \times X_2)) \subset \\ &\subset (E_k \times X_2) \cup ((F_k \times X_2) \cap C_k). \end{aligned}$$

Множества $E_k \times X_2$ и $(F_k \times X_2) \cap C_k$ входят в \mathcal{R} , поскольку $E_k \in \mathfrak{A}_1$ и $F_k \in \mathfrak{A}_1$ в силу леммы 1. Поэтому

$$2\delta \leq \nu C_k \leq \nu(E_k \times X_2) + \nu((F_k \times X_2) \cap C_k) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (18)$$

Заметим, что

$$\text{Pr}_1((F_k \times X_2) \cap C_k) \subset F_k \quad \text{и} \quad \mu_2(C_k)_x \leq \delta \quad \text{при} \quad x \in F_k,$$

откуда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X_1} \mu_2((F_k \times X_2) \cap C_k)_x &= \\ &= \sup_{x \in F_k} \mu_2((F_k \times X_2) \cap C_k)_x \leq \sup_{x \in F_k} \mu_2(C_k)_x \leq \delta. \end{aligned}$$

Так как $\mu_1 X_1 = 1$, из леммы 1 мы получаем

$$\nu((F_k \times X_2) \cap C_k) \leq \mu_1 F_k \cdot \sup_{x \in X_1} \mu_2((F_k \times X_2) \cap C_k)_x \leq \delta.$$

Тогда из (18) вытекает, что $2\delta \leq \nu(E_k \times X_2) + \delta$, откуда

$$\mu_1 E_k = \mu_1 E_k \cdot \mu_2 X_2 = \nu(E_k \times X_2) \geq \delta \quad \text{при любом} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Множества E_k , очевидно, убывают. Поэтому последовательность $\{\mu_1 E_k\}$ имеет положительный предел, откуда $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \neq \emptyset$ ввиду непрерывности сверху меры μ_1 . Если $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, то $\mu_2(C_k)_x \geq \delta$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как множества $(C_k)_x$ убывают, их пересечение

непусто по непрерывности сверху меры μ_2 , то есть оно содержит некоторый элемент y . Но тогда $(x, y) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$, что невозможно.

Таким образом, для конечных мер теорема доказана.

2. Общий случай. Пусть $C = A \times B \in \mathcal{P}$. Представим множество C в виде

$$C = \bigvee_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k), \quad \text{где } A_k \in \mathcal{P}_1, \quad B_k \in \mathcal{P}_2 \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Введем полукольца

$$\mathcal{Q}_1 = \{E \in \mathcal{P}_1: E \subset A\}, \quad \mathcal{Q}_2 = \{E \in \mathcal{P}_2: E \subset B\}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \mathcal{Q}_2,$$

а через ν_1, ν_2 обозначим сужения μ_1, μ_2 на $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ соответственно. Поскольку объемы ν_1, ν_2 конечны, их произведение по доказанному выше есть мера. Поэтому

$$\begin{aligned} \mu C &= \mu_1 A \cdot \mu_2 B = \nu_1 A \cdot \nu_2 B = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nu_1 A_k \cdot \nu_2 B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_1 A_k \cdot \mu_2 B_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \times B_k). \quad \square \end{aligned}$$

Поскольку 1 формула (6) определяет меру на полукольце \mathcal{P} , мы можем применить к ней процедуру стандартного продолжения, описанную в § 5. Полученную в результате меру мы и назовем произведением μ_1 и μ_2 .

Определение 2. Произведение мер. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с мерами, полукольца \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 определяются формулами (16), а мера μ на $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ — формулой (6). Тогда стандартное продолжение μ с полукольца \mathcal{P} называется *произведением мер* μ_1 и μ_2 . Мы будем обозначать его символом $\mu_1 \times \mu_2$, а σ -алгебру, на которой оно определено, — символом $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Непосредственно из определения 2 вытекает, что $\mu_1 \times \mu_2$ — полная мера на $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Покажем, что она будет σ -конечной, если таковыми являются μ_1 и μ_2 . Для этого нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}, \{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающие последовательности множеств, $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда

$$A \times B = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k).$$

Доказательство. Левая часть содержит правую, поскольку $A \times B \supset A_k \times B_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Докажем обратное включение. Пусть $(x, y) \in A \times B$. Существуют такие $m, n \in \mathbb{N}$, что $x \in A_m$ и $y \in B_n$. Положим $N = \max\{m, n\}$. Из возрастания последовательностей $\{A_k\}$ и $\{B_k\}$ вытекает, что $A_m \subset A_N$ и $B_n \subset B_N$. Поэтому

$$(x, y) \in A_m \times B_n \subset A_N \times B_N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \times B_k). \quad \square$$

Следствие. Пусть μ_1, μ_2 — σ -конечные меры на $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ соответственно. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) $\mu_1 \times \mu_2$ — σ -конечная мера на $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.
- 2) Если $A \in \mathfrak{A}_1$ и $B \in \mathfrak{A}_2$, то $A \times B \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ и

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_2 B. \quad (19)$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$, $C = A \times B$. В силу σ -конечности μ_1 и μ_2 существуют такие возрастающие последовательности $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P}_1 и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathcal{P}_2 , что

$$\mu_1 A_k < +\infty, \quad \mu_2 B_k < +\infty \quad (k \in \mathbb{N}), \quad A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Множества $C_k = A_k \times B_k$ лежат в \mathcal{P} , поэтому $(\mu_1 \times \mu_2)C_k < +\infty$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$ в силу леммы 2. Отсюда вытекает измеримость C , а при $A = X_1$ и $B = X_2$ — σ -конечность $\mu_1 \times \mu_2$. Для доказательства (19) заметим, что по непрерывности снизу мер μ_1, μ_2 и $\mu_1 \times \mu_2$

$$(\mu_1 \times \mu_2)C = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mu_1 \times \mu_2)(A_k \times B_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_1 A_k \cdot \mu_2 B_k = \mu_1 A \cdot \mu_2 B.$$

Последний переход очевиден, если $\mu_1 A = 0$ или $\mu_2 B = 0$, в противном случае он вытекает из теоремы о пределе произведения. \square

Замечание. Для множеств из $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ более общего вида произведение мер вычисляется сложнее, с использованием интеграла. Мы получим соответствующую формулу в § 4 главы 10.

В случае произвольных мер μ_1 и μ_2 измеримость множеств из $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ сохраняется, а формула (19) — не всегда. Обсудим эти вопросы подробнее.

Лемма 3. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с мерами. Если $A \in \mathfrak{A}_1$, $B \in \mathfrak{A}_2$, то $A \times B \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Иными словами, верно включение $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \subset \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

Доказательство. Договоримся для любой меры ν символом ν^* обозначать внешнюю меру, порожденную ν . Пусть $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2$ состоят из счетных объединений элементов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ соответственно. Проверим вначале два свойства этих систем.

1) Если $E \subset X$, $\text{Pr}_1 E \notin \mathfrak{A}'_1$, то $\mu^* E = +\infty$. Действительно, множество E нельзя покрыть последовательностью $\{A_k \times B_k\}_{k=1}^\infty$ элементов \mathcal{P} , иначе система $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ покрывала бы $\text{Pr}_1 E$. Тогда $\mu^* E = +\infty$ по определению μ^* .

2) Если $X' \in \mathfrak{A}'_1 \times \mathfrak{A}'_2$, μ' — сужение μ на измеримые подмножества X' , то $\mu^* E = \mu'^* E$ для любого $E \subset X'$. Действительно, пусть $\mathcal{P}' = \{P \cap X' : P \in \mathcal{P}\}$. Ясно, что $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, откуда $\mu^* E \leq \mu'^* E$ в соответствии с (14). Обратно, если множество E покрывается последовательностью $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ из \mathcal{P} , то оно покрывается и последовательностью $\{P_k \cap X'\}$ из \mathcal{P}' . Тогда

$$\mu'^* E \leq \sum_{k=1}^\infty \mu'(P_k \cap X') = \sum_{k=1}^\infty \mu(P_k \cap X') \leq \sum_{k=1}^\infty \mu P_k.$$

Переходя к инфимуму по всем последовательностям $\{P_k\}$, мы получим $\mu'^* E \leq \mu^* E$.

Докажем теперь утверждение леммы. Пусть $C = A \times B \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. В силу (11) достаточно проверить, что

$$\mu^* E \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{для любого } E \subset X.$$

Можно считать, что $\text{Pr}_1 E \in \mathfrak{A}'_1$ и $\text{Pr}_2 E \in \mathfrak{A}'_2$ (в противном случае $\mu^* E = +\infty$ в силу 1), и доказываемое неравенство очевидно). Положим

$$X' = \text{Pr}_1 E \times \text{Pr}_2 E, \quad C' = C \cap X',$$

а через μ' обозначим сужение μ на измеримые подмножества X' . Тогда мера μ' σ -конечна, и по следствию леммы 2 множество C' измеримо относительно μ' , то есть

$$\mu'^* E \geq \mu'^*(E \cap C') + \mu'^*(E \setminus C').$$

В силу 2) мы можем всюду в этом равенстве заменить μ'^* на μ^* . Кроме того, $E \cap C' = E \cap C$ и $E \setminus C' \supset E \setminus C$. Поэтому

$$\mu^* E \geq \mu^*(E \cap C') + \mu^*(E \setminus C') \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C). \quad \square$$

Замечание. Выясним, в каком случае верна формула (19). Пусть $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2$ имеют тот же смысл, что в доказательстве леммы 3. Если $A \in \mathfrak{A}'_1$ и $B \in \mathfrak{A}'_2$, то равенство (19) сохраняется (это доказывается так же, как для σ -конечных мер). В противном случае предположим для определенности, что $A \notin \mathfrak{A}'_1$. Тогда справедливость (19) равносильна тому, что $B = \emptyset$ или $\mu_2 B > 0$. Докажем это. Пусть $B \neq \emptyset$. Тогда $\text{Pr}_1(A \times B) = A \notin \mathfrak{A}'_1$, откуда

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) = \mu^*(A \times B) = +\infty$$

(см. свойство 1) в доказательстве леммы 3). Бесконечность правой части (19) эквивалентна условию $\mu_2 B > 0$.

Применим теперь описанную выше конструкцию к мерам Лебега. Оказывается, что произведением m -мерной и n -мерной мер Лебега будет $(m+n)$ -мерная мера Лебега. Это утверждение, несмотря на его “естественность”, является содержательным и требует доказательства.

Теорема 2. Произведение мер Лебега. Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\lambda_m \times \lambda_n = \lambda_{m+n}$.

Доказательство. Пусть $\nu = \lambda_m \times \lambda_n$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^m \otimes \mathfrak{M}^n$ и

$$\mathcal{P} = \{A \times B: A \in \mathfrak{M}^m, B \in \mathfrak{M}^n, \lambda_m A < +\infty, \lambda_n B < +\infty\}.$$

Очевидно, что

$$\mathcal{P} \supset \mathcal{P}^m \times \mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{m+n},$$

и для любых $P \in \mathcal{P}^m$ и $Q \in \mathcal{P}^n$

$$\nu(P \times Q) = \lambda_m P \cdot \lambda_n Q = \lambda_{m+n}(P \times Q).$$

Значит, полная мера ν продолжает λ_{m+n} с полукольца \mathcal{P}^{m+n} на \mathfrak{A} . Тогда по теореме Лебега – Каратеодори $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{M}^{m+n}$, причем меры ν и λ_{m+n} совпадают на \mathfrak{M}^{m+n} . Поэтому нам достаточно доказать включение $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}^{m+n}$. Оно, в свою очередь, будет следовать из соотношения $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}^{m+n}$. Действительно, в этом случае $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{M}^{m+n}$. Так как меры ν и λ_{m+n} являются продолжениями классического объема с \mathcal{P}^{m+n} , они совпадают на \mathcal{P} по единственности продолжения. Кроме того, ν есть стандартное продолжение меры (6) с полукольца \mathcal{P} , и ввиду его минимальности $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}^{m+n}$.

Перейдем к доказательству включения $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}^{m+n}$. Оно будет вытекать из соотношений

$$\begin{aligned} A \times Q &\in \mathfrak{M}^{m+n} && \text{для любых } A \in \mathfrak{M}^m \text{ и } Q \in \mathcal{P}^n, \\ P \times B &\in \mathfrak{M}^{m+n} && \text{для любых } B \in \mathfrak{M}^n \text{ и } P \in \mathcal{P}^m. \end{aligned}$$

Действительно, пусть они установлены. Положим

$$P_k = [-k, k]^m, \quad Q_k = [-k, k]^n \quad \text{при } k \in \mathbb{N}.$$

Тогда при любых $A \in \mathfrak{M}^m$ и $B \in \mathfrak{M}^n$ мы получим

$$\begin{aligned} A \times \mathbb{R}^n &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \times Q_k) \in \mathfrak{M}^{m+n}, \\ \mathbb{R}^m \times B &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \times B) \in \mathfrak{M}^{m+n}, \end{aligned}$$

откуда

$$A \times B = (A \times \mathbb{R}^n) \cap (\mathbb{R}^m \times B) \in \mathfrak{M}^{m+n}.$$

Но это и означает, что $\mathcal{P} \subset \mathfrak{M}^{m+n}$.

В силу равноправия m и n достаточно проверить первое соотношение. Пусть $A \in \mathfrak{M}^m$ и $Q \in \mathcal{P}^n$. Разобьем доказательство включения $A \times Q \in \mathfrak{M}^{m+n}$ на несколько случаев.

1) Пусть A — открытое множество. По теореме 7 § 2 множество A есть объединение некоторой последовательности $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ из \mathcal{P}^m . Так как

$$P_k \times Q \in \mathcal{P}^{m+n} \subset \mathfrak{M}^{m+n} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N},$$

мы получаем

$$A \times Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} (P_k \times Q) \in \mathfrak{M}^{m+n}.$$

2) Пусть A — множество типа G_{δ} , то есть $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$, где все множества G_k открыты в \mathbb{R}^m . Тогда в силу 1)

$$A \times Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} (G_k \times Q) \in \mathfrak{M}^{m+n}.$$

3) Пусть $\lambda_m A = 0$. По следствию 2 теоремы 2 § 6 существует такое множество G типа G_{δ} , что $G \supset A$ и $\lambda_m G = 0$. Тогда в силу 2) $G \times Q \in \mathfrak{M}^{m+n}$, поэтому

$$\lambda_{m+n}(G \times Q) = \nu(G \times Q) = \lambda_m G \cdot \lambda_n Q = 0.$$

Так как $A \times Q \subset G \times Q$, мы получаем $A \times Q \in \mathfrak{M}^{m+n}$ ввиду полноты меры λ_{m+n} .

4) Общий случай. Произвольное множество $A \in \mathfrak{M}^m$ представимо в виде $G \setminus E$, где G — множество типа G_{δ} , $\lambda_m E = 0$. Тогда из 2) и 3) вытекает, что

$$A \times Q = (G \times Q) \setminus (E \times Q) \in \mathfrak{M}^{m+n}. \quad \square$$

В заключение этого параграфа мы докажем, что операция произведения мер ассоциативна.

Теорема 3. Ассоциативность произведения мер. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, $(X_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3)$ — пространства с σ -конечными мерами. Тогда

$$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3).$$

Замечание. Множества $(X_1 \times X_2) \times X_3$ и $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ отождествляются естественным образом друг с другом и с $X_1 \times X_2 \times X_3$.

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= (\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \otimes \mathfrak{A}_3, & \nu_1 &= (\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3, \\ \mathfrak{B}_2 &= \mathfrak{A}_1 \otimes (\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}_3), & \nu_2 &= \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3). \end{aligned}$$

Теорема сводится к утверждениям, что ν_2 есть продолжение ν_1 , а ν_1 — продолжение ν_2 . Мы ограничимся доказательством первого из них. По теореме Лебега – Каратеодори достаточно проверить, что мера ν_2 определена и совпадает с ν_1 на полукольце

$\mathcal{P} = \{E \times C : E \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, C \in \mathfrak{A}_3, (\mu_1 \times \mu_2)E < +\infty, \mu_3 C < +\infty\}$,
Пусть $E \times C \in \mathcal{P}$. Мы должны показать, что

$$E \times C \in \mathfrak{B}_2 \quad \text{и} \quad \nu_2(E \times C) = \nu_1(E \times C).$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\mu_3 C = 0$. Заметим, что

$$\nu_2(X_1 \times X_2 \times C) = \mu_1 X_1 \cdot \mu_2 X_2 \cdot \mu_3 C = 0.$$

В силу полноты меры ν_2 отсюда вытекает, что $E \times C \in \mathfrak{B}_2$ и $\nu_2(E \times C) = 0 = \nu_1(E \times C)$.

2) Пусть $\mu_3 C > 0$. Положим

$$\mathfrak{A}_C = \{F \subset X_1 \times X_2 : F \times C \in \mathfrak{B}_2\}, \quad \mu_C F = \nu_2(F \times C) \quad (F \in \mathfrak{A}_C).$$

Очевидно, что \mathfrak{A}_C — σ -алгебра подмножеств $X_1 \times X_2$ и μ_C — полная мера на \mathfrak{A}_C . Если $A \in \mathfrak{A}_1$ и $B \in \mathfrak{A}_2$, то

$$\mu_C(A \times B) = \mu_1 A \cdot \mu_2 B \cdot \mu_3 C = (\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) \cdot \mu_3 C.$$

Таким образом, мера $\frac{\mu_C}{\mu_3 C}$ является полным продолжением $\mu_1 \times \mu_2$ с полукольца $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ на σ -алгебру \mathfrak{A}_C . Тогда по теореме Лебега – Каратеодори эта мера есть продолжение $\mu_1 \times \mu_2$ с $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ на \mathfrak{A}_C . Поэтому $E \in \mathfrak{A}_C$, то есть $E \times C \in \mathfrak{B}_2$, и

$$\nu_2(E \times C) = \mu_C E = (\mu_1 \times \mu_2)E \cdot \mu_3 C = \nu_1(E \times C). \quad \square$$

ГЛАВА 10. ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛА

В предыдущей главе было подробно изучено понятие меры. Теперь с его помощью мы дадим общее определение интеграла, принадлежащее Лебегу и обобщающее конструкцию Римана, рассмотренную в главе 4. Интеграл Римана по отрезку от неотрицательной функции можно трактовать геометрически (как площадь подграфика функции) и аналитически (как предел сумм Римана). Эти два подхода допускают обобщение. Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$ и $f: E \rightarrow [0, +\infty]$. Мы будем требовать *измеримость* функции f или ее подграфика (эти понятия эквивалентны и подробно обсуждаются в § 1). Подграфику измеримой функции f можно будет приписать площадь, которую мы и назовем интегралом f вдоль множества E по мере μ . Площадь подграфика вычисляется с помощью произведения μ и одномерной меры Лебега или как предел интегральных сумм. Кроме того, в § 2 мы определим и изучим интеграл от знакопеременных и комплекснозначных функций. В § 3 будет доказано несколько теорем о предельном переходе под знаком интеграла, имеющих применение в разных областях математики. Параграфы 4 и 5 посвящены вычислению произведения мер и интегрированию по нему. Эти результаты будут использоваться при вычислении кратных интегралов. В последнем параграфе мы введем и изучим суммы числовых семейств произвольной мощности.

