

# Opracowanie pytań na egzamin licencjacki

studenci kierunku Fizyka 2014-2017

1 czerwca 2017

## 1 1. Zasady względności Galileusza i Einsteina. Układy inercjalne

Układ inercjalny jest układem odniesienia, względem którego każde ciało, niepodlegające zewnętrznemu oddziaływaniu z innymi ciałami, porusza się ruchem jednostajnym prostolinijkowym lub pozostaje w spoczynku. Istnienie takiego układu jest postulowane przez pierwszą zasadę dynamiki Newtona. Inercjalny układ odniesienia można również zdefiniować jako taki układ, w którym nie pojawiają się pozorne siły bezwładności.

Zasada względności Galileusza głosi, że prawa ruchu są identyczne we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, tj. nie istnieje wyróżniony układ odniesienia. Została sformułowana w 1604 roku w postaci następującego prawa: *Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ze stałą prędkością są równoważne*. Jej konsekwencją są transformacje Galileusza, w których czas i odległość między dwoma dowolnymi punktami pozostają stałe niezależnie od układu odniesienia.

Einstein dodatkowo postulował, że w każdym inercjalnym układzie odniesienia, prędkość światła musi wynosić tyle samo. Założenie to oparł on na analizie transformacji, które pozostawiają niezmienne równania Maxwella. Transformacje Galileusza zostały uogólnione do transformacji Lorentza.

## 2 2. Jednoczesność zdarzeń i przyczynowość w szczególnej teorii względności

Szczególna teoria względności zakłada, że zdarzenia określane przez obserwatora jako równoczesne w innym układzie odniesienia mogą być nierównoczesne. Dodatkowo, by w układzie zachowany był przyczynowo-skutkowy ciąg zdarzeń, a więc aby kolejne wydarzenia wynikały z poprzednich, sygnał między nimi może mieć maksymalnie prędkość światła  $c$ . Kluczem do rozważań jednoczesności zdarzeń i przyczynowości w STW jest pojęcie interwału czasoprzestrzennego, zdefiniowanego następująco:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Wielkość ta jest niezmiennikiem transformacji Lorentza i jest uogólnieniem pojęcia odległości w STW. Wyróżniamy 3 typy zdarzeń:

1.  $\Delta s^2 > 0$ : interwał czasowy - przesłanie podświetlanej informacji pomiędzy zdarzeniami jest możliwe; mogą tworzyć ciąg przyczynowo-skutkowy zatem nie mogą być jednocześnie w żadnym układzie odniesienia. Można wybrać taki układ, w którym zdarzą się w tym samym miejscu.
2.  $\Delta s^2 < 0$ : interwał przestrzenny - zdarzenia nie są powiązane przyczynowo, można wybrać taki układ, w którym oba wydarzenia będą jednocześnie, ale nie można wybrać takiego, w którym wydarzą się w tym samym miejscu.
3.  $\Delta s^2 = 0$ : interwał zerowy - sygnał łączący oba zdarzenia ma dokładnie prędkość światła  $c$ .

### **3 3. Transformacja Lorentza czasu i położenia i jej konsekwencje (skrócenie Lorentza, dylatacja czasu); przykłady wielkości podlegających transformacji Lorentza podobnie jak czas i położenie (czterowektory)**

Rozważmy dwa układy odniesienia: pierwszy spoczynkowy i drugi - primowany - poruszający się z prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$ . Transformacja Lorentza pomiędzy tymi dwoma układami wygląda następująco:

$$\begin{aligned}t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\x' &= \frac{x - vt/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\y' &= y \\z' &= z\end{aligned}$$

Można też zastosować następujące oznaczenia:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Zwróćmy uwagę, że w granicy  $c \rightarrow \infty$  transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza.

Z transformacji Lorentza wynikają dwa fizyczne zjawiska:

1. Dylatacja czasu, opisywana wzorem  $\Delta t = \gamma \Delta t_0$ , gdzie,  $\Delta t_0$  to czas trwania zjawiska zarejestrowany przez obserwatora spoczywającego względem zjawiska, a  $\Delta t$  to czas trwania tego samego zjawiska rejestrowany przez innego obserwatora poruszającego się względem pierwszego z prędkością  $v$ .
2. Skrócenie Lorentza, opisywane wzorem  $L = \frac{L_0}{\gamma}$ , gdzie  $L_0$  to długość spoczywającego obiektu, a  $L$  to długość obiektu rejestrowana przez obserwatora poruszającego się względem niego z prędkością  $v$ .

Położenie w czasoprzestrzeni  $(ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$ , które transformuje się w powyższy sposób do  $(ct', x', y', z') = (ct', \vec{r}')$  jest przykładem obiektu nazywanego czterowektorem. Inne czterowektory transformujące się w ten sposób to np. czteropęd  $p_\mu = (E/c, \vec{p})$  lub czteropotencjał  $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ .

## 4 4. Pęd, energia całkowita i energia wewnętrzna cząstek relatywistycznych

Rozważmy układ spoczynkowy cząstki relatywistycznej o pewnej energii  $E_0$  i zerowym pędzie. Przejdźmy teraz do układu, w którym cząstka porusza się z prędkością  $v$ .

$$\begin{bmatrix} E \\ c \\ p \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ c \end{bmatrix}$$

Stąd mamy:

$$\frac{E}{c} = \gamma \frac{E_0}{c} \quad (1)$$

$$p = \gamma \frac{\beta E_0}{c} \quad (2)$$

Rozwijając  $\gamma$  w szereg otrzymujemy następujące równanie:

$$E = (1 + \beta^2/2)E_0 = E_0 + \beta^2 E_0/2,$$

czyli sumę energii w spoczynku i kinetycznej. Porównajmy zatem człon odpowiadający energii kinetycznej ze wzorem klasycznym  $mv^2/2$ . Otrzymujemy:

$$E_0 = mc^2.$$

Otrzymaliśmy tym samym następujące wzory:

$E_0 = mc^2$	energia spoczynkowa
$E = \gamma mc^2$	energia całkowita
$p = \gamma mc\beta$	całkowity pęd

## 5 5. Zasady zachowania w fizyce.

Zasada zachowania pędu - jeśli na izolowany układ N ciały nie działa żadna zewnętrzna siła lub siły te równoważą się (siły oddziaływania między ciałami układu nie są siłami zewnętrznymi) to całkowity pęd układu pozostaje stały (środek masy układu porusza się ze stałą prędkością lub prędkością równą 0). Pęd może być przekazywany między elementami układu. Zasada zachowania momentu pędu - moment pędu  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  jest zdefiniowany względem wybranego punktu w przestrzeni (środka układu współrzędnych). Zmiana układu współrzędnych może zmienić moment pędu. Jeśli jednak względem danego układu współrzędnych moment sił zewnętrznych działający na układ jest równy 0 to moment pędu jest zachowany. Konsekwencją tego prawa jest płaski tor ruchu planet (stały moment pędu  $\Leftrightarrow$  wektory  $\mathbf{r}$  i  $\mathbf{p}$  leżą

w jednej płaszczyźnie) i drugie prawo Keplera (prędkości polowe są stałe w czasie). Zasada zachowania energii - jeśli na ciało działa  $n$  sił zachowawczych (*takie dla których możliwe jest zdefiniowanie energii potencjalnej* i dla których całka od punktu  $A$  do punktu  $B$  nie zależy od wyboru drogi [równoważne z  $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$ ]) i z każdą z nich związana jest energia potencjalna  $U_i(\mathbf{r})$  to całkowita energia układu  $E$  nie zależy od czasu  $E = T + \sum U_i$ .

## 6 6. Oddziaływanie fundamentalne: nośniki i zasięg oddziaływania, ładunki

Obecnie znane są cztery typy oddziaływań fundamentalnych, za które odpowiedzialne są ich nośniki:

- oddziaływanie silne
- oddziaływanie słabe
- oddziaływanie elektromagnetyczne
- oddziaływanie grawitacyjne

W teoriach kwantowych oddziaływanie są przenoszone przez pewne cząstki zwane **nośnikami oddziaływań** lub kwantami oddziaływań. Istnieją dwie kategorie takich cząstek - rzeczywiste cząstki (przenoszące oddziaływanie fundamentalne) oraz quasicząstki (pseudocząstki: fonon, plazmon, magnon).

oddziaływanie	nośnik	zasięg	ładunek	masa	spin
silne	gluon	$10^{-15}m$	kolor	0	1
słabe	bozon $W^+, W^-, Z_0$	$10^{-18}m$	izospin ładunek elekt. $(W^+, W^-)$	$m_0 > 0$	1
elektromagnetyczne	foton	$\infty$	-	0	s=1
grawitacyjne	grawiton (hipoteza)	$\infty$	-	0	s=2

Z zasady nieoznaczoności Heisenberga:  $\Delta E \Delta t = \frac{\hbar}{2}$  wynika, że kwanty pola mogą istnieć przez skończony czas określony wielkością tych energii, tak aby iloczyn tych wielkości był rzędu stałej Plancka. Zasada nieoznaczoności umożliwia **oszacowanie zasięgu oddziaływania**, który zależy od masy spoczynkowej cząstki nośnika. Bezmasowość fotonów, jak również spodziewana bezmasowość grawitonów, są według takiego opisu przyczyną tego, że siły te są dalekozasięgowe. Cząstki o zerowej energii, czyli także masie spoczynkowej, miałyby zasięg nieskończony.

**Bozony pośredniczące** są wymieniane przez elektrony, neutrino i inne cząstki oddziałujące oddziaływaniem słabym podczas zderzeń. **Bozon W** występuje w dwóch podstawowych postaciach: cząstki  $W^+$  i jej antycząstki  $W^-$ . Obie mają ten sam spin oraz masę  $80,385 \pm 0,015\text{GeV}$ , różnią się tylko ładunkiem elektrycznym. Bozony W przenoszą jeden z ładunków oddziaływania elektrosłabego, jakim jest słaby **izospin**. Jego wartość wynosi odpowiednio  $+1$  i  $-1$  dla bozonów  $W^+$  i  $W^-$ . Najważniejszym zjawiskiem z udziałem bozonów W są rozpady beta. W procesie tym kwark dolny ( $d$ ) zawarty w neutronie rozpada się na kwark górnego ( $u$ ) oraz właśnie bozon W, który z kolei rozpada się na parę: lepton -

neutrino dla danego leptonu (dokładniej:  $W$  – rozpada się na lepton + antyneutrino a  $W+$  na antylepton + neutrino). W miarę wzrostu energii leptonami tymi mogą być: elektron, mion, taon. **Bozon Z** jest równocześnie swoją antycząstką. Masa (energia spoczynkowa) bozonu  $Z_0$  to  $91,1876 \pm 0,0021$  GeV, jest obojętny elektrycznie. Bozon Z rozpada się na pary naładowanych leptonów (elektron-antyelektron, mion-antymion) oraz na pary kwarków lub neutrin (neutrino-antyneutrino).

**Grawiton** jest hipotetyczną cząstką, której istenienie zakłada teoria kwantowej grawitacji bazująca na kwantowej teorii pola, ale nie na Modelu Standardowym. Grawiton nie ma masy, ani ładunku elektrycznego, jest bozonem o spinie  $s = 2$ .

Nie istnieje żadne prawo fizyczne, z którego wynikałoby iż wykrycie grawitonu jest niemożliwe, jednak wymagana masa detektora uniemożliwia to w praktyce. Np. szacuje się, że detektor o masie Jowisza działający ze 100% sprawnością byłby zdolny do wykrycia 1 grawitonu w ciągu 10 lat. Powodem tego jest bardzo mały przekrój czynny grawitonu dla interakcji z materią. Kolejnym problemem jest ekranowanie od szumu tła. Podstawowe dwa źródła szumu, to promieniowanie kosmiczne oraz neutrina.

**Gluon** jest nośnikiem oddziaływań silnych, co oznacza, że oddziaływanie te polegają na wymianie gluonów między kwarkami lub między innymi gluonami. Teorią opisującą oddziaływanie gluonów i kwarków jest chromodynamika kwantowa.

Gluon przenosi ładunek kolorowy. Wymieniane pomiędzy kwarkami gluony tworzą pole sił kolorowych. Gluony mają własny kolor, dlatego oprócz przenoszenia oddziaływań pomiędzy kwarkami potrafią oddziaływać same ze sobą, co prowadzi na przykład do powstania tzw. pętli gluonowych w diagramach Feynmana. Gluony występują w ośmiu stanach o następujących kolorach:

- $r\bar{g}$  (gluon czerwono-antyzielony)
- $g\bar{b}$  (gluon zielono-antyniebieski)
- $b\bar{r}$  (gluon niebiesko-antyczerwony)
- $g\bar{r}$  (gluon zielono-antyczerwony)
- $b\bar{g}$  (gluon niebiesko-antyzielony)
- $r\bar{b}$  (gluon czerwono-antyniebieski)
- $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b})$
- $\frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})$

Gluony jako nośniki oddziaływania silnego, mają ładunki podwójne: jeden kolor i jeden antykolor, jednakże każdy gluon przenosi tylko jeden ładunek kolorowy: albo jeden kolor, albo jeden antykolor. Przykładowo istnieje gluon czerwono-antyniebieski (gluon czerwony/antyniebieski), który przenosi kolor czerwony. Gdy kwark emitemuje lub pochłania gluon, wtedy kolor kwarka ulega zmianie. Przypuśćmy na przykład, że kwark czerwony zamienia się w kwark niebieski i wysyła gluon czerwono-antyniebieski. Taki gluon jest pochłaniany przez inny kwark niebieski. W wyniku absorpcji gluonu czerwono-antyniebieskiego, niebieski kwark zamienia się w kwark czerwony.

Gdy kwark emitem lub pochłania gluon, wtedy kolor kwarka musi ulec zmianie, aby zachować ładunek kolorowy. Kwarki znajdujące się we wnętrzu hadronu wysyłają i pochłaniają gluony tak często, że nie ma możliwości zaobserwowania koloru pojedynczego kwarka.

**Unifikacja** opisu oddziaływań jest przyjęta obecnie za paradygmat fizyki: dąży się do jak najścislejszej integracji opisów różnych oddziaływań. Fizycy starają się zunifikować wszystkie oddziaływanie. I tak oddziaływanie magnetyczne i elektryczne James Clerk Maxwell opisał jako komplementarne aspekty oddziaływania elektromagnetycznego. Był to pierwszy historyczny przypadek unifikacji opisu sił uważanych wcześniej za fundamentalne i rozłączne. Kolejny przykład unifikacji opisu oddziaływań dotyczy oddziaływań elektromagnetycznych i słabych, które zintegrowano w ramach tzw. teorii oddziaływań elektrosłabych. Skutkiem unifikacji nie jest odkrycie pojedynczej cząstki przenoszącej wszystkie oddziaływanie.

## 7 7. Zasady dynamiki Newtona i granice ich stosowania

Zasady dynamiki Newtona – trzy zasady leżące u podstaw mechaniki klasycznej określające związki między ruchem ciała a siłami działającymi na nie, dlatego zwane są też prawami ruchu. W mechanice kwantowej przeważnie nie mają zastosowania, w mechanice relatywistycznej obowiązują w ograniczonym zakresie.

### I Zasada Dynamiki Newtona

*W inercjalnym układzie odniesienia, jeśli na ciało nie działa żadna siła lub siły działające równoważą się, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.*

**Układ inercjalny** to układ odniesienia, względem którego każde ciało, niepodlegające zewnętrznemu oddziaływaniu z innymi ciałami, porusza się bez przyspieszenia (tzn. ruchem jednostajnym prostoliniowym) lub pozostaje w spoczynku.

Pierwsza zasada dynamiki zakłada istnienie inercjalnego układu odniesienia, nie wskazuje jak należy szukać takiego układu, dlatego jest postulatem istnienia inercjalnego układu odniesienia i jest formułowana:

*Istnieje układ odniesienia, w którym cząstka nie podlegająca oddziaływaniu z otoczeniem, spoczywa lub porusza się po prostej ze stałą prędkością.*

Pierwsza zasada dynamiki Newtona jest rozwinięciem idei Galileusza, który zauważał, że jeżeli usuniemy przeszkody ruchu, to zniknie potrzeba podtrzymywania ruchu przez jakąkolwiek siłę. Ruch jednostajny prostoliniowy będzie się odbywać sam przez siebie, bez żadnej pomocy z zewnątrz, o takim ruchu mówimy czasem jako o ruchu swobodnym. Galileusz stwierdza, że z każdym obiektem można związać układ odniesienia i że opisy tego samego ruchu w każdym układzie są równoważne.

Bezwładność ciał jest to zdolność ciał do przeciwstawiania się wszelkim zmianom ruchu. Miarą bezwładności ciała jest jego masa.

### II Zasada Dynamiki Newtona

*W inercjalnym układzie odniesienia jeśli siły działające na ciało nie równoważą się (czyli wypadkowa siła  $\vec{F}_w$  jest różna od zera), to ciało porusza się z przyspieszeniem wprost proporcjonalnym do tej siły.*

cjonalnym do siły wypadkowej, a odwrotnie proporcjonalnym do masy ciała.

lub inaczej

Zmiana pędu ciała w jednostce czasu jest proporcjonalna do wypadkowej siły działającej na to ciało i jest skierowana zgodnie z tą siłą.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_w$$

Zasada ta obowiązuje również dla ciała o zmiennej masie np. w mechanice relatywistycznej. Gdy wypadkowa siła działająca na ciało jest równa zeru, to przyspieszenie ciała jest równe zero, czyli ciało porusza się ze stałą prędkością lub pozostaje w spoczynku, co jest równoznaczne z treścią pierwszej zasady dynamiki. Zatem pierwsza zasada stanowi szczególny przypadek drugiej zasady. Niezależne od siebie są tylko druga i trzecia spośród zasad dynamiki Newtona.

### III Zasada Dynamiki Newtona

*III zasada dynamiki Oddziaływania ciał są zawsze wzajemne. W inercjalnym układzie odniesienia siły wzajemnego oddziaływania dwóch ciał mają takie same wartości, taki sam kierunek, przeciwnie zwroty i różne punkty przyłożenia (każda działa na inne ciało).*

Przeważnie w mechanice klasycznej III zasada dynamiki Newtona i zasada zachowania pędu są równoważne[10]. Obie nie obowiązują gdy układ fizyczny nie jest odosobniony czy podczas kreacji par cząstek wirtualnych. Zasady dynamiki można również zapisać dla wielkości kątowych w ruchu obrotowym, ale prosta analogia ma miejsce tylko w przypadkach, gdy oś obrotu nie zmienia kierunku (ustalona oś, toczenie prostoliniowe). Zasady te mogą być stosowane w układach nieinercjalnych po uwzględnieniu sił bezwładności.

## 8 8.Niezmienniczość równań Newtona względem transformacji Galileusza

Transformacja Galileusza - związek między współrzędnymi przypisanymi zdarzeniu przez obserwatorów, którzy poruszają się względem siebie ze stałą prędkością.

$$\bar{r}(t) = \bar{R}(t) + \bar{r}'(t), \quad (3)$$

gdzie

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 + \bar{u}t. \quad (4)$$

Transformacja prędkości:

$$\bar{v} \equiv \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{dt} + \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{u} + \bar{v}. \quad (5)$$

Transformacja przyspieszenia:

$$\bar{a} \equiv \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} + \frac{d^2\bar{r}'}{dt^2} = 0 + \bar{a}' = \bar{a}'. \quad (6)$$

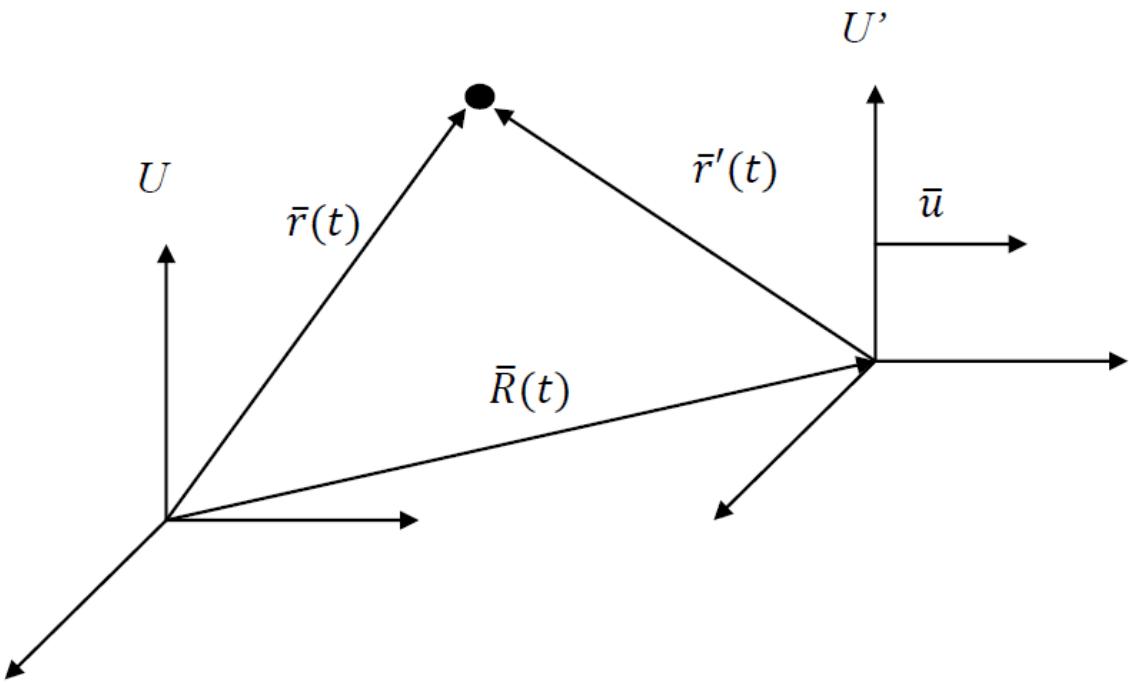


Figure 1: Transformacja Galileusza.

Używaliśmy tu przybliżenia nierelatywistycznego:

$$d\bar{r} = d\bar{r}', dt = dt'. \quad (7)$$

Równanie Newtona w układzie \$U\$:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}. \quad (8)$$

Równanie Newtona w układzie \$U'\$:

$$\bar{F}' = \frac{d\bar{p}'}{dt} = m \frac{d\bar{v}'}{dt} = m\bar{a}' = m\bar{a} = \bar{F}. \quad (9)$$

Założono,, że masa \$m\$ jest niezmiennicza ze względu na transformację Galileusza.

## 9 Przykłady sił potencjalnych i niepotencjalnych

Siła zachowawcza – siła mająca tę własność, że praca wykonana przez nią przy przemieszczeniu ciała na drodze o początku \$A\$ i końcu \$B\$ zależy tylko od położenia punktów \$A\$ i \$B\$, nie zależy zaś od przebiegu drogi, czyli od toru ruchu.

Przykłady sił zachowawczych potencjalnych:

- Siły centralne
  - siła grawitacji
  - siła Kulombowska

- siły sprężystości

Przykłady sił niezachowawczych:

- siły tarcia
- siły oporu ruchu

Siła zachowawcza niepotencjalna:

- Siła Lorentza (siła ta jest zawsze zawsze prostopadła do wektora prędkości, więc nie wykonuje pracy i tym samym nie zmienia energii cząstki).

## 10 10. Prawo powszechnego ciążenia.

Prawo powszechnego ciążenia jest to prawo dotyczące grawitacji i zostało odkryte przez Isaaca Newtona i opublikowane w 1687 roku w pracy pod tytułem *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Prawo powszechnego ciążenia opisuje siłę, która jest wprost proporcjonalna do iloczynu mas dwóch ciał i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między ich środkami masy. Matematycznie wyraża się za pomocą wzoru

$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (10)$$

gdzie  $G$  to stała grawitacji,  $m$  i  $M$  to masy oddziałujące ze sobą, a  $r$  odległość pomiędzy środkami mas obu ciał. Wzór ten jest prawdziwy wtedy, kiedy stosujemy współrzędne kartezjańskie, czyli gdy  $F = F^i e^i$ .

### Wyznaczanie stałej grawitacyjnej

Analog prawa Hooke'a dla ciał obracających się można matematycznie wyrazić następująco (we wzorze 2 można pominąć znak  $-$ , ponieważ on mówi o tym, że siła ta stara się przywrócić ciało do stanu równowagi)

$$M = \kappa\theta, \quad (11)$$

gdzie  $M$  to moment siły  $\theta$  to kąt odchylenia, a  $\kappa$  to moment kierujący. Z kolei moment siły może być wyrażony jako iloczyn siły i odległości od środka obrotu.

$$M = |L| |F| \sin(\alpha) \quad (12)$$

W tym przypadku kąt  $\alpha$  wynosi  $90^\circ$  ponieważ jest kąt prosty między ramieniem i siłą. Możemy zestawić równanie (2) i równanie (3) otrzymując równość (4)

$$\kappa\theta = LF. \quad (13)$$

Następnie do równania (4) podstawiamy wzór (1) opisujący prawo powszechnego ciążenia

$$\kappa\theta = L \frac{Gm_1m_2}{r^2}. \quad (14)$$

Cavendish w celu wyliczenia momentu kierującego zmierzył okres rezonansowy układu, jest zdefiniowany następująco

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}, \quad (15)$$

gdzie  $T$  to okres,  $I$  to moment bezwładności. Moment bezwładności wahadła torsyjnego można wyrażać się następującym wzorem.

$$I = \frac{1}{2}mL^2. \quad (16)$$

Podstawiając równanie (6) do równania (7), wyznaczam  $\kappa$

$$\kappa = \frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}. \quad (17)$$

Wyznaczoną  $\kappa$  wstawiam do równania (5) i otrzymuje

$$\frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}\theta = L \frac{Gm_1 m_2}{r^2}, \quad (18)$$

Gdzie po paru przekształceniach otrzymuje

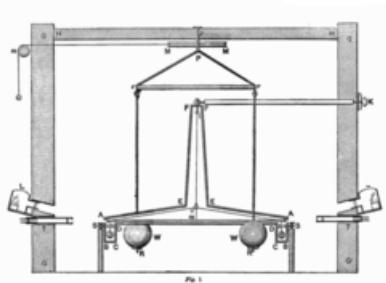
$$G = \frac{2\pi^2 L r^2 \theta}{M T^2}. \quad (19)$$

## Eksperyment Cavendisha

Urządzeniem skonstruowanym przez Henry'ego Cavendisha była waga skręceń. Był to drewniany pręt zawieszony na drucie, na którego końcach umieszczone były ołowiane kule o średnicy 51 mm i masie 0,78 kg. Dwie ołowiane kule o średnicy 300 mm i masach 158 kg, podtrzymywane niezależnie od układu podtrzymującego mniejsze kule, zostały umieszczone w ich pobliżu w odległości około 230 mm. W doświadczeniu mierzona była siła oddziaływania między małymi a dużymi kulami.

Dwie większe kule były umieszczone po przeciwnych stronach poziomego drewnianego ramienia wagi. Siła przyciągania między nimi, a mniejszymi kulami powodowała obrót ramienia, skręcając drut, na którym było ono podwieszone. Ramię wychylało się o kąt, w którym siła skręcania drutu była zrównoważona przez grawitacyjną siłę przyciągania między kulami. Znając kąt wychylenia i moment siły skręcającej w zależności od kąta skręcenia, Cavendish był w stanie określić siłę z jaką oddziaływały na siebie pary mas.

W celu wyznaczenia momentu kierującego, czyli wartości momentu siły wywieranego na drut dla danego kąta skrętu, Cavendish zmierzył naturalny okres drgań ramienia wychylonego z układu równowagi. Okres drgań wynosił około 20 minut. Znając wymiary i masy ramienia można obliczyć moment kierujący.



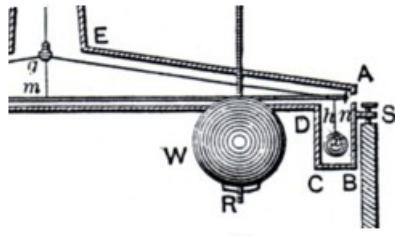
Szkic przekroju pionowego wagi skręceń Cavendisha wraz z obudową. Większe kule były podwieszone na ramie w sposób umożliwiający ich pozycjonowanie względem mniejszych kul dzięki mechanizmowi wyprowadzonemu na zewnątrz. Ilustracja 1 z dokumentacji Cavendisha

Figure 2: Rysunek potrzebny do zrozumienia opisu.

## 11 11. Rozwiązania równań Newtona ruchu punktu materialnego dla potencjału harmonicznego i centralnego.

**Potencjał harmoniczny:**

1. Wypisanie równań Newtona dla każdego ciała osobno:  $m\ddot{x}_i = -kx_i - k(x_j - x_i)$ , gdzie  $x_i$  oznacza wychylenie pierwszej masy z poł. równowagi a  $x_j$  oznacza wychylenie drugiej masy z położenia równowagi



Fragment ukazujący szczegóły wagi skręceni: ramie ( $m$ ), większa kula ( $W$ ), mniejsza kula ( $x$ ) i osłona ochronna (ABCDE)

Figure 3: Rysunek potrzebny do zrozumienia opisu.

2. Rozwiązywanie równania różniczkowego jednorodnego poprzez znalezienie wartości  $\omega$  modów normalnych: można to zrobić poprzez wyznaczenie wartości własnej macierzy stworzonej z wcześniej wypisanych r. Newtona
3. Ostateczne rozwiązanie to  $A \sin(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)$  dla układu dwóch kulek.

