Задача 1

a)
$$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1) Найдем определитель:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}4 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(-3)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(-3)\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$
$$=4\cdot(2\cdot2-1\cdot1)-(-3)\cdot(1\cdot2-1\cdot1)+(-3)\cdot(1\cdot1-1\cdot2)=$$
$$=4\cdot3+3+3=18$$

2) Найдем собственные значения:

По определению $A\cdot x=\lambda x$, где x - собственный вектор $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ для A, λ - собственное число

Также по определению $\det(A-\lambda E)=0$, где E - единичная матрица

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -3 & -3\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0=\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2-\lambda & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+(2-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}4-\lambda & -3\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(-3-(2-\lambda)\cdot(-3))-((4-\lambda)+3)+(2-\lambda)\cdot((4-\lambda)\cdot(2-\lambda)+3)=(3-3\lambda)-(7-\lambda)+(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+11)=$$
$$=(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-6\lambda+11)-4\lambda-4=-\lambda^3+8\lambda^2-25\lambda+18=0\ |\cdot(-1)\Leftrightarrow\lambda^3-8\lambda^2+25\lambda-18$$

Видно, что по теореме Безу можно подобрать корень, который равен 1

$\lambda=1$

$1^3-8\cdot1^2+25\cdot1-18=1-8+25-18=0$ - корень подходит

Подставим $\lambda=1$ в матрицу

$$\begin{pmatrix}4-1 & -3 & -3\\ 1 & 2-1 & 1\\ 1 & 1 & 2-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{cases}3x_1-3x_2-3x_3=0\ |:3\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-x_3=0\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ x_2+x_3+x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ 2x_2+2x_3=0\ |:2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2+x_3\\ x_2=-x_3\\ x_3=-x_2\end{cases}$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1=x_2+x_3\\ x_2=-x_3\\ x_3=-x_2\end{pmatrix},\ x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R},\ x_{1,2,3}\neq0$$

Проверка:

$\lambda=1$, $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$

$$\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3+3\\ 2-1\\ 1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\ \checkmark$$

б) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$$\det(A)=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$$
$$=0+0+(4-1)=3$$

$Ax=\lambda x$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ 1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2-\lambda & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}+(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$
$$=(1-\lambda)\cdot((2-\lambda)^2-1)=(1-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$1-\lambda=0$, $\lambda=1$

$\lambda^2-4\lambda+3=0$
$\lambda_1+\lambda_2=4$
$\lambda_1\cdot\lambda_2=3$
$\lambda_1=1$
$\lambda_2=3$

$\Downarrow$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$

При $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}2-1 & -1 & 0\\ -1 & 2-1 & 0\\ 1 & -1 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1-x_2=0\\ -x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_1=x_2\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ 0\end{pmatrix},\ x_1\in\mathbb{R}/\{0\}$$

При $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-x_2=0\\ x_1-x_2-2x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\ x_1=-x_2\\ x_3=\frac{x_1-x_2}{2}\end{cases},\ x_1,x_2\in\mathbb{R}/\{0\}$$

$$\Downarrow$$
$$x=\begin{pmatrix}-x_1\\ -x_1\\ \frac{x_1-x_1}{2}\end{pmatrix}$$

Проверка:

$\lambda=1$, $x_1=1$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\ -1+2\\ 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\ \checkmark$$

$\lambda=3$, $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=2$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\ -1-2\\ 1+1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -3\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\cdot3\ \checkmark$$

в) $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}4 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5\cdot(4\cdot4-(-1)\cdot(-1))=5\cdot(16-1)=5\cdot15=75$$

$Ax=\lambda x$

$$\begin{vmatrix}5-\lambda & -1 & -1\\ 0 & 4-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(5-\lambda)\cdot((4-\lambda)^2-1)=$$
$$=(5-\lambda)\cdot(\lambda^2-8\lambda+15)=0$$

$5-\lambda=0$, $\lambda=5$

$\lambda^2-8\lambda+15=0$
$\lambda_1+\lambda_2=8$
$\lambda_1\cdot\lambda_2=15$ $\Rightarrow\lambda_1=3,\ \lambda_2=5$