При изучении интеграла мы будем обычно оперировать функциями со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Алгебраические и аналитические операции над такими функциями были описаны во введении к главе 9. Рекомендуем читателю вспомнить материал § 1 этой главы.

§ 1. Измеримые функции

Геометрический смысл интеграла Римана от неотрицательной функции — площадь ее подграфика. Это замечание мы в дальнейшем положим в основу общего определения интеграла. Однако, чтобы подграфику можно было приписать площадь, он должен быть в каком-то смысле измерим. В этом случае и функция будет называться измеримой. Мы обсудим два подхода к понятию

измеримости функции — геометрический и аналитический. Для неотрицательных функций эти два подхода окажутся эквивалентными.

Перейдем к формальному изложению. Введем вначале некоторые базовые понятия. Пусть X — множество, \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств X . Тогда пара (X, \mathfrak{A}) будет называться *измеримым пространством*. Множества, входящие в \mathfrak{A} , а также их \mathfrak{A} -разбиения мы будем называть *измеримыми*. Определим вначале классы функций специального вида.

Определение 1. Пусть X — множество.

1) Если $E \subset X$, то функция

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

называется *характеристической функцией* множества E .

2) Пусть \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств X , $E \in \mathfrak{A}$. Допустим, что функция $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ принимает не более чем счетное число значений, причем все множества постоянства f измеримы. Тогда f называется *ступенчатой*. Если же множество значений функции f конечно и содержится в \mathbb{R} , то она называется *простой*.

Замечание 1. Для любой ступенчатой функции f найдутся не более чем счетное измеримое разбиение \mathcal{E} множества E и семейство $\{c_A\}_{A \in \mathcal{E}}$ в $\overline{\mathbb{R}}$, для которых

$$f(x) = \sum_{A \in \mathcal{E}} c_A \cdot \chi_A(x) \quad (x \in E). \quad (1)$$

Сумма в правой части всегда имеет смысл, поскольку при любом $x \in E$ лишь одно слагаемое может быть ненулевым. Разбиение \mathcal{E} называют *допустимым для f* . Допустимое разбиение не единственно. Действительно, любое измеримое разбиение E , более мелкое, чем \mathcal{E} , также допустимо для f . Если функция f простая, то систему \mathcal{E} мы всегда будем выбирать конечной. Отметим также, что правая часть (1) определяет ступенчатую функцию, заданную всюду на X и равную нулю на $X \setminus E$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением простых и ступенчатых функций, заданных на X .

Замечание 2. Пусть f, g — простые функции на X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Существует измеримое разбиение \mathcal{E} множества X , допустимое для f и g .

2) Функции $f+g, f \cdot g, \min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ являются простыми.

Действительно, пусть $\mathcal{E}_f, \mathcal{E}_g$ — разбиения X , допустимые для f, g соответственно. В § 2 главы 9 было доказано существование измеримого разбиения \mathcal{E} множества X , которое мельче \mathcal{E}_f и \mathcal{E}_g . Оно и будет допустимым для f и g . Второе утверждение вытекает из первого, поскольку все функции из 2) постоянны на элементах \mathcal{E} . \square

Перейдем к рассмотрению функций более общего вида. Прежде всего необходимо определить подграфик неотрицательной функции.

Определение 2. Пусть X — множество, $f: X \rightarrow [0, +\infty]$. Тогда подмножество $X \times [0, +\infty)$, задаваемое равенством

$$\Pi_f = \{(x, t): x \in X, 0 \leq t < f(x)\},$$

называется *подграфиком* f . Если $E \subset X$, то подграфик функции $f|_E$ мы будем обозначать символом $\Pi_f(E)$.

Замечание. График функции не является частью ее подграфика. Это соглашение позволит упростить дальнейшие рассуждения. Отметим, что проекция Π_f на X может не совпадать с X . В частности, если $f \equiv 0$ на X , то подграфик f пуст.

Лемма 1. Пусть X — множество, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность неотрицательных функций на X , $f_k \rightarrow f$ при $k \rightarrow \infty$ поточечно на X . Справедливы следующие утверждения.

1) $\Pi_{f_k} \subset \Pi_{f_{k+1}}$ при любом $k \in \mathbb{N}$.

2) $\Pi_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k}$.

Доказательство. 1) Пусть $(x, t) \in \Pi_{f_k}$. Тогда

$$x \in X \quad \text{и} \quad t < f_k(x) \leq f_{k+1}(x),$$

откуда $(x, t) \in \Pi_{f_{k+1}}$.

2) Если $k \in \mathbb{N}$, то $f_k \leq f$ на X , и по первому утверждению $\Pi_{f_k} \subset \Pi_f$. Поэтому правая часть доказываемого равенства содержится в левой. Проверим обратное включение. Пусть $(x, t) \in \Pi_f$. Тогда $x \in X$ и $0 \leq t < f(x)$. Так как $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f_n(x) > t$. Поэтому

$$(x, t) \in \Pi_{f_n} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k},$$

что и доказывает обратное включение. \square

Перейдем к обсуждению вопроса о том, как определить измеримость подграфика функции. Пусть вначале f — неотрицательная функция, заданная и непрерывная на отрезке в \mathbb{R} . Сделаем два замечания.

1) Функция f есть поточечный предел возрастающей последовательности кусочно-постоянных функций. Предлагаем читателю доказать это самостоятельно, используя теорему Кантора.

2) Подграфик f измерим по Лебегу, то есть лежит в \mathfrak{M}^2 . Это вытекает из леммы 1, поскольку подграфики кусочно-постоянных функций измеримы по Лебегу.

Рассмотрим теперь общую ситуацию. Было бы естественно положить в основу определения замечание 2), то есть понимать измеримость подграфика f как принадлежность его некоторой σ -алгебре подмножеств $X \times \mathbb{R}$. Однако, нет естественного способа ввести на $X \times \mathbb{R}$ σ -алгебру подмножеств. Поэтому измеримость подграфика f мы введем как обобщение свойства 1), заменяя кусочно-постоянные функции простыми.

Определение 3. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$. Подграфик f называется *измеримым*, если существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, поточечно сходящихся к f . В частности, если сама функция f простая, то ее подграфик измерим.

Предположим теперь, что на σ -алгебре \mathfrak{A} задана мера μ . Тогда конструкция произведения мер μ и λ_1 естественным образом порождает σ -алгебру $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$ подмножеств $X \times \mathbb{R}$ (см. § 8 главы 9). Оказывается, что если подграфик функции f измерим в смысле определения 3, то он измерим и относительно σ -алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$.

Докажем это. Напомним, что $A \times B \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$ для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{M}^1$.

Теорема 1. Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$. Если подграфик функции f измерим, то он входит в σ -алгебру $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$.

Доказательство. Пусть вначале функция f простая и \mathcal{E} — допустимое разбиение для f . Обозначим через c_A значение f на множестве $A \in \mathcal{E}$. Тогда

$$\Pi_f(E) = \bigcup_{A \in \mathcal{E}} (A \times [0, c_A)) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1.$$

В общем случае существует возрастающая последовательность простых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к f . Так как подграфики функций f_k измеримы, по лемме 1 мы получаем

$$\Pi_f(E) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k}(E) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1. \quad \square$$

Замечание. Пусть μ — полная σ -конечная мера. Тогда справедливо и обратное утверждение: если подграфик функции f входит в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$, то он измерим. Мы докажем это в § 4.

Условие измеримости подграфика функции имеет наглядный геометрический смысл, но оно неудобно для практической проверки. Сейчас мы приведем эквивалентное описание функций с измеримыми подграфиками, которое к тому же без изменений переносится на знакопеременные функции.

Определение 4. Измеримая функция. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Функция f называется *измеримой относительно \mathfrak{A}* (или *\mathfrak{A} -измеримой*), если для любого промежутка $\Delta \subset \mathbb{R}$ множество $f^{-1}(\Delta)$ измеримо (то есть попадает в \mathfrak{A}).

Замечание 1. Если σ -алгебра \mathfrak{A} ясна из контекста, то функцию f обычно называют просто *измеримой*.

Замечание 2. Измеримость неотрицательной функции эквивалентна измеримости ее подграфика. Мы докажем это позже, после изучения свойств измеримых функций (см. теорему 7).

Замечание 3. Пусть функция f измерима. Если B — борелевское подмножество \mathbb{R} , то $f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$. Однако для множеств B , измеримых по Лебегу, это уже неверно. В частности, может оказаться, что прообраз множества нулевой меры неизмерим. Мы не будем приводить доказательств этих утверждений.

При практической проверке измеримости функции можно ограничиться рассмотрением прообразов промежутков специального вида. Опишем эти прообразы.

Определение 5. Пусть E — множество, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$. Множества

$$\begin{aligned} \{f \leq a\} &= \{x \in E: f(x) \leq a\}, & \{f < a\} &= \{x \in E: f(x) < a\}, \\ \{f \geq a\} &= \{x \in E: f(x) \geq a\}, & \{f > a\} &= \{x \in E: f(x) > a\} \end{aligned}$$

называются *лебеговыми множествами* функции f . Иными словами, эти множества имеют вид

$$f^{-1}([-\infty, a]), \quad f^{-1}([-\infty, a)), \quad f^{-1}([a, +\infty]), \quad f^{-1}((a, +\infty]).$$

Замечание. Для $a \in \overline{\mathbb{R}}$ введем множества

$$\{f = a\} = \{x \in E: f(x) = a\}$$

(мы будем называть их *множествами уровня* функции f). Тогда измеримость лебеговых множеств функции f влечет измеримость ее множеств уровня. Действительно, в случае $a \in \mathbb{R}$

$$\{f = a\} = \{f \leq a\} \cap \{f \geq a\} \in \mathfrak{A},$$

а для бесконечных a утверждение вытекает из очевидных равенств

$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f > k\}, \quad \{f = -\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < -k\}.$$

Покажем, что измеримость функции равносильна измеримости при всех $a \in \mathbb{R}$ лебегова множества любого из этих четырех типов.

Лемма 2. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- 1) Функция f измерима относительно \mathfrak{A} .
- 2) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{f \leq a\}$ измеримо.
- 3) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{f < a\}$ измеримо.
- 4) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{f \geq a\}$ измеримо.
- 5) Для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $\{f > a\}$ измеримо.

Доказательство. Проверим вначале, что утверждения 2) — 5) эквивалентны, то есть $2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5) \Rightarrow 2)$. Импликации $3) \Rightarrow 4)$ и $5) \Rightarrow 2)$ вытекают из соотношений

$$\{f \geq a\} = E \setminus \{f < a\}, \quad \{f \leq a\} = E \setminus \{f > a\}.$$

Для обоснования перехода $2) \Rightarrow 3)$ достаточно проверить равенство

$$\{f < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq a - \frac{1}{k}\}.$$

Очевидно, что его левая часть содержит правую. Пусть теперь $x \in \{f < a\}$. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} (a - \frac{1}{k}) = a > f(x)$. Поэтому найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $f(x) \leq a - \frac{1}{k}$, то есть $x \in \{f \leq a - \frac{1}{k}\}$. Тем самым доказано обратное включение. Наконец, импликация $4) \Rightarrow 5)$ вытекает из равенства

$$\{f > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \geq a + \frac{1}{k}\},$$

проверку которого мы предоставляем читателю.

Так как лебеговы множества f являются прообразами промежутков, их измеримость вытекает из измеримости f . Обратно, пусть все лебеговы множества f измеримы. Покажем, что прообраз любого промежутка $\Delta \subset \overline{\mathbb{R}}$ измерим. В силу замечания к определению 5 мы можем считать Δ интервалом. Тогда Δ есть счетное объединение ячеек по теореме 7 § 2 главы 9. Но прообраз любой ячейки измерим, так как

$$f^{-1}([a, b)) = \{f < b\} \setminus \{f < a\} \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому $f^{-1}(\Delta) \in \mathfrak{A}$. Таким образом, утверждения 2) – 5) эквивалентны 1). \square

Следствие. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, f — ступенчатая функция на X . Тогда f измерима относительно \mathfrak{A} .

В частности, измеримы простые функции и характеристические функции множеств из \mathfrak{A} .

Доказательство. Запишем f по формуле (1), где \mathcal{E} — не более чем счетное измеримое разбиение X . Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\{f > a\} = \bigcup \{E \in \mathcal{E}: c_E > a\} \in \mathfrak{A},$$

и измеримость f вытекает из леммы 2. \square

Перейдем к изучению свойств измеримых функций. Рассмотрим вначале функции, измеримые относительно σ -алгебры \mathfrak{M}^n (мы будем называть их *измеримыми по Лебегу*). Прежде всего покажем, что измеримость вытекает из непрерывности.

Теорема 2. Пусть $E \in \mathfrak{M}^n$, $f \in C(E)$. Тогда функция f измерима по Лебегу.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$. По теореме 3 § 5 главы 5 множество $f^{-1}((a, +\infty))$ открыто в E , то есть имеет вид $E \cap G$, где G открыто в \mathbb{R}^n . Так как функция f не принимает бесконечных значений, мы получаем

$$\{f > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) = E \cap G \in \mathfrak{M}^n,$$

откуда в силу леммы 2 и вытекает измеримость f . \square

Замечание 1. Ослабляя условия на функцию f , мы получим следующие обобщения теоремы 2.

1) Если $E_0 \subset E$, $\lambda_n E_0 = 0$ и сужение f на $E \setminus E_0$ непрерывно, то функция f измерима. Действительно, обозначим через g и h сужения f на E_0 и $E \setminus E_0$ соответственно. Тогда функция h измерима по теореме 2, а g — в силу полноты меры Лебега, так как $g^{-1}(\Delta) \subset E_0$ для любого промежутка Δ . Поэтому

$$\{f > a\} = \{g > a\} \cup \{h > a\} \in \mathfrak{M}^n \text{ при всех } a \in \mathbb{R}. \quad \square$$

2) Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $E_\varepsilon \subset E$, что $\lambda_n E_\varepsilon < \varepsilon$ и сужение f на $E \setminus E_\varepsilon$ непрерывно. Тогда функция f измерима. Более того, Н. Н. Лузин показал, что если значения f бесконечны лишь на множестве нулевой меры, то верно и обратное утверждение. Мы не будем доказывать эти теоремы.

Наша ближайшая задача — установить связь измеримости и различных действий над функциями: композиций, арифметических операций и предельных переходов. Рассмотрим вначале композиции. Нам потребуется обобщить понятие измеримости на случай отображений.

Определение 6. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Отображение f называется *измеримым*, если все его координатные функции измеримы. В частности, комплекснозначная функция измерима, если измеримы ее вещественная и мнимая части.

Теорема 3. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, множество G открыто в \mathbb{R}^n . Если отображение $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ измеримо и $g \in C(G)$, то функция $g \circ f$ измерима.

Доказательство. Положим $h = g \circ f$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. В силу непрерывности g множество $g^{-1}((a, +\infty))$ открыто в G и, значит, в \mathbb{R}^n . По теореме 7 § 2 главы 9 его можно представить как объединение последовательности ячеек $\{P_k\}_{k=1}^\infty$. Так как все значения g конечны, мы получим

$$\{h > a\} = f^{-1}(g^{-1}((a, +\infty))) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^\infty P_k\right) = \bigcup_{k=1}^\infty f^{-1}(P_k).$$

Поэтому нам достаточно доказать, что прообразы ячеек при отображении f измеримы. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $\alpha < \beta$. Тогда в силу измеримости координатных функций f_k отображения f

$$\begin{aligned} f^{-1}([\alpha, \beta]) &= \{x \in E: f_k(x) \in [\alpha_k, \beta_k) \text{ при всех } k = 1, \dots, n\} = \\ &= \bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}([\alpha_k, \beta_k)) \in \mathfrak{A}. \quad \square \end{aligned}$$

Следствие. Если $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция, то и $|f|$ измерим.

Доказательство. Достаточно применить теорему при $n = 2$ к отображению f и функции $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. \square

Замечание. Если заменить непрерывность g измеримостью, теорема станет неверной даже при $n = 1$. Иными словами, композиция измеримых функций может оказаться неизмеримой. Действительно, пусть $G = \mathbb{R}$ и множество $A \in \mathfrak{M}^1$ таково, что $f^{-1}(A) \notin \mathfrak{A}$ (см. замечание к определению 4). Полагая $g = \chi_A$, мы получим $\{g \circ f = 1\} = f^{-1}(A) \notin \mathfrak{A}$, откуда вытекает неизмеримость $g \circ f$.

Рассмотрим теперь связь измеримости с арифметическими операциями. Сложение и умножение функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ мы определили в § 1 главы 9. Напомним, что произведение элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ имеет смысл всегда, а сумма — если a и b не являются бесконечностями разных знаков.

Теорема 4. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, f, g — измеримые функции на E . Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Функция $f + g$ измерима на своей области определения.
- 2) Функция $f \cdot g$ измерима на E .

Замечание. Область определения функции $f + g$ имеет вид

$$E \setminus (\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} \cup \{g = +\infty\} \cap \{f = -\infty\}),$$

поэтому она измерима. Мы будем не умаляя общности считать, что функция $f + g$ определена на E .

Доказательство. Положим

$$E_0 = \{x \in E: f(x) \in \mathbb{R} \text{ и } g(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Множество E_0 измеримо как пересечение $f^{-1}(\mathbb{R})$ и $g^{-1}(\mathbb{R})$.