**Potencjał centralny:** Rozwiązaniem r. ruchu jest elipsa. Do równania tego dochodzimy poprzez wypisanie:

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{1}{r^2}mr^3 \quad (20)$$

1. człon oznacza siłę centralną, drugi siłę odśrodkową. Sądzę, że nie ma sensu przepisywać dalej rozwiązania, bo jest skomplikowane - nie powinno go wymagać. Dla chętnych jest dokładnie wypisane w 1. części *Mechaniki Klasycznej* Taylora. Ostatecznie dostajemy równanie:

$$r(\theta) = c(1 + \epsilon \cos(\theta)) \quad (21)$$

Stałe  $c$  i  $\epsilon$  definiują dłużości krótszej (b) i dłuższej (a) półosi elipsy następująco:

$$a = \frac{c}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{c}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \quad (22)$$

## 12 12. Opis ruchu N oddziałujących mas, w tym zagadnienie dwóch ciał i problem Keplera.

Opis ruchu n ciał wymaga wprowadzenia pojęcia środka masy. Środek masy definiuje się następująco

$$\vec{R}_{sm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (23)$$

gdzie  $\vec{R}_{sm}$  to położenie w układzie środka masy,  $m_i$  to masa i-tego ciała,  $r_i$  to położenie i-tego ciała, a  $M$  to suma po wszystkich masach.

W układzie primowanym położenie środka masy ( $\vec{r}'_i$ ) i pęd środka masy wynoszą zero, oraz nie wykonują obrotów. Mając szkic układu obliczony zostanie moment pędu oraz pęd układu.

### Całkowity pęd układu

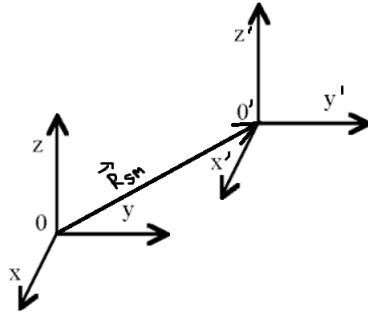


Figure 4: Układy współrzędne.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt} \sum_i m_i (\vec{R}_{sm} + \vec{r}'_i) = M \dot{\vec{R}}_{sm} + \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}'_i = \vec{P}_{sm} + \vec{P}' \quad (24)$$

W przypadku tym  $\vec{P}'$  jest równe zero ze względu na założenia, jakie zostały wykonane.

### Zasada zachowania pędu

$$\frac{d\vec{P}_{sm}}{dt} = \sum_i (\vec{F}_i^z + \sum_j \vec{F}_{ij}) = \sum_i \vec{F}_i^z + \sum_{ij} \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{zew} \quad (25)$$

Suma po  $\vec{F}_{ij}$  zawsze jest równa zero.  $\vec{F}_i^z$  oznacza siłę zewnętrzną, a  $\vec{F}_{zew}$  oznacza wypadkową sił zewnętrznych. Jeśli  $\vec{F}_{zew}$  wynosi zero, to pęd jest stały, co jest potwierdzeniem zasady zachowania pędu.

### Energia układu punktów materialnych

Energia dzieli się na energię kinetyczną oraz energię potencjalną. Najpierw rozważymy energię kinetyczną układu.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{r}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{R}}_{sm} + \dot{\vec{r}}'_i)^2 \quad (26)$$

Po podniesieniu do kwadratu nawiasu otrzymamy 3 członu. Suma, w której występuje  $m_i \dot{r}'_i$  wyzeruje się ze względu na to, że w układzie primowanym położenie środka masy jest równe zero. Wtedy automatycznie pochodna położenia środka masy będzie wynosić zero. Z tego powodu wyrażenie przyjmuje następującą postać

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{sm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}'^2. \quad (27)$$

Z pierwszego członu otrzymujemy energię kinetyczną środka masy względem punktu 0, a z trzeciego członu otrzymujemy energię kinetyczną wewnętrzną. Końcowy wzór na energię kinetyczną środka masy będzie wyglądać następująco.

$$T = T_{sm} + T' \quad (28)$$

Teraz rozpatrujemy energię potencjalną. Jeżeli każda z sił działających na i-ty punkt materialny jest zachowawcza i potencjalna to wtedy

$$\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V \vee \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (29)$$

i wówczas całkowita energia jest zachowana.

## Całkowity moment pędu układu

Definicja momentu pędu zawarta jest w równaniu(12).

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (30)$$

Transformując do układu środka masy otrzymujemy

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{R}_{sm} \times \vec{r}'_i) \times m_i (\dot{\vec{R}}_{sm} + \dot{\vec{r}}'_i) \quad (31)$$

Po wymnożeniu otrzymujemy 4 członów. Suma w których występuje  $m_i \vec{r}'_i$  lub  $m_i \vec{r}'_i$  wyzerują się, ponieważ w układzie primowanym położenie środka masy jest równe zero. Jeśli położenie środka masy jest równe zero, to również pochodna położenia środka masy będzie wynosić zero wzgólnie na warunki narzucone dla układu primowanego. W powodzie podanego powyżej, wyrażenie przyjmie taką postać.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{R}_{sm} \times m_i \dot{\vec{R}}_{sm} + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \dot{\vec{r}}'_i \quad (32)$$

Co ostatecznie można zapisać następująco

$$\vec{L} = \vec{L}_{sm} + \vec{L}' \quad (33)$$

$\vec{L}_{sm}$  to moment pędu środka masy względem punktu 0, a  $\vec{L}'$  wewnętrzny moment pędu.

## Zasada zachowania momentu pędu

Wyrowadzimy zasadę zachowania momentu pędu korzystając z definicji momentu siły

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (34)$$

Transformując do układu środka masy otrzymujemy

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{R}_{sm} + \vec{r}'_i) \times (\vec{F}_i^z + \sum_j \vec{F}_{ij}) \quad (35)$$

po wymnożeniu otrzymujemy 4 członów. Sumy w których występuje  $\vec{F}_{ij}$ , można przekształcić w następującą postać

$$\sum_{ij} \vec{r}'_i \times \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}'_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}'_j \times \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} (\vec{r}'_i - \vec{r}'_j) \times \vec{F}_{ij} \quad (36)$$

Jeżeli siły wewnętrzne są centralne czyli

$$\vec{F}_{ij} = \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} F_{ij}, \quad (37)$$

to moment sił wewnętrznych zanika i wówczas

$$\vec{M} = \sum_i \vec{R}_{sm} \times \vec{F}_i^z + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^z = \vec{R}_{sm} \times \vec{F}_{zew} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^z \quad (38)$$

Ostatecznie dochodząc do postaci

$$\vec{M} = \vec{M}_{sm} + \vec{M}' \quad (39)$$

Zróżniczkujmy moment pędu i sprawdźmy, czy pochodna momentu pędu jest równa momen-towi siły

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{R}_{sm} \times \vec{P}_{sm}) + \frac{dI'}{dt} = \vec{R}_{sm} \times \dot{\vec{P}}_{sm} + \frac{dI'}{dt} = \vec{R}_{sm} \times \dot{\vec{F}}_{zew} + \vec{M}' \quad (40)$$

pochodna momentu pędu jest równa momentowi siły. Zasada zachowania momentu pędu jest zachowana.

## Zagadnienie dwóch ciał

Rozważamy problem, w których obliczenia będziemy rozważać w układzie środka masy. Rozpatrujemy taki układ, w którym środek mas spoczywa, i jego położenie znajduje się na początku układu współrzędnych. W tak zdefiniowanym problemie otrzymamy następujące równania

$$m_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 r_2}{dt^2} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} - \frac{d^2 r_2}{dt^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}. \quad (42)$$

Jeśli uwzględnimy wcześniejsze założenia, pierwsze równanie będzie jest zgodne z równaniem następującym

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0 \quad (43)$$

jeśli będziemy położenie względne czyli  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}$  to otrzymamy równania na  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$ .

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (44)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (45)$$

Z drugiego równania otrzymujemy

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r} \quad (46)$$

wprowadzając masę zredukowaną wcześniejsze równanie upraszczamy do postaci

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = G \mu \frac{\vec{r}}{r} \quad (47)$$

## 13 13. Moment bezwładności i zasady dynamiki ruchu bryły sztywnej.

Moment bezwładności – miara bezwładności ciała w ruchu obrotowym względem określonej, ustalonej osi obrotu. Moment bezwładności w zależności, czy mamy doczynienia z obiektem punktowym, czy ciągłym inaczej się wyznacza. Dla punktów materialnych moment bezwładności wyznacza się za pomocą równania

$$I = \sum mr^2, \quad (48)$$

gdzie  $I$  to moment bezwładności,  $m$  to masa a  $r$  to odległość punktu od osi obrotu. Z kolei dla obiektu ciągłego wzór ten przybiera postać

$$I = \int r^2 \rho dV, \quad (49)$$

gdzie  $\rho$  to lokalna gęstość ciała, a  $dV$  to element objętości ciała. Jeśli  $\rho$  jest stała, to wtedy mówimy o ciele jednorodnym.

Pierwsza zasada dynamiki Newtona-jeżeli na ciało nie działają żadne momenty sił lub działające momenty sił się równoważą to ciało pozostaje w spoczynku lub obraca się ze stałą prędkością kątową

$$\vec{M}_{wyp} = 0. \quad (50)$$

Druga zasada dynamiki Newtona-jeżeli na ciało działa nie równoważący się wypadkowy moment sił, to wypadkowy moment sił jest równy iloczynowi przyspieszenia kątowego i momentowi bezwładności ciała

$$\vec{M}_{wyp} = \vec{\epsilon}I. \quad (51)$$

Trzecia zasada dynamiki Newtona-jeżeli ciało A działa na ciało B momentem siły  $\vec{M}$  to ciało B działa na ciało A momentem siły równym co do wartości, o takim samym kierunku, lecz o przeciwnym zwrocie.

$$\vec{M}_{A \rightarrow B} = -\vec{M}_{B \rightarrow A}. \quad (52)$$

Moment bezwładności można liczyć nie tylko z względem określonej osi, ale można także liczyć względem osi równoległej. Do tego stosuje się twierdzenie Steinera. Twierdzenie Steiner'a mówi, że moment bezwładności bryły sztywnej względem dowolnej osi jest równy sumie momentu bezwładności względem osi równoległej do danej i przechodzącej przez środek masy bryły oraz iloczynu masy bryły i kwadratu odległości między tymi dwiema osiami. Twierdzenie to można zapisać w następującej postaci

$$I = I_0 + md^2, \quad (53)$$

gdzie  $I$  to moment bezwładności względem osi równoległej do pierwszej osi,  $I_0$  moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,  $d$  to odległość między osiami, a  $m$  to masa ciała.

## 14 14. Hydrostatyka: ciśnienie, prawo Pascala, prawo Archimedesa i pływanie ciał.

### Ciśnienie

Ciśnienie jest wielkością skalarną(\*) określona jako wartość siły działającej prostopadle do powierzchni podzielona przez powierzchnię na jaką ona działa. Ciśnienie jest opisane wzorem

$$p = \frac{F}{S}. \quad (54)$$

\*-pojęcie ciśnienia można uogólnić na naprężenie.

## Prawo Pascala

Jeżeli na ciecz lub gaz w zbiorniku zamkniętym wywierane jest ciśnienie zewnętrzne, to ciśnienie wewnętrz zbiornika jest wszędzie jednakowe i równe ciśnieniu zewnętrznemu. Prawo to jest prawdziwe, gdy nie uwzględnia się oddziaływanie grawitacyjnego, przepływu cieczy lub gazu czy innego rodzaju.

## Ciśnienie hydrostatyczne, prawo Archimedesa oraz漂流anie ciał

Ciśnienie hydrostatyczne to ciśnienie w cieczy znajdującej się w polu grawitacyjnym, gdy na ciecz działa tylko siła grawitacji. Ciśnienie to wyrażone jest wzorem

$$p_h = \rho gh, \quad (55)$$

gdzie  $\rho$  to gęstość cieczy,  $g$  to przyspieszenie ziemskie, a  $h$  to głębokość zanurzenia. Ciśnienie całkowite jest sumą ciśnienia zewnętrznego i ciśnienia hydrostatycznego.

$$p = p_z + p_h \quad (56)$$

Prawo Arhimedesa mówi, że na ciało zanurzone w cieczy lub gazie działa pionowa, skierowana ku górze siła wyporu. Wartość siły jest równa ciężarowi wypartego płynu. Korzystając z ciśnienia hydrostatycznego można wyznaczyć wzór na siłę wyporu,

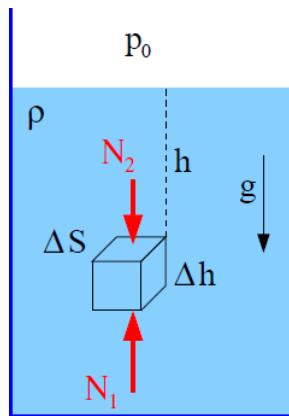


Figure 5: Rysunek poglądowy do wzoru na siłę wyporu.

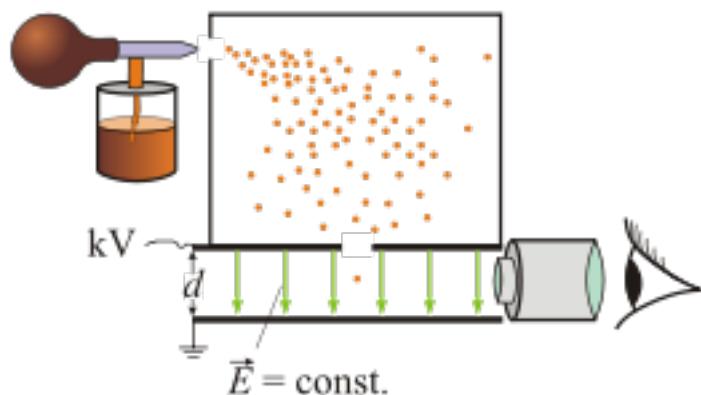
$$W = N_1 - N_2 = \rho g(h + \Delta h)\Delta S - \rho g h \Delta S = \rho g \Delta h \Delta S = \rho g V. \quad (57)$$

Zgodnie z prawem Archimedesa siła wyporu jest skierowana przeciwnie względem ciężarowu cieczy wypartej przez ciało, stąd wynika  $W = -\rho g V$ . Ciało w zależności od gęstości ciała, oraz gęstości cieczy lub gazu może tonąć albo wypłynąć. Jeśli gęstość ciała jest większa od gęstości cieczy lub gazu, to ciało zatonie. Z kolei gdy gęstość ciała jest mniejsza niż gęstość cieczy lub gazu to ciało wypłynie i będzie pływać w cieczy lub gazie.

## 15 15. Ładunek elementarny i doświadczenie Millikana.

Okazuje się, że ładunek elektryczny jest skwantowany - to znaczy, że może występować w przyrodzie jedynie w postaci całkowitej wielokrotności pewnej wartości. Jest nią tak zwany *ładunek elementarny* wynoszący około  $1.602 \cdot 10^{-19}$  C. Jest to jednocześnie wartość ładunku protonu (elektronu naturalnie jest z -).

Na początku XX wieku Robert Millikan wykonał eksperyment, w którym dowódł kwantyzacji ładunku oraz oszacował jego wartość.



Schemat doświadczenia Millikana. Rysunek ukradziony z wikipedii.

Eksperyment polegał na rozpylaniu kropel oleju w powietrzu i obserwowaniu ich opadania przy włączonym i wyłączonym polu elektrycznym. Millikan oglądał ich ruch w mikroskopie. Krople elektryzowały się w wyniku oddziaływania z powietrzem i ewentualnym promieniowaniem jonizującym obecnym w otoczeniu. Na podstawie analizy ruchu kropel można było oszacować wartość ładunku elementarnego.

## 16 16. Prawo Coulomba, prawo Gaussa, potencjał pola elektrycznego

### 1. Prawo Coulomba

Siła oddziaływania między dwoma ładunkami punktowymi  $q_1$  i  $q_2$  we wzajemnej odległości  $r_{12}$ :

$$F_{12}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \hat{r}_{12}.$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} - \text{przenikalność elektryczna próżni.}$$

Dla:

- $q_1 \cdot q_2 > 0$  (ładunki jednoimienne) - odpychanie,

- $q_1 \cdot q_2 < 0$  (ładunki różnoimienne) - przyciąganie.

## 2. Prawo Gaussa

Jedno z równań Maxwella mówiące, że źródłem pola elektrycznego są ładunki elektryczne.

Postać całkowa:

Całkowity strumień pola elektrycznego  $\Phi_{\vec{E}}$  przez zamkniętą powierzchnię  $\partial V$  jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz  $\partial V$ , niezależnie od kształtu  $\partial V$ :

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{new}}{\epsilon_0}.$$

Dla rozkładu punktowego ładunku:  $Q_{new} = \sum_i q_i$ ,

Dla rozkładu ciągłego ładunku:  $Q_{new} = \int_V \rho(\vec{r}) d\tau$ , gdzie  $\rho(\vec{r})$  - gęstość objętościowa ładunku.

Wygodne powierzchnie Gaussa do całkowania:

- ładunek punktowy - sfera o środku w położeniu ładunku,
- nieskończony jednorodnie naładowany pręt - walec współśrodkowy z prętem,
- nieskończona jednorodnie naładowana płaszczyzna - walec prostopadły do płaszczyzny o połowie wysokości na równi z płaszczyzną.

Postać różniczkowa:

Dywergencja pola elektrycznego jest równa gęstości ładunku w punkcie:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{r}).$$

Z twierdzenia Stokesa można przejść z postaci całkowej do różniczkowej:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}) d\tau \stackrel{Stokes}{=} \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) d\tau.$$

## 3. Potencjał elektryczny

Potencjał elektryczny  $\phi$  to ciągła funkcja skalarna taka, że:

$$-\vec{\nabla} \phi = \vec{E}.$$

Potencjał skalarne istnieje wyłącznie jeżeli  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ , czyli pole elektryczne jest bezwirowe (źródłowe).

Potencjał jest określony do dowolnej stałej, ponieważ  $\vec{\nabla}(f + C) = \vec{\nabla}f$ . Zazwyczaj przyjmuje się, że w nieskończoności zniką.

Potencjał w konkretnym zadanym punkcie  $P$   $\phi(P)$  można liczyć na dwa sposoby:

- Jeżeli znamy pole elektryczne  $\vec{E}$ , to potencjał jest zadany całką krzywoliniową:

$$\phi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{r}.$$

Potencjalność  $\vec{E}$  (bezwirowość) gwarantuje, że  $\phi$  jest niezależne od drogi całkowania.

- Jeżeli znamy rozkład ładunku elektrycznego, to potencjał wyraża się wzorem:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\vec{r}_P - \vec{r}|},$$

dla ładunku punktowego umieszczonego w  $\vec{r}$  lub

$$\phi(P) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{r}_P - \vec{r}|} d\tau,$$

dla rozkładu ciągłego ładunku o gęstości  $\rho(\vec{r})$ .

Wkłady do wypadkowego potencjału od wielu ładunków dodają się skalarnie.

Różnicę potencjałów między dwoma punktami A i B liczy się ze wzoru:

$$\Delta\phi_{AB} = - \int_A^B \vec{E} d\vec{r}.$$

Znajomość potencjału w dwóch różnych punktach A i B pozwala na łatwe obliczenie pracy potrzebnej do przeniesienia ładunku  $q$  w polu elektrycznym z A do B:

$$W_{AB} = q(\phi(B) - \phi(A)).$$

## 17 17. Prąd elektryczny, prawo Ohma, rozkład prądu i pola elektrycznego w przewodniku, zasada zachowania ładunku elektrycznego, równanie ciągłości dla prądu.

### 1. Prąd elektryczny

Jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych pod wpływem pola elektrycznego.

Natężeniem prądu nazywamy ładunek przepływający w czasie:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Gęstość prądu jest wektorem zdefiniowanym jako natężenie prądu na jednostkę powierzchni prostopadłą do kierunku przepływu prądu:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \hat{n},$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem normalnym do powierzchni przekroju przewodnika.

Gęstość prądu jest związana ze średnią prędkością (prędkością unoszenia) poruszających się ładunków. W elemencie przewodnika o długości  $l$  i powierzchni  $S$  ( przyjmując, że się nie zmienia z długością) znajduje się ładunek:

$$q = nelS,$$

gdzie  $n$  jest koncentracją nośników. Natężenie prądu w przewodniku wynosi

$$I = \frac{dQ}{dt} = ne \frac{dl}{dt} S = nevS,$$

więc gęstość prądu wynosi:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS} \hat{n} = ne \vec{v}.$$

## 2. Prawo Ohma

Pozwala wyznaczyć natężenie prądu w przewodniku o zadanej oporności właściwej  $\rho$  (albo przewodności  $\sigma$ ) :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

lub

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}.$$

Inna postać tego prawa mówi, że natężenie prądu jest proporcjonalne do różnicy potencjałów  $U$  przyłożonej do przewodnika o całkowitym oporze  $R$ :

$$U = IR.$$

Prawa Ohma nie spełniają obiekty nieliniowe, jak diody, których opór zmienia się wraz z napięciem. Dla wysokich napięć prawo Ohma również może nie być spełnione, ponieważ wzrost natężenia przekłada się na wzrost temperatury i tym samym oporu.

### 3. Rozkład prądu i pola elektrycznego w przewodniku

W przypadku elektrostatycznym ładunek rozkłada się równomiernie po całej zewnętrznej powierzchni przewodnika. Wewnątrz przewodnika nie ma pola elektrycznego, ponieważ żaden ładunek nie znajduje się wewnątrz przewodnika. Nie płynie również prąd elektryczny, ponieważ w elektrostatyce układ osiągnął stan stacjonarny.

Pole elektryczne ma ciągłą składową styczną do powierzchni oraz nieciągłą normalną do powierzchni.

Po przyłożeniu źródła do przewodnika wytworzy się różnica potencjałów, która powoduje powstanie pola elektrycznego w przewodniku. Na skutek zderzeń przyspieszanych elektronów (w przypadku przewodników niemetalicznych także jonów) z ośrodkiem ustala się stały, uporządkowany ruch ładunków.

Rozkład prądu w przewodniku zależy od oporności (przewodności) właściwej drutu. Jeżeli oporność właściwa jest jednorodna, to gęstość prądu jest jednorodna w całym przekroju drutu, a natężenie wyraża się wzorem:

$$I = jS.$$

Jeżeli oporność właściwa zmienia się wraz z przekrojem (promieniem, kątem), to gęstość prądu będzie się zmieniać w przekroju przewodnika, natężenie prądu będzie trzeba liczyć z całki:

$$I = \int_S \vec{j}(r, \phi) d\vec{S}.$$

### 4. Zasada zachowania ładunku

W izolowanym układzie całkowity ładunek elektryczny pozostaje stały.

### 5. Równanie ciągłości dla prądu

Postać całkowa:

Jeżeli  $\partial V$  jest powierzchnią zamkniętą, to prąd przepływający przez  $\partial V$  jest równy zmianie ładunku wewnątrz  $\partial V$ .

$$I = \int_{\partial V} \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ_{new}}{dt} \quad (\text{ladunek wypływa na zewnątrz } \partial V)$$

$$\text{Jednocześnie } Q_{new} = \int_V \rho d\tau.$$

Równanie ciągłości w wersji całkowej:

$$\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{S} = -\frac{1}{dt} \int_V \rho d\tau.$$

Postać różniczkowa:

Z twierdzenia Stokesa:

$$\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \vec{j} d\tau.$$

Wówczas:

$$\int_V \vec{\nabla} \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} d\tau = 0.$$

Jest to możliwe tylko, gdy funkcja podcałkowa jest równa 0.

Równanie ciągłości w wersji różniczkowej:

$$\vec{\nabla} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt}.$$

## 18 18. Metale, półprzewodniki.

Metale:

1. Metal (przewodnik) umieszczony w polu elektrycznym zewnętrznym wytworzy rozkład ładunku, który w całości zniesie w jego wnętrzu pole elektryczne. Dzieje się tak, bo jeśli w metalu występuje pole elektryczne to następuje w jego wnętrzu przepływ swobodnych elektronów, które powodują zmianę rozkładu pola i tak do chwili wyzerowania całego pola wewnętrz przewodnika.
2. Jeśli na metalu umieścimy dodatkowy ładunek niebalansowany to rozłoży się on na jego obrzeżach (granicach) z tego samego powodu co wyżej. Równomiernie rozłożony ładunek na obrzeżach metalu powoduje, że w jego wnętrzu pole elektryczne jest równe zero a co za tym idzie, nie występują siły poruszające ładunkami swobodnymi tam się znajdującymi.
3. Pole na powierzchni przewodnika jest do niego prostopadłe, bo jeśli na powierzchni wystąpi składowa równoległa do jego powierzchni to ładunek na obrzeżu metalu przemieści się tak, aby zrekompensować tą równoległą składową pola. Ruch ten zakończy się, gdy znikną wszystkie równoległe do powierzchni składowe pola.
4. Jeśli w przewodniku zrobimy wydrążenie, to nic się nie stanie dopóki nie umieścimy w jego wnętrzu ładunku. Aby wewnętrz metalu pole elektryczne pozostało równe zeru musimy ten ładunek *zneutralizować*, czyli na powierzchni dziury zgromadzi się ładunek równy co do wartości ładunkowi znajdującemu się w wydrążeniu lecz przeciwnego znaku.

Na powierzchni metalu zgromadzi się jednorodnie rozłożony ładunek o wartości ładunku i znaku zawartego w wydrążeniu.

5. Omawiając metale należy pamiętać o wszystkich siłach działających na przewodnik czy ładunki w polu e-m (siła Lorentza, siła elektrodynamiczna, zjawisko Halla)

Półprzewodniki:

1. Półprzewodniki to materiały o niewielkich ilościach nośników prądu elektrycznego w warunkach normalnych. Liczbę tych nośników można zwiększyć na kilka sposobów w zależności od materiału: poprzez domieszkowanie, zmianę temperatury, zmianę natężenia światła padającego na materiał czy też rozciąganie lub ściskanie. Niezależnie jak, każda z wcześniej wymienionych metod ma za zadanie dostarczenie do półprzewodnika energii, która pozwoli nośnikom na pokonanie przerwy energetycznej, która występuje w półprzewodnikach.
2. Istnieją dwa typy półprzewodników: typu n i typu p. Półprzewodniki typu n są to półprzewodniki domieszkowane, w których nośnikami prądu są elektrony. W takim półprzewodniku powstaje poziom 'donorowy', powyżej poziomu pasma walencyjnego. Wyrwanie z takiego poziomu elektronu do pasma przewodzenia wymaga mniej energii niż wyrwanie elektronu z pasma walencyjnego. W przypadku półprzewodników typu p przez domieszkowanie powstaje podobny poziom nad pasmem walencyjnym, jednak powstaje on poprzez związanie elektronów, powodując powstanie dziur, które są nośnikami prądu.

## 19 19. Obwody elektryczne: prawo Ohma i prawa Kirchhoffa

Dla obwodów nieliniowych nie obowiązuje!

### 19.1 Prąd stały

Natężenie prądu płynącego przez przewodnik jest proporcjonalne do przyłożonego napięcia.

$$U = RI \quad (58)$$

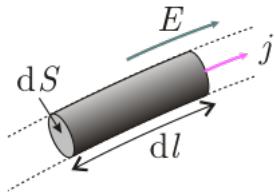
Prawo Ohma jest prawem materiałowym (nie uniwersalnym), co oznacza, że sprawdza się tylko niektórych materiałów - substancji. Poza tym prawo to jest słusze tylko dla określonych napięć i przy ustalonych warunkach zewnętrznych (np. stała powinna być temperatura). Opór odcinka przewodnika o stałym przekroju poprzecznym jest proporcjonalny do długości tego odcinka  $l$  i odwrotnie proporcjonalny do pola przekroju  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (59)$$

Stosując prawo Ohma do elementarnego odcinka izotropowego przewodnika o długości  $dl$  i powierzchni przekroju  $dS$  (przewodnik) można napisać:

$$dI = \frac{dU}{R} \quad (60)$$

Figure 6: Przewodnik



Podstawiając do powyższego wzoru zależności na gęstość prądu i napięcie:

$$dI = \vec{j} d\vec{S} \quad (61)$$

$$dU = \vec{E} d\vec{l} \quad (62)$$

Dochodzimy do postaci prawa Ohma które wiąże lokalną gęstość prądu z natężeniem pola elektrycznego w przewodniku.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (63)$$

### 19.1.1 Prąd zmienny

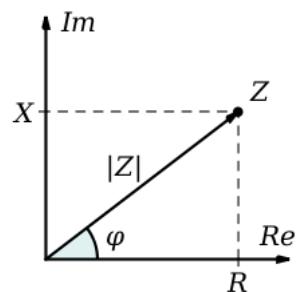
Impedancja,  $Z$  – wielkość charakteryzująca zależność między natężeniem prądu i napięciem w obwodach prądu zmennego.

$$u(\omega, t) = Z(\omega)i(\omega, t) \quad (64)$$

Impedancja jest uogólnieniem oporu elektrycznego, charakteryzującego tę zależność w obwodach prądu stałego. Impedancja jest wielkością zespoloną. Część rzeczywista impedancji opisuje opór związany z prądem płynącym w fazie zgodnej z przyłożonym napięciem, część urojona – z prądem przesuniętym w fazie, który wyprzedza przyłożone napięcie lub jest opóźniony względem niego.

Uwaga: Czasem skrótnie i błędnie impedancją jest nazywany moduł impedancji czyli zawada, ale także odwrotnie – impedancja zawadą.