При $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}5-3 & -1 & -1\\ 0 & 4-3 & -1\\ 0 & -1 & 4-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=0\\ x_2-x_3=0\\ -x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{x_2+x_3}{2}=\frac{2x_2}{2}=x_2\\ x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ x_1\end{pmatrix}$$

При $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix}5-5 & -1 & -1\\ 0 & 4-5 & -1\\ 0 & -1 & 4-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_2-x_3=0\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_3\\ x_3=-x_2\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}0\\ x_2\\ -x_2\end{pmatrix}$$

Проверка:

$\lambda=3$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_1\\ x_1\end{pmatrix}$, $x_1=1$

$$\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5-1-1\\ 4-1\\ -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 3\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\ \checkmark$$

$\lambda=5$, $x=\begin{pmatrix}0\\ x_2\\ -x_2\end{pmatrix}$, $x_2=1$

$$\begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+1\\ 4+1\\ -1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -5\end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\ \checkmark$$

Задача 2.

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Найдем собственные знач. A

1)
$$\begin{vmatrix}2-\lambda & -4 & -2\\ -2 & 5-\lambda & -2\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot((2-\lambda)\cdot(5-\lambda)-(-4)\cdot(-2))=$$
$$=(3-\lambda)\cdot(\lambda^2-12\lambda+22)=0$$

$3-\lambda=0$, $\lambda=3$

$\lambda^2-12\lambda+22=0$
$\lambda_1+\lambda_2=12$
$\lambda_1\cdot\lambda_2=22$
$\lambda_1=3$
$\lambda_2=9$

$\lambda_1=3$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=9$

$\lambda_1=3$

$$\begin{pmatrix}2-3 & -4 & -2\\ -2 & 5-3 & -2\\ 0 & 0 & 3-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -4 & -2\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-4x_2-2x_3=0\\ -2x_1+2x_2-2x_3=0\\ 0\cdot x_3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ x_2+x_3=0\\ x_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2x_2\\ x_2=-x_3\\ x_3\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}2x_2\\ x_2\\ -x_2\end{pmatrix}$$

$x_1=-2$, $x_2=1$, $x_3=0$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4-4\\ 4+5\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\ 9\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow Ax=\lambda x\ \text{выполнено}$$

$x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=1$

$$\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2\\ 2-2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow Ax=\lambda x\ \text{выполнено}$$

$$P=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot P_*^T=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$|P|=3$

матрица миноров $M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad P_*=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$ $\quad P_*^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Проверка $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -4 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\ \checkmark$$

б)
$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot((2-\lambda)\cdot(2-\lambda)-(-1)\cdot(-1))=$$
$$=(3-\lambda)\cdot(\lambda^2-4\lambda+3)=0$$

$3-\lambda=0$

$\lambda^2-4\lambda+3=0$
$\lambda_1+\lambda_2=4$
$\lambda_1\cdot\lambda_2=3$
$\lambda_1=1$
$\lambda_2=3$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=3$

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}3-1 & 0 & 0\\ 1 & 2-1 & -1\\ 1 & -1 & 2-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{cases}2x_1=0\\ x_1-x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3\\ x_3=x_2\end{cases}$$

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 2-1\\ -1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow Ax=\lambda x\ \text{выполнено}$$

$\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}3-3 & 0 & 0\\ 1 & 2-3 & -1\\ 1 & -1 & 2-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}x_1=x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\\ x_2=-x_3\end{matrix}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}x_1=0\\ x_2\\ -x_2\end{pmatrix}$$

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1+2\\ 1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow Ax=\lambda x\ \text{выполнено}$$

$x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$

$$\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1-1\\ 1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 3\end{pmatrix}\Rightarrow Ax=\lambda x\ \text{выполнено}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=P\cdot A\cdot P^{-1}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot P_*^T=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$|P|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-1-1=-2$$

$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ - матрица миноров для P

$P_*=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ - матрица алгебраических дополнений для P

$P_*^T=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Проверка, что $D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ выполнено