- 1) Заметим, что $(f + g)^{-1}(\mathbb{R}) = E_0$, и для любого $x \in E_0$

$$f(x) + g(x) = F(f(x), g(x)), \text{ где } F(u, v) = u + v.$$

Так как $F \in C(\mathbb{R}^2)$, по теореме 3 функция $F(f, g)$ измерима на E_0 . Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$

$$(f + g)^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in E_0: F(f(x), g(x)) > a\} \in \mathfrak{A}.$$

Кроме того,

$$\{f + g = +\infty\} = \{f = +\infty\} \cup \{g = +\infty\} \in \mathfrak{A}.$$

Поэтому $\{f + g > a\} \in \mathfrak{A}$ при всех $a \in \mathbb{R}$, то есть функция $f + g$ измерима.

2) Заметим, что $(f \cdot g)^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subset E_0$, и для любого $x \in E_0$

$$f(x) \cdot g(x) = F(f(x), g(x)), \text{ где } F(u, v) = u \cdot v.$$

По теореме 3 функция $F(f, g)$ измерима на E_0 . Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ множество

$$(f \cdot g)^{-1}((a, +\infty) \setminus \{0\}) = \{x \in E_0: F(f(x), g(x)) \in (a, +\infty) \setminus \{0\}\}$$

измеримо. Кроме того,

$$\{f \cdot g = 0\} = \{f = 0\} \cup \{g = 0\} \in \mathfrak{A}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \{f \cdot g = +\infty\} &= (\{f > 0\} \cap \{g = +\infty\}) \cup (\{g > 0\} \cap \{f = +\infty\}) \cup \\ &\cup (\{f < 0\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{g < 0\} \cap \{f = -\infty\}) \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Поэтому $\{f \cdot g > a\} \in \mathfrak{A}$ при всех $a \in \mathbb{R}$, то есть функция $f \cdot g$ измерима. \square

Замечание 1. По индукции утверждения теоремы 4 легко обобщаются на случай конечного числа функций. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

Замечание 2. Если функция f измерима на E и $c \in \overline{\mathbb{R}}$, то функция cf также измерима. Для доказательства достаточно в теореме 4 положить $g \equiv c$.

Установим теперь связь измеримости и предельных переходов.

Теорема 5. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — не более чем счетное семейство измеримых на E функций, то функции $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha$ и $\inf_{\alpha \in A} f_\alpha$ измеримы на E .

2) Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность функций, измеримых на E . Тогда измеримыми на E будут функции $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$ и $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$, а также поточечный предел последовательности $\{f_k\}$, если он существует на E .

Доказательство. 1) Достаточно показать, что при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \sup_{\alpha \in A} f_\alpha > a \right\} = \bigcup_{\alpha \in A} \{f_\alpha > a\}, \quad \left\{ \inf_{\alpha \in A} f_\alpha < a \right\} = \bigcup_{\alpha \in A} \{f_\alpha < a\}.$$

Проверим, например, первое равенство. Очевидно, его левая часть содержит правую. Обратно, пусть $x \in E$ и $\sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x) > a$. Тогда найдется такое $\alpha \in A$, что $f_\alpha(x) > a$, то есть x принадлежит правой части доказываемого равенства.

2) Заметим, что для любого $x \in E$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geq n} f_k(x) \right), \quad \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right).$$

Тогда в силу утверждения 1) функции $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$ и $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} f_k$ измеримы.

Если существует поточечный предел последовательности $\{f_k\}$, то он совпадает с ее верхним пределом и потому измерим. \square

Следствие 1. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, функции f и g измеримы на E . Тогда измеримыми будут функции $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ и $|f|$.

Доказательство. Измеримость функций $\min\{f, g\}$, $\max\{f, g\}$ вытекает непосредственно из первого утверждения теоремы 5. Тогда измерима и функция $|f|$, поскольку $|f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\}$ для любого $x \in E$, а функция $-f$ измерима по замечанию 2 к теореме 4. \square

Следствие 2. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций на E , ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ имеет сумму на E . Тогда эта сумма измерима на E .

В частности, сумма ряда неотрицательных измеримых функций также измерима на E .

Доказательство вытекает из теорем 4 и 5, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f_k \right). \quad \square$$

Наша дальнейшая задача — установить эквивалентность измеримости неотрицательной функции и ее подграфика. Ключевым звеном в этом утверждении будет теорема об аппроксимации измеримых функций простыми. Докажем ее.

Теорема 6. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$ — измеримая функция. Тогда существует возрастающая последовательность неотрицательных простых функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, поточечно сходящаяся к f .

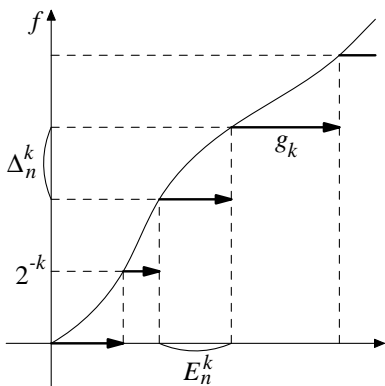


Рис. 7а

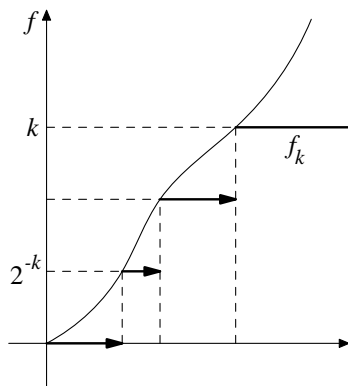


Рис. 7б

Доказательство. Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\Delta_n^k = \left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k} \right), \quad E_n^k = f^{-1}(\Delta_n^k).$$

Кроме того, пусть $E_\infty = \{f = +\infty\}$. Тогда при каждом $k \in \mathbb{N}$

$$E = f^{-1}([0, +\infty]) = f^{-1}\left(\{+\infty\} \vee \bigvee_{n=0}^{\infty} \Delta_n^k\right) = E_\infty \vee \bigvee_{n=0}^{\infty} E_n^k,$$

причем все множества в правой части измеримы ввиду измеримости f . Поэтому формулы

$$g_k(x) = \begin{cases} \frac{n}{2^k}, & x \in E_n^k, \\ +\infty, & x \in E_\infty \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$$

корректно определяют ступенчатые функции на E (геометрический смысл этого определения ясен из рисунка 7а). Покажем, что последовательность $\{g_k\}$ равномерно сходится к f на $E \setminus E_\infty$. Для любых $n \in \mathbb{Z}_+$ и $x \in E_n^k$

$$\frac{n}{2^k} \leq f(x) < \frac{n}{2^k} + \frac{1}{2^k}, \quad \text{то есть} \quad 0 \leq f(x) - g_k(x) < \frac{1}{2^k},$$

откуда

$$\sup_{E \setminus E_\infty} |f - g_k| \leq 2^{-k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Проверим теперь, что для любого $x \in E$ последовательность $\{g_k(x)\}$ возрастает. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Если $x \in E_\infty$, то $g_k(x)$ и $g_{k+1}(x)$ равны $+\infty$. В противном случае найдется такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что $x \in E_n^k$. Тогда

$$\Delta_n^k = \left[\frac{2n}{2^{k+1}}, \frac{2n+2}{2^{k+1}} \right) = \Delta_{2n}^{k+1} \cup \Delta_{2n+1}^{k+1},$$

откуда

$$g_{k+1}(x) \geq \frac{2n}{2^{k+1}} = \frac{n}{2^k} = g_k(x).$$

Построим теперь *простые* функции, удовлетворяющие утверждению теоремы. Положим для $k \in \mathbb{N}$

$$f_k(x) = \min\{g_k(x), k\} \quad (x \in E)$$

(см. рисунок 7б). Покажем, что $f_k(x) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$ для любого $x \in E$. Если $x \in E_\infty$, то

$$f_k(x) = \min\{+\infty, k\} = k \rightarrow +\infty = f(x) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

В противном случае при $k > f(x)$ мы получим $g_k(x) \leq f(x) < k$, то есть $f_k(x) = g_k(x)$, и по доказанному выше $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ($k \rightarrow \infty$). Осталось проверить, что последовательность $\{f_k\}$ возрастает. Для любых $x \in E$ и $k \in \mathbb{N}$

$$f_k(x) \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \quad \text{и} \quad f_k(x) \leq k \leq k+1,$$

откуда $f_k(x) \leq \min\{g_{k+1}(x), k+1\} = f_{k+1}(x)$. \square

Замечание. Если в теореме дополнительно потребовать ограниченность функции f , то последовательность $\{f_k\}$ будет сходиться к f *равномерно на E* . Действительно, в этом случае $E_\infty = \emptyset$ и $f_k(x) = g_k(x)$ при $k > \sup_E f$. Осталось воспользоваться равномерной сходимостью $\{g_k\}$ к f на $E \setminus E_\infty$, которая была установлена в процессе доказательства теоремы 2.

Покажем теперь, что измеримость неотрицательной функции эквивалентна измеримости ее подграфика.

Теорема 7. Пусть (X, \mathfrak{A}) — измеримое пространство, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- 1) Функция f измерима.
- 2) Подграфик f измерим.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) вытекает непосредственно из теоремы 6. Обратно, если подграфик f измерим, то функция f измерима по теореме 5 как поточечный предел последовательности измеримых функций. \square

Оставшаяся часть параграфа посвящена вопросам сходимости в разных смыслах последовательности измеримых функций. Всюду далее мы будем предполагать, что (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой. Введем вначале одно полезное понятие.

Определение 7. Пусть $E \subset X$, $\{P(x)\}_{x \in E}$ — семейство высказываний. Говорят, что $P(x)$ истинно при μ -*почти всех* $x \in E$ (или P истинно μ -*почти везде на E*), если существует такое множество $F \in \mathfrak{A}$, что $\mu F = 0$ и $P(x)$ истинно при любых $x \in E \setminus F$.

Часто мы будем говорить просто *почти везде*, не указывая явно меру, если она ясна из контекста.

Введем теперь ослабленный вариант поточечной сходимости.

Определение 8. Сходимость почти везде. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность измеримых функций на E . Мы будем говорить, что $\{f_k\}$ *сходится к f почти везде на E* , если $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ($k \rightarrow \infty$) при почти всех $x \in E$.

Иными словами, сходимость почти везде — это поточечная сходимость вне некоторого множества нулевой меры.

Замечание. Если $f_k \rightarrow f$ при $k \rightarrow \infty$ почти везде на E , а мера μ полна, то функция f измерима на E . Действительно, пусть $E_0 \subset E$ — множество, на котором $\{f_k\}$ поточечно сходится к f . Тогда функция f измерима на E_0 по теореме 7, а на $E \setminus E_0$ — в силу полноты μ , поскольку $\mu(E \setminus E_0) = 0$ и любое подмножество $E \setminus E_0$ измеримо. \square

Введем теперь еще одну разновидность сходимости последовательности измеримых функций.

Определение 9. Сходимость по мере. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, f и f_k ($k \in \mathbb{N}$) — измеримые и почти везде конечные функции на E . Если для любого $\sigma > 0$

$$\mu\{|f_k - f| \geq \sigma\} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

то говорят, что $\{f_k\}$ *сходится к f по мере μ* , и пишут $f_k \xrightarrow{\mu} f$ ($k \rightarrow \infty$).

Замечание 1. Функция $|f_k - f|$ имеет смысл почти везде на E и измерима на своей области определения как модуль измеримой функции.

Замечание 2. Если $f_k, f: E \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{f_k\}$ равномерно сходится к f на E , то она сходится к f и по мере. Действительно, для любого $\sigma > 0$ множество $\{|f_k - f| \geq \sigma\}$ будет пустым при всех достаточно больших k . Заметим, однако, что поточечная сходимость и сходимость по мере не следуют друг из друга. Это будет ясно из примеров, приводимых ниже.

Пример 1. Пусть $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность множеств из \mathfrak{A} , $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu E_k = 0$. Тогда функции $f_k = \chi_{E_k}$ сходятся по мере к

нулю на X . Действительно, если $\sigma > 1$, то $\{|f_k| \geq \sigma\} = \emptyset$, а для $\sigma \in (0, 1]$

$$\mu\{|f_k| \geq \sigma\} = \mu E_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad \square$$

Пример 2. Пусть $X = \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}^1$, $\mu = \lambda_1$. Тогда функции $f_k = \chi_{[k, +\infty)}$ сходятся на \mathbb{R} к нулю поточечно, но не по мере. Действительно, если $x \in \mathbb{R}$, то $f_k(x) = 0$ при всех $k > x$, то есть $f_k(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С другой стороны,

$$\lambda_1\{|f_k| \geq 1\} = \lambda_1[k, +\infty) = +\infty \not\rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

поэтому $\{f_k\}$ не сходится к нулю по мере Лебега. \square

Замечание. В действительности последовательность $\{f_k\}$ вообще не имеет предела по мере. Это следует из теоремы Ф. Рисса, которую мы докажем далее.

Пример 3. Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\Delta_k = [\sqrt{k}, \sqrt{k+1}) - [\sqrt{k}], \quad f_k = \chi_{\Delta_k}.$$

Тогда функции f_k сходятся на $[0, 1)$ к нулю по мере Лебега, но ни при каком $x \in [0, 1)$ у последовательности $\{f_k(x)\}$ нет предела. Действительно, первое утверждение — частный случай примера 1, поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 0$. С другой стороны, при всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$[0, 1) = \bigvee_{k=n^2}^{n^2+2n} \Delta_k.$$

Тогда для любой точки $x \in [0, 1)$ последовательность $\{f_k(x)\}$ содержит бесконечное число как нулей, так и единиц, и потому она не имеет предела. \square

Пример 2 показывает, что из поточечной сходимости не следует сходимость по мере. Тем не менее, эта импликация будет верной, если мы дополнительно потребуем конечность меры множества E . Докажем соответствующее утверждение.

Теорема 8 (А. Лебег).] Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $\mu E < +\infty$, функции f и f_k ($k \in \mathbb{N}$) измеримы и почти везде конечны на E . Если $f_k \rightarrow f$ почти везде на E , то $f_k \xrightarrow{\mu} f$ при $k \rightarrow \infty$.

Замечание. Если $f_k \rightarrow f$ всюду на E или мера μ полна, то условие измеримости f можно опустить.

Доказательство. Можно не умаляя общности считать, что $f_k \rightarrow f$ поточечно на E , а функции f и f_k конечны всюду на E . Действительно, пусть множество $E_0 \subset E$ нулевой меры таково, что на $E \setminus E_0$ все функции f_k и f конечны и $f_k \rightarrow f$. Положим $f(x) = 0$ и $f_k(x) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $x \in E_0$. Тем самым оба требуемых условия окажутся выполненными, а сходимость по мере при этом не нарушится, так как по условию $\mu E_0 = 0$.

Перейдем к доказательству сходимости $\{f_k\}$ к f по мере. Пусть $\sigma > 0$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ положим

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} \{|f_k - f| \geq \sigma\}.$$

Множества E_n убывают и имеют конечную меру, поскольку они содержатся в E . Покажем, что пересечение этих множеств пусто. Действительно, если $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, то существует бесконечно много номеров $k \in \mathbb{N}$, для которых $|f_k(x) - f(x)| \geq \sigma$, что противоречит условию $f_k(x) \rightarrow f(x)$. Тогда по непрерывности меры μ сверху мы получаем, что $\mu E_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\mu\{|f_n - f| \geq \sigma\} \leq \mu E_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то есть $f_n \xrightarrow{\mu} f$. \square

В примере 3 мы видели, что из сходимости по мере не следует сходимость почти везде. Тем не менее, справедлив следующий “принцип выбора”.

Теорема 9 (Ф. Рисс). Пусть $E \in \mathfrak{A}$, функции f и f_n ($n \in \mathbb{N}$) измеримы и почти везде конечны на E . Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ на E , то существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{f_n\}$, сходящаяся к f почти везде на E .

Отметим, что в отличие от теоремы Лебега конечность меры E здесь не предполагается.

Доказательство. Построим по индукции подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию

$$\mu\{|f_{n_k} - f| \geq 2^{-k}\} < 2^{-k} \text{ при всех } k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Так как $f_n \xrightarrow{\mu} f$, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\mu\{|f_n - f| \geq 2^{-k}\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Полагая в (3) $k = 1$, мы подберем такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что (2) выполняется при $k = 1$. Пусть номера n_1, \dots, n_k уже построены. Применяя соотношение (3) для $k + 1$, мы найдем такое $n_{k+1} > n_k$, что (2) будет верно и для $k + 1$.

Покажем теперь, что подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ искомая. Положим

$$E_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} \{|f_{n_k} - f| \geq 2^{-k}\} \quad (m \in \mathbb{N}), \quad E' = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Очевидно, что множества E_m убывают. Кроме того, в силу (2)

$$\mu E_m \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu\{|f_{n_k} - f| \geq 2^{-k}\} < \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-m} \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

Тогда $\mu E' = 0$ по непрерывности меры μ сверху. Поэтому нам достаточно проверить, что $f_{n_k} \rightarrow f$ поточечно на $E \setminus E'$. Если $x \in E \setminus E'$, то найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $x \notin E_m$. Отсюда вытекает, что при любом $k \geq m$

$$x \notin \{|f_{n_k} - f| \geq 2^{-k}\}, \text{ то есть } |f_{n_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}.$$

Поэтому $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$. \square

Следствие 1. Равенство пределов по мере и почти везде. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, функции f , g и f_n ($n \in \mathbb{N}$) измеримы и почти везде конечны на E . Если $f_n \rightarrow f$ почти везде на E и $f_n \xrightarrow{\mu} g$ на E , то $f = g$ почти везде на E .

Доказательство. По теореме 9 существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к g почти везде на E . Но она также сходится почти везде на E и к f . Тогда в силу единственности поточечного предела функции f и g совпадают почти везде на E . \square

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что последовательность из примера 2 не имеет предела по мере на \mathbb{R} . Действительно, если бы он существовал, то был бы равен нулю почти везде на \mathbb{R} , а это неверно.

Следствие 2. Единственность предела по мере. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, функции f, g и f_n ($n \in \mathbb{N}$) измеримы и почти везде конечны на E . Если $f_n \xrightarrow{\mu} f$ и $f_n \xrightarrow{\mu} g$ на E при $n \rightarrow \infty$, то $f = g$ почти везде на E .