Figure 7: Impedancja na płaszczyźnie zespolonej



Możemy przedstawić napięcie i natężenie jako funkcję okresowe:

$$u(\omega, t) = u_0 e^{j\omega t} \quad i(\omega, t) = i_1 e^{j(\omega t + \phi)} = i_1 e^{j\phi} e^{j\omega t} = i_0 e^{j\omega t} \quad (65)$$

gdzie:

$u_0$  oraz  $i_0$  są amplitudami zespolonymi odpowiednio napięcia i prądu,  $\phi$  jest przesunięciem fazowym między napięciem a natężeniem prądu. Impedancja wiąże się z tymi wielkościami:

$$Z(\omega) = \frac{u(\omega, t)}{i(\omega, t)} = \frac{u_0 e^{j\omega t}}{i_0 e^{j\omega t}} = \frac{u_0}{i_0} = \frac{u_0}{i_1 e^{j\phi}} = |Z|r^{-j\phi} = R + jX \quad (66)$$

Część rzeczywistą impedancji  $R$  nazywa się rezystancją lub oporem czynnym, odpowiada ona za prąd płynący w fazie z napięciem i urządzenia. Część urojoną  $X$  impedancji nazywa się reaktancją lub oporem biernym, odpowiada za prąd przesunięty względem napięcia o  $+90^\circ$  albo o  $-90^\circ$  i [https://pl.wikipedia.org/wiki/Moc\\_bierenamocierną](https://pl.wikipedia.org/wiki/Moc_bierenamocierną). Faza impedancji  $\phi$  ma sens fizyczny przesunięcia fazowego między przyłożonym napięciem a płynącym prądem.

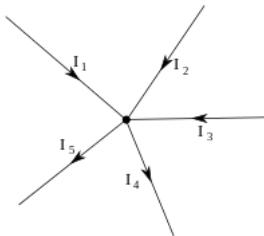
Przy obliczaniu impedancji zastępczych postępuje się podobnie jak przy łączeniu rezistorów.

## 19.2 Prawa Kirchhoffa

### 19.2.1 Pierwsze prawo Kirchhoffa

Prawo to wynika z zasady zachowania ładunku czyli [https://pl.wikipedia.org/wiki/RSuma\\_nat%C4%99%C5%84e%C5%9B\\_pr%C4%99d%C4%99w\\_wpływaj%C4%99cych](https://pl.wikipedia.org/wiki/RSuma_nat%C4%99%C5%84e%C5%9B_pr%C4%99d%C4%99w_wpływaj%C4%99cych) natężenie prądów wpływających do węzła jest równa sumie natężen prądów wypływających z tego węzła.

Figure 8: Węzeł z prądami wpływającymi i wypływającymi



Dla przypadku przedstawionego na rysunku I prawo Kirchhoffa można więc zapisać w postaci:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0 \quad (67)$$

Dla ciągłego rozkładu prądów prawo przyjmuje postać: całka po powierzchni zamkniętej z gęstością prądu jest równa zeru:

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = 0 \quad (68)$$

Oznacza to, że pole wektorowe gęstości prądu jest bezźródłowe.

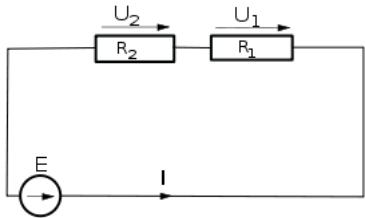
## 19.3 Drugie prawo Kirchhoffa

II prawo Kirchhoffa odnosi się do spadków napięć na elementach obwodu. Wynika ono ze zrozumienia faktu, że napięcia w obwodzie nie biorą się znikąd. Jeżeli gdzieś na oporniku jest jakieś napięcie, to znaczy, że musi też gdzieś istnieć źródło które wywołało prąd przepływający przez opornik. I wszystkie napięcia pochodzące od źródeł muszą sumować się z napięciami odkładającymi się na opornikach. Dla przykładowego obwodu zamkniętego z prawa napięciowego wynikają następujące własności:

$$U_1 = IR_1 \quad U_2 = IR_2 \quad E = U_1 + U_2 \quad E = I(R_1 + R_2) \quad (69)$$

Na czerwono zaznaczone wykorzystanie drugiego prawa Kirchhoffa.

Figure 9: Przykład obwodu



## 19.4 Obwody elektryczne

Obwód elektryczny jest to zespół połączonych elektrycznie elementów, tworzących zamkniętą drogę dla przepływu prądu.

### 19.4.1 Obwody nieliniowe

Obwodem elektrycznym nieliniowym nazywamy taki obwód, w którym występuje co najmniej jeden element nielinowy bądź więcej elementów nieliniowych wzajemnie się nierównoważących.

Przykładami elementów nieliniowych są żarówka, bareter, warystor lub dioda tunelowa.

## 20 20. Pole magnetyczne prądu stałego, prawo Biota-Savarta

**Pole magnetyczne prądu stałego** Źródłem pola magnetycznego są poruszające się ładunki elektryczne. W szczególności stałe uporządkowany ruch ładunków, czyli stały prąd elektryczny jest źródłem stałego pola magnetycznego. Tak jak w elektrostatyce nieruchome ładunki powodują niezmienne w czasie pole elektryczne, tak w magnetostatyce stałe prądy powodują niezmienne w czasie pole magnetyczne.

**Prawo Biota-Savarta** Prawo Biota-Savarta pozwala na obliczenie indukcji magnetycznej  $\vec{B}(P)$  w zadanym punkcie  $P$  pochodzącej od fragmentu przewodnika z prądem.

Jeżeli przez element przewodnika  $d\vec{l}$  (kierunek zgodny z przepływem prądu) płynie prąd o natężeniu  $I$ , to wkład do pola magnetycznego  $\vec{B}$  od elementu  $d\vec{l}$  jest zadany wzorem:

$$d\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

gdzie  $\vec{r}$  oznacza wektor łączący element przewodnika  $d\vec{l}$  z punktem  $P$ .

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{T \cdot m}{A} - \text{przenikalność magnetyczna próżni.}$$

Kierunek  $\vec{B}$  określa reguła prawej dłoni. W szczególności pole magnetyczne od nieskończonego prostoliniowego przewodnika (lub pomijając efekty brzegowe od długiego) będzie miało charakter okręgów otaczających przewód.

Wypadkowe pole magnetyczne w punkcie wymaga wy całkowania  $d\vec{B}$  po całym fragmencie przewodnika:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_M^N \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

gdzie  $N$  i  $M$  to punkty początku i końca fragmentu.

Wygodne bywa zapisanie tego prawa w postaci (rozpisanie iloczynu wektorowego):

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_M^N \frac{dl \sin \theta}{r^2},$$

gdzie  $\theta$  jest kątem pomiędzy zwrotem  $d\vec{l}$  a  $\vec{r}$ .

Dzięki temu otrzymujemy wzór na wartość  $B$  w odległości  $d$  od nieskończonego kabla:

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi d},$$

całkując po kącie od 0 do  $\pi$ . Analogicznie można otrzymać wzór dla półnieskończonego, całkując od  $\pi/2$  do  $\pi$ .

Obliczając  $\vec{B}$  od krzywoliniowych przewodów (np. okręgu albo jego połowy) warto przejść na współrzędne biegunowe. Należy jednak pamiętać, że wersory biegunowe ( $\hat{\rho}, \hat{\phi}$ ) zmieniają się wraz z przesuwaniem, więc po obliczeniu  $d\vec{l} \times \vec{r}$  we współrzędnych biegunowych należy pod całką zamienić  $\hat{\rho}$  i  $\hat{\phi}$  na kombinacje wersorów kartezjańskich  $\hat{x}$  i  $\hat{y}$ .

## 21 21. Siła Lorentza i ruch częstek naładowanych w polach elektrycznych i magnetycznych.

### 1. Siła Lorentza

Na cząstę o ładunku  $q$  znajdującą się w polu elektrycznym  $\vec{E}$  będzie działać siła elektryczna:

$$\vec{F}_E = q\vec{E}.$$

Jeżeli cząstka będzie się poruszać z prędkością  $\vec{v}$ , a oprócz pola elektrycznego będzie się znajdować w polu magnetycznym  $\vec{B}$ , to będzie na nią dodatkowo działać siła magnetyczna:

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Siła Lorentza jest wypadkową obu wyżej wymienionych wielkości:

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

2. Ruch cząstek naładowanych w polach elektrycznych i magnetycznych

Część elektryczna siły Lorentza wykonuje pracę przyspieszając cząstkę.

Część magnetyczna siły Lorentza nie wykonuje pracy, ponieważ jest ona prostopadła do prędkości cząstki:

$$dW_M = q(\vec{v} \times \vec{B})d\vec{l} = q(\vec{v} \times \vec{B})\vec{v}dt = 0.$$

Część magnetyczna jest odpowiedzialna za zakrzywianie toru cząstki.

Ruch w jednorodnym polu magnetycznym:

Jeżeli cząstka porusza się w płaszczyźnie XY, a pole magnetyczne ma tylko składową  $B_z = B$  (prostopadłe do prędkości cząstki), to równania ruchu po wykonaniu iloczynu wektorowego  $(\vec{v} \times \vec{B})$  wyglądają następująco:

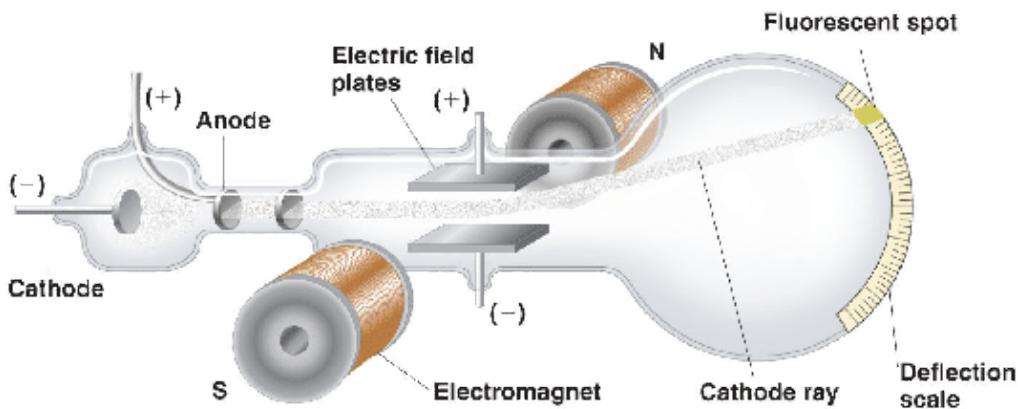
$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= qB \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= -qB \frac{dx}{dt} \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

Widać, że ruch w kierunku osi Z będzie jednostajny. Całkując równania ruchu otrzymujemy ruch cząstki po spirali.

## 22 22: Wyznaczanie stosunku $e/m$ , spektroskop masy i wyznaczanie mas atomów (izotopów).

### Wyznaczanie stosunku $e/m$

J.J. Thomson po raz pierwszy udowodnił, że atomy są zbudowane z naładowanych cząstek. Wyznaczył on stosunek  $e/m$  dla elektronu (wtedy nazywał je cathode rays).



Copyright © 2005 Pearson Education, Inc., Publishing as Pearson Benjamin Cummings

## Przebieg eksperymentu

Elektrony są przyspieszane przez anodę i wlatują między okładki kondensatora z tą samą ale nieznaną prędkością  $\vec{v} = v\hat{e}_x$ . Działa na nie siła elektryczna oraz siła Lorentza (gravitację pomijamy):

$$\begin{aligned}\vec{F}_E &= eE\hat{e}_y \\ \vec{F}_B &= -evB\hat{e}_y\end{aligned}$$

Wartości  $E$  i  $B$  dobierane są tak aby elektrony nie ulegały odchyleniu, wtedy:

$$\begin{aligned}\vec{F}_E + \vec{F}_B &= 0 \\ eE &= evB \\ v &= \frac{E}{B}.\end{aligned}$$

Następnie wyłączane jest pole magnetyczne. W czasie  $t$  elektron przebędzie

$$x(t) = vt = \frac{E}{B}t$$

oraz ulegnie odchyleniu w pionie o

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)t^2.$$

Po przebyciu całej długości komory  $l$  elektron odchyli się o

$$t = \frac{l}{v} = \frac{lB}{E} \quad (70)$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{lB}{E}\right)^2. \quad (71)$$

Stąd stosunek ładunku do masy elektronu wynosi

$$\frac{e}{m} = \frac{2yE}{l^2B^2},$$

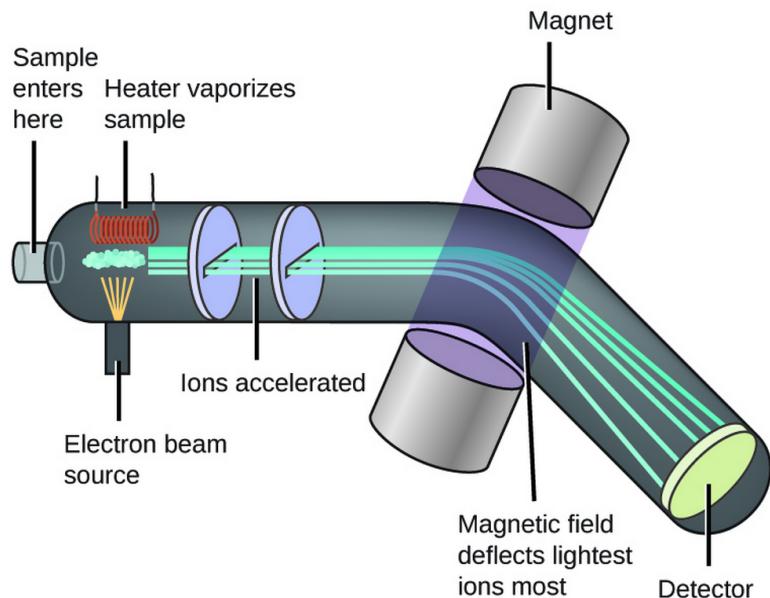
gdzie  $y$  to odchylenie trajektorii elektronu w pionie, które jest mierzone w eksperymencie.

**Spektroskopia mas** - technika analityczna, której podstawą jest pomiar stosunku masy do ładunku elektrycznego ( $m/q$ ) jonów w fazie gazowej. Służy do identyfikacji związków chemicznych i ich mieszanin.

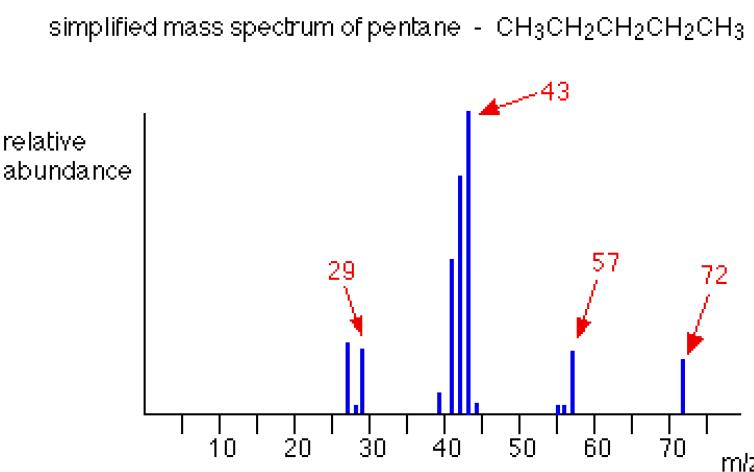
Typowy spektroskop masowy składa się z:

- źródła jonów, gdzie zachodzi jonizacja cząsteczek,
- analizatora, w którym wcześniej powstałe jony ulegają rozdziałowi na podstawie stosunku ich masy do ładunku ( $m/q$ ),
- detektora, gdzie zliczane są jony napływające z analizatora.

W spektrometrach masowych wykorzystuje się zależność trajektorii jonów od wartości natężenia stałych pól elektrycznych bądź magnetycznych. Zgodnie ze wzorem 71 lżejsze i bardziej naładowane jony w stałym polu magnetycznym odchylają się bardziej.



Wyniki działania spektrometru mas są przedstawiane w postaci widma masowego. Przykładowe widmo:



Ze stosunku masy do ładunku jonu można zwykle wywnioskować, jaka była masa cząsteczkowa analizowanego związku chemicznego lub jego fragmentu. Metody jonizacji w niektórych spektrometrach mas są tak dobrane, aby ładunek był dla większości jonów równy 1, a zatem przy interpretacji widma można przyjąć, że  $m/q$  odpowiada po prostu masie cząsteczkowej jonu. Masa cząsteczkowa jednokrotnie zjonizowanego jonu jest w przybliżeniu równa masie cząsteczkowej niezjonizowanej cząsteczki tylko wtedy, gdy jonizacja jest dokonywana przez dołączenie elektronu (ze względu na bardzo małą masę elektronu). Jeśli do cząsteczki dołączany jest proton, to masa jonu jest większa od masy substancji niezjonizowanej o masę protonu.

Różnice w masie cząsteczek powodowane przez występowanie izotopów są widoczne na widmach masowych, co oznacza, że jeden związek chemiczny lub jego fragment tworzy na widmie kilka pików.

## 23 23. Prawo indukcji Faradaya

### Teoria

Prawo indukcji Faradaya mówi po prostu, że zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne [?]. Zjawisko to zachodzi też w drugą stronę. Na elektrodynamice poznaliśmy na przykład prawo Ampere'a i prawo Biote'a-Savarta z których wynika, że zmiany prądu lub pola elektrycznego indukują pole magnetyczne.

Wobec tego zmiana  $\mathbf{B}$  wyindukuje zmianę  $\mathbf{E}$ , a zmieniające się  $\mathbf{E}$  wyindukuje znowu zmianę  $\mathbf{B}$ . Reguła Lenza stanowi informację o tym jaką jest relacja pomiędzy wzajemnymi zmianami pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ .

Kiedy zmienia się  $\mathbf{B}$ , zmienia się strumień  $\Phi$  tego pola przez pewną powierzchnię  $\mathbf{S}$ . Reguła Lenza mówi, że prawo indukcji Faradaya to taka zasada zachowania strumienia  $\Phi$ : wyindukowane pole  $\mathbf{E}$  będzie miało taki kierunek, żeby przeciwdziałać zmianom  $\Phi$ .

Po prostu zmiany  $\mathbf{E}$  mogą wytwarzać dodatkowy strumień pola magnetycznego  $\Phi_2$  w taki sposób, żeby  $\Phi(t) + \Phi_2(t) = \text{const}$ . Oczywiście ze względu na straty energii ta suma nie będzie stała przez cały czas.

### Doświadczenie

Prawo indukcji Faradaya można zilustrować na ramkach z przewodnika umieszczonych w pobliżu magnesu:

- jeśli magnes się nie rusza, a ramka się zbliża/oddala od magnesu, to w ramce indukuje się prąd.
- jeśli ramka się nie rusza, a magnes zbliża się/oddala od ramki, to w ramce indukuje się prąd.
- jeśli ani ramka, ani magnes się nie poruszają, ale magnes ma zmienną indukcję pola magnetycznego (np. jest to elektromagnes w którym zmniejszamy prąd), to w ramce indukuje się prąd.

W każdym z tych przypadków zmienialiśmy strumień  $\Phi$  pola magnetycznego przechodzącego przez ramkę - albo poprzez względne oddalanie się stałego magnesu i ramki, albo poprzez zmianę indukcji pola magnetycznego w magnesie - i w ramce indukowało się pole elektryczne, które wytwarzająło w niej prąd. Przykład takiej sytuacji przedstawiono na Rysunku 10.

Kierunek indukowanego pola elektrycznego (a przy tym napięcia powstającego w ramce) odgadujemy poprzez inżynierię wsteczną. Pytamy się, jakie ma być wytworzone pole  $\mathbf{B}_2$ , żeby strumień  $\Phi_2$  niwelował zmiany pierwotnego strumienia  $\Phi$  przechodzącego przez ramkę. Następnie odgadujemy kierunek wyindukowanego prądu  $I_2$ , który w wyniku np. prawa Biote'a-Savarta wyindukował pole  $\mathbf{B}_2$ . Na podstawie kierunku prądu  $I_2$  odgadujemy jak skierowane było pole elektryczne i jaki był kierunek spadku napięcia, które go wytworzyło. To napięcie, które wytworzyło  $I_2$  nazywamy siłą elektromotoryczną indukcji  $\mathcal{E}_{SEM}$ .

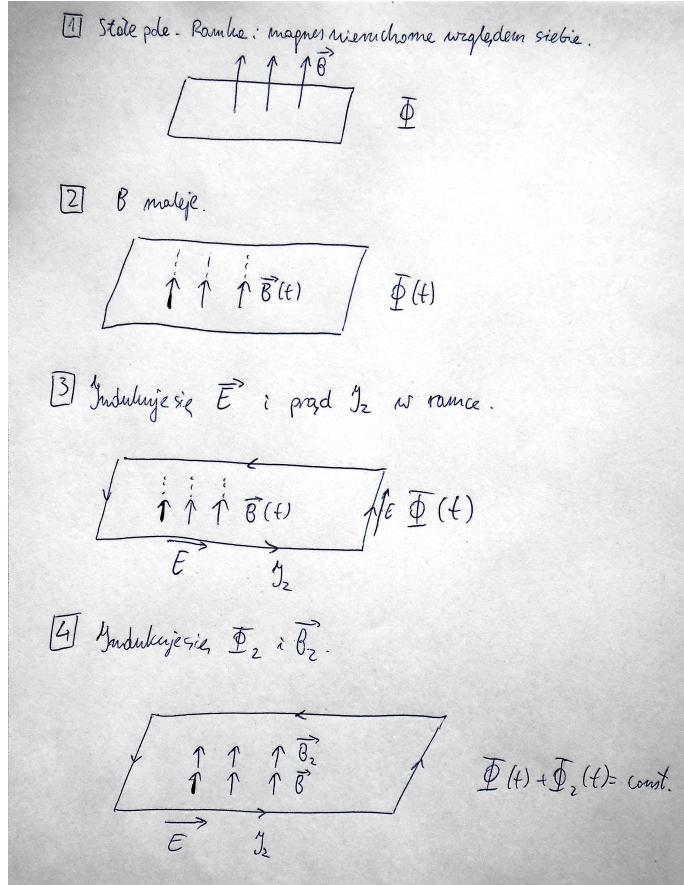


Figure 10: Schemat zjawiska indukcji Faradaya

## Matematyka

Prawo indukcji Faradaya opisuje jedno z równań Maxwell'a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (72)$$

Żeby dojść do szkolnej postaci prawa indukcji Faradaya całkujemy obie strony po elementach zorientowanej powierzchni  $\mathbf{S}$ :

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}. \quad (73)$$

Przekształcamy lewą stronę. Z prawa Stokesa całka z rotacji  $\mathbf{E}$  na elementach powierzchni jest równa całce krzywoliniowej z rzutu  $\mathbf{E}$  na elementy brzegu powierzchni. Te rzuty, czyli  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , opisują różnicę potencjałów między dwoma punktami brzegu oddalonymi o  $d\mathbf{l}$ . Całkując wszystkie różnice potencjałów na brzegu otrzymujemy napięcie  $\mathcal{E}_{SEM}$  w pętli będącej brzegiem powierzchni  $\mathbf{S}$ . Napięcie  $\mathcal{E}_{SEM}$  nazywamy siłą elektromotoryczną indukcji.

$$LHS = \int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E}_{SEM}. \quad (74)$$

Przekształcamy prawą stronę. Operator różniczkowania cząstkowego po czasie komutuje z całkowaniem po elementach powierzchni. Element zorientowanej powierzchni można zapisać

jako  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$  gdzie  $\mathbf{n}$  jest wektorem normalnym powierzchni i  $dS$  jest skalarem-rozmiarem naszego kawałka  $d\mathbf{S}$ . Zwrot  $\mathbf{n}$  określa orientację  $\mathbf{S}$ .

Pole magnetyczne  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp + \mathbf{B}_\parallel$  rozkładamy na składową równoległą  $\mathbf{B}_\parallel$  i prostopadłą  $\mathbf{B}_\perp = B_\perp \mathbf{n}$  do elementu powierzchni  $\mathbf{S}$ . Ponieważ  $\mathbf{B}_\parallel \cdot \mathbf{n} = 0$  (są do siebie prostopadłe) do policzenia zostaje tylko całka z  $\int B_\perp dS$  dająca całkowity strumień  $\Phi$  pola  $\mathbf{B}$  przez powierzchnię  $\mathbf{S}$ :

$$RHS = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int B_\perp dS = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (75)$$

przy czym  $B_\perp$  ma znak zależący od tego, czy zwrot pola  $\mathbf{B}_\perp$  jest zgodny, czy przeciwny ze zwrotem wektora normalnego  $\mathbf{n}$ . Ostatecznie prawo indukcji Faradaya przybiera postać

$$\mathcal{E}_{SEM} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (76)$$

przy czym znak minus wyraża matematycznie regułę Lenza.

## 24 24. Obwody LC i RLC: drgania, drgania tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.

### Oscylator harmoniczny

Przypominamy sobie ogólne równanie oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t). \quad (77)$$

Siłę wymuszającą  $F(t)$  można rozłożyć w szereg Fouriera i dla każdego wyrazu szeregu rozwiązać oddziennie równanie

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a \sin(\omega t) \quad (78)$$

albo

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = b \cos(\omega t). \quad (79)$$

Rozwiązanie ogólne (77) będzie sumą wszystkich rozwiązań równań postaci (??) i (??). Dla uproszczenia rozważajmy tylko równania postaci (??):

- współczynnik  $\beta$  odpowiada za tłumienie,
- $\omega_0$  to częstotliwość drgań własnych (czyli takich, które są rozwiązaniami bez tłumienia i wymuszania),
- człon  $a \sin(\omega t)$  to harmoniczna siła wymuszająca.

Ogólne rozwiązanie (??) jest postaci:

$$x(t) = \begin{cases} e^{-\beta t} \left( A e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + B e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right), & \beta^2 > \omega_0^2, \\ e^{-\beta t} (A + Bt), & \beta^2 = \omega_0^2, \\ e^{-\beta t} \left( A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} t} \right), & \beta^2 < \omega_0^2, \\ + h \sin(\omega t + \varphi), \end{cases} \quad (80)$$

gdzie  $A, B, h, \varphi$  to stałe rzeczywiste. Widać, że przy  $t \rightarrow \infty$  zostaje tylko człon odpowiadający drganiom wymuszonym  $h \sin(\omega t + \varphi)$  i ewentualnie drgania własne, jeśli  $\beta = 0$ .

## Elementy obwodów RLC

W obwodzie RLC równanie różniczkowe opisujące zależność zgromadzonego ładunku od czasu ma postać (jest to równanie oscylatora harmonicznego):

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E} \sin(\omega t). \quad (81)$$

W obwodach  $RLC$  pojawiają się:

- opory  $R$ , na których spadek napięcia wynosi  $R\dot{Q}$  (odpowiadają za tłumienie w obwodzie),
- indukcyjności  $L$  (np. cewki), na których spadek napięcia wynosi  $L\ddot{Q}$ ,
- pojemności  $C$  (np. kondensatory), na których spadek napięcia wynosi  $\frac{1}{C}Q$ ,
- źródła napięcia  $\mathcal{E} \sin(\omega t)$ .

W równaniu (81) przyjęliśmy, że źródło napięcia jest harmoniczne i ma częstotliwość  $\omega$ . W innym przypadku możemy rozwinać napięcie w szereg Fouriera i postąpić tak jak w przypadku ogólnym w podrozdziale 1 o oscylatorze harmonicznym.

## Obwód LC - drgania

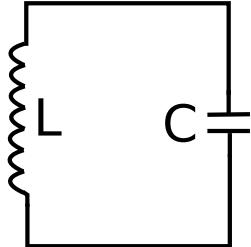


Figure 11: Schemat obwodu LC

W tym przypadku równanie (81) upraszcza się do

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (82)$$

Postulując rozwiązanie w postaci  $e^{i\lambda t}$  otrzymujemy  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Rozwiązania w postaci ogólnej są drganiami własnymi opisanymi równaniem

$$Q(t) = A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \quad (83)$$

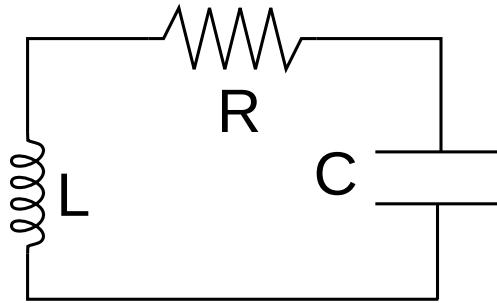


Figure 12: Schemat obwodu RLC

### Obwód RLC - drgania tłumione

W tym przypadku równanie (81) upraszcza się do

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (84)$$

Postulując rozwiązanie w postaci  $e^{\alpha t}$  otrzymujemy równanie kwadratowe  $\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0$ . Wobec tego  $\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$  i rozwiązanie w postaci ogólnej są opisane wzorem

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \left( A e^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} + B e^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} \right), \quad (85)$$

gdzie człon  $e^{-\frac{R}{2L}t}$  odpowiada za eksponencjalny zanik amplitudy ładunku oraz w zależności od znaku wyrażenia pierwiastkowego otrzymamy warunki takie jak w (80).

