

## ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЕРВОГО СЕМЕСТРА

Тема 2. Задачи на обработку целочисленного массива.

В следующих задачах требуется написать функцию, получающую в качестве параметров имя массива и его длину ( $n$ ). Заполнение массива числами из файла и определение его фактической длины должно выполняться отдельной подпрограммой. Требуется создать две функции чтения массива из файла: первая предполагает, что в файле задано количество чисел и сами числа, а во второй количество чисел задается, собственно, их количеством в файле (количество чисел в файле отдельным числом не задается). При решении задач следует в одних случаях использовать первую функцию, а в других вторую.

Функция `main` открывает файл, вызывает функцию, заполняющую массив числами из файла, обращается к функции печати массива на экран, вызывает функцию, преобразующую массив (или вычисляющую его характеристики) и выводит результат (или преобразованный массив) на экран.

В задачах 1-22 предполагается, что количество чисел в массиве (как в исходном, так и в преобразованном) не превосходит некоторой фиксированной величины (например, 1000).

В остальных задачах память под хранения массива должна выделяться динамически, количество чисел в файле заранее неизвестно.

Файл нельзя открывать более одного раза, нельзя возвращаться к началу файла. Использовать дополнительные массивы нельзя. Ошибки (файл не удалось открыть, он пуст, наличие в файле буквы, реальное количество чисел в файле не равно заданному числу (для варианта 1 чтения массива из файла)) обработать.

Обозначим через  $n$  количество чисел в массиве, а элемент с номером  $i$  – через  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$ .

**Участком** массива назовем множество подряд идущих элементов  $x_k$ ,  $i \leq k \leq j$ , индексы  $k$  которых удовлетворяют условию  $i \leq k \leq j$  для некоторых  $1 \leq i, j \leq n$ . **Длиной участка** назовем количество содержащихся в нем элементов (т.е. число  $j - i + 1$ ).

**Постоянным участком** массива называется такой его участок,  $\{x_k\}_{k=i, \dots, j}$ ,  $i < j$ , что все его элементы равны между собой и для которых выполняются соотношения: 1)  $i = 0$  или  $x_{i-1} \neq x_i$ ; 2)  $j = n - 1$  или  $x_{j+1} \neq x_j$ .

**Максимум (минимум)** массива – это максимальный (минимальный) элемент среди всех  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$  (т.е. глобальный максимум или минимум). Максимальный (минимальный) элемент – это элемент, равный максимуму (минимуму).

**$k$ -максимальным** ( $k$ -минимальным) значением массива назовем число  $x$ , определенное индуктивно по  $k$ : если  $k = 1$ , то  $x$  – максимум (минимум) массива. Если  $k > 1$  и  $x$  равно  $(k - 1)$ -максимальному (минимальному) значению массива, то максимум (минимум) из тех элементов массива, которые меньше (больше), чем  $x$ , будем называть  $k$ -максимальным (минимальным) значением.  $k$ -максимальный элемент массива – это элемент, имеющий  $k$ -максимальное значение.

**Локальным максимумом** массива называется участок  $x_k$ ,  $i \leq k \leq j$ , все элементы которого равны между собой, для которого выполняются соотношения:

- 1)  $i = 0$  или  $x_{i-1} < x_i$ ;
- 2)  $j = n - 1$  или  $x_{j+1} < x_j$ .

Аналогично определяется **локальный минимум**.

Массив называется **возрастающим**, если для всех  $i = 0, \dots, n - 2$  выполняется соотношение:  $x_i \leq x_{i+1}$ .

Массив называется **строго возрастающим**, если для всех  $i = 0, \dots, n - 2$  выполняется соотношение:  $x_i < x_{i+1}$ .

Аналогично определяются **убывающий** и **строго убывающий** массивы.