Доказательство. По теореме 9 существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся почти везде к f . Кроме того, она будет сходиться по мере к g . Тогда по следствию 1 функции f и g совпадают почти везде. \square

§ 2. Определение интеграла

Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, f — измеримая функция на E . Цель этого параграфа — определить и изучить интеграл от f вдоль множества E по мере μ . Мы сделаем это в три этапа: для неотрицательных, знакопеременных и комплекснозначных функций f . Разберем вначале случай неотрицательных f . Наша задача — приписать подграфику Π_f функции f площадь, которая и будет называться интегралом. Мы рассмотрим два подхода к определению площади подграфика, а затем установим связь между ними.

1. Площадь подграфика как предел сумм. Рассмотрим вначале случай простой функции f . Множества вида $A \times [0, c)$, где $A \in \mathfrak{A}$ и $c \geq 0$, назовем *обобщенными прямоугольниками*. Их площади мы определим формулой

$$S(A \times [0, c)) = \mu A \cdot c, \quad \text{где } A \in \mathfrak{A}, \quad c \geq 0$$

(напомним, что $\infty \cdot 0 = 0$). Пусть теперь $\{E_k\}_{k=1}^n$ — измеримое разбиение X , и

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{E_k}, \quad \text{где } c_1, \dots, c_n \geq 0.$$

Тогда

$$\Pi_f = \bigvee_{k=1}^n (E_k \times [0, c_k]).$$

Так как от площади естественно требовать аддитивности, положим

$$S(\Pi_f) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mu E_k. \quad (4)$$

Определим теперь площадь подграфика неотрицательной измеримой функции f на X . По теореме 7 § 1 подграфик f измерим, то есть существует возрастающая последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ неотрицательных простых функций на X , поточечно сходящаяся к f . По лемме 1 § 1 множества Π_{f_k} возрастают, а их объединение совпадает с Π_f . Это позволяет нам дать следующее определение.

Определение 1. Площадь как предел сумм. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X . *Площадью подграфика f* назовем величину

$$S(\Pi_f) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(\Pi_{f_k}), \quad (5)$$

где $\{f_k\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных простых функций на X , поточечно сходящаяся к f .

Замечание 1. Определение 1 корректно, то есть не зависит от выбора последовательности $\{f_k\}$. Это мы получим ниже как следствие теоремы 1.

Замечание 2. Площади Π_{f_k} возрастают с ростом k . Действительно, пусть $k \in \mathbb{N}$ и \mathcal{E} — конечное разбиение X , допустимое для

f_k и f_{k+1} (см. замечание 2 к определению простой функции). Тогда в силу (4)

$$S(\Pi_{f_k}) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E \cdot f_k|_E \leq \sum_{E \in \mathcal{E}} \mu E \cdot f_{k+1}|_E = S(\Pi_{f_{k+1}}).$$

Поэтому предел в правой части (5) всегда существует в $[0, +\infty]$.

Замечание 3. В силу (4) площади Π_{f_k} напоминают нижние суммы Дарбу функции f , рассмотренные в главе 4. Кроме того, в силу замечания 2 предел в правой части (5) можно заменить на супремум. Поэтому площадь Π_f является обобщением нижнего интеграла Дарбу (см. § 2 главы 4).

2. Площадь подграфика как произведение мер. Положим $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$, $\nu = \mu \times \lambda_1$. Заметим, что для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $c \geq 0$

$$\nu(A \times [0, c)) = \mu A \cdot \lambda_1[0, c) = c \cdot \mu A, \quad (6)$$

поскольку ячейка $[0, c)$ либо пуста, либо имеет положительную меру (см. замечание к лемме 3 § 8 главы 9).

Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X . По теореме 1 § 1 подграфик f измерим, то есть лежит в σ -алгебре \mathfrak{B} , поэтому имеет смысл величина $\nu \Pi_f$.

Определение 2. Площадь подграфика как мера. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X . *Площадью подграфика f* назовем величину $(\mu \times \lambda_1) \Pi_f$.

Докажем теперь эквивалентность определений 1 и 2.

Теорема 1. Пусть f — неотрицательная измеримая функция на X , $S(\Pi_f)$ — площадь подграфика f в смысле определения 1. Тогда

$$S(\Pi_f) = (\mu \times \lambda_1) \Pi_f.$$

Доказательство. Пусть вначале f — простая функция. Запишем ее в виде

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{E_k},$$

где $c_1, \dots, c_n \geq 0$, $\{E_k\}_{k=1}^n$ — измеримое разбиение X . Заметим, что $\Pi_f = \bigvee_{k=1}^n (E_k \times [0, c_k])$. Тогда в силу (4) и (6)

$$\nu \Pi_f = \sum_{k=1}^n \nu(E_k \times [0, c_k]) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mu E_k = S(\Pi_f).$$

В общем случае по теореме 6 § 1 найдется возрастающая последовательность неотрицательных простых функций, поточечно сходящаяся к f . Тогда в силу (5), непрерывности меры ν снизу и леммы 1 § 1

$$S(\Pi_f) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(\Pi_{f_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu \Pi_{f_k} = \nu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k} \right) = \nu \Pi_f. \quad \square$$

Замечание 1. Формула (5) корректно определяет площадь подграфика f , поскольку по теореме 1 предел в ее правой части не зависит от выбора последовательности $\{f_k\}$.

Замечание 2. Если функция f задана не на X , а на множестве $E \in \mathfrak{A}$, договоримся всегда считать, что она равна нулю на $X \setminus E$. При таком продолжении подграфик f не изменится.

Теперь мы можем дать определение интеграла от неотрицательной измеримой функции.

Определение 3. Интеграл от неотрицательной функции.

Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$ — измеримая функция. Площадь подграфика f , понимаемая в смысле определения 1 или 2, называется *интегралом f вдоль множества E по мере μ* и обозначается символом $\int_E f d\mu$.

Замечание. В ситуациях, когда нужно явно указать аргумент подынтегральной функции, пишут также $\int_E f(x) d\mu(x)$.

Перейдем к изучению свойств интеграла от неотрицательной функции. Мы будем везде предполагать, что (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, а все функции считать измеримыми.

1. Интеграл по множеству нулевой меры. Если $\mu E = 0$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$, то $\int_E f d\mu = 0$.

Доказательство. Ясно, что $\Pi_f \subset E \times [0, +\infty)$. Поэтому

$$\int_E f d\mu = (\mu \times \lambda_1)(\Pi_f) \leq (\mu \times \lambda_1)(E \times [0, +\infty)) = \mu E \cdot (+\infty) = 0,$$

откуда и вытекает требуемое равенство. \square

2. Интеграл от сужения функции. Если $E_0 \in \mathfrak{A}$, $E_0 \subset E$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$, то

$$\int_{E_0} f d\mu = \int_E f \cdot \chi_{E_0} d\mu.$$

Доказательство. Положим $g = f|_{E_0}$, $h = f \cdot \chi_{E_0}$. Продолжим эти функции нулем на X . Тогда g и h совпадают с f на E_0 и равны нулю вне E_0 . Значит, подграфики g и h одинаковы, а потому равны и их площади. \square

3. Монотонность интеграла. Если $f, g: E \rightarrow [0, +\infty]$, $f \leq g$ на E , то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

Доказательство. Так как $f \leq g$ на E , мы получаем $\Pi_f \subset \Pi_g$, и в силу монотонности ν

$$\int_E f d\mu = \nu(\Pi_f) \leq \nu(\Pi_g) = \int_E g d\mu. \quad \square$$

4. Счетная аддитивность интеграла. Если $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ — измеримое разбиение E , $f: E \rightarrow [0, +\infty]$, то

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f d\mu.$$

Доказательство. Положим $f_k = f|_{E_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\Pi_f = \bigvee_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k}$ в силу дизъюнктности множеств E_k , откуда

$$\int_E f d\mu = \nu \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\Pi_{f_k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f d\mu. \quad \square$$

Замечание. Доказанное свойство можно понимать так: функция $A \mapsto \int_A f d\mu$ является мерой на \mathfrak{A}_E . Эту меру называют *неопределённым интегралом* функции f . Отсюда, в частности, вытекает *монотонность интеграла по множеству*:

$$\text{если } E_0 \in \mathfrak{A}, \quad E_0 \subset E, \quad \text{то} \quad \int_{E_0} f d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

5. Теорема Б. Леви. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций, поточечно сходящаяся к функции f на E , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu.$$

Доказательство. По лемме 1 § 1 множества Π_{f_k} возрастают, а их объединение есть Π_f . Тогда по непрерывности меры ν снизу

$$\int_E f d\mu = \nu \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_{f_k} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu(\Pi_{f_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu. \quad \square$$

Замечание. Утверждение теоремы Леви можно записать в виде

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\mu.$$

Таким образом, ее смысл состоит в возможности перестановки предела и интеграла. Другие утверждения такого рода будут доказаны в следующем параграфе.

6. Линейность интеграла. Если $f, g: E \rightarrow [0, +\infty]$, $\alpha, \beta \geq 0$, то

$$\int_E (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu.$$

Доказательство. Положим $h = \alpha f + \beta g$. Пусть вначале f и g — простые функции. Выберем какое-либо конечное измеримое разбиение $\{E_k\}_{k=1}^n$ множества E , допустимое для f и g , и запишем

$$f = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{E_k}, \quad g = \sum_{k=1}^n d_k \cdot \chi_{E_k},$$

где $c_k, d_k \geq 0$ при всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Тогда функция h тоже постоянна на множествах E_k , и в силу (4)

$$\begin{aligned} \int_E h d\mu &= \sum_{k=1}^n (\alpha c_k + \beta d_k) \mu E_k = \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n c_k \cdot \mu E_k + \beta \sum_{k=1}^n d_k \cdot \mu E_k = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь общий случай. Выберем последовательности $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ неотрицательных простых функций, поточечно сходящиеся на E к f и g соответственно. Тогда последовательность простых функций $\{\alpha f_k + \beta g_k\}$ возрастает и поточечно сходится к h . По доказанному выше и теореме Леви

$$\begin{aligned} \int_E h d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (\alpha f_k + \beta g_k) d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\alpha \int_E f_k d\mu + \beta \int_E g_k d\mu \right) = \\ &= \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k d\mu = \alpha \int_E f d\mu + \beta \int_E g d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

7. Интегрирование рядов. Если $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных функций на E , то

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu.$$

Доказательство. Положим

$$F_n = \sum_{k=1}^n f_k \text{ при } n \in \mathbb{N}, \quad F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и поточечно сходится к F на E . В силу теоремы Леви и линейности интеграла мы получим

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu &= \int_E F d\mu = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Наша дальнейшая задача — определить интеграл от измеримой функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. Это можно сделать не всегда. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Свяжем с f две неотрицательные функции

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = \max\{-f, 0\} \quad (7)$$

и назовем их *положительной* и *отрицательной* частями f . Функции f^+ и f^- измеримы по следствию теоремы 5 § 1. Используя свойства положительной и отрицательной частей числа (см. § 5 главы 4), мы получим важные тождества

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-. \quad (8)$$

Обобщим теперь определение интеграла на функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 4. Интеграл от знакопеременной функции.

Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — измеримая функция. Положим

$$I_f^+ = \int_E f^+ d\mu, \quad I_f^- = \int_E f^- d\mu.$$

1) Если хотя бы один из интегралов I_f^+ и I_f^- конечен, то функция f называется *интегрируемой* на множестве E по мере μ .

2) Если оба интеграла I_f^+ и I_f^- конечны, то функция f называется *суммируемой* на множестве E по мере μ . Класс всех суммируемых на E функций мы будем обозначать $L(E, \mu)$.

3) Пусть функция f интегрируема на E по мере μ . Тогда интеграл от f вдоль E по мере μ определяется формулой

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Замечание 1. Из интегрируемости f вытекает, что разность $I_f^+ - I_f^-$ имеет смысл. Если интегралы I_f^\pm бесконечны, то говорят, что $\int_E f d\mu$ не существует, и не приписывают ему никакого значения.

Замечание 2. Если функция f интегрируема на E , то суммируемость f на E равносильна конечности $\int_E f d\mu$.

Замечание 3. Суммируемость измеримой функции эквивалентна суммируемости ее модуля. Действительно, если функция f суммируема на E , то в силу (8) ее модуль измерим, и по линейности интеграла

$$\int_E |f| d\mu = \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu < +\infty.$$

Обратно, пусть $|f| \in L(E, \mu)$. Интегрируя неравенства $f^\pm \leq |f|$, мы получим

$$\int_E f^\pm d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty,$$

что и дает суммируемость функции f . \square

Для дальнейшего изложения нам потребуется неравенство Чебышева, дающее верхнюю оценку меры множества, на котором суммируемая функция “достаточно велика”. Сформулируем его.

Лемма 1. Неравенство Чебышева. Пусть $\varepsilon > 0$, $E \in \mathfrak{A}$, $f \in L(E, \mu)$. Тогда

$$\mu\{x \in E: |f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f| d\mu.$$

Доказательство. Обозначим $E_\varepsilon = \{|f| \geq \varepsilon\}$. Тогда $|f(x)| \geq \varepsilon$ при всех $x \in E_\varepsilon$, откуда

$$\int_E |f| d\mu \geq \int_{E_\varepsilon} |f| d\mu \geq \int_{E_\varepsilon} \varepsilon d\mu = \varepsilon \cdot \mu E_\varepsilon. \quad \square$$

Замечание. Рисунок 8 поясняет геометрический смысл второго перехода в доказательстве: левая часть неравенства равна площади закрашенной фигуры, а правая — площади заштрихованной фигуры.

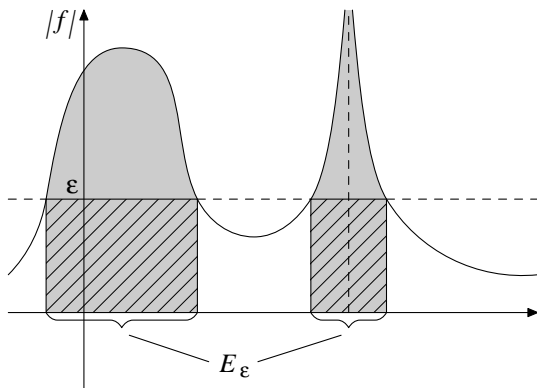


Рис. 8

Следствие 1. Если функция f суммируема на E , то она конечна μ -почти везде на E .

Доказательство. Пусть $n \in \mathbb{N}$. По неравенству Чебышева

$$\mu\{|f| = +\infty\} \leq \mu\{|f| \geq n\} \leq \frac{1}{n} \int_E |f| d\mu.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, мы получим требуемое. \square

Следствие 2. Если $\int_E |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ μ -почти везде на E .

Доказательство. В силу непрерывности меры μ снизу и неравенства Чебышева

$$\begin{aligned} \mu\{|f| > 0\} &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{|f| \geq \tfrac{1}{k}\}\right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\{|f| \geq \tfrac{1}{k}\} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} k \int_E |f| d\mu = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Для изучения интеграла от знакопеременной функции нам потребуются некоторые свойства положительной и отрицательной частей числа. Сформулируем их.

Лемма 2. Для любых $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ справедливы следующие утверждения.

- 1) Если $x \geq 0$, то $(xy)_{\pm} = xy_{\pm}$.
- 2) Если $x \leq y$, то $x_{+} \leq y_{+}$ и $x_{-} \geq y_{-}$.
- 3) $(x + y)_{\pm} \leq x_{\pm} + y_{\pm}$.

Доказательство. Первое утверждение верно ввиду возможности вынести неотрицательное число за знак максимума, второе вытекает из монотонности функций $x \mapsto x_{\pm}$ (см. § 5 главы 4). Докажем последнее утверждение. В силу равноправия x и y можно считать, что $y \leq x$. Проверим неравенство для положительных частей. Если $y < 0$, то в силу возрастания функции $x \mapsto x_{+}$

$$(x + y)_{+} \leq x_{+} \leq x_{+} + y_{+}.$$

В противном случае $x, y \geq 0$, и искомое неравенство становится равенством. Кроме того, по доказанному

$$(x + y)_{-} = (-x - y)_{+} \leq (-x)_{+} + (-y)_{+} = x_{-} + y_{-}. \quad \square$$

Перейдем к изучению свойств интеграла от знакопеременной функции. В доказательствах мы будем использовать соответствующие свойства интеграла от неотрицательной функции, применяя их к f^\pm . Договоримся всюду предполагать, что (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, а все функции будем считать измеримыми.

1. Интеграл по множеству нулевой меры. Если $\mu E = 0$, $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, то $\int_E f d\mu = 0$.

Доказательство. Для неотрицательных функций это свойство уже доказано. Поэтому

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = 0. \quad \square$$

2. Интеграл от сужения функции. Если $E_0 \in \mathfrak{A}$, $E_0 \subset E$, функция $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ интегрируема на E_0 , то

$$\int_{E_0} f d\mu = \int_E f \cdot \chi_{E_0} d\mu.$$

Доказательство. Из утверждения 1 леммы 2 вытекают равенства $(f \cdot \chi_{E_0})^\pm = f^\pm \cdot \chi_{E_0}$. Тогда по определению 4

$$\begin{aligned} \int_{E_0} f d\mu &= \int_{E_0} f^+ d\mu - \int_{E_0} f^- d\mu = \\ &= \int_E f^+ \cdot \chi_{E_0} d\mu - \int_E f^- \cdot \chi_{E_0} d\mu = \int_E f \cdot \chi_{E_0} d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

3. Монотонность интеграла. Если функции f и g интегрируемы на E , $f \leq g$ на E , то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

Доказательство. В силу утверждения 2 леммы 2 $f^+ \leq g^+$ и $f^- \geq g^-$ на E . Интегрируя эти неравенства, мы получим

$$\int_E f^+ d\mu \leq \int_E g^+ d\mu, \quad \int_E f^- d\mu \geq \int_E g^- d\mu.$$

Вычтем второе неравенство из первого (эта операция корректна в силу интегрируемости f и g). Тогда

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \leq \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu = \int_E g d\mu. \quad \square$$

4. Счетная аддитивность интеграла. Если $\{E_k\}_{k=1}^\infty$ — измеримое разбиение E , функция f интегрируема на E , то

$$\int_E f d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f d\mu.$$

Доказательство. В силу счетной аддитивности интеграла от функций f^+ и f^-

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f^- d\mu.$$

Один из рядов в правой части сходится, поскольку ввиду интегрируемости функции f хотя бы один из интегралов $\int_E f^\pm d\mu$ конечен.