### Obwód RLC - drgania wymuszone

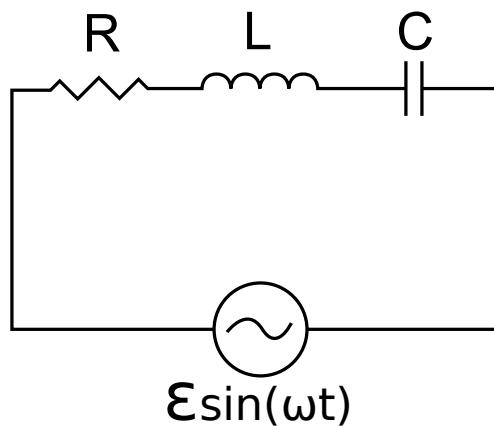


Figure 13: Schemat obwodu RLC z zasilaniem

W tym przypadku mamy do rozwiązania pełne równanie oscylatora harmonicznego:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E} \sin(\omega t). \quad (86)$$

Rozwiązań ogólnego jest sumą Rozwiązań Ogólnego Równania Jednorodnego (RORJ) oraz Rozwiązań Szczególnego Równania Niejednorodnego (RSRN). Równanie jednorodne ma postać:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (87)$$

i jego rozwiązanie jest opisane w podrozdziale 4 o drganiach tłumionych. RSRN jest drganiem wymuszonym, szczególnym rozwiązaniem równania (13), które znajdujemy postulując  $Q = h \sin(\omega t + \varphi)$  i wyliczając rzeczywiste stałe  $h, \varphi$  (stałą  $h$  wyliczymy w podrozdziale 6 o rezonansie).

Rozwiązań ogólnego jest postaci (80), ale ma inne symbole współczynników równania (np.  $R$  zamiast  $2\beta$ ).

## Obwód RLC - rezonans

Rezonans w obwodzie  $RLC$  to zjawisko powstawania drgań ładunku o dowolnie dużej amplitudzie. Rezonans zachodzi w ścisłe określonych częstotliwościach. Dla tych częstotliwości amplituda drgań wymuszonych  $h \rightarrow \infty$ .

Jeśli dla

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{E} \sin(\omega t), \quad (88)$$

podstawimy  $Q = h \sin(\omega t + \varphi)$  to korzystając z zależności

$$\begin{cases} \sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t) \cos \varphi + \sin \varphi \cos(\omega t), \\ \cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi. \end{cases} \quad (89)$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} & h \left( -L\omega^2 \sin(\omega t) \cos \varphi - L\omega^2 \cos(\omega t) \sin \varphi + R\omega \cos(\omega t) \cos \varphi \right. \\ & \left. - R\omega \sin(\omega t) \sin \varphi + \frac{1}{C} \sin(\omega t) \cos \varphi + \frac{1}{C} \cos(\omega t) \sin \varphi \right) = \mathcal{E} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (90)$$

Ponieważ powyższa równość jest spełniona dla wszystkich  $t$ , wyrazy przy  $\sin(\omega t)$  i  $\cos(\omega t)$  po obu stronach równania muszą być sobie równe. Stąd

$$\begin{cases} \mathcal{E} = -hL\omega^2 \cos \varphi - hR\omega \sin \varphi + \frac{h}{C} \cos \varphi, \\ 0 = -hL\omega^2 \sin \varphi + hR\omega \cos \varphi + \frac{h}{C} \sin \varphi. \end{cases} \quad (91)$$

Odpowiednio mnożąc te równania przez  $\sin \varphi$  i  $\cos \varphi$  oraz dodając albo odejmując stronami, otrzymamy równania

$$\begin{cases} \mathcal{E} \sin \varphi = -hR\omega, \\ \mathcal{E} \cos \varphi = -hL\omega^2 + \frac{h}{C}. \end{cases} \quad (92)$$

Podnosząc równania do kwadratu i dodając stronami znajdujemy

$$\mathcal{E}^2 = h^2 \left( R^2 \omega^2 + \left( \frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 \right). \quad (93)$$

a stąd

$$h = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{L^2 \left( \frac{1}{C} - \omega^2 \right)^2 + R^2 \omega^2}}. \quad (94)$$

Częstotliwość rezonansowa to miejsce zerowe mianownika. Na przykład dla  $R = 0$  otrzymujemy dobrze znana częstotliwość rezonansową obwodu  $LC$  wynoszącą  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

## 25 25. Pełny układ równań Maxwella z warunkami brzegowymi na granicy ośrodków. Równania Maxwella w ośrodkach materialnych – przykłady równań materiałowych.

### Równania Maxwella - ogólne i w substancji

Ogólne równania Maxwella mają postać

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (95)$$

Są one prawdziwe we wszystkich ośrodkach, ale w ośrodku materialnym dużo wygodniej je zapisać w inny sposób. W ośrodku materialnym pojawiają się prądy i ładunki związane, nad którymi nie ma kontroli:

- w substancji o polaryzacji  $\mathbf{P}$  pojawia się ładunek związany objętościowy o gęstości  $\rho_{zw} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  oraz powierzchniowy o gęstości  $\sigma_{zw} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ ,
- w substancji o magnetyzacji  $\mathbf{M}$  pojawiają się prądy związane o gęstości  $\mathbf{J}_{zw} = \nabla \times \mathbf{M}$ ,
- zmiany polaryzacji  $\mathbf{P}$  w substancji powodują przemieszczanie się ładunków związanych (Rysunek 14), co w efekcie daje prąd przesunięcia polaryzacji o gęstości  $J_{pp} = \frac{dI}{da_{\perp}} = \frac{\partial \sigma_{zw}}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}$ , czyli wektorowo  $\mathbf{J}_{pp} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ .

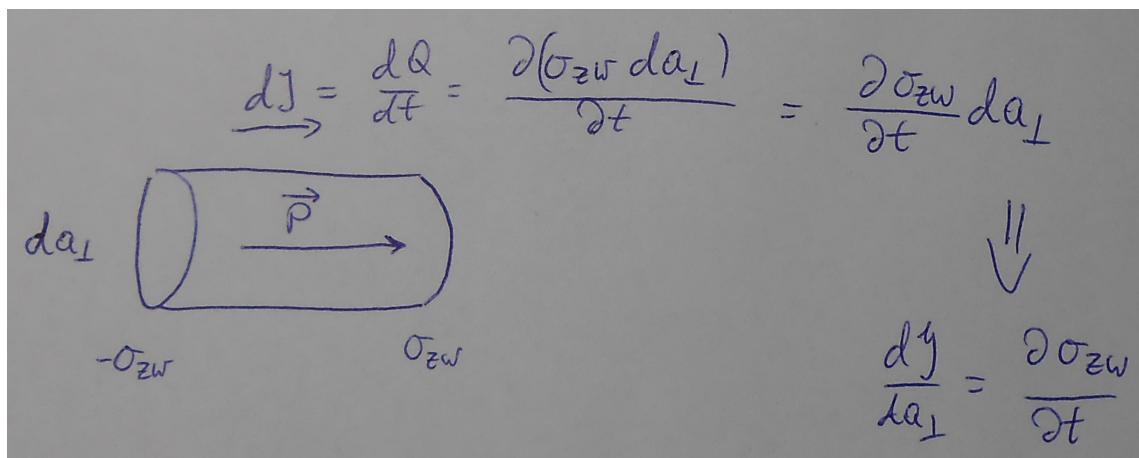


Figure 14: Prąd przesunięcia polaryzacji

Rozpisując gęstość ładunku otrzymamy

$$\rho = \rho_{sw} + \rho_{zw} = \rho_{sw} - \nabla \cdot \mathbf{P}, \quad (96)$$

a rozpisując gęstość prądu otrzymamy

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{sw} + \mathbf{J}_{zw} + \mathbf{J}_{pp} = \mathbf{J}_{sw} + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (97)$$

Wstawiając (96) oraz (97) do ogólnych równań Maxwell'a i definiując wektor indukcji elektrycznej  $\mathbf{D}$  oraz natężenie pola magnetycznego  $\mathbf{H}$  poprzez

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \end{cases} \quad (98)$$

otrzymamy równania Maxwell'a w języku prądów i ładunków swobodnych:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{sw}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{sw} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{cases} \quad (99)$$

## Przykłady równań materiałowych

W układzie równań Maxwell'a (99) pojawiają się dwie pary pól  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{D}$ , oraz  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{H}$ . Do rozwiązania (99) potrzeba tzw. równań materiałowych, czyli równań pozwalających obliczyć  $\mathbf{D}$  i  $\mathbf{H}$  w zależności od  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$ . Przykład równań materiałowych znajdziemy w tzw. ośrodkach liniowych, w których

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \end{cases} \quad (100)$$

Równania materiałowe są tam postaci

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}, \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 (1 + \chi_m)} \mathbf{B}. \end{cases} \quad (101)$$

## Warunki brzegowe na granicy ośrodków

Aby otrzymać warunki brzegowe na granicy ośrodków całkujemy równania Maxwell'a w substancji (równania z dywergencją całkujemy po objętości  $V$  a równania z rotacją po powierzchni  $S$  pewnego obszaru) i wykorzystujemy twierdzenie Stokesa

$$\begin{cases} \oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = Q_{sw}, \\ \oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) dV = 0, \\ \oint_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}, \\ \oint_{\partial S} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a} = I_{sw} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a}. \end{cases} \quad (102)$$

Stosując pierwsze równanie z (102) do powierzchni infinitezymalnego prostopadłościanu o podstawach  $a$  po obu stronach granicy ośrodków (Rysunek 15) i wysokości  $h$  dążącej do zera otrzymujemy

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{a} - \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{a} = \sigma_{sw} \cdot a \quad (103)$$

z czego wynika, że

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{sw}, \quad (104)$$

gdzie  $D_1^\perp, D_2^\perp$  są składowymi  $\mathbf{D}$  prostopadłymi do granicy ośrodków. W podobny sposób można pokazać, że

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0. \quad (105)$$

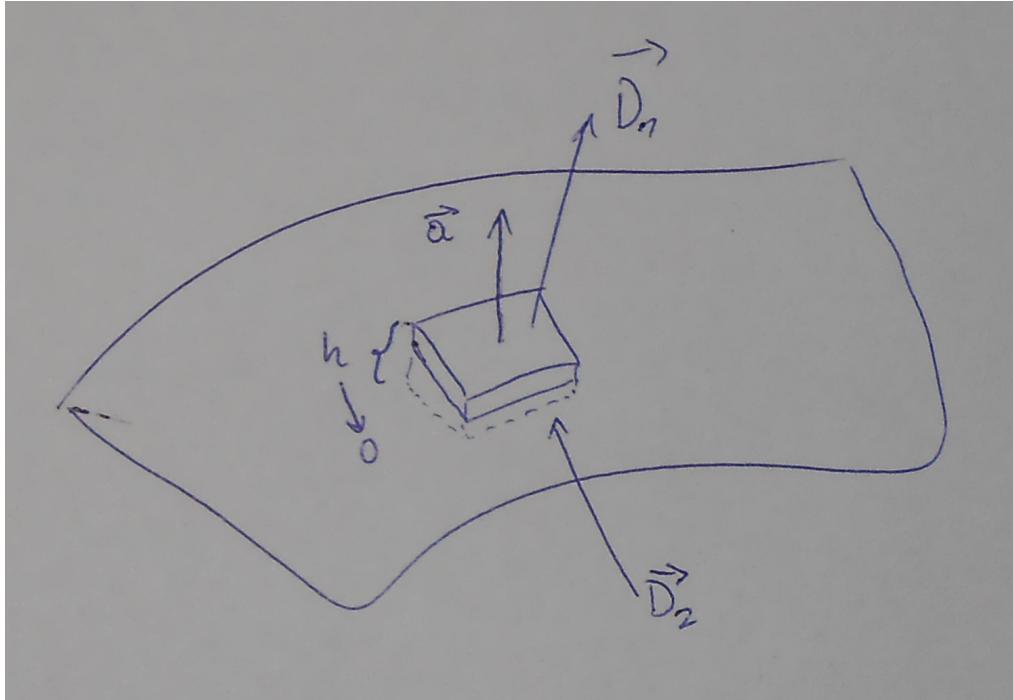


Figure 15: Infinitezymalna powierzchnia Gaussa

Stosując trzecie równanie z (102) do prostokątnego konturu Ampere'a o podstawach długości  $l$  po obu stronach granicy ośrodków i wysokości  $h$  dążącej do zera (Rysunek 16) otrzymujemy

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0, \quad (106)$$

przy czym ostatnia równość wynika z tego, że jeśli wysokość  $h \rightarrow 0$ , to powierzchnia  $S \rightarrow 0$ . Wynika z tego, że

$$E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0, \quad (107)$$

gdzie  $E_1, E_2$  oznaczają składowe  $\mathbf{E}$  styczne do granicy ośrodków. Podobnie wykazujemy, że

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{l} = I_{sw}, \quad (108)$$

przy czym  $I_{sw}$  jest prądem swobodnym płynącym wzdłuż granicy ośrodków. Można jednak zapisać  $I_{sw}$  w postaci  $I_{sw} = (\mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{l}$  dla  $\mathbf{K}_{sw}$  będącego gęstością liniową prądów powierzchniowych na granicy ośrodków. Stąd mamy

$$\mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n}. \quad (109)$$

Podsumowując, wszystkie cztery warunki brzegowe to

$$\begin{cases} D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_{sw}, \\ B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0, \\ E_1^{\parallel} - E_2^{\parallel} = 0, \\ \mathbf{H}_1^{\parallel} - \mathbf{H}_2^{\parallel} = \mathbf{K}_{sw} \times \mathbf{n}. \end{cases} \quad (110)$$

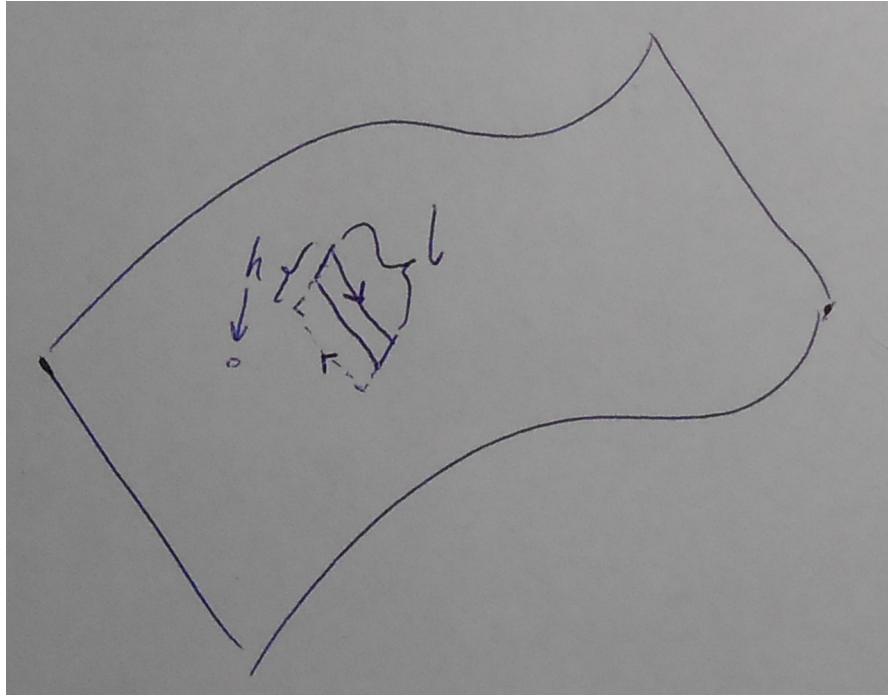


Figure 16: Infinitezymalny kontur Ampere'a

## 26 26. Fale elektromagnetyczne jako rozwiązanie równania Maxwella.

### Ogólne równanie falowe

Ogólne równanie falowe jest postaci

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, y, z, t) = 0, \quad (111)$$

gdzie  $v$  jest prędkością rozchodzenia się fali opisanej funkcją  $f$ . Powyższe równanie można zapisać w skróconej formie jako

$$\left( \Delta - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, y, z, t) = 0, \quad (112)$$

gdzie laplasjan  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Można też jeszcze krócej, z użyciem d'Alembertjanu  $\square$ :

$$\square f = 0. \quad (113)$$

### Równanie falowe z równań Maxwella

Przypomnijmy sobie ogólne równania Maxwella:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (114)$$

Znajdziemy falę elektromagnetyczną, która będzie rozwiązaniem tego układu równań w próżni, to znaczy wtedy, gdy  $\rho = 0$  oraz  $\mathbf{J} = 0$ . Równania przybierają następującą postać:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (115)$$

Do otrzymania równań falowych dla  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  wystarczy zadziałać rotacją na równanie trzecie i czwarte. Zadziałajmy  $\nabla \times (\cdot)$  na równanie trzecie:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right). \quad (116)$$

Przekształćmy lewą stronę równania (116) wykorzystując tożsamość związaną z iloczynem wektorowym  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ . Otrzymujemy

$$LHS = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}. \quad (117)$$

W (117) po drugiej równości mamy gradient dywergencji z  $\mathbf{E}$  odjąć wektorowy laplasjan z  $\mathbf{E}$ . Wektorowy laplasjan w trzech wymiarach to po prostu działanie operatorem  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  na każdą składową wektora. W ostatniej równości wykorzystaliśmy to, że  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

Przekształcamy prawą stronę równania (116) wykorzystując to, że pochodne cząstkowe komutują, czyli rotacja komutuje z operatorem różniczkowania po czasie.

$$RHS = -\nabla \times \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (118)$$

Porównując przekształcone obie strony równania (116) otrzymujemy równanie falowe na  $\mathbf{E}$  w trzech wymiarach przestrzennych postaci

$$\left( \Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0. \quad (119)$$

Analogicznie znajdujemy równanie na  $\mathbf{B}$  postaci

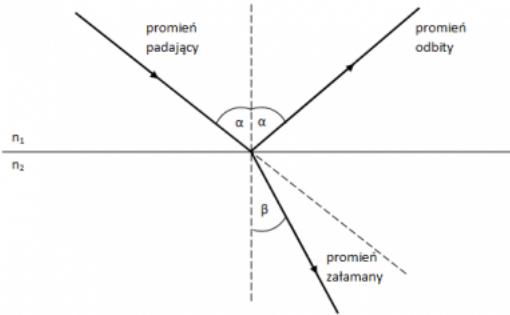
$$\left( \Delta - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (120)$$

Z powyższych równań wynika, że prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej w próżni wynosi  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . Na koniec warto zauważyć, że z powodu równania  $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  pola  $\mathbf{E}$  i  $\mathbf{B}$  fali elektromagnetycznej w próżni będą do siebie prostopadłe.

## 27 27. Prawa odbicia i załamania fal elektromagnetycznych; współczynnik odbicia, polaryzacja fali odbitej i załamanej (kąt Brewstera).

Kąt odbicia równy jest kątowi padania. Kąty - padania i odbicia leżą w jednej płaszczyźnie. Stosunek sinusa kąta padania, do sinusa kąta załamania jest dla danych ośrodków stały i

Figure 17: Prawo odbicia i załamania



równy stosunkowi prędkości fali w ośrodku pierwszym, do prędkości fali w ośrodku drugim. Kąty padania i załamania leżą w tej samej płaszczyźnie.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad (121)$$

Współczynnik załamania ośrodka:

$$n = \frac{v_1}{v_2} \quad (122)$$

Współczynnik odbicia fali:

$$R = \frac{I_{odbite}}{I_{padające}} \quad R = \left( \frac{n \cos\beta - \cos\alpha}{n \cos\beta + \cos\alpha} \right)^2 \quad (123)$$

Kąt Brewstera – kąt padania światła na powierzchnię dielektryka, przy którym promień odbity jest całkowicie spolaryzowany liniowo. Kąt Brewstera  $\alpha_B$ :

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \alpha = \alpha_B \quad (124)$$

## 27.1 Prawa odbicia i załamania fal elektromagnetycznych

Charakter zjawiska odbicia/załamania fali na granicy ośrodków zależy od polaryzacji fali. Kluczowe znaczenie ma w tym kontekście stwierdzenie, że jednorodną falę płaską spolaryzowaną w dowolnym kierunku zawsze można rozłożyć na dwie składowe – jedną spolaryzowaną prostopadle i drugą spolaryzowaną równolegle do płaszczyzny padania. Wynika stąd, że przypadki polaryzacji prostopadłej i równoległej (albo poziomej i pionowej) mogą być analizowane oddzielnie, a rozwiązanie ogólne można złożyć z otrzymanych w ten sposób rozwiązań cząstkowych.

Prawo odbicia i załamania fal elektromagnetycznych na granicy dwóch ośrodków dielektrycznych można otrzymać na podstawie warunków granicznych pola elektromagnetycznego. Wynikiem są współczynniki Fresnela. Jeśli fala elektromagnetyczna pada na granicę ośrodków pod dowolnym kątem to warunki odbicia i załamania zależą od polaryzacji fali. Dowolna fala możemy rozłożyć na: 1. Falę TM — pole magnetyczne jest prostopadłe do płaszczyzny padania. 2. Falę TE — pole elektryczne jest prostopadłe do płaszczyzny padania. Amplitudowy współczynnik odbicia  $r_{TM}$  i transmisji  $t_{TM}$  TM:

$$r_{TM} = \frac{E_{odbite,||}}{E_{padajace,||}} = \frac{n_1 \cos(\beta) - n_2 \cos(\alpha)}{n_2 \cos(\alpha) + n_1 \cos(\beta)} \quad (125)$$

$$t_{TM} = 1 - r_{TM} \quad (126)$$

Amplitudowy współczynnik odbicia  $r_{TE}$  i transmisji  $t_{TE}$  TE:

$$r_{TE} = \frac{E_{odbite,\perp}}{E_{padajace,\perp}} = \frac{n_1 \cos(\alpha) - n_2 \cos(\beta)}{n_1 \cos(\alpha) + n_2 \cos(\beta)} \quad (127)$$

$$t_{TE} = 1 - r_{TE} \quad (128)$$

Wyprowadzenie

## 27.2 Polaryzacja fali odbitej, kąt Brewstera

Gdy na granicę ośrodków przezroczystych pada światło niespolaryzowane pod takim kątem, że promień odbity i załamany tworzą kąt prosty, to światło odbite jest całkowicie spolaryzowane. Kierunek pola elektrycznego światła odbitego jest prostopadły do płaszczyzny padania (tutaj płaszczyzny rysunku). Polaryzacja ta w optyce zwana jest prostopadłą i oznaczana S (lub inaczej TE – transverse electric). Promień załamany jest natomiast spolaryzowany częściowo. Warunek Brewstera na kąt  $\alpha_B$  można zapisać:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \alpha = \alpha_B \quad (129)$$

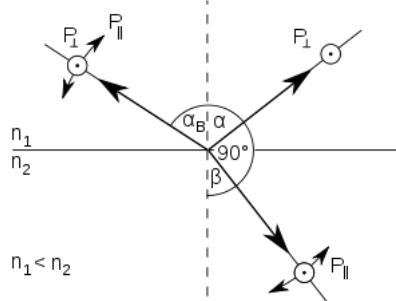


Figure 18: Promień odbijający się pod kątem Brewstera. Symbole oznaczają kierunek drgań pola elektrycznego  $P_\perp$  – prostopadłe,  $P_\parallel$  – równoległe)

W myśl fizyki klasycznej, światło jest falą elektromagnetyczną. Fala ta padając na ośrodek pobudza w nim elektrony do drgań. W przypadku ośrodków nieaktywnych optycznie, drganie elektronów odbywa się w kierunku drgań wektora elektrycznego fali elektromagnetycznej. Kierunek ten jest prostopadły do kierunku ruchu fali. Pobudzony elektron wypromieniuje energię, ale nie może jej wypromieniować w kierunku równoległym do drgań. Dlatego, gdy promień odbity ma kierunek prostopadły do promienia załamanego, to w świetle odbitym nie może być światła, które ma kierunek drgań pola elektrycznego równoległy do kierunku promieniowania załamanego. Oznacza to, że światło odbite pod kątem Brewstera nie może zawierać światła, którego pole elektryczne drga w płaszczyźnie odbicia.

## 28 28. Ruch okresowy: parametry, rozkład na drgania proste: analiza Fouriera.

### 28.1 Ruch okresowy

Ruch okresowy jest ruchem wywołanym siłą liniowo zależną od położenia:  $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ ,  $k$  współczynnik sprężystości. Czasem można wyrazić  $k$  przez prawo Hooke'a:  $k = \frac{SE}{l}$ , gdzie  $E$  moduł Younga,  $S$  przekrój poprzeczny materiału,  $l$  jego długość.

Ruch okresowy jest ruchem często występującym w minimach pewnych potencjałów w przypadku małych wychyleń:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \dots \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (130)$$

Wstawiając  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  do prawa Hooke'a:

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{k}{m}\mathbf{x} = -\omega_0^2\mathbf{x} \quad \text{gdzie } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (131)$$

W anizotropowych ciałach  $k$  może być macierzą.  $\omega_0$  - częstotliwość kołowa i okres  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Dla jednej ze współrzędnych rozwiązaniami są oczywiście funkcje postaci:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} = B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (132)$$

$$\text{gdzie } A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \text{ i } \tan(\delta) = \frac{B_2}{B_1}$$

### 28.2 Rozkład na drgania proste

Jeśli dobrze rozumiem ten podpunkt chcemy się zająć rozkładem danego z góry sygnału na fale proste i być może zarysowaniu jak tego użyć do rozwiązywania 131 z dodaną siłą wymuszającą i tłumieniem.

Rozważmy dowolną funkcję okresową. Dla tej klasy funkcji zachodzi tw. Fouriera: *Każda funkcja okresowa  $f$ , o okresie  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , całkowalna<sup>1</sup> po swoim okresie może być przedstawiona w postaci:*

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (133)$$

gdzie współczynniki  $a_i$  i  $b_i$  są wyrażone przez:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (134)$$

---

<sup>1</sup>Oczywiście całkowalna bezwzględnie:  $\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} |f(x)| dx < \infty$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (135)$$

Rozpatrzmy teraz równanie oscylatora harmonicznego wymuszonego:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (136)$$

Pomyślmy co by się stało gdybyśmy umieli rozłożyć funkcję  $f$  na sumę innych funkcji których rozwiązania powyższego równania znamy. Przyjmijmy  $D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta\frac{d}{dt} + \omega_0^2$ , wtedy dla:

$$Dx_1 = f_1(t), \quad Dx_2 = f_2(t), \quad x = x_1 + x_2 \Rightarrow Dx = Dx_1 + Dx_2 = f_1 + f_2 = f \quad (137)$$

Jeśli  $f(t) = \sum_n f_n(t)$  i rozwiązania dla każdej  $f_i$  to  $x_i$  otrzymujemy<sup>2</sup>:

$$x(t) = \sum_n x_n(t) \quad (138)$$

Na przykład dla funkcji parzystej  $f(t) = f(-t)$ :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) \quad (139)$$

wtedy :

$$x_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \delta_n) \quad (140)$$

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\beta^2 n^2 \omega}} \quad (141)$$

$$\delta_n = \arctan\left(\frac{2\beta n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right) \quad (142)$$

Zatem:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \delta_n) \quad (143)$$

Warto zaznaczyć, że  $\omega_0$  jest tu omegą z naszego równania 131 natomiast  $\omega$  jest omegą siły wymuszającej.

## 29 Oscylator harmoniczny: drgania swobodne, tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.

Dla oscylatora harmonicznego wyznaczenie drgań zarówno swobodnych jak i tłumionych czy wymuszonych sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego jednorodnego (oscyulator swobodny) i niejednorodnego (wymuszony i tłumiony). Znalezienie modów normalnych oraz krótkie wyjaśnienie jak stworzyć ostateczne rozwiązanie dla oscylatora swobodnego

---

<sup>2</sup>Trzeba pamiętać, że do powyższego rozwiązania na  $x(t)$  możemy zawsze dodać rozwiązanie ogólnego równania 136 bez siły wymuszającej, otrzymana suma też jest rozwiązaniem. Trzeba uważać żeby ślepo nie stosować tego dla  $f$  stałych, w tym przypadku wystarczy odpowiednio przesunąć o stałą rozwiązanie ogólnego.

zostało przedstawione w pyt. 5. Rozwiązywanie równania niejednorodnego polega na "zagadnięciu" funkcji, która spełnia równanie z siłą tłumiącą lub wymuszającą (równanie takie można rozwiązać także metodą uzmieniania stałej, ale jest to niepotrzebna komplikacja). Po znalezieniu takiej funkcji ostateczne rozwiązywanie równania niejednorodnego konstruujemy poprzez dodanie jej do rozw. r. jednorodnego. Dla siły tłumiącej dostaniemy czynnik eksponentjalny o wykładniku ujemnym mnożący cosinusa, co powoduje stopniowe zmniejszanie się amplitudy drgań. Jeśli tłumienie jest słabe to oscylacje zgasną po więcej niż jednym okresie. Dla tłumienia krytycznego drgania zgasną dokładnie po jednym okresie. Tłumienie silne to zgaśnięcie ruchu w czasie krótszym niż pełny okres. Rozwiązywanie oscylatora z siłą wymuszającą i tłumieniem daje dwa czynniki, jeden z amplitudą malejącą, drugi ze stałą amplitudą o częstotliwości drgań siły wymuszającej. Po dostatecznie długim czasie czynnik z malejącą amplitudą można zaniedbać i pozostać drgania z częstotliwością siły wymuszającej. Amplituda tego członu jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z różnicą kwadratów częstotliwości siły wymuszającej i częstotliwości własnej oscylatora. Zatem jeśli siła wymuszająca będzie wzbudzała oscylator z siłą o częstotliwości zbliżającej się do częstotliwości własnej oscylatora to amplituda będzie rosła do nieskończoności. Takie zjawisko nazywamy **rezonansem**.