1. Функция должна возвращать 1, если массив симметричный и 0 в противном случае.
2. Функция должна так преобразовать массив, чтобы его элементы шли в обратном порядке. Использовать не более чем  $n/2$  обменов элементов.
3. Функция должна так преобразовать массив, чтобы каждый его элемент, кроме первого и последнего, заменился на полусумму соседей.
4. Функция должна циклически сдвинуть элементы массива на одну позицию вправо используя не более чем  $n$  перемещений элементов ( $n$  - длина массива).
5. Функция должна циклически сдвинуть элементы массива на одну позицию влево используя не более чем  $n$  перемещений элементов ( $n$  - длина массива).
6. Функция должна поменять местами элементы массива с соседними номерами (т.е. с номерами  $2i$  и  $2i + 1$  для всех возможных  $i$ ), используя не более чем  $n/2$  обменов элементов ( $n$  - длина массива).
7. Функция должна так преобразовать массив, чтобы его положительные элементы шли в обратном порядке. Использовать не более чем  $n/2$  обменов элементов.
8. Функция должна так преобразовать массив, чтобы его отрицательные элементы шли в обратном порядке. Использовать не более чем  $n/2$  обменов элементов.
9. Функция должна продублировать (рядом) каждый отрицательный элемент массива. Использовать не более чем  $2n$  перемещений элементов.
10. Нормировать элементы массива на интервал  $[min\{a_0, \dots, a_{n-1}\}, max\{a_0, \dots, a_{n-1}\}]$ , т.е. в случае, когда все элементы массива совпадают, изменять массив не следует, иначе заменить каждый элемент массива на значение  $min\{a_0, \dots, a_{n-1}\} + (a_i - min\{a_0, \dots, a_{n-1}\}) / (max\{a_0, \dots, a_{n-1}\} - min\{a_0, \dots, a_{n-1}\})$
11. Заменить, если это возможно, все минимальные элементы массива на значение элемента массива, большего минимального, но не большего всех остальных элементов массива.
12. Функция должна циклически сдвинуть элементы массива на  $k$  позиций вправо, используя не более чем  $n$  обменов элементов ( $n$  - длина массива).
13. Циклически сдвинуть на одну позицию влево постоянные участки. Так, массив (1 1 1 4 1 0 0 0 6 2 2 2 0 0) должен быть преобразован в (0 0 0 0 4 1 2 2 2 6 0 0 1 1). Количество операций присваивания элементов массива не более  $n$ .
14. Циклически сдвинуть на одну позицию вправо постоянные участки. Так, массив (1 1 1 4 1 0 0 0 6 2 2 2 0 0) должен быть преобразован в (0 0 4 1 1 1 1 6 0 0 0 2 2 2). Количество операций присваивания элементов массива не более  $n$ .
15. Функция должна поменять местами постоянные участки массива с соседними номерами (т.е. с номерами  $2i$  и  $2i + 1$  для всех возможных  $i$ ), используя не более чем  $n/2$  обменов элементов ( $n$  - длина массива). Так, массив (1 1 1 4 1 0 0 0 6 2 2 2 0 0) должен быть преобразован в (0 0 0 0 4 1 1 1 1 6 0 0 2 2 2). Количество операций присваивания элементов массива не более  $n$ .
16. Для заданного числа  $k < n$  поменять местами начальный участок массива (элементы с индексами, меньшими  $k$ ) с его конечным участком (остальные). Взаимный порядок элементов внутри участков измениться не должен. Так, массив (1 1 4 1 0 0 6 1 1 2 0 0) для  $k = 4$  должен быть преобразован в (0 0 6 1 2 0 0 0 1 1 4 1).  
Использовать не более чем  $n$  обменов элементов.
17. Сравнить два неупорядоченных целочисленных массива  $A$  и  $B$  как числовые множества:  $A = B$  и  $A \subset B$ . Повторы элементов в массиве не учитывать (сравнение множеств). Так, если массив  $A = (1 0 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0)$  а  $B = (3 3 3 0 1 0 0 2 4 0 0 0)$ , то  $A \neq B$  и  $A \subset B$ .
18. Назовем  $X$ -отрезком группу подряд идущих элементов массива, каждый из которых равен  $x$ . Для заданного числа  $x$  заменить элементы каждого  $X$ -отрезка на полусумму элементов, прилегающих к этому отрезку справа и слева. Если  $X$ -отрезок расположен в начале или конце массива, считать недостающий крайний элемент равным нулю. Так, массив (1 1 4 1 0 0 6 1 1 0 0 0) для  $x = 1$  должен быть преобразован в (2 2 4 2 0 0 6 3 3 0 0 0).
19. Заменить все локальные минимумы в массиве одним элементом, значение которого равно 0. Функция должна возвращать количество элементов в преобразованном массиве. Так, массив (2 1 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0) должен быть преобразован в (2 0 2 2 0 3 3 3 0). Использовать не более чем  $n$  перемещений элементов массива.
20. Заменить каждый элемент массива количеством элементов массива с меньшими индексами, имеющими значение, меньше данного элемента, т.е. каждый элемент массива  $a_i$  заменить количеством элементов  $a_j$ , таких что  $j < i$  и  $a_j < a_i$ . Так, массив (1 10 2 2 0 0 3 3 3 0 1 2) должен быть преобразован в (0 1 1 1 0 0 5 5 5 0 3 5).
21. Сравнить два неупорядоченных целочисленных массива  $A$  и  $B$  как числовые мультимножества:  $A = B$  и  $A \subset B$ . Учитывать повторы элементов в массиве. Так, если массив  $A = (1 0 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0)$  а  $B = (3 3 3 0 1 0 0 2 4 0 0 0)$ , то  $A \neq B$  и  $A \not\subset B$ .