Тогда по свойству линейности суммы ряда

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f^- d\mu &= \\ &= \sum_{k=1}^\infty \left(\int_{E_k} f^+ d\mu - \int_{E_k} f^- d\mu \right) = \sum_{k=1}^\infty \int_{E_k} f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Свойство 4 верно и для конечного разбиения E . Действительно, мы можем сделать это разбиение счетным, дополняя его пустыми множествами. В такой редакции свойство 4 называют *аддитивностью* интеграла.

Следствие. Если f, g — интегрируемые функции на E , $f = g$ μ -почти везде на E , то $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Доказательство. Положим $E_0 = \{f = g\}$. Тогда $\mu(E \setminus E_0) = 0$, и по аддитивности интеграла

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_{E_0} f d\mu + \int_{E \setminus E_0} f d\mu = \int_{E_0} f d\mu = \\ &= \int_{E_0} g d\mu = \int_{E_0} g d\mu + \int_{E \setminus E_0} g d\mu = \int_E g d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

5. Оценка интеграла. Если функция f интегрируема на E , то

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Доказательство. В силу (8)

$$\begin{aligned} \left| \int_E f d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E |f| d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется обобщить определение интеграла, разрешив функции быть заданной лишь почти везде на множестве.

Определение 5. Интеграл от функции, заданной почти везде. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, f — измеримая функция, заданная почти везде на E . Если g — какое-либо измеримое продолжение f на E ,

то $\int_E g d\mu$ называют *интегралом f вдоль E по мере μ* и обозначают символом $\int_E f d\mu$.

Замечание. По следствию свойства 4 определение 5 корректно: любые два продолжения f на E совпадают почти везде на E , и потому интегралы от них равны. Отметим также, что хотя бы одно измеримое продолжение f на E существует: например, мы можем доопределить f нулем. Если же мера μ полна, то любое продолжение f на E измеримо.

6. Линейность интеграла. Пусть $f, g: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если суммируемы функции f^+ и g^+ или f^- и g^- , то

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

2) Если функция f интегрируема на E и $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu.$$

Замечание. В условиях первого утверждения функция $f + g$ определена почти везде на E . Это будет установлено в процессе доказательства. Таким образом, интеграл от $f + g$ следует понимать в смысле определения 5.

Доказательство. 1) Ограничимся разбором случая, когда суммируемы f^- и g^- . По следствию 1 неравенства Чебышева $f^-(x)$ и $g^-(x)$ конечны при почти всех $x \in E$. В силу (8) для таких x значения $f(x)$ и $g(x)$ отличны от $-\infty$, поэтому имеет смысл сумма $f(x) + g(x)$. Таким образом, функция $f + g$ определена почти везде на E . Положим $h = f + g$. Тогда

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-.$$

Функция h^- суммируема и почти везде конечна на E по лемме 2, так как $h^- \leq f^- + g^-$. Добавляя к обеим частям равенства f^- , g^- и h^- , мы получим почти везде на E

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

В силу линейности интеграла от неотрицательных функций

$$\int_E h^+ d\mu + \int_E f^- d\mu + \int_E g^- d\mu = \int_E h^- d\mu + \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu.$$

Поскольку интегралы $\int_E h^- d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ и $\int_E g^- d\mu$ конечны, вычтем их из обеих частей равенства. Тогда

$$\int_E h^+ d\mu - \int_E h^- d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu,$$

что и доказывает первое утверждение.

2) Если $\alpha \geq 0$, то $(\alpha f)^\pm = \alpha f^\pm$ в силу леммы 2. По линейности интеграла от неотрицательной функции

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f d\mu &= \int_E \alpha f^+ d\mu - \int_E \alpha f^- d\mu = \\ &= \alpha \left(\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right) = \alpha \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

В случае $\alpha < 0$

$$(\alpha f)^\pm = (-|\alpha|f)^\pm = |\alpha| \cdot (-f)^\pm = |\alpha| \cdot f^\mp,$$

и аналогичные рассуждения дают

$$\int_E \alpha f d\mu = |\alpha| \left(\int_E f^- d\mu - \int_E f^+ d\mu \right) = -|\alpha| \int_E f d\mu = \alpha \int_E f d\mu. \quad \square$$

7. Абсолютная непрерывность интеграла. Пусть функция f суммируема на E . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\text{если } A \in \mathfrak{A}_E, \quad \mu A < \delta, \quad \text{то } \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Напомним, что символ \mathfrak{A}_E означает систему измеримых подмножеств E .

Доказательство. Положим

$$E_n = \{|f| > n\} \text{ при } n \in \mathbb{N}, \quad E_\infty = \{|f| = +\infty\}.$$

Множества $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ убывают, а их пересечение есть E_∞ . По следствию 1 неравенства Чебышева $\mu E_\infty = 0$. По свойству 4 неопределенный интеграл функции $|f|$ является конечной мерой на \mathfrak{A}_E , и в силу его непрерывности сверху

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{E_\infty} |f| d\mu = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\int_{E_n} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$.

Покажем, что $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$ — искомое. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}_E$, $\mu A < \delta$. Заметим, что $|f(x)| \leq n$ при любом $x \in A \setminus E_n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_{A \setminus E_n} |f| d\mu + \int_{A \cap E_n} |f| d\mu \leq \int_{A \setminus E_n} n d\mu + \int_{E_n} |f| d\mu < \\ &< n \cdot \mu(A \setminus E_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq n \cdot \mu A + \frac{\varepsilon}{2} < n\delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. Доказанное утверждение можно трактовать так:

$$\int_A |f| d\mu \rightarrow 0 \text{ при } \mu A \rightarrow 0.$$

Это свойство называют *абсолютной непрерывностью* неопределенного интеграла $|f|$. Отметим, что малость интеграла $\int_A |f| d\mu$ достигается лишь за счет малости *меры* A , а геометрическая структура множества A при этом не имеет значения.

В заключение этого параграфа мы определим и кратко обсудим интеграл от комплекснозначной измеримой функции. Положим

$$\alpha + \infty = \infty \text{ при } \alpha \in \mathbb{C}; \quad \alpha \cdot \infty = \infty \text{ при } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \quad 0 \cdot \infty = 0.$$

Таким образом, мы обобщили арифметические операции в \mathbb{C} , допуская в качестве одного из аргументов ∞ .

Определение 6. **Интеграл от комплекснозначной функции.** Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ — измеримая функция.

1) Если одна из функций $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ интегрируема, а другая суммируема на E , то функция f называется *интегрируемой* на множестве E по мере μ , а интеграл от f определяется равенством

$$\int_E f d\mu = \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu.$$

2) Если $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in L(E, \mu)$, то функция f называется *суммируемой* на множестве E по мере μ . Класс суммируемых на E комплекснозначных функций мы также будем обозначать $L(E, \mu)$.

Замечание 1. Суммируемость функции равносильна суммируемости ее модуля. Действительно, необходимость получается из оценки $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$, а достаточность — из неравенств $|\operatorname{Re} f| \leq |f|$ и $|\operatorname{Im} f| \leq |f|$. Напомним, что измеримость $|f|$ вытекает из следствия теоремы 5 § 1.

Замечание 2. Свойства 1, 2, 4, 5 интеграла от знакопеременной функции сохраняют силу для интегрируемых комплекснозначных функций, а свойства 6 и 7 — для суммируемых; при этом число α в свойстве 6 может быть и комплексным. Действительно, все свойства, кроме оценки интеграла, легко сводятся к соответствующим свойствам для вещественнозначных функций. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно. Мы докажем только свойство 5. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ — интегрируемая функция. Проверим неравенство

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Обозначим $I = \int_E f d\mu$. Можно считать, что f суммируема и $I \neq 0$,

иначе утверждение очевидно. Положим $\alpha = \frac{|I|}{I}$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= |I| = \operatorname{Re} |I| = \operatorname{Re}(\alpha I) = \operatorname{Re} \left(\alpha \int_E f \, d\mu \right) = \\ &= \operatorname{Re} \int_E \alpha f \, d\mu = \int_E \operatorname{Re}(\alpha f) \, d\mu \leq \int_E |\alpha f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

§ 3. Предельный переход под знаком интеграла

В главе 8 мы изучали возможность перестановки различных операций анализа, в частности, предела и интеграла. Сейчас мы должны вернуться к этому вопросу применительно к интегралу Лебега, определенному в предыдущем параграфе. Пусть (X, \mathfrak{A}, μ) — пространство с мерой, $E \in \mathfrak{A}$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность интегрируемых на E функций, имеющая в некотором смысле предел. Мы хотим получить какие-то достаточные условия, при которых справедливо равенство

$$\int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

В этом случае говорят, что допустим *предельный переход под знаком интеграла*. Одно из утверждений подобного рода — теорема Леви — было доказано в предыдущем параграфе. Начнем с обобщения этой теоремы на случай знакопеременных функций.

Теорема 1 (Б. Леви). Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность функций, интегрируемых на E , причем $\int_E f_1 \, d\mu > -\infty$. Тогда

$$\int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Замечание. В условиях теоремы последовательность $\{f_n\}$ монотонно сходится к измеримой на E функции. Предел в правой

части существует ввиду возрастания последовательности интегралов $\int_E f_n d\mu$.

Доказательство. По условию функция f_1^- суммируема на E и, по следствию 1 неравенства Чебышева, она конечна μ -почти везде на E . Поэтому функции

$$F_n = f_n + f_1^- \quad (n \in \mathbb{N})$$

определены почти всюду на E . По лемме 2 § 2 функции f_n^- убывают на E , откуда $0 \leq f_n^- \leq f_1^-$ на E при любом $n \in \mathbb{N}$. В силу (8) для всех $n \in \mathbb{N}$

$$F_n = f_n^+ + (f_1^- - f_n^-) \geq 0 \quad \mu\text{-почти везде на } E.$$

Значит, функции F_n удовлетворяют условиям теоремы Леви для неотрицательных функций. Применяя ее и пользуясь линейностью интеграла, мы получим

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu + \int_E f_1^- d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E f_n d\mu + \int_E f_1^- d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n d\mu = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) d\mu = \\ &= \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n + f_1^- \right) d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu + \int_E f_1^- d\mu. \end{aligned}$$

Осталось вычесть из обеих частей этого равенства $\int_E f_1^- d\mu$. \square

Замечание. Условие $\int_E f_1 d\mu > -\infty$ опустить нельзя. Действительно, пусть μ — одномерная мера Лебега, $f_n = -\frac{1}{n} \cdot \chi_{[n, +\infty)}$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ возрастает и поточечно сходится к нулю на \mathbb{R} , но $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = -\infty \neq 0$.

Условие монотонной сходимости, наложенное в теореме Леви, далеко не всегда оказывается выполненным. С другой стороны,

поточечной сходимости последовательности $\{f_n\}$ в силу предыдущего замечания недостаточно для предельного перехода под знаком интеграла. Тем не менее, верно следующее более слабое утверждение.

Теорема 2 (П. Фату). Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций на E , $\Phi \in L(E, \mu)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Если $f_n \geq \Phi$ на E при любом $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

2) Если $f_n \leq \Phi$ на E при любом $n \in \mathbb{N}$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu.$$

Доказательство. 1) Положим

$$g_n = f_n - \Phi, \quad h_n = \inf_{k \geq n} g_k \quad \text{при любом } n \in \mathbb{N}.$$

По следствию 1 неравенства Чебышева функция Φ конечна μ -почти везде на E . Поэтому функции g_n и h_n определены почти везде на E . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Если $k \geq n$, то $h_n \leq g_k$ почти везде на E . Интегрируя это неравенство и переходя к инфимуму по k , мы получим

$$\int_E h_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_E g_k d\mu.$$

Заметим, что $\{h_n\}$ — возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций. В силу теоремы Леви

$$\begin{aligned} \int_E \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n \right) d\mu &= \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} g_k \right) d\mu = \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \right) d\mu = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E h_n d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \int_E g_k d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu. \end{aligned}$$

2) По условию $-f_n \geq -\Phi$ на E . Применяя первое утверждение теоремы к функциям $-f_n$ и $-\Phi$, мы получим

$$\begin{aligned} -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(-\int_E f_n d\mu \right) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E (-f_n) d\mu \geq \\ &\geq \int_E \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-f_n) \right) d\mu = \int_E \left(-\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = -\int_E \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu. \end{aligned}$$

Осталось домножить полученное неравенство на -1 . \square

Следствие. Если $E \in \mathfrak{A}$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных измеримых функций на E , то

$$\int_E \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

В частности, если последовательность $\{f_n\}$ сходится на E к измеримой функции f , то

$$\int_E f d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Для доказательства достаточно положить $\Phi \equiv 0$ и применить первое утверждение теоремы Фату.

Докажем теперь наиболее важный результат этого параграфа — теорему Лебега о мажорированной сходимости. Она имеет не очень ограничительные условия и потому широко используется в разных областях математики.

Теорема 3 (А. Лебег). Пусть $E \in \mathfrak{A}$, f и f_n ($n \in \mathbb{N}$) — измеримые функции на E со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ или \mathbb{C} , удовлетворяющие двум условиям.

- 1) f_n сходится к f поточечно на E .
- 2) Существует такая функция $\Phi \in L(E, \mu)$, что

$$|f_n(x)| \leq \Phi(x) \quad \text{при любых } n \in \mathbb{N} \text{ и } x \in E.$$

Тогда $f_n \in L(E, \mu)$ при всех $n \in \mathbb{N}$, $f \in L(E, \mu)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Замечание 1. Существование предела в левой части будет установлено в процессе доказательства.

Замечание 2. Функция Φ из условия 2) называется *мажорантой* последовательности $\{f_n\}$, а сходимость последовательности $\{f_n\}$ к f называют *мажорированной*.

Доказательство. Функции f_n суммируемы при всех $n \in \mathbb{N}$, так как

$$\int_E |f_n| d\mu \leq \int_E \Phi d\mu < +\infty.$$

Кроме того, для любого $x \in E$

$$|f(x)| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right| \leq \Phi(x),$$

поэтому функция f тоже суммируема на E . Далее рассмотрим два случая.

1) Функции f_n действуют в $\overline{\mathbb{R}}$. Поскольку $-\Phi \leq f_n \leq \Phi$ на E при всех $n \in \mathbb{N}$, к последовательности $\{f_n\}$ можно применить оба утверждения теоремы Фату. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_E \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \int_E \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu = \int_E f d\mu. \end{aligned}$$

Это возможно лишь тогда, когда все неравенства обращаются в равенства. В частности,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ существует и равен $\int_E f d\mu$.

2) Функции f_n действуют в \mathbb{C} . Тогда Φ будет мажорантой для последовательностей $\{\operatorname{Re} f_n\}$ и $\{\operatorname{Im} f_n\}$, которые поточечно сходятся к $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ соответственно. Применяя к ним уже доказанную часть теоремы Лебега, мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E \operatorname{Re} f_n d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f_n d\mu \right) = \\ &= \int_E \operatorname{Re} f d\mu + i \int_E \operatorname{Im} f d\mu = \int_E f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 3. В условиях теоремы Лебега можно требовать мажорированную сходимость не всюду, а лишь почти всюду на E . Действительно, в этом случае нужно переопределить все функции f_n и f нулем в тех точках, где нарушается мажорированная сходимость. Исправленные таким образом функции будут удовлетворять условиям теоремы 3, а интегралы от них не изменятся. Аналогичным образом, в следствии теоремы Фату можно требовать сходимость $\{f_n\}$ не всюду, а лишь почти всюду на E .

Приведем более общую редакцию теоремы Лебега, касающуюся не последовательностей, а семейств функций.

Следствие. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ — предельная точка множества A , $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство измеримых функций на E со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} , удовлетворяющее двум условиям.

1) $\{f_\alpha\}$ сходится почти везде на E к некоторой измеримой функции f , то есть

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} f_\alpha(x) = f(x) \quad \text{при почти всех } x \in E.$$

2) Существует такая функция $\Phi \in L(E, \mu)$, что

$$|f_\alpha(x)| \leq \Phi(x) \quad \text{для любых } \alpha \in A \text{ и почти всех } x \in E.$$

Тогда $f_\alpha \in L(E, \mu)$ при всех $\alpha \in A$, $f \in L(E, \mu)$ и

$$\lim_{\alpha \rightarrow a} \int_E f_\alpha d\mu = \int_E f d\mu.$$

Доказательство. Суммируемость функций f_α и f проверяется так же, как в теореме 3. Обосновать нужно только предельный переход. Пусть $\{\alpha^k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность в A , стремящаяся к a , $g_k = f_{\alpha^k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{g_k\}$ поточечно сходится к f и мажорируется функцией Φ . Тогда по теореме Лебега

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_{\alpha^k} d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k d\mu = \int_E f d\mu.$$

Осталось воспользоваться определением предела по Гейне. \square

Замечание 4. Во втором условии следствия можно ограничить значениями α из некоторой проколотой окрестности точки a . Это вытекает из локальности предела.

В заключение параграфа обобщим теорему 3 § 2 главы 8.

Теорема 4. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $\mu E < +\infty$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность функций из $L(E, \mu)$ со значениями в \mathbb{R} или \mathbb{C} , равномерно сходящаяся на E к функции f . Тогда $f \in L(E, \mu)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Доказательство. В силу свойства 1 интеграла можно считать, что $\mu E > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu E} \quad \text{при всех } n > N \text{ и } x \in E.$$

Тогда для любого $n > N$

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu < \int_E \frac{\varepsilon}{\mu E} d\mu = \varepsilon,$$

откуда и вытекает требуемое равенство. \square

Замечание 5. Теорему 4 можно также вывести из теоремы Лебега. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно.

§ 4. Вычисление произведения мер

В § 7 главы 4 мы вывели формулу, выражающую объем тела через площади его сечений с помощью интеграла. Эту теорему можно трактовать как правило вычисления произведения $\lambda_1 \times \lambda_2$, которое по теореме 2 § 8 главы 9 и есть объем в \mathbb{R}^3 . Оказывается, аналогичное утверждение справедливо и для произведения произвольных полных σ -конечных мер, причем при гораздо менее ограничительных условиях на множество, чем в главе 4. Этот результат, называемый *принципом Кавальери*, и является основной целью параграфа.

Перейдем теперь к формальному изложению. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $X = X_1 \times X_2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Эти соглашения будут действовать на протяжении всего параграфа. Напомним читателю, что для $E \subset X$ символами E_x и E^y мы обозначаем сечения множества E , параллельные X_2 и X_1 соответственно (см. определение 1 § 8 главы 9).

Определение 1. Множество $E \in \mathfrak{A}$ называется *измеримым по сечениям*, если оно удовлетворяет двум условиям.