### 30 30. Rozkład drgań układów o wielu stopniach swobody (np. układu punktów materialnych połączonych sprężynami) na drgania własne

Rozważmy układ dwóch kulek połączonych sprężynami o współczynniku  $k$  i długości wolnej  $l_0$ , przymocowanych z obu stron do ściany. Znajdźmy częstotliwości i mody własne drgań układu.

Załóżmy  $x_1$  i  $x_2$  za odchylenia od położenia równowagi. Wtedy równania Newtona wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -kx_1 - k(x_2 - x_1), \\ m\ddot{x}_2 &= -kx_2 - k(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Dokonując podstawienia:

$$x_1 = A \cos(\omega t),$$

$$x_2 = B \cos(\omega t),$$

dostajemy po przekształceniach następujący układ równań:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega^2 + 2\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0.$$

Równania muszą być liniowo zależne, czyli wyznacznik macierzy musi się równać zero. Z tego warunku otrzymujemy dwie częstotliwości własne:  $\omega_1^2 = \omega_0^2$ , oraz  $\omega_2^2 = 3\omega_0^2$ . Po wstawieniu  $\omega_1^2$  do macierzy otrzymujemy:

$$A\omega_0^2 - B\omega_0^2 = 0$$

Z czego wynika, że dla  $\omega_1 A = B$ . Powtarzając to dla drugiej częstości własnej dostajemy  $A = -B$ .

Dostajemy następujący układ rozwiązań:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t) + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t).$$

Z powyższych równań wynika, że przy częstości własnej  $\omega_1$  układ drga w fazie – obie kulki w jedną stronę, natomiast dla  $\omega_2$  układ drga w przeciwfazie.

## 31 31. Prawa odbicia i załamania fal na granicy ośrodków.

### 1. Prawo odbicia

Kąt, jaki tworzy promień fali padającej z prostą prostopadłą do płaszczyzny odbijającej (kąt padania), jest równy kątowi jaki z tą prostą tworzy promień odbity (kąt dbicia).

### 2. Prawo załamania

Stosunek sinusa kąta padania do sinusa kąta załamania jest równy stosunkowi prędkości fali w ośrodku pierwszym do prędkości fali w ośrodku drugim.

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

Warto tutaj pamiętać o zasadzie Huygensa, z której można wyprowadzić powyższe stwierdzenia: Każdy punkt ośrodka, do którego dociera fala, staje się źródłem nowej fali kolistej (2D) względnie kulistej (3D).

Rozważmy przykład fali harmonicznej padającej na granicę dwóch ośrodków (punkt  $z_0$ ). W pierwszym z nich prędkość rozchodzenia się fali wynosi  $v_1$ , a w drugim  $v_2$ .

Fał padającą (wzdłuż osi  $z$ ) możemy zatem zapisać w postaci:  $\psi_{pad}(z, t) = A \cos(k_1 z - \omega t)$ . Wiemy, że pewna część fali ulegnie odbiciu  $\psi_{db}(z, t) = B \cos(-k_1 z - \omega t)$ , a część przejdzie do drugiego ośrodka  $\psi_{prz}(z, t) = C \cos(k_2 z - \omega t)$ . Częstość fali pozostaje taka sama, a  $k_i = \frac{\omega}{v_i}$ .

Z warunków ciągłości:

$$\psi_{pad}(z_0, t) + \psi_{odb}(z_0, t) = \psi_{prz}(z_0, t)$$

$$\left( \frac{\partial \psi_{pad}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \left( \frac{\partial \psi_{odb}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0} = \left( \frac{\partial \psi_{prz}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0}$$

$$B_1 \left( \frac{\partial \psi_{pad}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0} + B_1 \left( \frac{\partial \psi_{odb}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0} = B_2 \left( \frac{\partial \psi_{prz}(z_0, t)}{\partial t} \right)_{z=z_0}$$

otrzymujemy  $A + B = C$  oraz  $-AZ_1 + BZ_1 = -CZ_2$ , gdzie  $B_i$  to moduł ściśliwości w  $i$ -tym ośrodku, a  $Z_i$  to opór falowy (impedancja)  $i$ -tego ośrodka.

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\text{amplitudowy współczynnik odbicia: } r_{12} = \frac{B}{A} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$\text{amplitudowy współczynnik transmisji: } t_{12} = \frac{C}{A} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Pozwalają one opisać amplitudę fali odbitej i przechodzącej do fali padającej.

Często używa się również natężeniowych współczynników odbicia  $R$  i transmisji  $T$ , mówiące o tym, jaka część energii niesionej przez falę padającą pozostaje w I ośrodku (razem z falą odbitą), a jaka część przechodzi do ośrodka II:

$$R = \frac{I_{odb}}{I_{pad}} = \frac{\frac{1}{2}Z_1B^2\omega^2}{\frac{1}{2}Z_1A^2\omega^2} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2,$$

$$T = \frac{I_{prz}}{I_{pad}} = \frac{\frac{1}{2}Z_2C^2\omega^2}{\frac{1}{2}Z_1A^2\omega^2} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}.$$

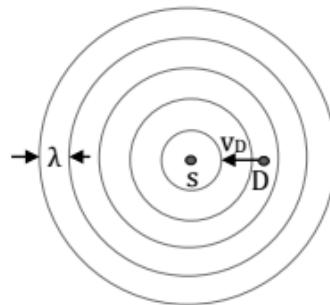
Dodatkowo zachodzi zależność:  $R + T = 1$ .

## 32 32. Zjawisko Dopplera dla różnych rodzajów fal (akustycznych i elektromagnetycznych w próżni).

### 1. Fale akustyczne

W tym wypadku mamy do czynienia z efektem klasycznym związanym z poruszaniem się źródła dźwięku lub obserwatora względem ośrodka sprężystego (fale mechaniczne nie rozchodzą się w próżni!). Rozpatrzmy dwa przypadki:

- źródło dźwięku  $s$  jest nieruchome, obserwator  $D$  porusza się z prędkością  $V_D$



Częstotliwość odbierana przez obserwatora  $f'$  jest taka sama, jak częstotliwość emitowana przez źródło  $f_0$ , tzn.:

$$f' = \frac{(V/t)/\lambda}{t} = f_0,$$

gdzie  $V$  to prędkość fali,  $\lambda$  jej długość, natomiast  $t$  to czas, w którym obserwator liczy liczbę grzbietów fali.

Jeżeli:

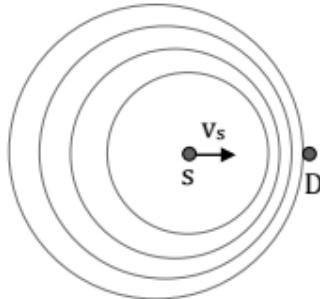
- obserwator zbliża się do źródła** to liczba policzonych grzbietów rośnie w związku z czym obserwowana częstotliwość  $f'$  jest większa:

$$f' = \frac{(Vt + V_D)/\lambda}{t} = f_0 \frac{V + V_D}{V},$$

(b) **obserwator oddala się od źródła** to obserwowana przez niego częstotliwość wynosi:

$$f' = \frac{(Vt - V_D)/\lambda}{t} = f_0 \frac{V - V_D}{V},$$

- źródło dźwięku  $s$  porusza się z prędkością  $V_s$ , obserwator  $D$  pozostaje w spoczynku



Tutaj również mamy dwa przypadki. Jeżeli:

- (a) **źródło zbliża się do obserwatora** to obserwowana długość fali o okresie  $T$  wyniesie  $\lambda' = VT - V_s T$ . W wyniku czego, częstotliwość zarejestrowana przez obserwatora  $f'$ :

$$f' = v/\lambda' = \frac{V}{VT - V_s T} = f_0 \frac{V}{V - V_s},$$

- (b) **źródło oddala się od obserwatora**, a zatem  $\lambda' = VT + V_s T$  przez co otrzymujemy:

$$f' = v/\lambda' = \frac{V}{VT + V_s T} = f_0 \frac{V}{V + V_s}.$$

Powyższe rozważania można przedstawić w postaci ogólnego wzoru:

$$f'_\pm = f_0 \frac{V \pm V_D}{V \mp V_s}.$$

Indeks plus (w liczniku i mianowniku wybierany górnny znak) odnosi się do sytuacji, w której zarówno źródło jak i obserwator zbliżają się do siebie.

Indeks minus (wybieramy dolny znak), gdy źródło i obserwator oddalają się od siebie.

Warto zwrócić uwagę, że jeśli kąt pomiędzy kierunkiem rozchodzenia się fali a kierunkiem prędkości obserwatora względem ośrodka wynosi  $\phi$ , a kąt  $\phi'$  zawarty jest pomiędzy kierunkiem prędkości źródła a kierunkiem od źródła do obserwatora to wtedy:

$$f' = f_0 \frac{V - V_D \cos \phi}{V - V_s \cos \phi'}.$$

## 2. Fale elektromagnetyczne

Tutaj już efekt ten jest efektem relatywistycznym. Bierzemy pod uwagę jedynie prędkość względną, tj. nie ma znaczenia czy źródło (lub obserwator) jest w ruchu.

Przy przejściu z jednego układu odniesienia do drugiego, dla źródła lub obserwatora oddalających się od siebie, częstotliwość fali wynosi:

$$f' = f_0 \frac{1 - v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = f_0 \frac{1 - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

gdzie  $v$  to prędkość drugiego układu względem pierwszego.

W przypadku, gdy źródło lub obserwator zbliżają się do siebie, w powyższym wzorze musimy zmienić znak prędkości  $v$ .

Dla małych prędkości:  $f' \cong f_0(1 - v/c)$ .

Jeżeli źródło (lub obserwator) porusza się pod kątem  $\phi$  w kierunku obserwatora (źródła) to:

$$f' = f_0 \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1+(vcos\phi)/c}.$$

Dla  $\phi = \pi/2$  występuje tzw. poprzeczny efekt Dopplera, który **nie zachodzi dla fal mechanicznych**.

### 33 33. Spójność, dyfrakcja i interferencja fal: dyfrakcja na pojedynczej szczelinie, doświadczenie Younga siatka dyfrakcyjna

Zjawisko interferencji, czyli nakładania się (superpozycji) fal występuje tylko w przypadku, gdy interferujące fale są spójne.

Koherencja(spójność) – różnica faz docierających do danego punktu jest stała w czasie, np laser.

Interferencja fal emitowanych przez dwa spójne źródła została pokazana w doświadczeniu Younga. Wiązka światła pochodząca z jednego źródła po przejściu przez jedną wąską szczelinę pada na dwie kolejne odległe od siebie o d. Szczeliny te traktujemy jako dwa punktowe źródła spójnych fal kulistych. Na ekranie znajdującym się w dużej odległości od szczelin notowane są ciemne i jasne prążki. Fale pochodzące od obu szczelin opisujemy funkcjami falowymi:

$$\psi_1(r_1, t) = A(r_1) \cos(kr_1 - \omega t),$$

$$\psi_2(r_2, t) = A(r_2) \cos(kr_2 - \omega t).$$

Na ekranie obserwujemy wynik zsumowania się fal:

$$\psi_1(r_1, t) + \psi_2(r_2, t) = 2A(r_{sr}) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cos(kr_{sr} - \omega t).$$

Pierwszy czynnik (cosinus) opisuje przestrzenną modulację, natomiast drugi wyraz z amplitudą fale kulistą. Na ekranie otrzymujemy maksima interferencyjne (jasne prążki) gdy spełniony jest warunek:

$$\begin{aligned} \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) &= \pm 1, \\ k \frac{r_1 - r_2}{2} &= m\pi, \end{aligned}$$

czyli różnica dróg optycznych dwóch promieni jest równa wielokrotnością długości fali:  $r_1 - r_2 = m\lambda$  – m jest liczbą całkowitą. Wygaszanie fal (ciemne prążki) występują, gdy:

$$\cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) = 0,$$

$$k \frac{r_1 - r_2}{2} = \frac{2m+1}{2}\pi,$$

a więc dla różnicy dróg optycznych obu promieni równej nieparzystej wielokrotności połowy długości fali:  $r_1 - r_2 = \frac{2m+1}{2}\lambda$ .

Między zjawiskiem dyfrakcji a interferencji nie ma zasadniczej różnicy, przyjęto że zmiany natężenia powstające w wyniku superpozycji fal wytwarzanych przez skończoną liczbę dyskretnych spójnych źródeł nazywamy interferencją, a przez spójne źródła rozłożone w sposób ciągły przyjęto nazywać dyfrakcją. Ogólnie można powiedzieć, że dyfrakcja to zespół zjawisk powstających podczas rozchodzenia się fal w ośrodku z ostrymi niejednorodnościami – jeśli fala napotyna na swej drodze przeszkodę, to ta część fali, która przechodzi za przeszkodę będzie się stawać źródłem nowych fal kulistych (zasada Huygensa), czyli ulegać ugięciu (dyfrakcji). W każdym punkcie poza przeszkodą występuje superpozycja tych fal parcialnych, uwzględniająca amplitudę i fazę fal.

## 34 34. Równowaga termiczna i temperatura; skale temperatury

Jeżeli kontakt diatermiczny między dwoma układami, początkowo izolowanymi, nie powoduje żadnych zmian ich stanu, to układy te są w równowadze termicznej.

**Zerowa zasada termodynamiki:** jeśli układy A i B są w równowadze termicznej i układy B i C są w równowadze termicznej, to także układy A i C są w równowadze termicznej. Każdy z tych układów ma wtedy tę samą temperaturę (empiryczną).

Temperatura jest parametrem INTENSYWNYM, który określa czy układ jest w równowadze termicznej z innymi układami. Gdy dwa układy o różnych temperaturach są w kontakcie diatermicznym, następuje spontaniczny przepływ energii z układu o temperaturze wyższej do układu o temperaturze niższej.

Skale temperatury:

- Fahrenheit: punkty stałe:  $0^{\circ}\text{F}$  – mieszanina wody, lodu i salmiaku (chlorek amonu),  $32^{\circ}\text{F}$  – mieszanina wody i lodu. Wówczas temperatura zdrowego człowieka  $96^{\circ}\text{F}$ , a temperatura wrzącej wody  $21^{\circ}\text{F}$ .
- Celsjusz (1742) punkty stałe:  $100^{\circ}\text{C}$  – topniejący śnieg,  $0^{\circ}\text{C}$  – wrząca woda. Później odwrócono skalę zamieniając te wartości.
- Kelvin:  $0\text{ K}$  – temperatura zera bezwzględnego.  $T[K] = T[{}^{\circ}\text{C}] = 273,15$ .

## 35 35. Ciepło, procesy wymiany ciepła.

Ciepłem nazywamy różnicę między zmianą energii wewnętrznej a pracą wykonaną nad układem w trakcie procesu nieadiabatycznego :

$$Q = (U_f - U_i) - W,$$

czyli:

$$\Delta U = (U_f - U_i) = W + Q.$$

Ciepło jest formą przekazu energii, który zachodzi spontanicznie i jest skutkiem. różnicy temperatur między ciałami Ciepło nie jest czymś co może przepłynąć (choć potocznie mówimy o przepływie ciepła), nie jest substancją, ani nowym rodzajem energii! Ciepło dostarczone = energia dostarczona w formie/na sposób ciepła.

I zasadę termodynamiki poprawnie można tak sformułować: w dowolnym procesie zmiana energii wewnętrznej układu jest równa sumie pracy wykonanej nad układem i energii dostarczonej na sposób ciepła.

Procesy wymiany ciepła:

- Konwekcja to makroskopowy ruch części układu, w którym ciepło jest przenoszone razem z materią. Dotyczy tylko płynów (gazów i cieczy). Zazwyczaj jej przyczyną jest siła wyporu działająca na cieplejsze części układu (o mniejszej gęstości) w polu sił (np. grawitacji). Może być też wymuszona (wentylator). Trudna do opisu modelowego. Układ w którym zachodzi konwekcja jest daleki od stanu równowagi.
- Emisja promieniowania termicznego wiąże się z utratą energii  $E \propto \sigma T^4$ , a jego absorpcja ze wzrostem energii. Promieniowanie jest jedynym sposobem przekazu ciepła przez próżnię. Jeśli ciało o temperaturze  $T$  znajduje się w otoczeniu o temperaturze  $T_{ot}$ , to ilość energii traconej przez to ciało wskutek promieniowania, w jednostce czasu i na jednostkę jego powierzchni, dana jest przez:

$$\frac{Q}{\Delta S \Delta t} = A\sigma(T^4 - T_{ot}^4),$$

gdzie  $A$  jest efektywną zdolnością absorpcyjną (lub emisyjnością) ciała.

- Przewodnictwo jest przekazem energii przez oddziaływanie (zderzenia) na poziomie cząsteczkowym. W miejscach o wyższej temperaturze atomy (elektrony) mają większą energię i w zderzeniach przekazują ją cząstkom z obszaru chłodniejszego. Przepływ energii w wyniku przewodnictwa przez jednostkową powierzchnię i w jednostce czasu w przybliżeniu opisany jest przez:

$$\frac{Q}{\Delta S \Delta t} = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

czyli jest proporcjonalny do gradientu temperatury. Stała  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, charakteryzującym ośrodek. Dla metali przewodnictwo cieplne jest proporcjonalne do przewodnictwa elektrycznego.

## 36 36. Równanie przewodnictwa cieplnego i zjawiska przewodzenia ciepła w kryształach

### 36.1 Równanie przewodnictwa cieplnego

Równanie przewodnictwa cieplnego – równanie różniczkowe cząstkowe, opisujące przepływ ciepła przy zadanym jego początkowym rozkładzie w ośrodku oraz przy określonych warunkach brzegowych. Równanie ma postać:  $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} u - \Delta_x u = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = g(x), \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \right\}$  gdzie  $g(x)$  to początkowy rozkład ciepła. A  $u(x, t)$  to szukana zależność rozkładu od czasu  $t$ .

## 36.2 Zjawiska przewodzenia ciepła w krysztale

Możemy zdefiniować strumień cieplny (natężenie prądu cieplnego) jako:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} \quad (144)$$

gdzie  $dQ$  oznacza ilość energii przekazywanej w postaci ciepła, która "przepłynęła" przez przekrój poprzeczny  $S$  w czasie  $dt$ . Jednostką strumienia cieplnego jest wat,  $[\Phi]=J/s=W$ . Dla ustalonego przepływu energii w postaci ciepła przez przewodnik cieplny o długości  $l$  i przekroju poprzecznym  $S$  obowiązuje zależność podobna do prawa Ohma:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_c} \quad (145)$$

gdzie  $R_c$  jest oporem cieplnym wyrażającym się przez przewodność cieplną  $\lambda$  zależnością  $R_c = \frac{l}{\lambda S}$ .

Mechanizm mikroskopowy przewodnictwa cieplnego polega na przekazywaniu energii pomiędzy cząsteczkami ciała, przy czym rozkład temperatury powoduje ukierunkowanie przestrzenne tego przekazu na tle przekazu chaotycznego.

Dla ciała o kształcie prostopadłościanu przewodzącego ciepło w warunkach stanu stabilnego (ustalonego), które stanowi przegrodę dla przepływu ciepła, ilość przekazanej energii jest zależna od substancji, proporcjonalna do powierzchni przekroju poprzecznego przegrody, różnicy temperatur oraz czasu przepływu ciepła i odwrotnie proporcjonalna do grubości przegrody:

$$Q = \lambda \frac{S \Delta T t}{d} \quad (146)$$

Gdzie:  $Q$  - ilość ciepła przepływająca przez ciało,  $\lambda$  - współczynnik przewodnictwa cieplnego,  $S$  - pole przekroju przez który przepływa ciepło,  $t$  - czas przepływu,  $\Delta T$  - różnica temperatur w kierunku przewodzenia ciepła,  $d$  - grubość przegrody

## 37 37.Promieniowanie cieplne ciał: współczynniki absorpcji i emisji promieniowania, ciało doskonaleczarne, prawo przesunięć Wiena, prawo Stefana-Boltzmanna.

*Promieniowanie cieplne* powstaje bezpośrednio w wyniku drgań termicznych ładunków w obrębie ciała o temperaturze różnej od 0K. Z dowolnym ciałem możemy powiązać pojęcia *absorpcji i emisji promieniowania*. Okazuje się (za Landauem i Lifszicem), że zdolność absorpcyjna  $A$  (wielkość określająca jaką część strumienia energii padającego absorbuje ciało) jest powiązana z natężeniem energii wypromieniowanej przez ciało  $E$  w następujący sposób (pomijam dla czytelności zależność od kąta biorąc jedynie strumień prostopadły do powierzchni):

$$\frac{E(\omega, T)}{A(\omega, T)} = ce_0(\omega, T)$$

Gdzie  $\omega$  oznacza częstotliwość wypromieniowanej (absorbowanej) fali,  $T$  temperaturę, zaś  $e_0$  jest pewną funkcją, o której powiem za chwilę więcej. Wzór ten nosi nazwę prawa Kirhoffa dla promieniowania.

Jako, że ciało nie może zaabsorbować więcej energii niż się do niej dostarcza współczynnik  $A$  zawiera się w przedziale od 0 do 1. Gdy wynosi on 1, czyli całość promieniowania jest pochłaniana, mówimy o *ciele doskonale czarnym (CDC)*. W tym przypadku wyraźnie widać, że wspomniane  $e_0(\omega, T)$  jest znaną zdolnością emisyjną ciała doskonale czarnego. Dodatkowo należy zwrócić uwagę, że ze względu na podany zakres  $A$ , współczynnik  $E$  dla rzeczywistych ciał przyjmuje wartości mniejsze, niż dla CDC.

Z CDC możemy powiązać gęstość energii promieniowania. Mowa tutaj o energii promieniowania zawartej wewnątrz CDC. Czym innym jest widmo promieniowania CDC.

$$de_\omega = \frac{h}{\pi^2 c^3} \omega^3 \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1} d\omega$$

W powyższym wzorze  $h$  stała Plancka,  $k$  stała Boltzmana, pozostałe oznaczenia jak wcześniej. Warto podkreślić, że drugi ułamek (ten z  $\exp$  w mianowniku) wyraża tak zwany rozkład Plancka. Gęstość rozkładu promieniowania ma maksimum w  $\lambda_m$ . Wartość ta jest dana *prawem przesunięć Wiена*:

$$\lambda_m = b/T$$

gdzie  $b$  to stała Wiena.

Na podstawie powyższego rozkładu energii można policzyć wspominane  $e_0$ , czyli gęstość widmową promieniowania CDC na jednostkę objętości i jednostkowy przedział kątów bryłowych (to już jest to, co widać jako widmo promieniowania). Równa się on:

$$e_0(\omega) = \frac{h}{4\pi^3 c^3} \omega^3 \frac{1}{e^{h\omega/kT} - 1}$$

Na podstawie powyższego, po przekształceniach i z całkowaniem, dostaje się całkowitą moc wypromieniowaną przez CDC. Wyraża się ona *prawem Stefana-Boltzmanna*:

$$\Phi = \sigma T^4$$

Gdzie  $\Phi$  jest strumieniem energii [ $\text{W/m}^2$ ],  $\sigma$  stałą Stefana-Boltzmana,  $T$  temperaturą.

## 38 38. Stan równowagi termodynamicznej

Można powiedzieć, że istnienie równowagi termodynamicznej to aksjomat termodynamiki. Równowaga termodynamiczna może być rozumiana w kontekście jednego ciała jak i relacji między dwoma ciałami.

Mówi się, że ciało lub ciała są w równowadze termodynamicznej jeśli średnio(po nie za dużym okresie czasu, ale też nie za małym) nie jest widoczny żaden przepływ materii i energii(między fragmentami jednego ciała lub między ciałami).

Równoważna definicja mówi, że dwa układy są w równowadze termodynamicznej jeśli są w równowadze termicznej, mechanicznej, chemicznej i elektrycznej(promieniowanie). Czyli posiadają tę samą temperaturę, ciśnienie, potencjał chemiczny i nie działa na nie żadna zewnętrzna siła.<sup>3</sup>

Inne sformułowania mówią, że jest to stan jaki uzyskałby układ izolowany gdyby poczekać

---

<sup>3</sup>Czasem mówi, się też, że istnieje stan równowagi dla stałego przyśpieszenia, chociaż może to jest niepotrzebne rozdrabnianie się, bo przecież wiemy że przyśpieszające naładowane cząstki promienują.

dostatecznie długo. Jeszcze inna definicja mówi, że ciało jest w globalnej równowadze termodynamicznej gdy wszystkie parametry intensywne(niezmienne ze względu na rozmiar ciała np. temperatura, gęstość) są stałe w nim.

Wspomnę przy okazji, o dwóch prawach termodynamiki:

- Zerowe prawo termodynamiki - równowaga termiczna jest relacją równoważności i klasy tej relacji są indeksowane parametrem  $T$  zwanym temperaturą.
- Pierwsze prawo termodynamiki - dla układów izolowanych istnieje wielkość niezmienna ze względu na upływ czasu, wielkość tą nazywamy energią.

## 39 39. II zasada termodynamiki i pojęcie entropii.

Istnieje ekstensywna funkcja stanu, zwana entropią  $S(T, V)$  [J/K], której zmiana  $\Delta S$  w procesie adiabatycznym spełnia nierówność  $\Delta S \geq 0$ , przy czym równość zachodzi tylko wtedy, gdy proces jest odwracalny (i dla tych procesów zachodzi też  $dS = \frac{dQ}{T} \Rightarrow dU = TdS - pdV$ ).

W ujęciu statystycznym:  $S = k_B \ln \Omega$ , gdzie  $\Omega$  to liczba sposobów na jakie można otrzymać określony stan makroskopowy. Jeżeli  $P$  zdefiniujemy jako prawdopodobieństwo znalezienia określonego stanu, to  $\Omega = 1/P$ .

Drugą zasadę termodynamiki można sformułować na kilka sposobów:

1. (Entropowe) Entropia układu izolowanego nie maleje:  $\Delta S \geq 0$ .
2. (Kelvina - Plancka) Niemożliwe jest przetworzenie całego ciepła na pracę.
3. (Clausiusa) Niemożliwe jest przeniesienie ciepła z termostatu o temperaturze niższej do wyższej bez wykonania dodatkowej pracy.

## 40 40. Równanie stanu gazu doskonałego, przemiany gazowe, molowe ciepła właściwe gazów

Gaz doskonały musi spełniać pewne warunki takie jak:

- brak oddziaływań międzycząsteczkowych z wyjątkiem odpychania w momencie zderzeń cząsteczek,
- objętość cząsteczek jest znikoma w stosunku do objętości gazu,
- zderzenia cząsteczek są doskonale sprężyste,
- cząsteczki znajdują się w ciągłym chaotycznym ruchu.

Jego stan opisuje równanie Clapeyrona:

$$pV = nRT,$$

gdzie  $n$  to liczba moli gazu a  $R$  to uniwersalna stała gazowa równa  $8.31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ .

**Ciepło właściwie molowe  $C$**  - ilość energii, którą trzeba dostarczyć w postaci ciepła, aby uzyskać zmianę temperatury, jednego mola substancji, o 1 jednostkę.

$$C_x = \frac{1}{n} \left( \frac{dQ}{dT} \right)_x \quad [\frac{J}{mol\cdot K}],$$

gdzie za  $x$  wstawiamy  $p$  lub  $V$  w zależności od tego, czy zachodzi przy stałym ciśnieniu czy objętości (dla gazów ich wartości zależą od przemiany).

Dla gazu doskonałego zachodzi zależność  $C_p - C_v = R$  (łatwo wyprowadzić z I zasady termodynamiki:  $dU = dQ + dW$ ).

Warto wspomnieć, że dla ciał stałych i cieczy  $C_v \approx C_p$ .

Związek pomiędzy ciepłem właściwym  $c$  a ciepłem właściwym molowym  $C$  jest następujące:

$$c_x = \frac{1}{M} C_x, \text{ ponieważ } m = nM,$$

gdzie  $M$  to masa molowa substancji.

Wyróżniamy cztery **przemiany gazowe**:

### 1. Izotermiczna:

$pV = const$  (prawo Boyle'a - Mariotte'a);  $dU = nC_vdT = 0$ ;  $\Delta Q = T(S_2 - S_1)$ .

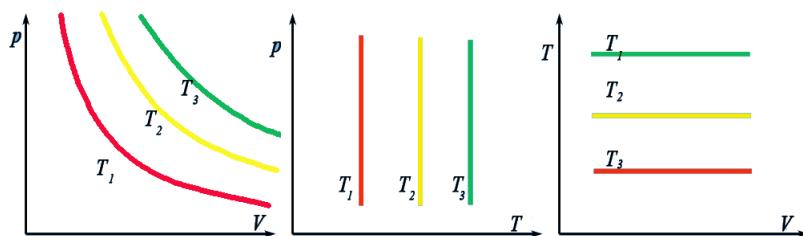


Figure 19: Poszczególne wykresy dla przemiany izotermicznej.

### 2. Izochoryczna:

$\frac{p}{T} = const$  (prawo Charlese'a);  $dU = dQ = nC_vdT$ ;  $T = A \exp \left( \frac{2S}{3nR} \right)$ .