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\ \checkmark$$

в)
$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 3-\lambda & -2\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(-2+3-\lambda)+(-3+2\lambda)+(2-\lambda)\cdot((4-\lambda)\cdot(3-\lambda)+1)=(1-\lambda)+(-1+\lambda)+(2-\lambda)\cdot(\lambda^2-7\lambda+13)=-\lambda^3+8\lambda^2-23\lambda+15\Rightarrow\lambda=\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$$

При $\lambda=1$

$-1^3+8\cdot1^2-23\cdot1+15=-1+8-23+15=0$

$$\begin{array}{l|l}-\lambda^3+8\lambda^2-23\lambda+15 & \lambda-1\\ \hline -\lambda^3+\lambda^2 & \lambda^2-7\lambda+15\\ \quad 7\lambda^2-23\lambda & \\ \quad 7\lambda^2-7\lambda & \\ \quad -15\lambda+15 & \\ \quad -15\lambda+15 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+15)=0$

$\lambda_1=1$ $\quad\lambda^2-7\lambda+15=0$
$\lambda_2=5$ $\quad\lambda_1+\lambda_2=7$, $\lambda_1\cdot\lambda_2=15$ $\Rightarrow\lambda_1=3$, $\lambda_2=5$

При $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1+2x_2-2x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=x_3\\ x_3=x_2\end{cases}$$

$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=1$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

При $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1-2x_3=0\\ x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\ x_1-x_3=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\ x_2=0\\ x_3=x_1\end{cases}$$

$x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-1\\ 2-2\\ 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$$

При $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_1-2x_2-2x_3=0\\ x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\ x_1-x_2-3x_3=0\\ x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_3=0\end{cases}$$

$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1\\ 2+3\\ 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 5\\ 0\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot P_*^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$|P|=2+2+2=6$

$$M=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\qquad P_*=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\qquad P_*^T=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Проверка, что $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$

$$\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

г)
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}+$$
$$+1\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(1-\lambda))-(1\cdot(1-\lambda)+1)+(-1\cdot1+1)=$$
$$=\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-3=(\lambda-1)\cdot(\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3)=\underbrace{(\lambda-1)^2\cdot(\lambda^2-2\lambda-3)}_{0}=0$$

$$\begin{array}{l|l}\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-3 & \lambda-1\\ \hline -\lambda^4-\lambda^3 & \lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3\\ \quad -3\lambda^3+2\lambda^2 & \\ \quad -3\lambda^3+3\lambda^2 & \\ \quad -\lambda^2+4\lambda & \\ \quad -\lambda^2+\lambda & \\ \quad 3\lambda-3 & \\ \quad 3\lambda-3 & \\ \quad 0 & \end{array}\qquad\begin{array}{l|l}\lambda^3-3\lambda^2-\lambda+3 & \lambda-1\\ \hline -\lambda^3-\lambda^2 & \lambda^2-2\lambda-3\\ \quad -2\lambda^2-\lambda & \\ \quad -2\lambda^2+2\lambda & \\ \quad -3\lambda+3 & \\ \quad -3\lambda+3 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$$(\lambda-1)^2\cdot(\lambda^2-2\lambda-3)=0\quad\text{или}\quad\begin{matrix}\lambda^2-2\lambda-3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=2\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=-3\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=3\end{matrix}$$
$$\lambda_{1,2}=1$$

$\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$, $\lambda_4=3$

$\lambda=-1$

$$\begin{pmatrix}1+1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1+1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2+x_4=0\\ x_1+2x_3+x_4=0\\ x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=-x_3\\ x_3=-x_2\\ x_4=x_4\end{cases}$$

$$x=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}1-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1-1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2+x_3=0\\ x_1+x_4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=-x_3\\ x_3=x_3\\ x_4=x_4\end{cases}$$

$$x=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda=3$

$$\begin{pmatrix}1-3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1-3 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1-3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=0\\ x_1-2x_2+x_4=0\\ x_1-2x_3+x_4=0\\ x_2+x_3-2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_4\\ x_2=x_4\\ x_3=x_4\\ x_4=x_4\end{cases}$$

$$x=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad P^{-1}=\frac{1}{|P|}\cdot P_*^T=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$A=P\cdot D\cdot P^{-1}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\