- 1) При почти всех $x \in X_1$ верно включение $E_x \in \mathfrak{A}_2$.
- 2) Функция φ^E , определенная почти всюду на X_1 формулой

$$\varphi^E(x) = \mu_2(E_x),$$

измерима относительно \mathfrak{A}_1 .

Замечание 1. Здесь и далее мы будем для определенности говорить о сечениях, параллельных X_2 . Аналогичные формулировки для сечений, параллельных X_1 , мы предлагаем читателю выписывать самостоятельно.

Для множества $E \in \mathfrak{A}$, измеримого по сечениям, положим

$$\nu E = \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1.$$

Рассмотрим систему множеств

$$\mathfrak{B} = \{E \in \mathfrak{A}: E \text{ измеримо по сечениям и } \mu E = \nu E\}. \quad (9)$$

Основной результат параграфа состоит в том, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Проверка этого равенства потребует некоторой подготовки. Отметим вначале некоторые простые свойства сечений множества.

Замечание 2. Пусть $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность множеств из \mathfrak{B} . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При почти всех $x \in X_1$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x \in \mathfrak{A}_2, \quad \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x \in \mathfrak{A}_2.$$

2) Если последовательность $\{E_k\}$ возрастает или убывает, то при любом $x \in X_1$ тем же свойством обладает и последовательность $\{(E_k)_x\}$.

Действительно, положим

$$F_k = \{x \in X_1: (E_k)_x \notin \mathfrak{A}_2\}, \quad F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Тогда $\mu_2 F \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2 F_k = 0$, и для любого $x \in X_1 \setminus F$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x \in \mathfrak{A}_2 \quad \text{и} \quad \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)_x \in \mathfrak{A}_2.$$

Тем самым доказано первое утверждение. Проверку второго мы предоставляем читателю. \square

Докажем теперь несколько свойств системы (9), устанавливающих ее связь с теоретико-множественными операциями.

1. Замкнутость относительно дизъюнктивных объединений. Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность попарно дизъюнктивных множеств из \mathfrak{B} , то $\bigvee_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Положим $E = \bigvee_{k=1}^{\infty} E_k$. В силу предыдущего замечания μ_1 -почти все сечения E лежат в \mathfrak{A}_2 . Пусть $x \in X_1$

таково, что при любом $k \in \mathbb{N}$ множество $(E_k)_x$ измеримо. Тогда

$$\varphi^E(x) = \mu_2 \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} E_k \right)_x = \mu_2 \bigvee_{k=1}^{\infty} (E_k)_x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_2(E_k)_x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{E_k}(x).$$

Правая часть этой формулы есть измеримая функция, заданная μ_1 -почти везде на X_1 , поскольку таковыми являются функции φ^{E_k} при всех $k \in \mathbb{N}$ (см. следствие 2 теоремы 5 § 1). Таким образом, функция φ^E совпадает почти всюду на X_1 с измеримой функцией, и в силу полноты μ_1 она измерима. Наконец, по свойству интегрирования рядов и счетной аддитивности μ

$$\nu E = \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_1} \varphi^{E_k} d\mu_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \nu E_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k = \mu E. \quad \square$$

Замечание. Свойство 1 верно и для конечных семейств $\{E_k\}$. Действительно, можно дополнить это семейство до счетного пустыми множествами, которые, очевидно, входят в \mathfrak{B} .

2. Замкнутость относительно возрастающих объединений. Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность множеств из \mathfrak{B} , то $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Положим $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Почти все сечения E \mathfrak{A}_2 -измеримы. Пусть $x \in X_1$ таково, что при любом $k \in \mathbb{N}$ множество $(E_k)_x$ измеримо. Так как множества $(E_k)_x$ возрастают, в силу непрерывности μ_2 снизу

$$\varphi^E(x) = \mu_2 \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)_x = \mu_2 \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k)_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2(E_k)_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{E_k}(x).$$

Правая часть этой формулы есть измеримая функция, заданная μ_1 -почти везде на X_1 , поскольку таковыми являются функции φ^{E_k} при всех $k \in \mathbb{N}$ (см. теорему 5 § 1). Таким образом, функция φ^E совпадает почти всюду на X_1 с измеримой функцией, и в силу

полноты меры μ_1 она измерима. Так как функции φ^{E_k} возрастают, по теореме Леви и непрерывности снизу меры μ мы получим

$$\begin{aligned}\nu E &= \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{E_k} \right) d\mu_1 = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_1} \varphi^{E_k} d\mu_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu E_k = \mu E. \quad \square\end{aligned}$$

3. Замкнутость относительно убывающих пересечений.

Пусть меры μ_1 и μ_2 конечны. Если $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая последовательность множеств из \mathfrak{B} , то $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Положим $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Почти все сечения E \mathfrak{A}_2 -измеримы. Пусть $x \in X_1$ таково, что при любом $k \in \mathbb{N}$ множество $(E_k)_x$ измеримо. Так как множества $(E_k)_x$ убывают, в силу непрерывности μ_2 сверху

$$\varphi^E(x) = \mu_2 \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right)_x = \mu_2 \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k)_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2(E_k)_x = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{E_k}(x).$$

Правая часть этой формулы есть измеримая функция, заданная μ_1 -почти везде на X_1 , поскольку таковыми являются функции φ^{E_k} при всех $k \in \mathbb{N}$ (см. теорему 5 § 1). Таким образом, функция φ^E совпадает почти всюду на X_1 с измеримой функцией, и в силу полноты меры μ_1 она измерима. Осталось проверить равенство $\mu E = \nu E$. Из убывания функций φ^{E_k} вытекает, что $\varphi^{E_k} \leq \varphi^{E_1}$ почти везде на X_1 при любом $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, функция φ^{E_1} суммируема на X_1 , поскольку

$$\int_{X_1} \varphi^{E_1} d\mu_1 = \nu E_1 = \mu E_1 \leq \mu X < +\infty.$$

Тогда по теореме Лебега и непрерывности μ сверху мы получим

$$\begin{aligned}\nu E &= \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1 = \int_{X_1} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{E_k} \right) d\mu_1 = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X_1} \varphi^{E_k} d\mu_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \nu E_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu E_k = \mu E. \quad \square\end{aligned}$$

Замечание. Свойства 2 и 3 справедливы и для конечных семейств $\{E_k\}$. Эта ситуация сводится к счетному семейству, у которого все множества с достаточно большими номерами совпадают.

4. Разность вложенных множеств. Если $A, B \in \mathfrak{B}$, $A \supset B$, $\mu B < +\infty$, то $A \setminus B \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Положим $C = A \setminus B$. При μ_1 -почти всех $x \in X_1$ множества A_x и B_x одновременно \mathfrak{A}_2 -измеримы, откуда

$$C_x = (A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x \in \mathfrak{A}_2.$$

Заметим, что

$$\int_{X_1} \varphi^B d\mu_1 = \nu B = \mu B < +\infty.$$

Поэтому функция φ^B суммируема и, значит, конечна μ_1 -почти везде на X_1 . Иными словами, $\mu_2 B_x < +\infty$ при почти всех $x \in X_1$. Для таких x

$$\varphi^C(x) = \mu_2 C_x = \mu_2(A_x \setminus B_x) = \mu_2 A_x - \mu_2 B_x = \varphi^A(x) - \varphi^B(x).$$

Правая часть этого равенства измерима по теореме 4 § 1. Таким образом, функция φ^E совпадает почти всюду на X_1 с измеримой функцией, и в силу полноты меры μ_1 она измерима. Наконец, по линейности интеграла

$$\begin{aligned} \nu C &= \int_{X_1} \varphi^C d\mu_1 = \int_{X_1} (\varphi^A - \varphi^B) d\mu_1 = \\ &= \int_{X_1} \varphi^A d\mu_1 - \int_{X_1} \varphi^B d\mu_1 = \nu A - \nu B = \mu A - \mu B = \mu C. \quad \square \end{aligned}$$

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа — правило вычисления произведения мер.

Теорема 1. Принцип Кавальери. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $E \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При почти всех $x \in X_1$ верно включение $E_x \in \mathfrak{A}_2$.

2) Функция, действующая по формуле $x \mapsto \mu_2(E_x)$, измерима относительно \mathfrak{A}_1 .

$$3) (\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{X_1} \mu_2(E_x) d\mu_1(x).$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{P} = \{A \times B: A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2\}.$$

Утверждение теоремы означает, что σ -алгебра $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ совпадает с системой множеств (9). Поэтому нам достаточно проверить, что любое множество $E \in \mathfrak{A}$ лежит в \mathfrak{B} . Рассмотрим пять случаев.

1) Пусть $E \in \mathcal{P}$. Тогда $E = A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2$. Заметим, что

$$E_x = \begin{cases} B, & \text{если } x \in A, \\ \emptyset, & \text{если } x \in X_1 \setminus A. \end{cases}$$

Значит, $E_x \in \mathfrak{A}_2$ при любом $x \in X_1$. Кроме того,

$$\varphi^E(x) = \begin{cases} \mu_2 B, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \in X_1 \setminus A \end{cases} = \mu_2 B \cdot \chi_A(x),$$

поэтому φ^E — измеримая функция. Наконец,

$$\nu E = \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1 = \int_{X_1} \mu_2 B \cdot \chi_A d\mu_1 = \mu_2 B \cdot \mu_1 A = \mu E.$$

2) Пусть E — множества типа \mathcal{P}_σ . Тогда по определению § 5 главы 9 и замечанию 3 к нему множество E есть не более чем счетное дизъюнктивное объединение элементов \mathcal{P} . Отсюда в силу 1) и первого свойства системы \mathfrak{B} мы получаем $E \in \mathfrak{B}$.

3) Пусть E — множества типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$. По замечанию 2 к определению 6 § 5 главы 9 множество E есть пересечение убывающей последовательности множеств типа \mathcal{P}_σ , которые в силу 2) входят в \mathfrak{B} . Если меры μ_1 и μ_2 конечны, то по свойству 3 системы \mathfrak{B} в нее входит и множество E . Рассмотрим общий случай. Пусть $P = A \times B$, где

$$A \in \mathfrak{A}_1, B \in \mathfrak{A}_2, \mu_1 A < +\infty, \mu_2 B < +\infty.$$

Множество $E \cap P$ имеет тип $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$. Сужения мер μ_1 и μ_2 на измеримые подмножества A и B соответственно будут конечными, и по доказанному выше $E \cap P \in \mathfrak{B}$. В силу σ -конечности мер μ_1 и μ_2 найдутся такие возрастающие последовательности $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathfrak{A}_1 и $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ в \mathfrak{A}_2 , что

$$X_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad X_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k, \quad \mu_1 A_k < +\infty, \quad \mu_2 B_k < +\infty \quad (k \in \mathbb{N}).$$

По лемме 2 § 8 главы 9 множества $P_k = A_k \times B_k$ возрастают, а их объединение есть X . Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $E \cap P_k$ входит в \mathfrak{B} и

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (E \cap P_k) = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k \right) = E \cap X = E.$$

Тогда $E \in \mathfrak{B}$ по свойству 2 системы \mathfrak{B} .

4) Пусть $\mu E = 0$. По лемме 1 § 5 главы 9 существует такое множество F типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$, что

$$F \supset E \quad \text{и} \quad \mu F = \mu F - \mu E = \mu(F \setminus E) = 0.$$

В силу 3) множество F входит в \mathfrak{B} . Поэтому функция φ^F определена почти всюду на X_1 , измерима и

$$\int_{X_1} \varphi^F d\mu_1 = \nu F = \mu F = 0.$$

По следствию неравенства Чебышева $\varphi^F(x) = 0$ при почти всех $x \in X_1$, то есть $\mu_2(F_x) = 0$. Так как $E_x \subset F_x$ для любого $x \in X_1$, а мера μ_2 полна, мы получаем

$$E_x \in \mathfrak{A}_2 \quad \text{и} \quad \mu_2(E_x) = 0 \quad \text{при почти всех } x \in X_1.$$

Тогда функция φ^E определена и равна нулю почти всюду на X_1 . Отсюда в силу полноты μ_1 вытекает измеримость φ^E , а также равенства

$$\nu E = \int_{X_1} \varphi^E d\mu_1 = 0 = \mu E.$$

5) *Общий случай.* По лемме 1 § 5 главы 9 множество E имеет вид $A \setminus B$, где A — множество типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$, $B \subset A$, $\mu B = 0$. В силу 3) и 4) множества A и B входят в \mathfrak{B} . По свойству 4 системы \mathfrak{B} она содержит и разность этих множеств, то есть E . \square

Следствие. Пусть $E \in \mathfrak{A}_1$, $f: E \rightarrow [0, +\infty]$. Тогда равносильны следующие утверждения.

- 1) Функция f измерима относительно \mathfrak{A}_1 .
- 2) Подграфик $\Pi_f(E)$ функции f входит в $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{M}^1$.

Доказательство. Импликация 1) \Rightarrow 2) следует из теоремы 1 § 2. Докажем обратный переход. Пусть $\Pi_f(E) \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{M}^1$. Из принципа Кавальери вытекает, что функция $x \mapsto \lambda_1(\Pi_f(E))_x$ определена μ_1 -почти всюду на E и измерима относительно \mathfrak{A}_1 . Заметим, что при почти всех $x \in E$

$$\lambda_1(\Pi_f(E))_x = \lambda_1[0, f(x)] = f(x).$$

Поэтому функция f совпадает почти всюду на E с измеримой функцией. В силу полноты меры μ_1 отсюда следует измеримость f . \square

Произведение мер можно выразить и в терминах сечений, параллельных X_1 . Сформулируем принцип Кавальери в такой редакции.

Теорема 1'. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $E \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) При почти всех $y \in X_2$ верно включение $E^y \in \mathfrak{A}_1$.
- 2) Функция, действующая по формуле $y \mapsto \mu_1(E^y)$, измерима относительно \mathfrak{A}_2 .
- 3) $(\mu_1 \times \mu_2)(E) = \int_{X_2} \mu_1(E^y) d\mu_2(y)$.

Для доказательства теоремы надо поменять ролями μ_1 и μ_2 в предыдущих рассуждениях.

§ 5. Интегрирование по произведению мер

Основным результатом § 4 была интегральная формула для произведения мер. Теперь с ее помощью мы получим правило вычисления интеграла по произведению мер. Грубо говоря, оно состоит в

том, что подынтегральную функцию нужно проинтегрировать сначала по одной мере, потом по другой (такие интегралы называют *повторными*). Этот результат будет важен в дальнейшем при вычислении кратных интегралов.

Правило интегрирования по произведению мер будет доказано в двух версиях: для неотрицательных измеримых функций (теорема Тонелли) и для суммируемых функций (теорема Фубини). Кроме того, для каждой версии мы приведем по две формулировки, соответствующие разному порядку повторного интегрирования. Доказываться будет только первая из них.

Перейдем к формальному изложению. Мы будем всюду предполагать, что $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $X = X_1 \times X_2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, $\mu = \mu_1 \times \mu_2$. Пусть f — \mathfrak{A} -измеримая функция на X . Договоримся записывать ее в виде $f(x, y)$, где $x \in X_1$, $y \in X_2$. Фиксируя у f один из аргументов, мы получим функции f_x и f^y , действующие по формулам

$$f_x(y) = f(x, y), \quad x \in X_1 \quad \text{и} \quad f^y(x) = f(x, y), \quad y \in X_2.$$

Свяжем с ними интегралы

$$I_f(x) = \int_{X_2} f_x(y) d\mu_2(y) \quad \text{и} \quad J_f(y) = \int_{X_1} f^y(x) d\mu_1(x),$$

не задумываясь пока о том, имеют ли они смысл.

Теорема 1. (Л. Тонелли). Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, f — неотрицательная \mathfrak{A} -измеримая функция на X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При μ_1 -почти всех $x \in X_1$ функция $y \mapsto f(x, y)$ измерима относительно \mathfrak{A}_2 .

2) Функция $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ измерима относительно \mathfrak{A}_1 .

3) $\int_X f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x)$.

Замечание. Используя введенные выше обозначения, утверждения теоремы можно записать так: функция I_f определена μ_1 -почти всюду на X_1 , измерима, и верно равенство $\int_X f d\mu = \int_{X_1} I_f d\mu_1$.

Обе части этого равенства имеют смысл, поскольку подынтегральные функции неотрицательны и измеримы.

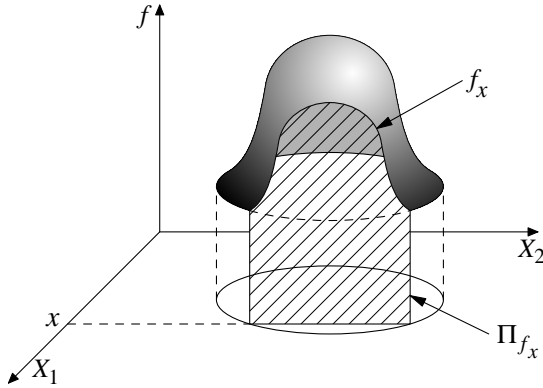


Рис. 9

Доказательство мы проведем из геометрических соображений, применяя принцип Кавальери к подграфу функции f . Положим

$$\tilde{X}_2 = X_2 \times \mathbb{R}, \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_2 \times \lambda_1, \quad \tilde{\mu} = \mu_1 \times \tilde{\mu}_2.$$

По теореме 1 § 1 подграфик Π_f функции f входит в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}^1$ или, по теореме 3 § 8 главы 9, в $\mathfrak{A}_1 \otimes (\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{M}^1)$. В силу принципа Кавальери при μ_1 -почти всех $x \in X_1$ сечения $(\Pi_f)_x$ подграфика f лежат в $\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{M}^1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} (\Pi_f)_x &= \{(y, t) \in \tilde{X}_2: y \in X_2, 0 \leq t < f(x, y)\} = \\ &= \{(y, t) \in \tilde{X}_2: y \in X_2, 0 \leq t < f_x(y)\} = \Pi_{f_x}. \end{aligned}$$

Тогда при μ_1 -почти всех $x \in X_1$ подграфик f_x измерим, что по следствию теоремы 1 § 4 влечет измеримость f_x . Кроме того,

$$I_f(x) = \int_{X_2} f_x d\mu_2 = \tilde{\mu}_2(\Pi_{f_x}) = \tilde{\mu}_2(\Pi_f)_x,$$

и функция I_f измерима относительно \mathfrak{A}_1 по принципу Кавальери. Наконец, по теореме 3 § 8 главы 9

$$\begin{aligned} \int_{X_1} I_f(x) d\mu_1(x) &= \int_{X_1} \tilde{\mu}_2(\Pi_f)_x d\mu_1(x) = \\ &= (\mu_1 \times \tilde{\mu}_2)\Pi_f = (\mu \times \lambda_1)\Pi_f = \int_X f d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Приведем альтернативную формулировку теоремы Тонелли с повторным интегрированием в обратном порядке.