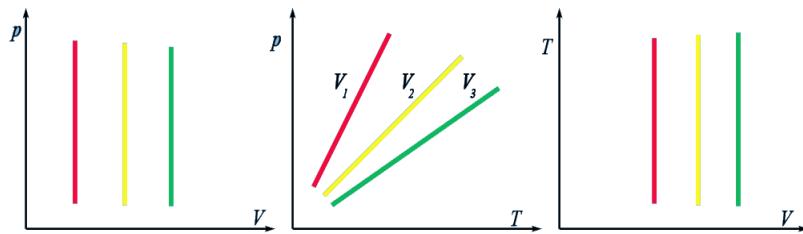


Figure 20: Poszczególne wykresy dla przemiany izochorycznej.

### 3. Izobaryczna:

$\frac{V}{T} = \text{const}$  (prawo Gay - Lussaca);  $dQ = C_p dT$ ;  $T = B \exp\left(\frac{2S}{5nR}\right)$ ; Gaz podczas rozprężania wykonuje pracę  $\Delta W = p\Delta V$ .

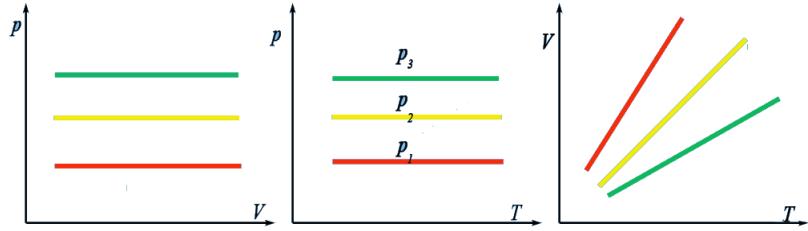


Figure 21: Poszczególne wykresy dla przemiany izobarycznej.

### 4. Adiabatyczna:

$pV^\kappa = \text{const}$  (r-nie Poissona), gdzie  $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$ ;  $dU = dW$ ;  $dS = 0 \rightarrow S = \text{const}$ .

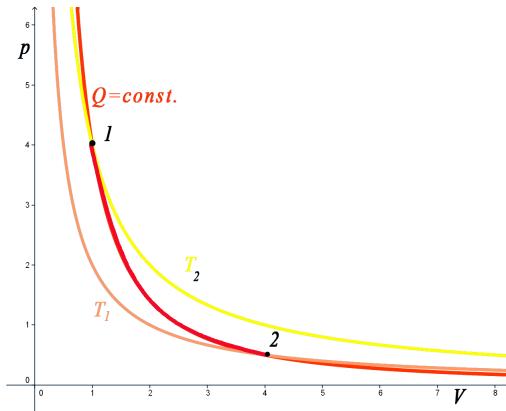


Figure 22: Poszczególne wykresy dla przemiany adiabatycznej.

## 41 41. Przemiany fazowe I rodzaju (przykłady) i współistnienie faz; przemiany fazowe II rodzaju.

**Przemianą fazową** nazywamy taki proces termodynamiczny polegający na zmianie fazy układu, który zmniejsza jego energię swobodną.

**Przemiany fazowe I rodzaju** to przemiany, w których zachodzi nieciągła zmiana funkcji stanu (np. entropii, ciepła właściwego) w temperaturze równowagi dynamicznej, co jest związane z wydzielaniem lub pochłanianiem ciepła utajonego. Innymi słowy temperatura systemu pozostaje stała podczas gdy oddaje on lub absorbuje ciepło. Przykłady: topnienie lodu, wrzenie wody.

**Współistnienie faz** – na Rysunku 23 przedstawiono typowy wykres fazowy. Krzywe dzielące dane dwie fazy (np. ciecz i gaz) wyznaczają taką zależność ciśnienia od temperatury, przy której fazy te mogą współistnieć. W punkcie potrójnym współistnieć mogą wszystkie trzy fazy.

**Przemiany fazowe II rodzaju** to przemiany, w których zachodzi ciągła zmiana parametrów, natomiast nieciągłe pozostają ich pochodne. Nie występuje tu efekt cieplny.

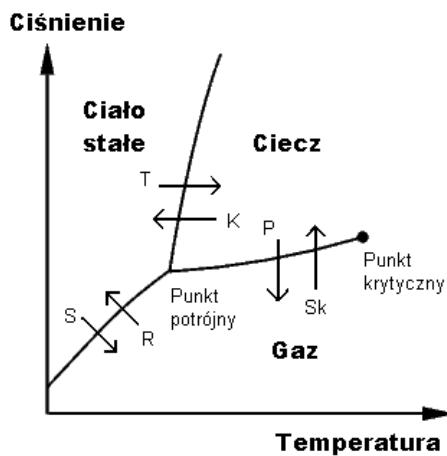


Figure 23: Wykres fazowy.

Przykłady: przemiana ferromagnetyczna, przejście w stan nadprzewodnictwa, przejście w nadciekłość.

## 42 42. Gazy rzeczywiste i ciecze: para nasycona, parowanie i wrzenie.

**Gazy rzeczywiste** – gazy niedające opisać się dobrze przez równanie gazu doskonałego

$$pV = nRT,$$

gdzie  $p$  – ciśnienie,  $V$  – objętość,  $n$  – liczba moli,  $R$  – stała gazowa,  $T$  – temperatura. Przy modelowaniu tych gazów uwzględnia się wielkości takie jak niezerowe rozmiary cząsteczek, siły van der Waalsa, zmienną pojemność cieplną itd. Prostym rozszerzeniem modelu gazu doskonałego jest model van der Waalsa z równaniem

$$\left( p + \frac{an^2}{V^2} \right) (V - nb) = nRT,$$

gdzie parametry  $a$  i  $b$  odpowiadają odpowiednio za wzajemne przyciąganie cząsteczek gazu oraz ich niezerowe rozmiary.

**Ciecze** – substancje pośrednie pomiędzy gazem i ciałem stałym, o łatwo zmiennym kształcie lecz małej ściśliwości. Własności cieczy wynikają z zachowania się jej cząsteczek:

- mają one pełną swobodę przemieszczania się w objętości zajmowanej przez ciecz,
- występują między nimi oddziaływanie międzycząsteczkowe, które w obrębie objętości cieczy znoszą się nawzajem,
- oddziaływanie międzycząsteczkowe nie znoszą się na granicy międzyfazowej cieczy z inną fazą na skutek czego występuje zjawisko zwane napięciem powierzchniowym.

**Para nasycona** – gaz pozostający w równowadze termodynamicznej z fazą ciekłą tej samej substancji. Para nasycona ma największe możliwe dla danej temperatury ciśnienie (które nie zależy od objętości) i gęstość. Zmniejszanie objętości w stałej temperaturze powoduje

skraplanie pary bez zaburzenia stanu równowagi. Zwiększenie objętości powoduje wyparowanie cieczy bez obniżenia ciśnienia pary nasyconej. Przykładem może być para wodna zawarta w powietrzu podczas wieczornego obniżania się temperatury. Po osiągnięciu pewnej temperatury zwanej punktem rosy, woda skrapla się na drobinach pyłu zawartych w powietrzu tworząc mgłę.

**Parowanie i wrzenie** – to pierwsze to proces zmiany fazy ciała z ciekłej w gazową. Jest powolne i zachodzi na powierzchni cieczy w każdej temperaturze powyżej temperatury topnienia ciała. To drugie to parowanie cieczy całą objętością. Jest gwałtowne i zachodzi w temperaturze wrzenia, w której to prężność pary jest równa ciśnieniu zewnętrznemu.

### 43 43. Granice rozdziału faz; napięcie powierzchniowe, włoskowatość.

**Granica rozdziału faz** – granica między fazami układu dwufazowego, na której następuje szybka zmiana fizykochemicznych właściwości układu (często określana jako skokowa).

Przykłady: powierzchnia oceanu, błona komórkowa, granice ziarna w sieci polikrystalicznej.

**Napięcie powierzchniowe** – zjawisko fizyczne występujące na styku powierzchni cieczy innym ciałem (zwykle gazem), dzięki któremu powierzchnia ta zachowuje się jak sprężysta błona. Przyczyną napięcia powierzchniowego jest wzajemne przyciąganie cząsteczek cieczy. Wewnątrz cieczy w każdej chwili na każdą z cząsteczek działa mniej więcej taka sama siła w każdym kierunku i dlatego cząstki te są swobodne, natomiast cząsteczki na powierzchni są przyciągane tylko od wewnętrz cieczy, co wytwarza ciśnienie, efektem którego jest chęć cieczy do minimalizowania swojej powierzchni. Stąd np. sferyczny kształt kropli wody lub nietopienie się tych śmiesznych pluskwiaków które chodzą po wodzie.

**Włoskowatość (kapilarność)** – pojęcie stosowane na określenie zjawisk zachodzących w cienkich rurkach lub szczelinach (tak zwanych naczyniach włoskowatych) zanurzonych częściowo w cieczy. Do najważniejszych zjawisk włoskowatych należą: podnoszenie lub obniżanie się poziomu cieczy w naczyniach włoskowatych (Rysunek 24). Włoskowatość wywołana jest przez napięcie powierzchniowe cieczy oraz grawitację. W stanie równowagi jedno równoważy drugie, w zależności od tego jak duże jest napięcie powierzchniowe cieczy udaje się wdrapać po ścianach naczynia (duże napięcie, menisk wklęsły, np. woda) lub jest ona wciągana w dół naczynia (małe napięcie, menisk wypukły, np. rtęć). Dzięki zjawisku kapilarności zachodzi między innymi wsiąkanie cieczy w ciała porowate (np. bibułę, cegłę), przewodzenie wody w roślinach.

### 44 44. III zasada termodynamiki i nieosiągalność zera bezwzględnego.

**III zasada termodynamiki:**

*nie można za pomocą skończonej liczby kroków uzyskać temperatury zera bezwzględnego, jeżeli za punkt wyjścia obierzemy niezerową temperaturę bezwzględną.*

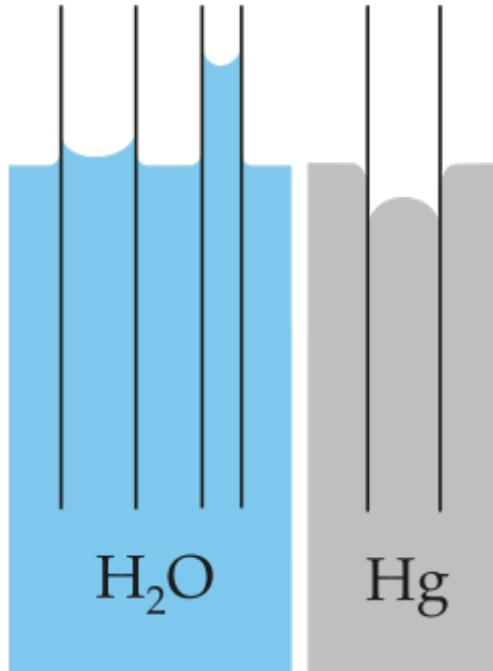


Figure 24: Zjawisko kapilarne.

Podstawą takiego zdefiniowania III zasady termodynamiki jest analiza sprawności lodówki. Jak wiadomo, lodówka działa na zasadzie odwrotnego cyklu Carnota, a jej sprawność dana jest wzorem:

$$\eta = \frac{Q}{W} = \frac{T_2}{T_1 - T_2},$$

gdzie  $Q$  – ciepło odebrane,  $W$  – włożona praca,  $T_2$  – temperatura końcowa,  $T_1$  – temperatura początkowa. Jeżeli ciało o określonej temperaturze  $T_1$  chcielibyśmy schłodzić do  $T_2 = 0$  K, odbierając przy tym skończone ciepło  $Q$ , to analizując powyższy wzór widzimy, że w takim wypadku  $\frac{Q}{W} \rightarrow 0$ , czyli  $W \rightarrow \infty$ . Ponieważ silnik Carnota jest najwydajniejszym możliwym silnikiem, także dowolny inny silnik wymagałby od nas nieskończonej pracy. Co dowodzi prawdziwości tezy.

**Inne sformułowanie III zasady termodynamiki:**

*entropia kryształu doskonałego w temperaturze zera bezwzględnego jest równa 0.*

Wiadomo, że w zerze bezwzględnym system musi być w stanie o minimalnej energii, i zgodnie z mechaniką kwantową w dowolnym systemie istnieje tylko jeden taki stan (stan podstawowy). Zatem ze związku entropii z liczbą dostępnych mikrostanów wynika, że w 0 K entropia jest rzeczywiście równa 0.

## 45 45. Doświadczenia świadczące o istnieniu atomów i cząsteczek; liczba Avogadro.

- zjawisko dyfuzji - proces samorzutnego rozprzestrzeniania się cząsteczek w każdym ośrodku, będący konsekwencją chaotycznych zderzeń cząsteczek dyfundującej substancji

między sobą lub z cząsteczkami otaczającego ją ośrodka (np rozchodzenie się zapachów w powietrzu)

- ruchy Browna - chaotyczne ruchy cząstek w płynie, wywołane zderzeniami zawiesiny z cząsteczkami płynu. Zjawisko dostrzeżone przez Roberta Browna przez mikroskop. Pyłki kwiatowe w zawiesinie wodnej znajdowały się w nieustannym, chaotycznym ruchu.

Przypadkowe błędzenie pyłków zostało wyjaśnione poprzez bombardowanie ich przez cząsteczki wody (czy też fluktuacje ich gęstości w bezpośrednim sąsiedztwie zawiesiny).

Cząsteczki wody są dużo mniejsze, jest ich wiele oraz poruszają się bardzo szybko. Różnice w prędkości ruchu oraz liczby uderzających cząsteczek z poszczególnych stron są przyczyną ruchów drobin pyłku w cieczy.

- Liczba Avogadro - jednostka ilości materii, określa ilość cząstek znajdujących się w jednym molu substancji  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \frac{1}{mol}$ .

## 46 46. Gazy, ciecze i ciała stałe z punktu widzenia atomowej (cząsteczkowej) teorii budowy materii.

Materia może znajdować się w 3 stanach skupienia:

- stały – cząsteczki ciała stałego ułożone są stosunkowo blisko siebie, często tworząc strukturę krystaliczną. Siły przyciągania między nimi są bardzo duże, dlatego ciało w tym stanie trudno jest rozerwać lub pokruszyć. Cząsteczki i atomy w ciałach stałych nie przemieszczają się w większej skali, a tylko wykonują drgania wokół swoich położen równowagi.

- ciekły – cząsteczki ułożone są ciasno, ale chaotycznie i łatwo zmieniają swoje położenie przez co ciecz łatwo zmienia objętość, ale łatwo zmienia kształt. Wskutek tego ciecz przyjmuje kształt naczynia, w którym się znajduje, ale w przeciwnieństwie do gazu nie rozszerza się, aby wypełnić je całe. W cieczy występują oddziaływanie międzycząsteczkowe, które w obrębie objętości cieczy znoszą się nawzajem, ale nie na granicy międzyfazowej cieczy z inną fazą na skutek czego występuje zjawisko zwane napięciem powierzchniowym.

- gazowy – odległości między cząsteczkami są duże przez co mają pełną swobodę ruchu. Wszystkie one cały czas przemieszczają się w przestrzeni zajmowanej przez gaz i nigdy nie zatrzymują się w jednym miejscu. Między cząsteczkami nie występują żadne oddziaływanie daleko-zasięgowe, a jeśli, to bardzo słabe. Jedyne sposób, w jaki cząsteczki na siebie oddziałują, to zderzenia. Gaz łatwo zmienia kształt i zajmuje całą dostępną mu przestrzeń.

## 47 47. Rozkład Boltzmanna: związek temperatury z energią kinetyczną cząsteczek gazu, zależność gęstości gazu od wysokości w zewnętrznym polu grawitacyjnym.

Rozkład Boltzmanna - równanie określające sposób obsadzania stanów energetycznych przez cząsteczki w stanie równowagi termicznej. Pozwala określić tzw. funkcję rozkładu energii.

$$\frac{N_i}{N_j} = \exp\left(-\frac{\Delta E_{ij}}{kT}\right),$$

$N_i, N_j$  - liczba obiektów w stanach  $i$  i  $j$ ,  $\Delta E_{ij}$  - różnica energii stanów  $i$  i  $j$ ,  $T$  - temperatura,  $k$  - stała Boltzmanna.

Na obsadzenie stanów wpływa różnica ich energii, oraz temperatura. Dla temperatury dążącej do zera obsadzone będą jedynie stany podstawowe, o najniższej energii. Wraz ze wzrostem temperatury zostaje obsadzanych coraz więcej stanów o wyższej energii. W przypadku bardzo wysokiej temperatury czynnik typu  $\exp(-E/kT)$  staje się równy jedności i wówczas wszystkie stany są jednakowo prawdopodobne, a rozkład Boltzmanna przechodzi w rozkład jednostajny.

Temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej cząstek. Dla jednoatomowego gazu doskonałego:

$$E_k = \frac{3}{2}kT$$

Gęstość gazu maleje wraz ze wzrostem wysokości  $h$  w polu grawitacyjnym. Zwiększąc wysokość nad poziomem morza maleje słup powietrza wywierający ciśnienie  $p$  na gaz:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right),$$

$p_0$  – ciśnienie atmosferyczne na poziomie odniesienia,  $\mu$  – masa molowa powietrza.

## 48 48. Statystyki kwantowe; bozony i fermiony.

(za Landauem i Lifszicem)

Zmniejszając temperaturę gazu doskonałego (podkreślam założenie o nieoddziaływaniu cząstek gazu ze sobą) należy uwzględnić, że obsadzenia najniższych poziomów energetycznych są duże. Wobec tego istotną rolę w opisie gazu zaczynają odgrywać kwantowe właściwości statystyczne układów.

### Statystyka Bosego-Einsteina

Statystyka odnosi się do nieoddziałującego gazu bozonów w niskich temperaturach. Bozonów nie obowiązuje zakaz Pauliego, dlatego wiele cząstek może obsadzać ten sam stan w obrębie jednego układu. Na podstawie tych założeń dostaje się wzór na gęstość obsadzeń  $k$ -tego stanu:

$$n_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \mu)/kT} - 1}$$

$\varepsilon_k$  oznacza energię  $k$ -tego stanu,  $\mu$  potencjał chemiczny,  $k$  stałą Boltzmanna,  $T$  temperaturę. Warto podkreślić, że indeks  $k$  odpowiada wektorowi falowemu  $\vec{k}$ .

Ze względu na pojawiającą się w mianowniku różnicę, przy odpowiednich warunkach, gęstość najniższych stanów jest bardzo duża.

### Statystyka Fermiego-Diraca

Zakaz Pauliego wymaga aby różne fermiony nie mogły jednocześnie obsadzać tych samych stanów. De facto w danym stanie, w obrębie układu, może znajdować się tylko jedna cząstka. Funkcją rozkładu dla takiego gazu jest tzw. funkcja Fermiego-Diraca:

$$n_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \mu)/kT} + 1}$$

Ze względu na sumę w mianowniku i dodatkowe ograniczenia na potencjał chemiczny gęstość stanów dla zerowych energii może wynosić maksymalnie 1.

## uwagi o fermionach i bozonach

Bozony są cząstkami o *calkowitych* wartościach spinu, zaś fermiony o spinach *połówkowych*. Funkcja falowa bozonów musi być symetryczna ze względu na przestawienie kolejności opisywanych cząstek tzn.  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = |\alpha_2, \alpha_1\rangle$ . Z kolei dla fermionów wymaga się pełnej antysymetryczności funkcji falowej ze względu na to kryterium:  $|\alpha_1, \alpha_2\rangle = -|\alpha_2, \alpha_1\rangle$ . Spełnia się ten warunek dzięki przedstawieniu wielociałowej funkcję fermionów w postaci wyznacznika Slatera. Zapewnia on również znikanie funkcji falowej opisującej dwa fermiony znajdujące się w jednakowych stanach:  $|\alpha_1, \alpha_1\rangle = 0$ , co odzwierciedla treść zakazu Pauliego.

## 49 49. Zjawisko fotoelektryczne; energia i pęd fotonu.

- **Zjawisko fotoelektryczne** - zjawisko w którym kwant gamma zostaje całkowicie zaabsorbowany przez elektron związany w atomie ośrodka. Elektron otrzymuje energię równą różnicy energii kwantu  $\gamma$  a energią wiązania elektronu  $E_B$  na orbicie atomowej, w wyniku czego zostaje wybita z atomu lub przeniesiona na wyższy poziom energetyczny.

$$E_e = E_\gamma - E_B.$$

Zwykle  $E_B \ll E_\gamma$ .

Rozróżniany wewnętrzne i zewnętrzne. W efekcie fotoelektrycznym wewnętrznym elektron nie jest uwalniany, jak to ma miejsce w zjawisku fotoelektrycznym zewnętrznym, a przenosi się on do pasma przewodnictwa.

*Zjawisko to wytłumaczył Einstein w 1905 roku, opierając się na hipotezie kwantów światła.*

- **Energia i pęd fotonu**

Wiemy, że między energią a pędem zachodzi związek:  $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ , gdzie  $m$  to masa spoczynkowa.

Z racji tego, że masa spoczynkowa fotonu jest równa zero, otrzymujemy:  $E_\gamma = p_\gamma c$ .

## 50 50. Zjawisko Comptona

Truizmem będzie stwierdzenie, że foton charakteryzuje się dualizmem korpuskularno-falowym. Ale tak jest! A eksperyment związany z efektem comptona pokazuje, że rzeczywiście foton jest korpuskułą. Opisując jak najkrócej to po prostu foton uderza w spoczywający elektron. Elektron dostaje pęd, a foton zmienia częstotliwość. Gdyby foton był tylko falą do zderzenia nie mogłoby dojść.

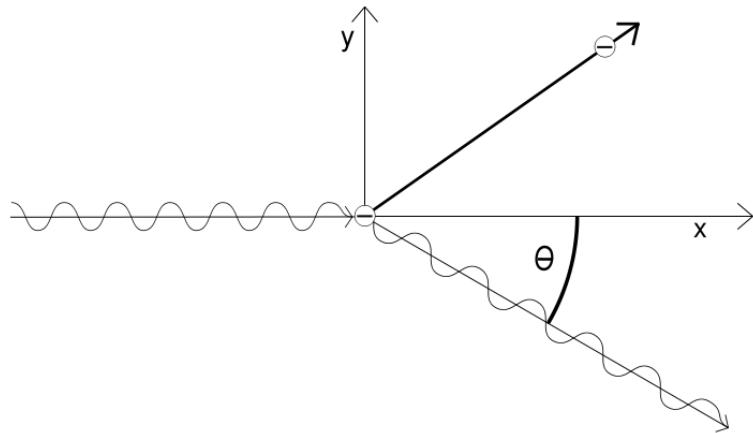


Figure 25: Schemat

Obliczenia to zwykła zasada zachowania energii i pędu. Zgodnie z poniższym rysunkiem energia przed zderzeniem:

$$E = \frac{hc}{\lambda} + mc^2,$$

gdzie pierwsza część jest od fotonu, a druga jest energią spoczynkową elektronu. Analogicznie dla składowych pędu:

$$p_x = \frac{h}{\lambda},$$

$$p_y = 0.$$

Po zderzeniu:

$$E = \frac{hc}{\lambda'} + \sqrt{m^2c^4 + p_{całkowity}^2c^2},$$

$$p_x = p_{ye} + \frac{h}{\lambda'} \cos(\theta),$$

$$p_y = p_{ye} + \frac{h}{\lambda'} \sin(\theta),$$

gdzie  $p_{ye}$  i  $p_{xe}$  to składowe pędu elektronu, więc również:

$$p_{ye}^2 + p_{xe}^2 = p_{całkowity}^2.$$

Odpowiednio rozwiązując te równania, otrzymujemy, że

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{mc}(1 - \cos(\theta)),$$

gdzie

$$\lambda_o = \frac{h}{mc}$$

to comptonowska długość fali (dla elektronu).

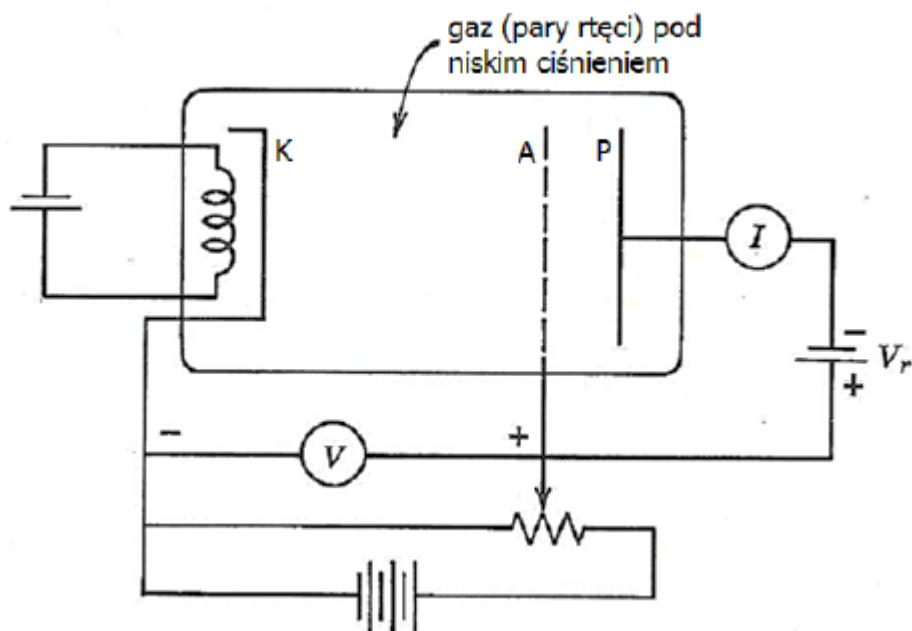
## 51 51. Hipoteza de Broglie'a, dualizm korpuskularnofalowy.

## 52 52. Dyfrakcja fotonów i elektronów (doświadczenie Younga, dyfrakcja na kryształach)

Doświadczenie Thomsona: umieścił w lampie oscyloskopowej, za układem anod ogniskujących, cienką złotą folię (folia taka ma budowę polikrystaliczną). Elektrony padając na nią podlegały zjawisku interferencji, dając w rezultacie na ekranie okręgi o różnych średnicach  $D_i$ . Powstały na ekranie układ pierścieni daje się wyjaśnić, jeżeli przyjmiemy, że z elektronem związana jest fala, której długość określona jest przez wzór:  $\lambda = \frac{h}{p}$ . Dodatkowym argumentem za słusznością tego założenia jest fakt, że ten sam układ okręgów otrzymano przy naświetleniu wspomnianej folii promieniami rentgena o podobnej długości fali, co długość fali elektronów przewidywana przez de Broglie'a. Doświadczenie Thomsona potwierdza więc falową naturę strumienia elektronów. Fala związana z elektronem jest falą materii.

## 53 53. Doświadczenie Francka-Herza

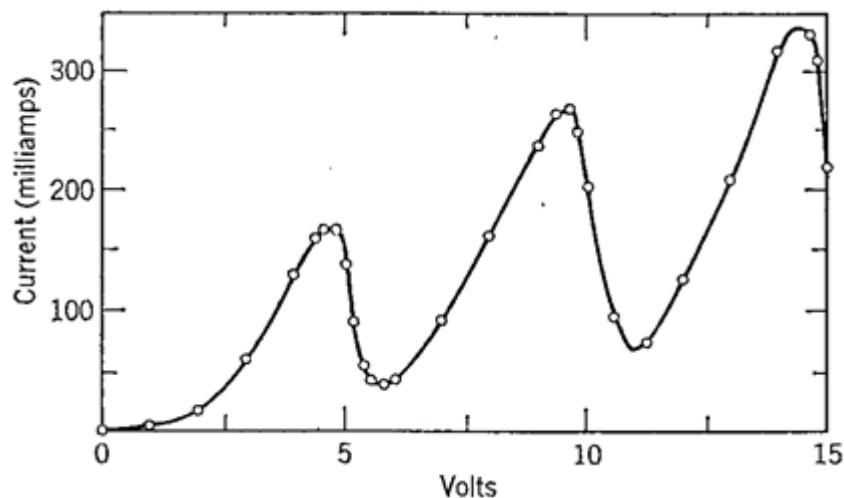
- Eksperyment przeprowadzony w 1914 r. przez Jamesa Francka i Gustava Ludwiga Hertza, za który zostali uhonorowani Nagrodą Nobla z fizyki w 1925 r. za odkrycie praw rządzących zderzeniem elektronu z atomem.
- Schemat:



- Opis doświadczenia: Z ogrzewanej katody K emitowane są elektrony (emisja termoelektronowa), które nabierają przyspieszenia w potencjale  $V$  przyłożonym między katodą K

a anodą A. Anoda ma postać siatki, tak więc niektóre z elektronów przechodzą przez nią i o ile mają wystarczającą energię kinetyczną, by pokonać niewielki potencjał hamujący  $V_r$  przyłożony między anodą a płytka P, mogą dotrzeć do płytki i wywołać przepływ prądu  $I$ . Bańska, w której znajdują się elektrody i płytka jest wypełniona gazem atomowym. W oryginalnym doświadczeniu były to pary rtęci. Mierzono prąd  $I$  docierającego do płytki w funkcji napięcia przyspieszającego  $V$

- Wyniki pomiarów:



- Interpretacja wyników i wnioski: Przy niskim napięciu przyspieszającym elektrony obserwuje się wzrost natężenia prądu wraz ze wzrostem napięcia przyspieszającego. Kiedy potencjał przyspieszający ma wartość 4,9 V prąd gwałtownie spada. Można wnioskować, że gdy elektron osiąga energię równą 4,9 eV, występuje oddziaływanie między elektronami a atomami rtęci. Znaczna część elektronów o tej energii wzbudza atomy rtęci, tracąc przy tym całkowicie swoją energię kinetyczną. Jeśli  $V$  jest tylko nieznacznie wyższe od 4,9 V proces wzbudzenia zachodzi tuż przed anodą i po tym procesie elektrony nie mogą nabierać wystarczającej energii, aby pokonać potencjał hamowania  $V_r$  i dotrzeć do płytki. Gdy zwiększamy napięcie  $V$  zwiększa się energia kinetyczna, którą elektron nabywa po zderzeniu - więcej elektronów jest w stanie dotrzeć do płytki. Ich liczba znowu zaczyna spadać przy wartości potencjału  $V$  równej 9,8 eV - możliwe jest wówczas zajście dwóch zderzeń podczas drogi elektronu do płytki. Eksperyment ten nie tylko potwierdził skwantowanie poziomów energetycznych atomu, ale również dostarczył metody bezpośredniego pomiaru różnicy energii pomiędzy stanami atomu.