**22.** Найти  $k$ -максимальное значение массива,  $k$  задано. Нельзя изменять элементы массива.

**23.** В каждом участке строгого возрастания в массиве заменить все элементы на среднее значение участка (рассматриваются участки строгого возрастания, которые нельзя расширить, т.е. максимальные по включению). Так, массив (1 0 2 4 0 0 3 3 3 0 10 20) должен быть преобразован в (1 2 2 2 0 1 1 3 3 10 10 10) (среднее в смысле целого).

**24.** Поменять местами локальные максимумы с соседними номерами (т.е. с номерами  $2i$  и  $2i + 1$  для всех возможных  $i$ ), используя не более чем  $n/2$  обменов элементов ( $n$  - длина массива). Так, массив (1 0 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0) должен быть преобразован в (2 2 0 1 0 0 3 3 3 0 0 0). Количество операций присваивания элементов массива не более  $n$ .

**25.** Сдвинуть циклически локальные минимумы на одну позицию влево. Так, массив (1 10 2 2 10 10 3 3 3 10 10 10) должен быть преобразован в (2 2 10 3 3 3 10 10 1 10 10 10). Количество операций присваивания элементов массива не более  $n$ .

**26.** Сдвинуть циклически локальные максимумы на одну позицию вправо. Так, массив (1 0 2 2 0 0 3 3 3 0 0 0) должен быть преобразован в (3 3 3 0 1 0 0 2 2 0 0 0). Количество операций присваивания элементов массива порядка  $O(n)$ .

**27.** Пусть элементы массива не убывают. Двоичным поиском определить, между какими индексами можно вставить заданное число  $x$ , не нарушив порядок. Проверять, что массив неубывающий, при считывании. В случае, если массив неубывающим не является, вернуть ошибку.

**28.** Пусть в массиве последовательно записаны цифры некоторого длинного неотрицательного десятичного числа. Реализовать функции "прибавление единицы" и "вычитание единицы" из такого числа. Вычитание свести к сложению (с числом (0-1)). Размер массива может измениться. Так, массив (9 9 9 9) при сложении с 1 должен быть преобразован в (1 0 0 0 0), а массив (0 0 0) при вычитании 1 станет равным (9 9 9).

**30.** Функция должна отрицательные элементы массива переместить в начало с сохранением их порядка, а положительные - в конец. Количество обменов элементов массива не должно быть более чем  $n$ , где  $n$  - размер массива.

**31.** Функция должна отрицательные элементы массива переместить в начало, а положительные - в конец с сохранением их (положительных элементов) порядка. Количество обменов элементов массива не должно быть более чем  $n$ , где  $n$  - размер массива.

**32.** Функция должна положительные элементы массива переместить в начало, а отрицательные - в конец. Количество перемещений элементов не должно быть более чем  $n$ , где  $n$  - размер массива.

**33.** Даны 2 массива. Функция должна возвращать количество вхождений одного массива в другой (как участок последовательности, в том числе пересекающихся вхождений).

**34.** Найти минимальное число  $k$  такое, что модуль суммы всех  $l$ -максимальных значений по всем  $l \leq k$  равен модулю суммы всех  $l$ -минимальных (по всем  $l \leq k$ ) Нельзя изменять элементы массива.

