Пусть $X, Y$ – некоторые множества, $W = W(X)$ – множество упорядоченных конечных последовательностей элементов $X$. Это означает, что элементами $w \in W$ являются наборы $(x_1, \ldots, x_n)$ такие, что $x_i \in X$, $n \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через * операцию дописывания элемента в конец последовательности: $w * x = (x_1, \ldots, x_n, x)$. Множество $W$ является моделью числового файла.

**Определение 1.** Функция $F : W \to Y$ называется индуктивной, если выполняется следующее: существует функция $f : Y \times X \to Y$, причем $F(w * x) = f(F(w), x)$ для всех $w \in W,\ x \in X$.

**Пример 1.** Количество элементов.

Пусть $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}_0$, $F(x_1, \ldots, x_n) = n$. Функция $F$ является индуктивной, и в качестве $f$ можно взять функцию $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ $f(y, x) = y + 1$. Действительно, пусть $w = (x_1, \ldots, x_n), x_i, x \in \mathbb{Z}$. Тогда $F(w) = n$, $F(w * x) = n + 1$ и $F(w * x) = n + 1 = f(n, x) = f(F(w), x)$.

**Пример 2.** Сумма элементов.

Пусть $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Функция $F$ является индуктивной, и в качестве $f$ можно взять функцию $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $f(y, x) = y + x$. Действительно, пусть $w = (x_1, \ldots, x_n), x_i, x \in \mathbb{Z}$. Тогда $F(w) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $F(w * x) = \sum_{i=1}^{n} x_i + x$ и $F(w * x) = \sum_{i=1}^{n} x_i + x = f(\sum_{i=1}^{n} x_i, x) = f(F(w), x)$.

Отметим, что не всякая функция является индуктивной.

**Пример 3.** Функция, определяющая, является ли последовательность постоянной или нет, – неиндуктивная: $X = \mathbb{Z}, Y = \mathbb{Z}_2$, $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если $x_i \neq x_j$ для некоторых $1 \leq i, j \leq n$ и $F(x, \ldots, x) = 1$ иначе.

*Доказательство.* Допустим противное. Это означает, что существует функция $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ такая, что $F(w * x) = f(F(w), x)$ для всех $w \in W,\ x \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим последовательность из одного элемента $w_1 = (0)$ и другую постоянную последовательность, например, из 1: $w_2 = (1, \ldots, 1)$. Ясно, что $F(w_1) = F(w_2) = 1$ (это постоянные последовательности). Рассмотрим $x = 0$. При добавлении $x$ в конец первой последовательности получим постоянную, $F(w_1 * x) = 1$, а в конец второй – нет, $F(w_2 * x) = 0$. Но $F(w_1) = F(w_2)$ и должно выполняться условие $F(w_1 * x) = f(F(w_1), x) = f(F(w_2), x) = F(w_2 * x)$. Полученное противоречие доказывает утверждение о не индуктивности функции F. □

Легко заметить, что функцию из примера 3 можно расширить до индуктивной, если добавить к результату, например, значение последнего элемента. Иными словами, функция $G(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, F(x_1, \ldots, x_n))$ является индуктивной. Здесь Y (множество значений функции $G$) – это множество $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

В самом деле, рассмотрим следующую функцию $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$, $f(a, b, c) = (c, 1)$, если и только если $a = c$ и $b = 1$, в противном случае $f(a, b, c) = (c, 0)$.

Найдите пробел в этом утверждении и другую функцию $G$ (другое индуктивное расширение $F$)

Алгоритм вычисления значения индуктивной функции заключается в следующем: пусть $res = F(\emptyset)$, $w = (x_1, \ldots, x_n)$. Для каждого элемента $x = x_i$ из последовательности $w$ выполняем следующее действие: $res = f(res, x)$. Когда цикл закончится, $res$ – это искомый результат.

Заметим, что алгоритм не использует количество элементов в последовательности $w$.

Нас интересует случай, когда последовательность $w$ берется из числового файла.

Напишем алгоритм на псевдокоде.

1. Открыть файл на чтение.
2. $res = F(\emptyset)$;
3. Пока (извлечение числа из файла в переменную cur успешно)
   $res = f(res, cur)$;
4. печать res;
5. закрыть файл; конец.

**Упражнеие.**

Вычислить:

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^k,$$

где $k$ – количество отрицательных чисел в файле, которое заранее неизвестно.

Массивы, математические функции проверку числа на четность не использовать!!!

Является ли функция F индуктивной?