## 54 54. Pomiar w mechanice kwantowej (observable), zasada nieoznaczoności

- Pomiar w mechanice kwantowej to z matematycznego punktu widzenia rzutowanie stanu układu kwantowego w pewnej bazie ortonormalnej

- Każdej mierzalnej wielkości fizycznej odpowiada tzw. obserwabla czyli operator hermitowski, którego wektory własne tworzą bazę w przestrzeni Hilberta.
- Jednym dopuszczalnym wynikiem pojedynczego pomiaru wielkości fizycznej może być któraś z wartości własnych obserwabli. Jeśli w układzie fizycznym opisany stanem  $|\psi\rangle$  dokonamy pomiaru wielkości fizycznej  $A$  otrzymując wynik  $a_n$  jedną z wartości własnych obserwabli  $\hat{A}$  to po pomiarze stanem układu jest unormowany rzut stanu  $|\psi\rangle$  na (unormowany) wektor własny  $|\varphi_n\rangle$  odpowiadający zmierzonej wartości własnej. Innymi słowy, mówimy, że w wyniku pomiaru następuje redukcja (lub kolaps) stanu do stanu  $|\psi\rangle$  do stanu  $|\varphi_n\rangle$ .
- Prawdopodobieństwo wyników pomiarowych:
  1. Przypadek widma dyskretnego bez degeneracji: niech  $\{|\varphi_n\rangle\}$  stanowi zbiór wektorów własnych obserwabli  $\hat{A}$  odpowiadających wartośćom własnym  $\{a_n\}$ . Wówczas prawdopodobieństwo  $P_n$  tego, że w wyniku pomiaru wielkości fizycznej  $A$ , w układzie opisany wektorem stanu  $|\psi\rangle$  otrzymamy wartość własną  $a_n$  wynosi  $P_n = |\langle \varphi_n | \psi \rangle|^2$
  2. Przypadek widma ciągłego: obserwabla  $\hat{A}$  ma wartości własne  $\beta$  należące do zbioru ciągłego, więc odpowiadające im wektory własne  $\{\varphi_\beta\}$  są także numerowane indeksem ciągłym. Prawdopodobieństwo  $dP_\beta$  tego, że w wyniku pomiaru wielkości fizycznej  $A$  otrzymamy wartość z przedziału  $(\beta, \beta + d\beta)$  wynosi  $dP_\beta = |\langle \varphi_\beta | \psi \rangle|^2 d\beta$ , a więc  $|\langle \varphi_\beta | \psi \rangle|^2$  jest funkcją ciągłą mającą sens gęstości prawdopodobieństwa. Niech  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  będzie dowolnym wektorem stanu pewnego układu fizycznego. Wartość oczekiwana (średnia wartość z wielu pomiarów) wielkości fizycznej  $A$ , której odpowiada obserwabla  $\hat{A}$  wynosi  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ .
- Niech  $\hat{A}, \hat{B}$  - obserwable i  $\Delta^2 A = \langle \psi | \hat{A}^2 | \psi \rangle - \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle^2$  wówczas:

$$\forall \psi \Delta^2 \hat{A} \cdot \Delta^2 \hat{B} \geq \frac{1}{4} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

W szczególności:

$$\begin{aligned}\Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta E \cdot \Delta t &\geq \frac{\hbar}{2}\end{aligned}$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga sformułowana w 1927 r. mówi, że istnieją takie pary wielkości, których nie da się jednocześnie zmierzyć z dowolną dokładnością. Zasada nieoznaczoności nie wynika z niedoskonałości metod ani instrumentów pomiaru, lecz z samej natury rzeczywistości. Nie ma stanów o lepiej określonych  $x$  i  $p_x$  niż takie, dla których spełniona jest nierówność.

## 55 55. Równanie Schrödingera, funkcja falowa i jej interpretacja

- Równanie Schrödingera zostało sformułowane w 1926 r. przez austriackiego fizyka Erwina Schrödingera. Jest to podstawowe równanie nierelatywistycznej mechaniki kwan-

towej. Opisuje ono ewolucję stanu układu kwantowego w czasie:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \widehat{H}(t) |\psi(t)\rangle$$

gdzie:

$|\psi(t)\rangle$  - wektor stanu układu kwantowego

$\widehat{H}(t)$  hamiltonian (operator energii całkowitej) Aby rozwiązać problem fizyczny dotyczący danego układu kwantowego należy znaleźć właściwą postać hamiltonianu oraz wyrazić wektor stanu w odpowiedniej reprezentacji.

- Reprezentacja położeniowa

Jeśli rozwiązujeśmy problem ruchu cząstki lub częstek w przestrzeni używamy reprezentacji położeniowej. W tej reprezentacji równanie Schrödingera przyjmuje postać:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \widehat{H}(t) \psi(\vec{r}, t)$$

gdzie:

$\psi(\vec{r}, t) = \langle \vec{r} | \psi(t) \rangle$  - funkcja falowa

Przykład hamiltonianu dla cząstki o masie  $m$  w polu potencjalnym - hamiltonian jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej:

$$\widehat{H} = \widehat{T} + \widehat{V}$$

W przypadku cząstki nierelatywistycznej oraz pozbawionej ładunku elektrycznego i spinu operator energii kinetycznej ma postać:

$$\widehat{T} = \frac{\widehat{\mathbf{p}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$$

Działanie operatora energii potencjalnej  $\widehat{V}$  oznacza mnożenie funkcji falowej przez potencjał  $V(\vec{r}, t)$ . Hamiltonian ma więc postać:

$$\widehat{H}(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t)$$

- Rozwiązywanie równania Schrödingera znacznie się upraszcza gdy hamiltonian nie zależy od czasu (całkowita energia się nie zmienia – układ odizolowany od otoczenia). Wówczas:

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} Et\right) \psi(\vec{r})$$

gdzie:

$E$  - energia układu,

$\psi(\vec{r})$  - część funkcji falowej niezależna od czasu

Wstawiając powyższą postać funkcji falowej do równania ogólnego otrzymujemy równanie Schrödingera niezależne od czasu:

$$\widehat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

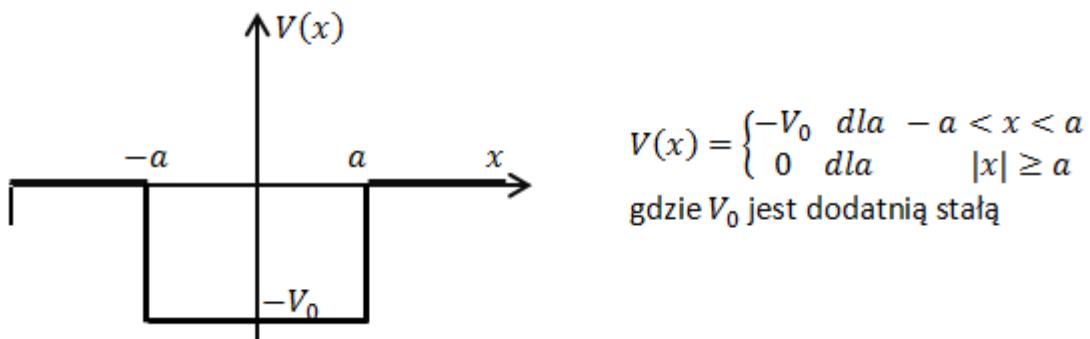
- W ramach standardowej interpretacji, funkcja falowa jest pewnym narzędziem pozwalającym przewidzieć związki pomiędzy przygotowaniem układu a jego pomiarem i ma charakter operacyjny nierozerwalnie związany z danym obserwatorem. Jest to funkcja o wartościach zespolonych, której wartość nazywamy amplitudą prawdopodobieństwa. Kwadrat jej modułu ma sens gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie  $x$  w chwili  $t$  (dla cząstki w 1d):

$$P_{a \leq b}(t) = \int_a^b |\psi(x, t)|^2 dx$$

Funkcja falowa spełnia warunek normalizacji:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

## 56 56. Rozwiązania równania Schrödingera dla cząstki w jednowymiarowej studni potencjału



W skończonej studni potencjału mogą istnieć zarówno stany związane ( $E < 0$ ), jak i stany rozproszeniowe ( $E > 0$ ).

- Stany związane

Ponieważ w obszarze  $x \leq a$  potencjał jest równy 0 i nie zależy od czasu, to równanie Schödingera ma postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$$

Możemy je zapisać w postaci:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa^2\psi \quad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\psi(x) = A \exp(-\kappa x) + B \exp(\kappa x)$$

Pierwszy wyraz rozwiązania wybucha gdy  $x \rightarrow -\infty$  zatem fizycznie dozwolonym rozwiązaniem jest:

$$\psi(x) = B \exp(\kappa x) \quad \text{dla } (x \leq -a)$$

W obszarze  $-a < x < a$ ,  $V(x) = -V_0$  i równanie Schrödingera przybiera postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = E\psi$$

Możemy je zapisać w postaci:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -l^2\psi, \quad l = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

Po pierwiastkiem mamy liczbę nieujemną ponieważ dla każdego normalizowalnego rozwiązania energia musi być większa od minimalnej wartości potencjału. Ogólne rozwiązanie jest postaci:

$$\psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \text{ dla } (-a < x < a)$$

W obszarze  $x > a$  potencjał wynosi 0. Ogólne rozwiązanie równania Schrödingera dla tego obszaru:

$$\psi(x) = F \exp(-\kappa x) + G \exp(\kappa x)$$

Drugi wyraz rozwiązań wybucha gdy  $x \rightarrow \infty$ , zatem fizycznie dopuszczane rozwiązanie to:

$$\psi(x) = F \exp(-\kappa x) \quad \text{dla } (x \geq a)$$

Kolejnym krokiem jest narzucecie warunków brzegowych (ciągłość funkcji falowej i jej pierwszej pochodnej w punktach  $x = -a$  i  $x = a$ ). Oszczędzimy sobie trochę rachunków zauważając, że potencjał jest funkcją parzystą, a więc bez straty ogólności możemy założyć, że rozwiązania są albo parzyste albo nieparzyste (ponieważ jeśli  $\psi(x)$  spełnia równanie Schrödingera i  $V(x) = V(-x)$  to zastępując w równaniu  $x$  przez  $-x$  zauważamy, że  $\psi(-x)$  spełnia to samo równanie, a więc także spełniają je liniowe kombinacje  $\psi_{even} = \psi(x) + \psi(-x)$  i  $\psi_{odd} = \psi(x) - \psi(-x)$ , ogólne rozwiązanie może być więc liniową kombinacją funkcji parzystych i nieparzystych). Zaletą tego podejścia jest fakt, że potrzebujemy narzucić warunki tylko po jednej stronie studni (powiedzmy dla  $x = a$ ). Drugą stronę otrzymujemy automatycznie gdyż  $\psi(-x) = \pm\psi(x)$ .

- Rozpracujemy najpierw rozwiązania parzyste. Cosinus jest funkcją parzystą zatem szukamy rozwiązań postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} F \exp(-\kappa x) & \text{dla } (x \geq a) \\ D \cos(lx) & \text{dla } (0 < x < a) \\ \psi(-x) & \text{dla } (x \leq 0) \end{cases}$$

Z ciągłości  $\psi(x)$  w  $x = a$  mamy:

$$F \exp(-\kappa a) = D \cos(la) \tag{147}$$

Natomiast z ciągłości pierwszej pochodnej  $\psi(x)$  mamy:

$$-\kappa F \exp(-\kappa a) = -lD \sin(la) \tag{148}$$

Dzieląc równanie 148 przez równanie 147 dostajemy:

$$\kappa = l \tan(la) \tag{149}$$

Równanie 149 jest formułą na dozwolone energie, ponieważ zarówno  $\kappa$  jak i  $l$  zależą od  $E$ . Aby je rozwiązać przyjmiemy bardziej przyjazną notację. Niech:

$$z \equiv la, \quad z_0 \equiv \frac{a}{\hbar} \sqrt{2mV_0} \quad (150)$$

Mamy wówczas następujące zależności:

$$\kappa^2 + l^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \quad \kappa a = \sqrt{z_0^2 - z^2}$$

I równanie na dozwolone energie możemy zapisać w postaci:

$$\tan(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$

Im większa wartość  $V_0$ , tym więcej dostępnych energii.

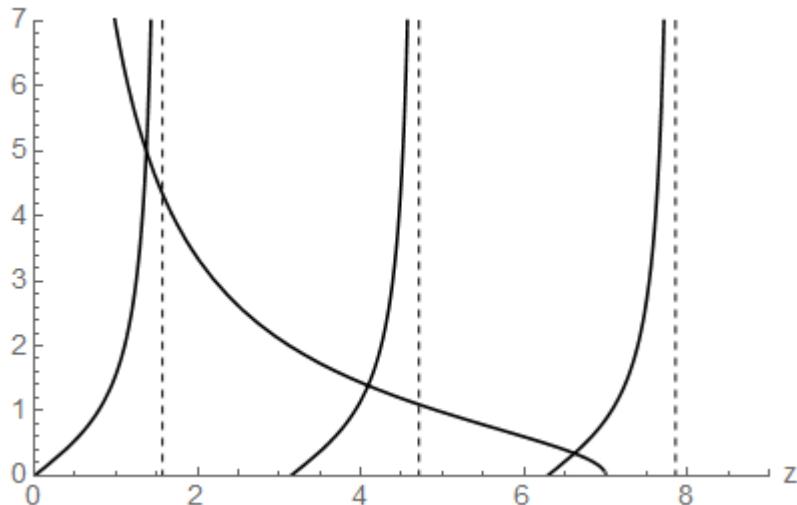


Figure 26: Graficzne rozwiązanie równania na energie dla  $z_0 = 7$  (funkcje parzyste)

Możemy jeszcze łatwo znaleźć relacje między współczynnikami  $B$ ,  $D$  i  $F$ :

$$D = \frac{\exp(-\kappa a)}{\cos(la)} F, \quad B = F$$

Rozwiązania będące funkcjami parzystymi mają więc postać:

$$\psi(x) = \begin{cases} F \exp(\kappa x) & \text{dla } (x \leq -a) \\ \frac{\exp(-\kappa a)}{\cos(la)} F & \text{dla } (-a < x < a) \\ F \exp(-\kappa x) & \text{dla } (x \geq a) \end{cases}$$

Stałą  $F$  znajdujemy z warunku normalizacji.

- Teraz zajmiemu się rozwiązaniami nieparzystymi. Sinus jest funkcją nieparzystą, zatem szukamy rozwiązań postaci:

$$\psi(x) = \begin{cases} F \exp(-\kappa x) & \text{dla } (x \geq a) \\ C \sin(lx) & \text{dla } (0 < x < a) \\ -\psi(-x) & \text{dla } (x \leq 0) \end{cases}$$

Z ciągłości  $\psi(x)$  w  $x = a$  mamy:

$$F \exp(-\kappa a) = C \sin(la) \quad (151)$$

Natomiast z ciągłości pierwszej pochodnej  $\psi'(x)$  w  $x = a$  mamy:

$$-\kappa F \exp(-\kappa a) = lC \cos(la) \quad (152)$$

Dzielimy równanie 152 przez równanie 151 otrzymując:

$$\kappa = -l \cot(la) \quad (153)$$

Korzystając z notacji wprowadzonej zależnościami 150 dostajemy równanie które możemy rozwiązać graficznie:

$$-\cot(z) = \sqrt{\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 - 1}$$

Pozostało jeszcze znaleźć relacje między współczynnikami  $B, C$  i  $F$  (uwaga: to jest

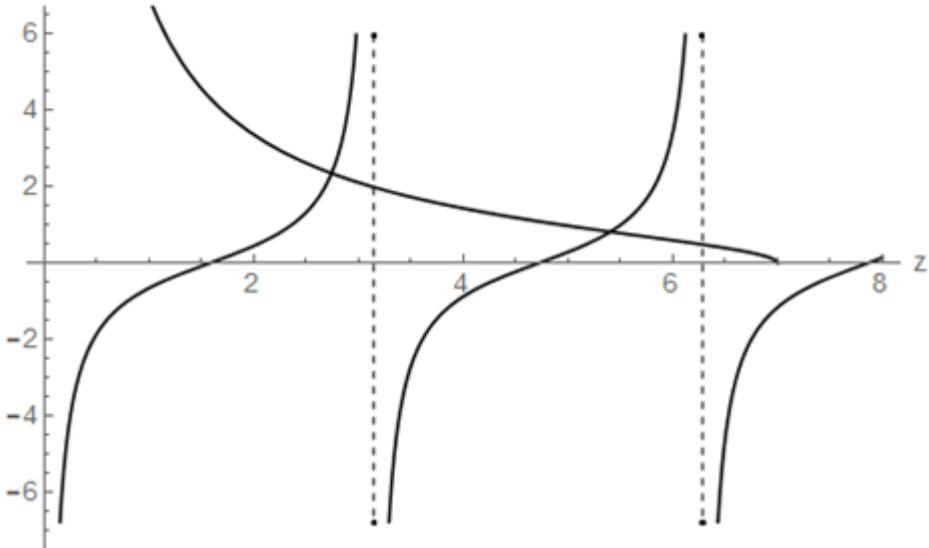


Figure 27: Graficzne rozwiązanie równania na energię dla  $z_0 = 7$  (funkcje nieparzyste)

inne  $B$  i  $F$  niż dla funkcji parzystych):

$$C = \frac{\exp(-\kappa a)}{\sin(la)} F, \quad B = -F$$

Możemy więc wypisać rozwiązania będące funkcjami nieparzystymi:

$$\psi(x) = \begin{cases} -F \exp(kappa x) & \text{dla } (x \leq -a) \\ \frac{\exp(-\kappa a)}{\sin(la)} F \sin(lx) & \text{dla } (-a < x < a) \\ F \exp(-\kappa x) & \text{dla } (x \geq a) \end{cases}$$

Stałą  $F$  znajdujemy podobnie jak poprzednio z warunku normalizacji.

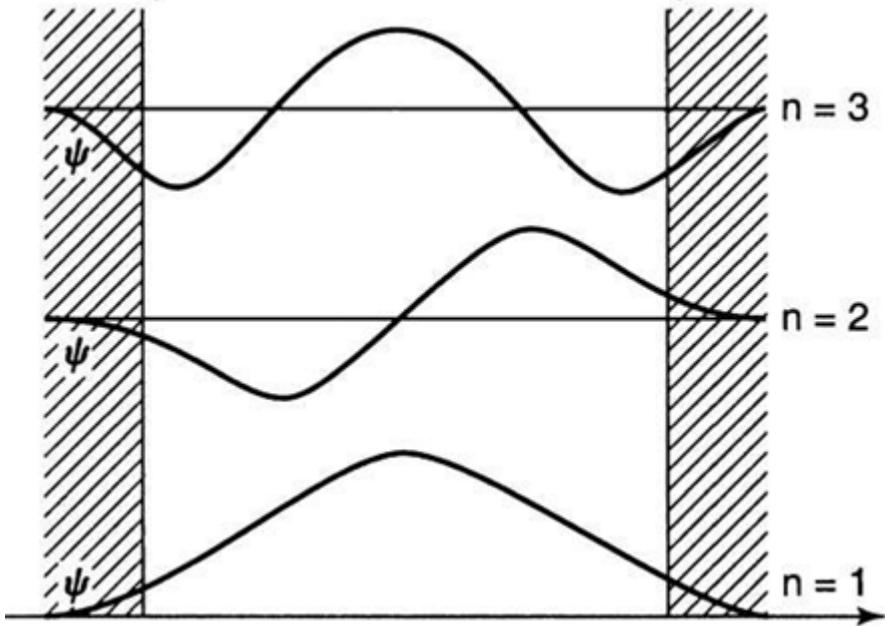


Figure 28: Stany odpowiadające kolejnym energiom

- Stany rozproszeniowe ( $E > 0$ ) Na lewo od studni  $V(x) = \infty$  zatem mamy:

$$\psi(x) = A \exp(i k x) + B \exp(-i k x) \quad \text{dla } (x \leq -a)$$

gdzie:

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Wewnątrz studni gdzie  $V(x) = -V_0$  mamy:

$$\psi(x) = C \sin(lx) + D \cos(lx) \quad \text{dla } (-a < x < a)$$

gdzie tak jak poprzednio:

$$l = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$$

Z prawej strony studni, zakładając, że nie ma fali nadchodzącej z prawej strony mamy:

$$\psi(x) = F \exp(ikx)$$

$A$  jest amplitudą fali nadchodzącej z lewej strony,  $B$  jest amplitudą fali odbitej, a  $F$  fali przechodzącej.

Należy teraz uwzględnić warunki brzegowe. Z ciągłości  $\psi(x)$  w punkcie  $x = -a$  dostajemy:

$$A \exp(-ika) + B \exp(ika) = -C \sin(la) + D \cos(la)$$

Ciągłość pochodnej w punkcie  $x = -a$  daje:

$$ik[A \exp(-ika) - B \exp(ika)] = l[C \cos(la) + D \sin(la)]$$

Z ciągłości  $\psi'(x)$  w punkcie  $x = a$ :

$$C \sin(la) + D \cos(la) = F \exp(ika)$$

Natomiast ciągłość pochodnej w punkcie  $x=a$  daje:

$$l[C \cos(la) - D \sin(la)] = ikF \exp(ika)$$

Z dwóch ostatnich równań możemy obliczyć współczynniki  $C$  i  $D$  w zależności od  $F$  i wstawić do dwóch pierwszych równań, a następnie obliczyć współczynniki  $A$  i  $B$  również w zależności od  $F$ . Współczynnik transmisji  $T = \frac{|F|^2}{|A|^2}$  wyrażony w początkowych zmiennych jest dany wzorem:

$$T^{-1} = 1 + \frac{V_0^2}{4E(E + V_0)} \sin^2\left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}\right)$$

Zauważmy, że  $T = 1$  (studnia staje się przezroczystą gdy argument sinusa jest 0). Oznacza to, że:

$$\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} = n\pi$$

gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą. Energie dla idealnej transmisji są więc dane wzorem:

$$E_n = \frac{n^2 p i^2 \hbar^2}{2m(2a)^2} - V_0$$

A więc są to dokładnie energie dozwolone dla cząstki w nieskończonej studni potencjału.

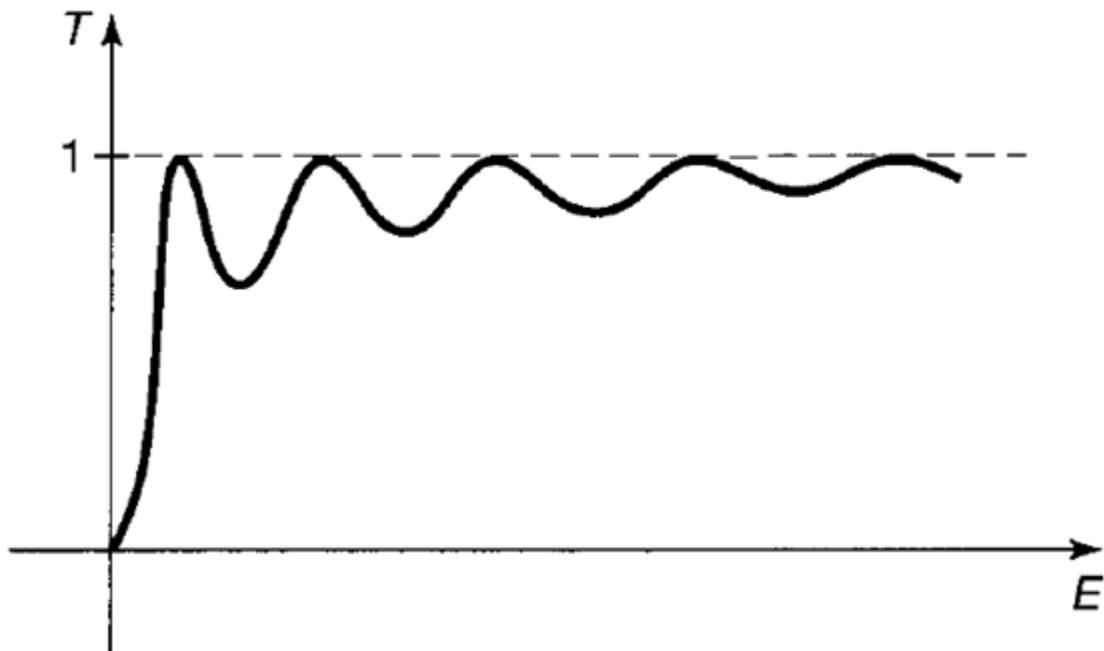


Figure 29: Współczynnik transmisji w funkcji energii

- 57 57. Rozwiążanie równania Schrödingera dla cząstki rozpraszającej się na jednowymiarowej barierze potencjału i zjawisko tunelowe.
- 58 58. Rozwiązania równania Schrödingera dla ruchu cząstki w potencjale harmonicznym.
- 59 59. Atom wodoru w mechanice kwantowej.
- 60 60. Stany energetyczne atomów; absorpcja i emisja promieniowania elektromagnetycznego.

# 61 61. Emisja spontaniczna i wymuszona, zasada działania lasera

## 61.1 Emisja spontaniczna

Emisja spontaniczna zachodzi wtedy, gdy elektrony znajdujące się na poziomach wzbudzonych w sposób spontaniczny wracają na niższe poziomy energetyczne, emitując przy tym fotony.

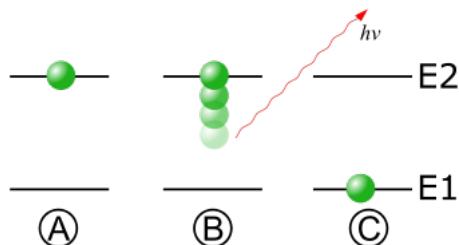
Zjawisko występuje powszechnie i odpowiada za niemal każde świecenie ciała, np. gazów rozgrzanych, wzbudzonych atomów, ciał ciekłych i stałych, a także urządzeń elektronicznych takich jak diody elektroluminescencyjne (LED).

Liczba emisji spontanicznych ciała, w którym w stanie wzbudzonym jest  $N$  atomów określona jest wzorem:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -A_{21}N \quad (154)$$

gdzie  $A_{21}$  jest stałym dla danego przejścia w danym atomie współczynnikiem emisji (stała wprowadzona przez Einsteina). Przy braku nowych wzbudzeń prowadzi to do równania

Figure 30: A – atom w stanie wzbudzonym (elektron na poziomie o energii E2) B – emisja fotonu ( $h\nu$ ) C – atom w niskim stanie energii (elektron na poziomie  $E1 < E2$ )



określającego liczbę atomów pozostających w stanie wzbudzenia:

$$N(t) = N(0)e^{-\frac{t}{\tau_{21}}} \quad (155)$$

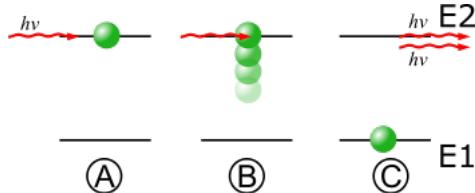
gdzie:  $N(0)$  początkowa liczba wzbudzonych atomów,  $\tau_{21}$  jest czasem życia i wiąże się ze współczynnikiem  $A$ ,  $\tau_{21} = (A_{21})^{-1}$ .

## 61.2 Emisja wymuszona

W optyce emisja wymuszona (stymulowana, indukowana) – proces emisji fotonów przez materię w wyniku oddziaływania z fotonem inicjującym. Warunkiem do tego, aby emisja wymuszona nastąpiła, jest równość energii fotonu z energią wzbudzenia atomu. Foton inicjujący emisję nie jest pochłaniany przez materię – pełni tylko rolę wyzwalającą proces. Foton emitowany przez atom ma częstotliwość (a więc również energię), fazę i polaryzację taką samą jak foton wywołujący emisję. Kierunek ruchu obu fotonów również jest ten sam. Światło złożone z takich identycznych fotonów nazywa się światłem spójnym. Zjawisko to jest podstawą działania laserów.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = B_{21}Nu(\nu) \quad (156)$$

Figure 31: Schematyczne przedstawienie emisji wymuszonej: A – atom w stanie wzbudzonym (elektron na poziomie o energii E2) oraz foton inicjujący B – atom w momencie pobudzenia przez foton ( $\hbar\nu$ ) C – atom i fotony po emisji wymuszonej



Gdzie  $\nu$  jest gęstością promieniowania.

Można wykazać, że w warunkach równowagi termicznej dla współczynników Einsteina zachodzi następująca zależność:

$$B_{12} = B_{21} = B \quad A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B \quad (157)$$

Gdzie  $B_{12}$  jest współczynnikiem Einsteina dla absorpcji.