**35.** Найти такое  $k$ , что сумма  $l$ -максимальных значений по всем  $l \geq k$  будет максимально возможной. Нельзя изменять элементы массива.

**36.** Найти такое  $k$ , что сумма  $l$ -минимальных значений по всем  $l \geq k$  будет минимально возможной. Нельзя изменять элементы массива.

**37.** Определить, сколько элементов массива имеют  $k$ -максимальное значение ( $k$  задано). Нельзя изменять элементы массива.

**38.** Найти, если существует, такое  $k$ , что модуль суммы всех  $l$ -максимальных элементов массива по всем  $l \geq k$  равен модулю суммы всех  $l$ -максимальных элементов по  $l \leq k$ .

**39.** В массиве  $A$  хранится перестановка  $\sigma(i) = A[i]$  чисел  $0, \dots, n - 1$ . Определить ее четность. Каждый элемент просматривается не более  $O(1)$  раз. Если массив не является перестановкой, вывести ответ как ошибку. Так, массив  $A = (1 0 2 3 4 6 5)$  определяет четную перестановку.

В задачах 40-43 требуется вычислить значение функции  $f_n(a_0, \dots, a_{n-1})$ , заданной индуктивно. На последовательности, состоящей из одного элемента, она принимает значение, равное этому элементу,  $f_1(a) = a$ . Формула для вычисления  $f_2(a, b)$  известна (выделить ее отдельной функцией). Решение не должно использовать рекурсивные вызовы.

**40.** Для  $n > 2$   $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = f_2(a_0, f_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}))$ .

**41.** Для  $n > 2$   $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = f_{n-1}(f_2(a_0, a_1), a_2, \dots, a_{n-1})$ .

**42.** Для  $n > 2$   $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = f_{n-1}(f_2(a_0, a_{n-1}), a_1, \dots, a_{n-2})$ .

**43.** Для  $n > 2$   $f_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = f_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-2}, f_2(a_0, a_{n-1}))$ .

**44.** В массиве хранится перестановка  $\sigma(i) = A[i]$  чисел  $0, \dots, n - 1$ . Не используя дополнительных массивов, найти обратную перестановку. Так, обратной к массиву  $A = (1 0 2 3 4 6 5)$  будет перестановка  $(1 0 2 3 4 6 5)$ . Если массив не является перестановкой, вывести ответ как ошибку.

**45.** Дано число  $m \leq n$ . Для каждого участка массива из  $m$  элементов найти сумму  $m$  стоящих рядом элементов. Количество сложений переменных типа `int` не более  $n$ . Результат сохранить в исходном массиве. Так, массив (1 0 2 3 1 -1 -1 2 3 0 0 0 1 2 3 4) для  $m = 3$  должен быть преобразован в (3 5 6 3 -1 0 4 5 3 0 1 3 6 9).

**46.** В 2-х массивах хранятся коэффициенты многочленов (от одной переменной, степени могут быть различны). Поместить в третий массив коэффициенты произведения многочленов.

**47.** Даны два неубывающих массива. Соединить их в третий, тоже неубывающий массив. Число действий – порядка суммы размеров исходных массивов. Проверять, что массив неубывающий, при считывании. В случае, если один из массивов неубывающим не является, вернуть ошибку.

**48.** Даны два неубывающих массива. Пересечь их в третий тоже неубывающий массив. Число действий – порядка суммы размеров исходных массивов. Проверять, что массив неубывающий, при считывании. В случае, если один из массивов неубывающим не является, вернуть ошибку.

**49.** Функция должна удалить из массива все отрицательные элементы, а оставшиеся сдвинуть к началу массива (уплотнить с сохранением порядка). Освободившиеся места заполнить удаленными элементами (без сохранения их взаимного порядка). Использовать не более чем  $n$  обменов элементов ( $n$  - длина массива).

**50.** Функция должна удалить из массива все положительные элементы, а оставшиеся сдвинуть к концу массива (уплотнить с сохранением порядка). Освободившиеся места заполнить элементами, противоположными к удаленным. Использовать не более чем  $n$  обменов элементов ( $n$  - длина массива).