Теорема 1'. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, f — неотрицательная \mathfrak{A} -измеримая функция на X . Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При μ_2 -почти всех $y \in X_2$ функция $x \mapsto f(x, y)$ измерима относительно \mathfrak{A}_1 .

2) Функция $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ измерима относительно \mathfrak{A}_2 .

$$3) \int_X f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

Сформулируем теперь правило вычисления интеграла по произведению мер для суммируемой функции.

Теорема 2. (Г. Фубини). Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $f \in L(X, \mu_1 \times \mu_2)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При μ_1 -почти всех $x \in X_1$ функция $y \mapsto f(x, y)$ суммируема на X_2 по мере μ_2 .

2) Функция $x \mapsto \int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y)$ суммируема на X_1 по мере μ_1 .

$$3) \int_X f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x).$$

Замечание. Утверждения теоремы можно записать так: функция I_f определена μ_1 -почти всюду на X_1 , суммируема, и верно равенство $\int_X f d\mu = \int_{X_1} I_f d\mu_1$.

Доказательство. Запишем f в виде $f^+ - f^-$, где функции f^\pm определяются формулами (7). Эти функции суммируемы на X по мере μ ввиду суммируемости f .

Докажем вначале утверждение 1). По теореме Тонелли

$$\int_{X_1} I_{f^\pm} d\mu_1 = \int_X f^\pm d\mu < +\infty,$$

то есть функции I_{f^\pm} суммируемы на X_1 по мере μ_1 . По следствию неравенства Чебышева они конечны μ_1 -почти всюду на X_1 . Это означает, что при μ_1 -почти всех $x \in X_1$ функции f_x^\pm суммируемы на X_2 по мере μ_2 , откуда и вытекает суммируемость f_x .

Докажем теперь утверждения 2) и 3). Пусть $x \in X_1$ таково, что $f_x \in L(X_2, \mu_2)$. Тогда

$$I_f(x) = \int_{X_2} f_x d\mu_2 = \int_{X_2} f_x^+ d\mu_2 - \int_{X_2} f_x^- d\mu_2 = I_{f^+}(x) - I_{f^-}(x).$$

В силу 1) функции I_{f^\pm} суммируемы на X_1 по мере μ_1 , откуда вытекает суммируемость I_f . Кроме того, по теореме Тонелли

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu &= \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_{X_1} I_{f^+} d\mu_1 - \int_{X_1} I_{f^-} d\mu_1 = \\ &= \int_{X_1} (I_{f^+} - I_{f^-}) d\mu_1 = \int_{X_1} I_f d\mu_1. \quad \square \end{aligned}$$

Приведем альтернативную формулировку теоремы Фубини с повторным интегрированием в обратном порядке.

Теорема 2'. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $f \in L_{\mu_1 \times \mu_2}(X)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) При μ_2 -почти всех $y \in X_2$ функция $x \mapsto f(x, y)$ суммируема на X_1 по мере μ_1 .

2) Функция $y \mapsto \int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x)$ суммируема на X_2 по мере μ_2 .

$$3) \int_X f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

Следствие. Пусть $f \in L(X_1, \mu_1)$, $g \in L(X_2, \mu_2)$ и

$$h(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{при всех } x \in X_1, y \in X_2.$$

Тогда $h \in L(X, \mu)$, и верно равенство

$$\int_X h d\mu = \int_{X_1} f(x) d\mu_1(x) \cdot \int_{X_2} g(y) d\mu_2(y).$$

Доказательство. Проверим вначале \mathfrak{A} -измеримость h . Положим

$$F(x, y) = f(x), \quad G(x, y) = g(y), \quad (x, y) \in X.$$

Ясно, что $h = F \cdot G$. Для любого $a \in \mathbb{R}$

$$\{F > a\} = \{f > a\} \times X_2 \in \mathfrak{A},$$

откуда вытекает \mathfrak{A} -измеримость F . Аналогично проверяется \mathfrak{A} -измеримость G . Тогда по теореме 4 § 1 функция h измерима.

Заметим, что функция f конечна μ_1 -почти везде на X_1 . Применяя к $|h|$ теорему Тонелли и дважды пользуясь линейностью интеграла, мы получим

$$\begin{aligned} \int_X |h| d\mu &= \int_{X_1} |f(x)| \cdot \left(\int_{X_2} |g(y)| d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{X_1} |f(x)| d\mu_1(x) \cdot \int_{X_2} |g(y)| d\mu_2(y) < +\infty, \end{aligned}$$

что дает суммируемость h . Опуская в приведенных рассуждениях модули, мы получим требуемое неравенство. \square

На практике обычно требуется интегрировать по произведению мер функции, определенные не на всем множестве X , а лишь на его измеримом подмножестве. Переформулируем теоремы Тонелли и Фубини для такой ситуации. Мы будем использовать понятие проекции множества и обозначения для проекций, введенные в определении 1 § 8 главы 9.

Теорема 3. Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ и $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ — пространства с полными σ -конечными мерами, $E \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, $\text{Pr}_1 E \in \mathfrak{A}_1$, $\text{Pr}_2 E \in \mathfrak{A}_2$, функция f либо неотрицательна и $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ -измерима на E , либо суммируема на E по мере $\mu_1 \times \mu_2$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_E f d(\mu_1 \times \mu_2) &= \int_{\text{Pr}_1 E} \left(\int_{E_x} f(x, y) d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \\ &= \int_{\text{Pr}_2 E} \left(\int_{E^y} f(x, y) d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y). \end{aligned}$$

Замечание 1. Повторные интегралы, фигурирующие в утверждении теоремы, принято записывать в виде

$$\int_{\text{Pr}_1 E} d\mu_1(x) \int_{E_x} f(x, y) d\mu_2(y) \quad \text{и} \quad \int_{\text{Pr}_2 E} d\mu_2(y) \int_{E^y} f(x, y) d\mu_1(x).$$

Этого соглашения мы будем придерживаться и в дальнейшем при изучении кратных интегралов.

Доказательство. Ограничимся проверкой первого равенства. Положим $P = \text{Pr}_1 E$. Функция

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in E, \\ 0, & (x, y) \in X \setminus E \end{cases}$$

определена на X и удовлетворяет условиям теоремы Тонелли или Фубини. Заметим, что при любых $(x, y) \in X$

$$\tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x, y) \cdot \chi_P(x), \quad \tilde{f}(x, y) = \tilde{f}(x, y) \cdot \chi_{E_x}(y).$$

Действительно, если $x \in X_1 \setminus P$, то пара (x, y) не лежит в E ни при каком $y \in X_2$, откуда $\tilde{f}(x, y) = 0$. Тем самым доказано первое соотношение. Если $\chi_{E_x}(y) = 0$, то $(x, y) \notin E$ и $\tilde{f}(x, y) = 0$. Поэтому верно и второе равенство. Применяя теорему Тонелли или Фубини

к функции \tilde{f} , мы получим

$$\begin{aligned}
 \int_E f \, d\mu &= \int_X \tilde{f} \, d\mu = \int_{X_1} d\mu_1(x) \int_{X_2} \tilde{f}(x, y) \, d\mu_2(y) = \\
 &= \int_{X_1} d\mu_1(x) \int_{X_2} \chi_P(x) \cdot \tilde{f}(x, y) \cdot \chi_{E_x}(y) \, d\mu_2(y) = \\
 &= \int_{X_1} \chi_P(x) \, d\mu_1(x) \int_{X_2} \tilde{f}(x, y) \cdot \chi_{E_x}(y) \, d\mu_2(y) = \\
 &= \int_P d\mu_1(x) \int_{E_x} \tilde{f}(x, y) \, d\mu_2(y) = \int_P d\mu_1(x) \int_{E_x} f(x, y) \, d\mu_2(y). \quad \square
 \end{aligned}$$

Замечание 2. В условиях теоремы 3 повторные интегралы совпадают. Однако, из существования повторных интегралов не следует их равенство. Кроме того, из существования и равенства повторных интегралов не вытекает существование интеграла по произведению мер. Соответствующие примеры будут приведены в следующей главе.

Замечание 3. Измеримость проекций множества E не следует из измеримости самого E . Действительно, пусть $E = A \times B$, где $A \subset X_1$, $A \notin \mathfrak{A}_1$, $\mu_2 B = 0$. Тогда

$$E \subset X_1 \times B, \quad \mu(X_1 \times B) = \mu_1 X_1 \cdot \mu_2 B = 0,$$

откуда в силу полноты μ следует измеримость E . При этом проекция E на X_1 есть A , поэтому она неизмерима.

§ 6. Сумма числового семейства

В главе 1 мы определили сумму конечного числового семейства, а в главе 7 обобщили ее на случай неотрицательного счетного семейства. В этом параграфе будет введено общее понятие суммы числового семейства, которое будет иметь смысл для произвольных неотрицательных семейств, а также широкого класса семейств в \mathbb{R} и \mathbb{C} . Мы изучим свойства суммы семейства и установим связь этого понятия с теорией рядов.

Перейдем к формальному изложению. Договоримся символом μ_X обозначать считающую меру на множестве X (см. пример 2 в § 4 главы 9). Множество X будет считаться произвольным, если не оговорено противное. Заметим, что любое подмножество X измеримо относительно μ_X , нулевую меру имеет только пустое множество, а конечность меры множества эквивалентна конечности самого множества. Напомним также читателю, что функции на X можно трактовать как числовые семейства и наоборот. Поэтому функцию f , заданную на X , мы будем часто записывать в виде $\{f_x\}_{x \in X}$, а обозначения $f(x)$ и f_x являются синонимами.

Определение 1. Пусть $\{f_x\}_{x \in X}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$ или в \mathbb{C} .

1) Если функция f интегрируема на X по мере μ_X , то говорят, что семейство $\{f_x\}$ *имеет сумму*, и эта сумма определяется равенством

$$\sum_{x \in X} f_x = \int_X f d\mu_X.$$

2) Если функция f суммируема на X по мере μ_X , то и семейство $\{f_x\}$ называют *суммируемым*.

Замечание 1. Из определения интеграла вытекает, что конечность суммы семейства эквивалентна его суммируемости. Далее мы дадим более явное описание суммируемых семейств.

Замечание 2. Пусть $\{f_x\}_{x \in X}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$. Если оно имеет сумму, то среди его значений не может быть бесконечностей разных знаков. Если же семейство $\{f_x\}_{x \in X}$ суммируемо, то все его значения конечны. Эти утверждения также вытекают непосредственно из определения интеграла.

Замечание 3. Нулевые элементы семейства $\{f_x\}$ не влияют на его сумму. Действительно, если $A = \{f \neq 0\}$, то

$$\sum_{x \in X} f_x = \int_X f d\mu_X = \int_A f d\mu_X + \int_{X \setminus A} f d\mu_X = \int_A f d\mu_X = \sum_{x \in A} f_x.$$

Поэтому при доказательстве равенств для сумм мы будем иногда считать, что семейства не содержат нулевых элементов.

Перейдем к изучению свойств суммы числового семейства.

1. Сумма конечного семейства. Пусть множество X конечно, $\{f_x\}_{x \in X}$ — семейство в \mathbb{R} или в \mathbb{C} . Тогда сумма этого семейства равна алгебраической сумме элементов $\{f_x\}$. Действительно, пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогда по аддитивности интеграла

$$\int_X f d\mu_X = \sum_{k=1}^n \int_{\{x_k\}} f d\mu_X = \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \mu_X\{x_k\} = \sum_{k=1}^n f(x_k). \quad \square$$

Замечание. Свойство 1 верно и для семейств в $\overline{\mathbb{R}}$ при условии, что сумма элементов семейства имеет смысл.

2. Сумма счетного семейства. Пусть множество X счетно, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биекция \mathbb{N} на X , $\{f_x\}_{x \in X}$ семейство в $\overline{\mathbb{R}}$ или в \mathbb{C} , имеющее сумму. Тогда

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k).$$

Действительно, в силу счетной аддитивности интеграла

$$\sum_{x \in X} f_x = \int_X f d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{x_k\}} f d\mu_X = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k). \quad \square$$

Замечание. Из свойства 2 вытекает, что если семейство $\{f_x\}$ имеет сумму (конечную или бесконечную), то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ имеет ту же самую сумму. Обратное утверждение неверно. Действительно, если семейство $\{f_x\}$ имеет сумму, то по свойству 2 любая перестановка ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ должна к ней сходиться. Но из теоремы Римана вытекает, что это не так для неабсолютно сходящихся рядов. Если же ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ сходится *абсолютно*, то семейство $\{f_x\}$ будет иметь сумму, причем конечную. Мы получим это далее как следствие критерия суммируемости.

3. Линейность суммы семейства. Пусть выполнено одно из двух условий.

1) Семейства $\{f_x\}_{x \in X}$ и $\{g_x\}_{x \in X}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ имеют суммы, причем суммируемы либо семейства $\{f_x^+\}$ и $\{g_x^+\}$, либо $\{f_x^-\}$ и $\{g_x^-\}$.

2) Семейства $\{f_x\}_{x \in X}$ и $\{g_x\}_{x \in X}$ в \mathbb{C} суммируемы. Тогда справедливы следующие утверждения.

$$1) \sum_{x \in X} (f_x + g_x) = \sum_{x \in X} f_x + \sum_{x \in X} g_x.$$

2) $\sum_{x \in X} \alpha f_x = \alpha \sum_{x \in X} f_x$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ для семейства в $\overline{\mathbb{R}}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ для семейства в \mathbb{C} .

Эти утверждения непосредственно вытекают из свойства линейности интеграла (см. § 2). \square

4. Сумма неотрицательного семейства. Пусть $\{f_x\}_{x \in X}$ — неотрицательное семейство в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\sum_{x \in X} f_x = \sup \left\{ \sum_{x \in E} f_x : E \subset X, E \text{ конечно} \right\}.$$

Доказательство. Обозначим правую часть искомого равенства через M . Если E — конечное подмножество X , то

$$\sum_{x \in E} f_x \leq \sum_{x \in X} f_x.$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму по всем таким E , мы получим

$$M \leq \sum_{x \in X} f_x.$$

Докажем обратное неравенство. Положим $A = \{f > 0\}$. Если A конечно, то неравенство очевидно. Рассмотрим два других возможных случая.

1) Пусть A счетно. Выберем биекцию $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества \mathbb{N} на X и положим $A_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда в силу непрерывности неопределенного интеграла снизу

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{x \in A} f_x = \int_A f d\mu_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f d\mu_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x \in A_n} f_x \leq M.$$

2) Пусть A несчетно. Нам достаточно проверить, что $M = +\infty$. Заметим, что

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{где } A_k = \{f \geq \frac{1}{k}\}.$$

Ввиду несчетности A найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что A_k бесконечно. Если E — конечное подмножество A_k , то

$$M \geq \sum_{x \in E} f_x \geq \sum_{x \in E} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \cdot \mu_X E.$$

В силу бесконечности A_k мера E может быть сколь угодно большой, откуда $M = +\infty$. \square

Замечание 1. Доказанное равенство часто используют в качестве *определения* суммы неотрицательного числового семейства. Таким образом, свойство 4 можно трактовать как эквивалентность двух определений суммы неотрицательного семейства.

Замечание 2. В процессе доказательства установлено следующее свойство: *если неотрицательное семейство $\{f_x\}$ суммируемо, то множество $\{f > 0\}$ не более чем счетно.* В частности, если все элементы семейства положительны, то множество X не более чем счетно.

5. Критерий суммируемости бесконечного семейства.

Пусть $\{f_x\}_{x \in X}$ — бесконечное семейство в \mathbb{R} или в \mathbb{C} , не содержащее нулей. Его суммируемость эквивалентна двум следующим условиям.

1) Множество X счетно.

2) Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биекция \mathbb{N} на X , то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ абсолютно сходится.

Доказательство. Семейства $\{f_x\}$ и $\{|f_x|\}$ одновременно суммируемы или нет, поскольку это верно для интегралов (см. § 2). Проверим вначале необходимость условий 1) и 2). Пусть семейство $\{f_x\}$ суммируемо. Счетность X вытекает из замечания 2 к

свойству 4. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биекция \mathbb{N} на X , то по свойству 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(x_k)| = \int_X |f| d\mu_X. \quad (10)$$

Правая часть (10) конечна, поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ абсолютно сходится.

Проверим теперь достаточность условий 1) и 2). Пусть множество X счетно, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биекция \mathbb{N} на X . Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ абсолютно сходится, из равенства (10) вытекает суммируемость семейства $\{f_x\}$. \square

Замечание 1. Если семейство $\{f_x\}$ содержит нули, то достаточно применить свойство 5 к сужению f на множество $\{f \neq 0\}$ (см. замечание 3 к определению 1). Мы исключили также из рассмотрения две тривиальные ситуации: когда $\{f_x\}$ принимает бесконечные значения и когда количество ненулевых значений $\{f_x\}$ конечно. В первом случае семейство заведомо не суммируемо, а во втором — суммируемо.

Замечание 2. Если семейство $\{f_x\}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ не суммируемо, необходимо исследовать семейства положительных и отрицательных элементов $\{f_x\}$, то есть сужения f на множества $\{f > 0\}$ и $\{f < 0\}$. Если хотя бы одно из этих семейств суммируемо, то сумма $\{f_x\}$ бесконечна, в противном случае семейство $\{f_x\}$ не имеет суммы.

6. Замена индекса. Пусть X, Y — множества, φ — биекция Y на X , $\{f_x\}_{x \in X}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$ или в \mathbb{C} , имеющее сумму. Тогда

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{y \in Y} f_{\varphi(y)}.$$

Доказательство проведем только для семейств в $\overline{\mathbb{R}}$, оставляя комплексный случай читателю. Можно считать, что семейство $\{f_x\}$ не содержит нулей, иначе заменим X и Y на $\{f \neq 0\}$ и $\{f \circ \varphi \neq 0\}$ соответственно, что не повлияет на суммы в искомом равенстве. Исключим также случай конечных X и Y , известный

из главы 1. Пусть вначале X счетно. Если $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — биекция \mathbb{N} на X , а $y_k = \varphi^{-1}(x_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то по свойству 2

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\varphi(y_k)) = \sum_{y \in Y} f_{\varphi(y)}.$$

Пусть теперь X несчетно. Семейство $\{f_x\}$ имеет сумму, но по замечанию 2 к свойству 4 оно не суммируемо. Поэтому ровно одно из семейств $\{f_x^{\pm}\}$ будет суммируемым. Пусть для определенности таковым является $\{f_x^{-}\}$. Тогда в $\{f_x\}$ не более чем счетное число отрицательных элементов, и по доказанному выше

$$\sum_{y \in Y} f_{\varphi(y)}^{-} = \sum_{x \in X} f_x^{-} < +\infty,$$

то есть семейство $\{f_{\varphi(y)}^{-}\}$ также суммируемо. Кроме того, в $\{f_x\}$ и в $\{f_{\varphi(y)}\}$ несчетное число положительных элементов, откуда

$$\sum_{y \in Y} f_{\varphi(y)}^{+} = +\infty = \sum_{x \in X} f_x^{+}.$$

Из эти двух соотношений и вытекает искомое равенство. \square

Следствие. Коммутативность суммы семейства. Если семейство $\{f_x\}_{x \in X}$ в $\overline{\mathbb{R}}$ или \mathbb{C} имеет сумму, φ — биекция X на X , то

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{x \in X} f_{\varphi(x)}.$$

Это утверждение есть частный случай свойства 6 при $Y = X$. \square

7. Ассоциативность суммы семейства. Пусть X, A — множества, $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ — разбиение X , $\{f_x\}_{x \in X}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$ или в \mathbb{C} , имеющее сумму. Тогда

$$\sum_{x \in X} f_x = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_{\alpha}} f_x \right).$$

Доказательство. Рассмотрим три случая.

1) Семейство $\{f_x\}$ неотрицательное. В силу замечания 3 к определению 1 мы будем считать его положительным. Кроме того, удалим из семейства $\{X_\alpha\}$ пустые множества, если они там есть. Пусть вначале множество A не более чем счетно. Перенумеруем его элементы с помощью биекции $\{\alpha_k\}_{k=1}^N$, где $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тогда

$$X = \bigvee_{k=1}^N X_{\alpha_k}.$$

В силу счетной аддитивности интеграла и свойства 2

$$\sum_{x \in X} f_x = \int_X f d\mu_X = \sum_{k=1}^N \int_{X_{\alpha_k}} f d\mu_X = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x \right).$$

Пусть теперь A несчетно. Так как все X_α непусты, множество X также несчетно. Кроме того, $f_x > 0$ для любого $x \in X$, откуда $\sum_{x \in X_\alpha} f_x > 0$ для любого $\alpha \in A$. Тогда по свойству 5 обе части искомого равенства равны $+\infty$ и, значит, совпадают.

2) $\{f_x\}$ — семейство в $\overline{\mathbb{R}}$. Так как $\{f_x\}$ имеет сумму, одно из семейств $\{f_x^\pm\}$ суммируемо. Будем для определенности считать, что это $\{f_x^-\}$. Тогда по предыдущему пункту семейство $\left\{ \sum_{x \in X_\alpha} f_x^- \right\}_{\alpha \in A}$ также суммируемо. Используя 1) и линейность суммы, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f_x &= \sum_{x \in X} f_x^+ - \sum_{x \in X} f_x^- = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x^+ \right) - \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x^- \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x^+ - \sum_{x \in X_\alpha} f_x^- \right) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x \right). \end{aligned}$$

3) $\{f_x\}$ — семейство в \mathbb{C} . Используя 2) и линейность суммы, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f_x &= \sum_{x \in X} \operatorname{Re} f_x + i \sum_{x \in X} \operatorname{Im} f_x = \\ &= \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} \operatorname{Re} f_x \right) + \sum_{\alpha \in A} \left(i \sum_{x \in X_\alpha} \operatorname{Im} f_x \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in A} \left(\operatorname{Re} \sum_{x \in X_\alpha} f_x + i \operatorname{Im} \sum_{x \in X_\alpha} f_x \right) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{x \in X_\alpha} f_x \right). \quad \square \end{aligned}$$

8. Двойные и повторные суммы. Пусть X_1, X_2 — множества, $X = X_1 \times X_2$, $E \subset X$, $\{f_{xy}\}_{(x,y) \in E}$ — семейство в \mathbb{R} или \mathbb{C} , имеющее сумму. Тогда справедливы следующие утверждения.

- 1) Для любого $x \in \text{Pr}_1 E$ семейство $\{f_{xy}\}_{y \in E_x}$ имеет сумму.
- 2) Семейство $\left\{ \sum_{y \in E_x} f_{xy} \right\}_{x \in \text{Pr}_1 E}$ имеет сумму.
- 3) $\sum_{(x,y) \in E} f_{xy} = \sum_{x \in \text{Pr}_1 E} \left(\sum_{y \in E_x} f_{xy} \right)$.

Напомним, что символы $\text{Pr}_1 E$ и E_x обозначают проекцию и сечение множества E соответственно.

Замечание. Это утверждение является дискретным аналогом теорем Тонелли и Фубини, но непосредственно из них не вытекает, поскольку считающая мера, вообще говоря, не σ -конечна, а семейство не предполагается неотрицательным или суммируемым. Сумма в правой части 3) называется *повторной*.

Доказательство. Для $x \in \text{Pr}_1 E$ положим $A_x = \{x\} \times E_x$. Система множеств $\{A_x\}_{x \in \text{Pr}_1 E}$ является разбиением E . Применим к нему свойство 7:

$$\sum_{(x,y) \in E} f_{xy} = \sum_{x \in \text{Pr}_1 E} \left(\sum_{(\alpha,y) \in A_x} f_{\alpha y} \right) = \sum_{x \in \text{Pr}_1 E} \left(\sum_{y \in E_x} f_{xy} \right).$$

Существование обеих сумм в правой части гарантируется ассоциативностью суммирования. \square

Замечание 1. Повторные суммы в свойстве 8 можно писать и в другом порядке. Предлагаем читателю сформулировать соответствующее утверждение самостоятельно.

Замечание 2. Если $E = X$, то утверждение 3) примет более простой вид:

$$\sum_{(x,y) \in X} f_{xy} = \sum_{x \in X_1} \left(\sum_{y \in X_2} f_{xy} \right).$$

Следствие. Пусть $X = X_1 \times X_2$, $\{f_x\}_{x \in X_1}$ и $\{g_y\}_{y \in X_2}$ — суммируемые семейства в \mathbb{R} или в \mathbb{C} . Тогда семейство $\{f_x g_y\}_{(x,y) \in X}$

суммируемо и

$$\sum_{(x,y) \in X} f_x g_y = \left(\sum_{x \in X_1} f_x \right) \left(\sum_{y \in X_2} g_y \right).$$

Доказательство. По свойству 8 и линейности суммирования

$$\sum_{(x,y) \in X} |f_x g_y| = \sum_{x \in X_1} \left(\sum_{y \in X_2} |f_x g_y| \right) = \left(\sum_{x \in X_1} |f_x| \right) \left(\sum_{y \in X_2} |g_y| \right) < +\infty,$$

откуда вытекает суммируемость семейства $\{f_x g_y\}$. Те же рассуждения без модулей дают искомое равенство. \square

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель 27, 28, 51, 70, 71
- Абеля преобразование 27
- Абеля теорема о степенных рядах 70, 71
- абсолютная непрерывность интеграла 212
- Адамар 67
- аддитивность меры 127
- алгебра подмножеств 110
 - порожденная кольцом 111
- арксинус 93
- арктангенс 89
- биномиальные коэффициенты 90
- биномиальный ряд 91
- Больцано 11, 47, 48
- Больцано – Коши критерий равномерной сходимости функциональной последовательности 47
 - функционального ряда 48
 - сходимости числового ряда 11
- Ван-дер-Варден 66
- Вейерштрасс 49, 66
- внешняя мера 137
- геометрическая прогрессия 6, 92
- гиперболические функции 84, 86
- группировка членов ряда 13
- Даламбер 18, 26, 69
- движение 154
- Дини 61
- Дини теорема 61
- Дирихле 28, 51
- Зейдель 60
- измеримость отображения 186
 - подграфика 181, 182, 192, 229
 - связь с арифметическими операциями 187
 - с композициями 186
 - с предельными переходами 189
 - функции 182, 186, 192, 229
 - по Лебегу 185
 - – – связь с непрерывностью 185
- интеграл от знакопеременной функции 205
 - комплекснозначной 214
 - неотрицательной 200
 - от сужения функции 201, 208
 - от суммы ряда 204
 - от функции, заданной почти везде 210
 - оценка 210, 214
 - по множеству нулевой меры 200, 208
 - счетная аддитивность 201, 209
- интервал сходимости степенного ряда 68
- Кавальери 226
- Кавальери принцип 226, 229
- Каратеодори 149
- кольцо подмножеств 107
 - порожденное полукольцом 108
- комплексная дифференцируемость 73
- косинус 81
- котангенс 86

- Коши 11, 17, 19, 26, 36, 38, 47,
 48, 67, 72
 Коши – Адамара формула 67
 круг сходимости степенного ряда
 68
 Лебег 149, 152, 162, 183, 194, 218
 Лебега – Каратеодори теорема
 149
 Лебега мера 152
 – вычисление 152, 153, 157
 – инвариантность относительно
 движений 154
 – построение 150
 – регулярность 156
 Лебега – Стильеса мера 162,
 165
 – свойства 162
 Лебега теорема о мажорирован-
 ной сходимости для последова-
 тельностей 218
 – для семейств 220
 – о сходимости почти везде и по
 мере 194
 Леви 202, 215
 Леви теорема 202
 – обобщенная 215
 Лейбниц 29, 53
 линейность интеграла 203, 211
 – суммирования – см. *суммиро-
 вание, линейность*
 логарифм 87
 Лузин 186
 Маклорен 77
 мера 126
 – дискретная 164
 – Лебега – см. *Лебега мера*
 – Лебега – Стильеса – см. *Лебе-
 га – Стильеса мера*
 мера полная 140
 – сигма-конечная 143
 – считающая 128
 множество аддитивно разбиваю-
 щее 138
 – борелевское – см. *сигма-
 алгебра подмножеств боре-
 левская*
 – измеримое 138, 149
 – по Лебегу 152
 – по сечениям 222
 – лебегово 183
 – не измеримое по Лебегу 154
 – нулевой меры 138, 158
 – сходимости степенного ряда 68
 – функционального ряда 44
 – типа \mathcal{E}_δ 145
 – типа \mathcal{E}_σ 145
 – типа $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$ 145
 – типа F_σ 114
 – типа G_δ 114
 – уровня функции 183
 монотонность внешней меры 137
 – интеграла 201, 208
 – по множеству 202
 – объема 121
 – усиленная 120
 – суммирования – см. *суммиро-
 вание, монотонность*
 Мэшин 90
 Мэшина формула 90
 непрерывность меры сверху 133
 – снизу 132
 – объема сверху 131
 – сверху на \emptyset 131
 – снизу 131
 – суммы ряда 59
 – равномерная 60

- норма равномерная (чебышевская) 44, 51
 Ньютон 91
 общий член ряда 5
 объем 119
 – классический 125, 150
 – конечный 120
 – полуаддитивность 121
 – порожденный функцией 124
 – трехмерный 152
 переместительный закон суммирования – см. *суммирование, коммутативность*
 перестановка членов ряда 31, 33
 площадь 152
 площадь подграфика как мера 199
 – как предел сумм 198
 подграфик функции 180
 положительная часть числа 25, 207
 – функции 204
 полукольцо подмножеств 102
 – ячеек – см. *ячейка*
 последовательность множеств
 возрастающая 108, 131
 – убывающая 108, 131
 – функциональная 41
 почленное дифференцирование 63, 65
 – интегрирование 61
 – переход к пределу 57, 58
 почти везде 192
 признак равномерной сходимости ряда Абеля 51
 – Вейерштрасса 49
 – Дирихле 51
 – Лейбница 53
 признак сходимости ряда Абеля 28
 – Даламбера 18, 26, 69
 – Дирихле 28
 – Коши, интегральный 19
 – Коши, радикальный 17, 26
 – Лейбница 29
 – сравнения 15, 16
 продолжение меры до внешней меры 141
 – на кольцо 128
 – по Каратеодори – см. *стандартное продолжение меры*
 – стандартное – см. *стандартное продолжение меры*
 – объема на кольцо 122
 проекция множества 166, 236
 произведение мер 171
 – ассоциативность 177
 – мер Лебега 174
 – объемов 123
 – полуколец 105
 – рядов 36
 – по квадратам 37
 – по Коши 38, 72
 – систем множеств 101
 производная комплексная – см. *комплексная дифференцируемость*
 пространство измеримое 179
 – с мерой 149
 равномерная ограниченность функциональной последовательности 51
 радиус сходимости степенного ряда 67, 74
 разбиение множества 99
 – допустимое для функции 179

- разбиение измеримое 179
 - конечное 99
 - счетное 99
- Риман 33
- Римана теорема 33
- Рисс 195
- Рисса теорема 195
- ряд биномиальный – см. *биномиальный ряд*
- в \mathbb{R} 97
- гармонический 8
- знакочередующийся 29
- комплексный 10, 24, 35
- лейбницевский 30
- Маклорена 77
- остаток 9, 23, 30, 44, 48
- положительный 14
- Тейлора 77
- степенной – см. *степенной ряд*
- функциональный 43
- числовой 5
- семейство числовое 40, 237
 - счетное 40
- сечение множества 166
- сигма-алгебра подмножеств 111
 - борелевская 113, 119
 - порожденная системой множеств 112
- синус 81
- система всех подмножеств 98
 - множеств 98
 - – дизъюнктная 98
 - – замкнутая 98, 108, 109, 111
 - – подчиненная системе (более мелкая) 100
 - – свойства
 - – симметричная
- сочетательный закон суммирования – см. *суммирование, ассоциативность*
- стандартное продолжение меры 143
 - единственность 144
 - минимальность 148
- степенной ряд 67
 - дифференцирование 74
 - единственность разложения 76
 - интегрирование 71
 - непрерывность суммы 70
 - признак разложимости 79
 - равномерная сходимость 70
- Стилтьес 162
- Стирлинг 87
- Стирлинга формула 87
- Стокс 60
- Стокса – Зейделя теорема 60
- структура измеримых множеств 148
 - – по Лебегу 157
 - открытых множеств 117
- сумма гармоническая 8, 22
 - двойная 244
 - повторная 244
 - ряда функционального 44
 - – числового 5
 - телескопическая 7
 - частная (частичная) 5, 21, 44
 - числового семейства 237
 - – неотрицательного 40, 239
 - – счетного 40, 238
- суммирование, ассоциативность 13, 242
 - замена индекса 241
 - коммутативность 32, 242
 - линейность 10, 239

-
- суммирование, монотонность 10
 - суммируемость функции – см. *функция суммируемая*
 - числового семейства 237
 - – критерий суммируемости 240
 - сходимость функциональной последовательности мажорированная 219
 - – по мере 193
 - – поточечная 41
 - – почти везде 193
 - – равномерная 42
 - функционального яда мажорированная 50
 - – поточечная 44
 - – равномерная 44
 - числового ряда 5
 - – абсолютная 24, 25, 32, 36
 - – необходимое условие 11
 - – условная 26, 33
 - счетная полуаддитивность внешней меры 137
 - меры 129
 - тангенс 86
 - Тейлор 77
 - Тонелли 230, 232, 234
 - Тонелли теорема 230, 232, 235
 - точечная нагрузка 127
 - факториал 87
 - Фату 217
 - Фату теорема 217
 - Фубини 232, 233, 234
 - Фубини теорема 232, 233, 235
 - функция аналитическая 79
 - измеримая – см. *измеримость функции*
 - – приближение простыми функциями 190
 - интегрируемая 205
 - непрерывная, нигде не дифференцируемая 66
 - простая 179, 180
 - со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$ 96
 - – арифметические операции 96
 - – предельные операции 97
 - ступенчатая 179
 - суммируемая 205
 - характеристическая 179
 - Чебышев 206
 - Чебышева неравенство 206
 - Эйлер 22, 54, 82
 - Эйлера постоянная 22
 - Эйлера формулы 54, 82
 - экспонента 81
 - ячейка в \mathbb{R}^n 106
 - двоичная 116
 - кубическая (куб) 106

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ГЛАВА 7. Числовые ряды	5
§ 1. Простейшие свойства рядов	5
§ 2. Положительные ряды	14
§ 3. Ряды с произвольными членами	24
ГЛАВА 8. Функциональные последовательности и ряды	41
§ 1. Определение и признаки равномерной сходимости	41
§ 2. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов	57
§ 3. Степенные ряды	67
§ 4. Разложения элементарных функций	80
ГЛАВА 9. Теория меры	95
§ 1. Введение	95
§ 2. Системы множеств	98
§ 3. Объем	119
§ 4. Мера	126
§ 5. Продолжение мер	136
§ 6. Мера Лебега	150
§ 7. Мера Лебега – Стильеса	159
§ 8. Произведение мер	165
ГЛАВА 10. Теория интеграла	178
§ 1. Измеримые функции	178
§ 2. Определение интеграла	197
§ 3. Предельный переход под знаком интеграла	215
§ 4. Вычисление произведения мер	222
§ 5. Интегрирование по произведению мер	229
§ 6. Сумма числового семейства	236
Предметный указатель	246

Учебное издание

*Олег Леонидович Виноградов,
Андрей Львович Громов*

**КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
Часть 3**

Учебник

Подписано в печать с оригинал-макета автора 17.02.2016.

Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 14,7. Тираж 300 экз. (1-й завод). Заказ № 30

Издательство СПбГУ. 199004, С.-Петербург, В. О., 6-я линия, 11

Тел./факс (812) 328-44-22

E-mail: publishing@spbu.ru publishing.spbu.ru

Типография Издательства СПбГУ. 199061, С.-Петербург, Средний пр., 41

Книги Издательства СПбГУ можно приобрести
в Доме университетской книги

Менделеевская линия, д. 5

тел.: +7(812) 329 24 71

часы работы 10.00–20.00 пн. — сб.,

а также в интернет-магазине OZON.ru