Emisja wymuszona jest zjawiskiem odwrotnym do pochłaniania fotonów przez atomy (cząsteczki).

Prawdopodobieństwo pochłonięcia fotonu przez atom w stanie podstawowym jest takie samo jak prawdopodobieństwo emisji wymuszonej atomu wzbudzonego, dlatego o wielkości emisji/pochłaniania ośrodka decyduje różnica liczby atomów w stanie wzbudzonym i podstawowym

### 61.3 Zasada działania lasera

Elektrony w atomach i strukturach krystalicznych ciał stałych mogą przyjmować tylko ścisłe określone wartości. W ciałach stałych te wartości nazywamy poziomami energetycznymi. Ostatni poziom jaki może przyjmować elektron w stanie niewzbudzonym czyli normalnym nazywamy poziomem podstawowym. Działanie lasera opiera się na dwóch zjawiskach: inwersji obsadzeń i emisji wymuszonej. Emisja wymuszona zachodzi gdy atom wzbudzony zderza się z fotonem o takiej częstotliwości, że jego energia kwantu jest równa różnicy energii poziomów między stanem wzbudzonym a podstawowym. Foton uderzający nie ulega pochłonięciu, ale przyspiesza przejście atomu ze stanu wzbudzonego do podstawowego i dlatego z atomu wylatują w tym samym kierunku dwa spójne, to znaczy zgodne w fazie fotony o tej samej energii więc i częstotliwości. Proces taki przewidział teoretycznie Einstein w 1917 roku. Pierwszy laser, którego nazwa pochodzi od pierwszych liter angielskiego zwrotu Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation co w polskim tłumaczeniu brzmi "Wzmocnienie światła przez wymuszoną emisję promieniowania" zbudował dopiero w 1960 roku przez T. Maimana. Zasada działania lasera rubinowego Aby mogła zachodzić w dużych ilościach emisja wymuszona należy w ośrodku wzmacniającym stworzyć odpowiednie warunki, to znaczy spowodować, by więcej elektronów było w stanie wzbudzonym niż w stanie podstawowym. Taki proces nosi nazwę inwersji obsadzeń (odwrócenia obsadzeń). Wtedy rezonansowy foton wyzwala emisje wielu fotonów naraz o tej samej fazie i częstotliwości. Aby to dokonać trzeba znaleźć taki materiał aby na pewnym poziomie wzbudzonym czas przebywania elektronu był dostatecznie długi. Taki poziom nazywamy poziomem metastabilnym. Do tej pory zbudowano wiele typów laserów i uzyskano efekt laserowy w setkach ośrodków czynnych (stałych, ciekłych i gazowych). Odwrócenie obsadzeń uzyskuje się za pomocą oświetlenia światłem (pompowanie optyczne), innym laserem, światłem błyskowym, wyładowaniem

prądu w gazach, reakcjami chemicznymi albo wykorzystać rekombinację w półprzewodnikach. Wzmacniacz laserowy zamienia się w generator, gdy ośrodek wzmacniający zostanie umieszczony w rezonatorze. Wówczas promieniowanie wprowadzone wzdłuż osi rezonatora odbija się od zwierciadła umieszczonego na jednym końcu rezonatora oraz od półprzeźroczystego zwierciadła na drugim końcu. Pomiędzy zwierciadłami fale są wzmacniane wskutek emisji wymuszonej. Promieniowanie wychodzi z rezonatora przez półprzeźroczyste zwierciadło w postaci spójnej, monochromatycznej, równoległej wiązki światła o dużej mocy. Emitowana wiązka jest doskonale równoległa, bowiem fale, które nie wędrują tam i z powrotem między zwierciadłami, szybko uciekają na boki ośrodka drgającego bez wzmacnienia.

## 62 62: Atom w zewnętrznym polu elektrycznym i magnetycznym – zjawisko Starka, zjawisko Zeemana

### Stacjonarny rachunek zaburzeń

Hamiltonian  $\hat{H}_0$  zaburzamy  $\hat{H}'$ :

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}'.$$

Zakładamy, że znamy stany i wartości własne hamiltonianu  $\hat{H}_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$  i chcemy policzyć stany i wartości własne  $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$ . Możemy je przedstawić jako szereg poprawek:

$$|n\rangle = \sum_k \lambda^k |n^{(k)}\rangle \quad E_n = \sum_k \lambda^k E_n^{(k)},$$

gdzie  $|n^{(k)}\rangle$  to  $k$ -ta poprawka do wektora własnego, a  $E_n^{(k)}$  -  $k$ -ta poprawka do energii. Wzory na pierwsze poprawki:

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle n^{(0)} | \hat{H}' | n^{(0)} \rangle, \\ |n^{(1)}\rangle &= \sum_{k \neq n} \frac{\langle k^{(0)} | \hat{H}' | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle \\ E_n^{(2)} &= \sum_{k \neq n} \frac{|\langle k^{(0)} | \hat{H}' | n^{(0)} \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \end{aligned}$$

ogólnie:

$$E_n^{(k)} = \langle n^{(0)} | \hat{H}' | n^{(k-1)} \rangle.$$

Przypadek zdegenerowany: założymy, że mamy  $d$  stanów o energii  $E_n^{(0)}$ :  $|n_i^{(0)}\rangle, i = 1, \dots, d$ . Możemy wybrać bazę tej podprzestrzeni tak żeby diagonalizowała hamiltonian  $\hat{H}'$

$$\langle n_i^{(0)} | \hat{H}' | n_j^{(0)} \rangle = \delta_{ij} E_{n_i}^{(1)}. \quad (158)$$

Wtedy  $E_{n_i}^{(1)}$  jest pierwszą poprawką do energii stanu  $|n_i^{(0)}\rangle$ .

## Efekt Starka

**Efekt Starka** jest to zjawisko polegające na rozszczepianiu poziomów energetycznych atomów w zewnętrznym polu elektrycznym.

Mamy jednorodne pole elektryczne:

$$\vec{E} = E\hat{e}_z, \quad V = -Ez = -Er \cos \theta.$$

Hamiltonian zaburzenia:

$$\hat{H}' = eEr \cos \theta, \quad (e > 0).$$

Pierwsza poprawka do energii stanu podstawowego  $|n, l, m\rangle = |1, 0, 0\rangle$ :

$$\begin{aligned} E_{100}^{(1)} &= \langle 1, 0, 0 | \hat{H}' | 1, 0, 0 \rangle = eE \int \psi_{100}^* r \cos \theta \psi_{100} d^3r \\ &= eE \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \psi_{n00}^* r \cos \theta \psi_{n00}. \end{aligned}$$

Stan podstawowy ma  $l = 0$  więc jest sferycznie symetryczny i funkcja falowa nie zależy od  $\theta$ . Zatem całka po  $d\theta$ :

$$\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

więc

$$E_{100}^{(1)} = 0,$$

czyli w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń nie ma poprawki. W drugim rzędzie rachunku zaburzeń liczymy elementy macierzy (tak jak w 158)

$$\langle 2, l, m | \hat{H}' | 2, l, m \rangle.$$

Jedyne niezerowe elementy macierzy to:

$$\langle 2, 0, 0 | \hat{H}' | 2, 1, 0 \rangle = \langle 2, 1, 0 | \hat{H}' | 2, 0, 0 \rangle = -3eEa_0,$$

gdzie  $a_0$  to promień atomu Bohra.

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} 0 & -3eEa_0 & 0 & 0 \\ -3eEa_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Liczymy wektory i wartości własne, żeby zdiagonalizować macierz

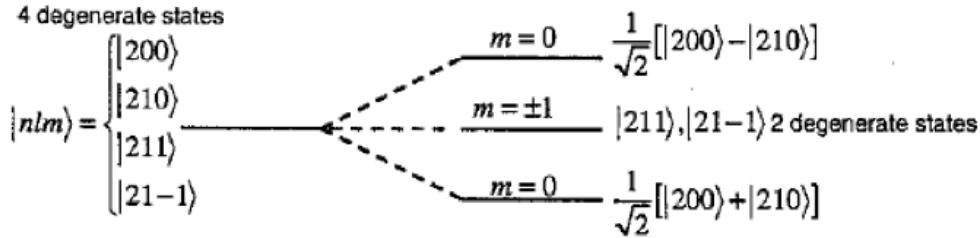
$$\begin{array}{llll} \lambda_1 = 0 & \lambda_2 = 0 & \lambda_3 = +3eEa_0 & \lambda_4 = -3eEa_0 \\ v_1 = |2, 1, 1\rangle & v_2 = |2, 1, -1\rangle & v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0, 0\rangle + |2, 1, 0\rangle) & v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0, 0\rangle - |2, 1, 0\rangle), \end{array}$$

Kiedy nie ma zewnętrznego pola elektrycznego te cztery stany mają taką samą energię. W obecności pola elektrycznego powstają dwa stany

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 0, 0\rangle \pm |2, 1, 0\rangle)$$

o energiach

$$E = E_{100}^{(0)} \pm 3eEa_0.$$



## Efekt Zeemana

**Efekt Zeemana** jest to zjawisko polegające na rozszczepieniu poziomów energetycznych atomów w zewnętrznym polu magnetycznym.

Skopiowane z wiki, ale ładnie wytłumaczone:

Większość poziomów energetycznych w atomach i cząsteczkach jest zdegenerowana ze względu na energię – oznacza to, że istnieje kilka poziomów o tej samej energii. To, co odróżnia zdegenerowane poziomy, to inne wielkości fizyczne charakteryzujące elektron w atomie – orbitalny moment pędu, spin, itd. Obecność zewnętrznego pola magnetycznego może znieść degenerację, ponieważ oddziałuje ono w różny sposób z elektronami o różnym momencie magnetycznym. Następuje wtedy rozsunięcie się poziomów energetycznych. W konsekwencji w obserwowanym obrazie promieniowania emitowanego w trakcie przejścia elektronowych w miejsce jednej linii pojawia się kilka blisko siebie położonych linii spektralnych.

Rachunek zaburzeń:

Hamiltonian zaburzenia

$$\hat{H}' = -\vec{\mu}\vec{B},$$

gdzie  $\vec{B} = B\hat{e}_z$ ,  $\mu$  - moment magnetyczny atomu

$$\vec{\mu} = -\frac{\mu_B}{\hbar}(\vec{L} + g_S\vec{S}),$$

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$  - magneton Bohra,  $g_S \approx 2$  - czynnik Landego dla elektronu. Widać, że moment magnetyczny nie jest w ogólności antyrównoległy do  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  chyba, że w wyniku sprzężenia spinów elektronów mamy  $\vec{S} = 0$ . Mamy wtedy przypadek **normalnego rozszczepienia Zeemana**:

$$\hat{H}' = -\frac{\mu_B}{\hbar}\hat{L}_z B.$$

Pierwsza poprawka do energii:

$$E_{nlm_l}^{(1)} = \langle n, l, m_l | \hat{H}' | n, l, m_l \rangle = -\frac{\mu_B}{\hbar} B \langle n, l, m_l | \hat{L}_z | n, l, m_l \rangle = -\frac{\mu_B}{\hbar} B m_l.$$

Jeśli  $S \neq 0$  mamy **anomalny efekt Zeemana**:

$$\hat{H}' = -\frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{L}_z + 2\hat{S}_z)B.$$

Zakładamy, że pole jest mocne i stany własne są postaci

$$|n, l, m_l\rangle |\uparrow\rangle, \quad |n, l, m_l\rangle |\downarrow\rangle.$$

Wtedy pierwsza poprawka:

$$E_{nlm_lm_s}^{(1)} = -\frac{\mu_B}{\hbar} B(m_l + 2m_s),$$

gdzie  $m_2 = \pm \frac{1}{2}$ .

## 63 63. Atomy wieloelektronowe, zakaz Pauliego.

## 64 64. Model Drudego

Rozwój kwantowej teorii przewodnictwa poprzedził etap klasyczny. Twórcą modelu klasycznego był P. Drude (1902). Model odnosił znaczne sukcesy. Jego podstawowe założenia były następujące:

1. metal jest zbiorem jonów sieci przenikanych przez „morze” elektronów – gaz elektronowy
2. elektrony mogą się poruszać swobodnie, ale napotykają od czasu do czasu przeszkody z którymi zderzają się
3. w temperaturze  $T > 0$  elektrony są w ciągłym ruchu, podobnie jak cząsteczki gazu w naczyniu, między zderzeniami poruszają się po liniach prostych
4. jeżeli do kawałka metalu przyłoży się różnicę potencjałów, jego wnętrze przeniknie pole elektryczne, wprawiając elektrony w dodatkowy ruch o składowej wzdłuż przyłożonego pola

Ponieważ pomiędzy elektronami danej sieci krystalicznej oraz tkwiącymi w węzłach sieci zrębami jak również pomiędzy samymi zrębami i elektronami istnieją wzajemne oddziaływanie, stąd opis zachowania się elektronów walencyjnych przy uwzględnieniu wszystkich powyższych oddziaływań jest niezwykle trudny. Rozwiążanie tego problemu na gruncie mechaniki klasycznej (teoria Drudego czy Lorenza) napotkało na nieprzewyciężone trudności. Jest to zrozumiałe ponieważ w celu wy tłumaczenia nawet najbardziej podstawowych własności krystalicznych ciał stałych niezbędna była mechanika kwantowa. Jednak dokładny opis zachowania się elektronów walencyjnych w ciele stałym przy zastosowaniu mechaniki kwantowej - przy obecnym stanie wiedzy - nie jest możliwy, stąd konieczność wprowadzenia daleko idących uproszczeń. Więcej w ujęciu kwantowym

### 64.1 Pasmowa teoria przewodnictwa

Kwantowomechaniczna teoria opisująca przewodnictwo elektryczne. W przeciwnieństwie do teorii klasycznej punktem wyjścia w tej teorii jest statystyka Fermiego-Diraca i falowa natura elektronów. Najważniejszym pojęciem tej teorii jest pasmo energetyczne, czyli przedział energii, jaką mogą posiadać elektrony w przewodniku. Istnienie ciągłego widma energetycznego jest związane z oddziaływaniem na siebie poszczególnych atomów (jest to zbiór bardzo

blisko położonych widm liniowych), natomiast występowanie obszarów zabronionych wynika z warunków nakładanych na periodyczność funkcji falowej elektronów.

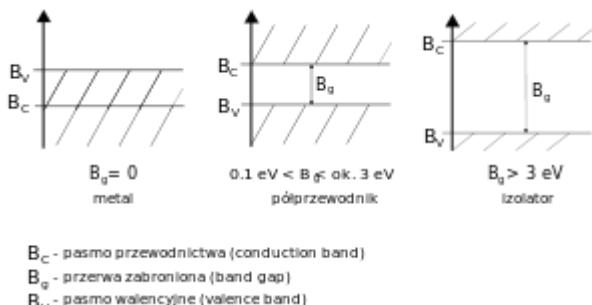
W atomie poszczególne elektrony mogą znajdować się w ścisłe określonych, dyskretnych stanach energetycznych. Dodatkowo w ciele stałym atomy są ze sobą związane, co daje dalsze ograniczenia na dopuszczalne energie elektronów. Dozwolone poziomy energetyczne odróżnione dla atomów na skutek oddziaływanego z innymi atomami w sieci krystalicznej znajdują się przesunięte tworząc tzw. pasma dozwolone, tj. zakresy energii, jakie elektrony znajdujące się na poszczególnych orbitach mogą przyjmować; poziomy leżące poza pasmami dozwolonymi określano są pasmami zabronionymi.

Elektronika posługuje się zwykle uproszczonym modelem energetycznym, w którym opisuje się energię elektronów walencyjnych dwoma pasmami dozwolonymi:

1. pasmo walencyjne (pasma podstawowe) – zakres energii, jaką mają elektrony walencyjne związane z jądrem atomu;
2. pasmo przewodnictwa – zakres energii, jaką mają elektrony walencyjne uwolnione z atomu, będące wówczas nośnikami swobodnymi w ciele stałym.

Istnieje także pasmo zabronione gdzie nie mogą przebywać elektrony.

Figure 32: Porównanie głównych modeli pasmowych



W przewodnikach metalicznych (np. miedź, aluminium itp.) nie ma pasma zabronionego (przerwy energetycznej). Może to wynikać z dwóch powodów:

1. Pasmo walencyjne jest tylko częściowo zapełnione elektronami, mogą się one swobodnie poruszać, a więc pasmo walencyjne w przewodnikach pełni analogiczną rolę jak pasmo przewodnictwa w półprzewodnikach i izolatorach.
2. Pasmo przewodnictwa i walencyjne zachodzą na siebie, toteż w tym wspólnym paśmie występuje dużo elektronów swobodnych i możliwy jest przepływ prądu.

Półprzewodniki posiadają pasmo wzbronione między pasmem walencyjnym a pasmem przewodzenia w zakresie od 0 do 6 eV (na przykład Ge 0,7 eV, Si 1,1 eV, GaAs 1,4 eV, GaN 3,4 eV, AlN 6,2 eV).

Półprzewodnik samoistny jest to półprzewodnik, którego materiał jest idealnie czysty, bez żadnych zanieczyszczeń struktury krystalicznej. Koncentracja wolnych elektronów w półprzewodniku samoistnym jest równa koncentracji dziur.

Przyjmuje się, że w temperaturze zera bezwzględnego w paśmie przewodnictwa nie ma elektronów, natomiast w wyższej temperaturze powstają pary elektron–dziura; im większa wartość temperatury, tym więcej takich par jest generowanych.

Półprzewodniki samoistne mają mało ładunków swobodnych (co objawia się dużą rezystywnością), dlatego też stosuje się domieszkowanie. Materiały uzyskane przez domieszkowanie nazywają się półprzewodnikami niesamoistnymi lub półprzewodnikami domieszkowanymi.

Domieszkowanie polega na wprowadzeniu i aktywowaniu atomów domieszek do struktury kryształu. Domieszki są atomami pierwiastków niewchodzących w skład półprzewodnika samoistnego – przykładem niech będzie domieszka krzemu w arsenku galu. Ponieważ w wiązaniach kowalencyjnych bierze udział ustalona liczba elektronów, zamiana któregoś z atomów struktury na odpowiedni atom domieszki powoduje wystąpienie nadmiaru lub niedoboru elektronów. Wprowadzenie domieszki dającej nadmiar elektronów (w stosunku do półprzewodnika samoistnego) powoduje powstanie półprzewodnika typu n, domieszka taka zaś nazywana jest domieszką donorową („oddaje elektron”). W takim półprzewodniku powstaje dodatkowy poziom energetyczny (poziom donorowy) położony w obszarze pasma wzbronionego niewiele poniżej poziomu przewodnictwa lub w samym paśmie przewodnictwa. Nadmiar elektronów jest uwalniany do pasma przewodnictwa (prawie pustego w przypadku półprzewodników samoistnych) w postaci elektronów swobodnych zdolnych do przewodzenia prądu. Mówimy wtedy o przewodnictwie elektronowym lub przewodnictwie typu n (z ang. negative, ujemny). Dla krzemu typowymi domieszkami donorowymi są atomy 15. grupy układu okresowego (więcej elektronów walencyjnych), głównie fosfor.

Wprowadzenie domieszki dającej niedobór elektronów (w stosunku do półprzewodnika samoistnego) powoduje powstanie półprzewodnika typu p, domieszka taka zaś nazywana jest domieszką akceptorową („elektron”). W takim półprzewodniku powstaje dodatkowy poziom energetyczny (poziom akceptorowy) położony w obszarze pasma wzbronionego niewiele nad poziomem walencyjnym, lub w samym paśmie walencyjnym. Poziomy takie wiążą elektrony znajdujące się w paśmie walencyjnym (prawie zapełnionym w przypadku półprzewodników samoistnych), powodując powstanie w nim wolnych miejsc. Takie wolne miejsce nazwano dziurą elektronową. Zachowuje się ona jak swobodna cząstka o ładunku dodatnim i jest zdolna do przewodzenia prądu. Mówimy wtedy o przewodnictwie dziurowym lub przewodnictwie typu p (z ang. positive, dodatni). Dziury, ze względu na swoją masę efektywną, zwykle większą od masy efektywnej elektronów, mają mniejszą ruchliwość, przez co rezystywność materiałów typu p jest z reguły większa niż materiałów typu n mających ten sam poziom domieszkowania. Typowymi akceptorami dla krzemu są atomy 13. grupy układu okresowego (mniej elektronów na ostatniej powłoce), zwykle bor.

## 64.2 Nośniki prądu

Prąd elektryczny jest w istocie ruchem cząstek obdarzonych ładunkiem, zwanych nośnikami ładunku. Umownie przyjęło się określić kierunek przepływu prądu poprzez opisanie ruchu ładunków dodatnich, niezależnie od tego jaki jest rzeczywisty znak i kierunek ruchu nośników w danym materiale.

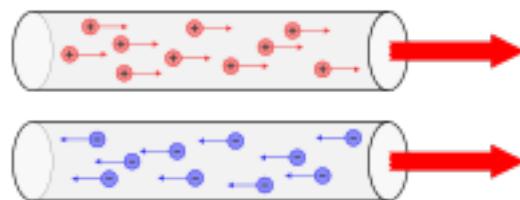
W metalach (zarówno stałych, jak i w stanie ciekłym) nośnikami ładunku są elektrony. Elektrony, znajdujące się w paśmie przewodnictwa, mogą swobodnie się przemieszczać w objętości metalu. Dlatego wszystkie metale są dobrymi przewodnikami, a prąd elektryczny w metalach jest ruchem elektronów przewodnictwa.

W konwencjonalnych półprzewodnikach (takich jak krzem czy german) w temperaturze zera bezwzględnego nie ma elektronów w paśmie przewodnictwa. Przewodzenie prądu wymaga przeniesienia elektronów z pasma walencyjnego do przewodnictwa (poprzez dostarczenie im energii, na przykład termicznej lub w postaci promieniowania).

W elektrolitach, zarówno ciekłych, jak i stałych, nośnikami ładunku są ruchliwe jony – ujemne aniony i dodatnie kationy. W niektórych elektrolitach występują ruchliwe jony obu znaków, w innych tylko jednego. Istnieją przewodniki jonowe, wykazujące bardzo dobry przewodnictwo elektryczne nawet w stanie stałym (przewodniki superjonowe).

W gazach nośnikami prądu są jony, zarówno dodatnie, jak i ujemne. W próżni i rozrzedzonych gazach można wytworzyć wolne elektrony, których ruch jest prądem elektrycznym. Przewodnictwo mieszane to przewodnictwo, w którym występuje zarówno przewodnictwo elek-

Figure 33: Umownie przyjęło się wyznaczać kierunek przepływu prądu poprzez opisanie ruchu ładunków dodatnich.



tronowe, jak i jonowe. Tego typu przewodnictwo jest istotne na przykład w materiałach, z których wykonywane są elektrody ogniw paliwowych.

W wielu przypadkach wygodny jest opis procesu przewodzenia za pomocą kwazicząstek. Czyni się tak w przypadku półprzewodników, gdzie ruch elektronów w paśmie walencyjnym opisuje się raczej za pomocą ruchu "pustego miejsca po elektronie", czyli dziury. Podobnie ruch elektronów w niektórych materiałach amorficznych i skompensowanych półprzewodnikach opisuje się za pomocą polaronów, czy nośniki ładunku w nadprzewodnikach za pomocą par Coopera.

Ruch naładowanego ciała jako całości jest również prądem elektrycznym.

Podstawowymi parametrami nośników prądu elektrycznego, determinującymi przewodnictwo materiału są ich koncentracja i ruchliwość.

## 65. Budowa jądra atomowego: model kroplowy, pół empiryczny wzór na masę jądra, średnia energia wiązania nukleonu w jądrze; „ścieżka stabilności” jąder

### 65.1 Jądro atomowe

Pojęcie jądra atomowego wprowadził w 1911 roku Rutherford, analizując rozpraszczenie cząstek  $\alpha$  na cienkich foliach złota. Stwierdził on, że masa i ładunek dodatni skupione są w centrum atomu. Eksperymenty tego rodzaju są do dziś jedną z ważniejszych metod badawczych fizyki jądrowej. Zakwestionowały one poprawność modelu Thomsona, zgodnie z którym ładunki dodatnie i ujemne są rozłożone w atomie w sposób ciągły.

Jądra są agregatami składającymi się z dwu rodzaju cząstek: protonów i neutronów o wspólnej nazwie nukleonów. Siły odpowiedzialne za wiązanie układów jądrowych należą do kategorii silnych oddziaływań, do której należą oddziaływanie pomiędzy nukleonami, mezonami i hiperonami, objętymi wspólną nazwą hadronów. Te zjawiska uwidaczniają się w szczególności w zderzeniach o energiach dużych w porównaniu z masami spoczynkowymi hadronów. I tak zderzenia pomiędzy dwoma nukleonami o energiach rzędu gigaelektronowoltów wykazują znaczne prawdopodobieństwo produkcji dużej ilości różnorodnych, silnie oddziaływających cząstek. Choć rozumiemy pewne ogólne cechy charakteryzujące silne oddziaływanie, to jednak podstawowy charakter tych zjawisk oraz ich związek z innymi znanymi oddziaływaniami stanowi nadal fascynujący problem wysiłków badawczych.

Siły jądrowe są:

- przyciągające, ponieważ wiążą nukleony w jądra mimo odpychania kulombowskiego;
- odbychające na małych odległościach, ponieważ nie obserwujemy "zapadania się" jąder; jądra mają skończone rozmiary;
- krótkozasięgowe, o zasięgu rzędu  $10^{-15}\text{m}$
- silne (energia oddziaływań jest liczona w  $\text{MeV} = 10^6$ );
- statyczne – zależne głównie od odległości ciał  $|r_{12}|$ :  $V_{1,2}=V(r_{12})$ ;
- niezależne ładunkowo, ponieważ siły działające między protonami i neutronami są niemal jednakowe;
- zdolne do wysycania w materii jądrowej.

Statyczność i niezależność ładunkowa sił jądrowych nie są cechami absolutnymi, gdyż nawet oddziaływanie w próżni zależy od momentu pędu cząstek, a wiele zjawisk wskazuje na to, że siły między neutronem a protonem i siły działające między cząstkami tego samego rodzaju mało się różnią.

## 65.2 Model kroplowy

Jest to prosty model jądra atomowego odwołujący się wyłącznie do tych cech jądra, które są wspólne z substancjami ciekłymi. W ramach tego modelu przyjmujemy, że jądro jest kroplą nieścisłą utrzymywana przez krótko zasięgowe siły. Skonstruowany w ten sposób model jądra dostarczy nam wyjaśnienia niektórych własności energii wiązania i mas jądrowych. Innych właściwości jąder model ten nie jest w stanie wyjaśnić.

**Rozmiary jądra** – Przyjmując założenia modelu oraz dane doświadczalne określono, że nukleon jest kulką o promieniu rzędu 1 fm. Promień jądra atomowego może być określony przybliżoną zależnością:

$$R = R_0 A^{1/3} \quad (159)$$

gdzie:  $A$  - liczba masowa,  $R_0 = 1,2 \text{ fm}$ .

Wynik obliczenia jest liczbą mniejszą niż 0,01% promienia atomu. Oznacza to, że gęstość materii w jądrze jest bilion razy większa od gęstości materii złożonej z gęsto upakowanych

atomów, jak np. w ciałach stałych. 1 milimetr sześcienny nuklearnej materii miałby masę rzędu 200.000 Mg (ton). Gwiazda neutronowa jest zbudowana tak jak jądro atomowe, a więc materia w jej wnętrzu ma wspomnianą gęstość.

**Energia wiązania:** Energia wiązania kropli B jest sumą:

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5$$

różnych przyczynków, których pochodzenie przedyskutujemy dalej:

(1) Głównym przyczynkiem jest "energia kondensacji" uwalniana w momencie łączenia się nukleonów w jądro. Musi być ona proporcjonalna do liczby cząstek. Odpowiada to przybliżonej stałości stosunku  $B/A$ . Stałą proporcjonalności oznaczamy przez  $a_v$ . Mamy wówczas:

$$B_1 = a_v A \quad (160)$$

Ponieważ  $A$  jest proporcjonalne do objętości jądra,  $B_1$  nosi również nazwę energii objętościowej.

(2) Nukleony znajdujące się na powierzchni kropli mają wokół siebie mniej partnerów niż nukleony wewnętrz kropli i są też od nich słabiej związane. Efekt ten zmniejsza całkowitą energię wiązania. Otrzymujemy:

$$B_2 = -a_s A^{2/3} \quad (161)$$

(3) Wartość energii wiązanie jest ponadto zmniejszona o wartość energii kulombowskiej oddziaływanego między protonami:

$$B_3 = -a_c Z^2 A^{-1/3} \quad (162)$$

(4) Musimy jeszcze uwzględnić fakt obniżenia jej wartości wynikający z nadmiaru neutronów (energia asymetrii):

$$B_4 = -a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \quad (163)$$

(5) Ostatnia poprawka musi być wprowadzona w sposób empiryczny. Dotyczy ona parowania się nukleonów którego nie tłumaczy model kroplowy. Odpowiedni przyczynek  $B_5$  wprowadzamy w następujący sposób:

$$B_5 = \begin{cases} +\delta \text{ dla parzystych } Z \text{ i } N \\ 0 \text{ dla nieparzystych } Z \text{ albo } N \\ -\delta \text{ dla nieparzystych } Z \text{ i } N \end{cases} \quad (164)$$

w przybliżeniu  $\delta$  spełnia następującą zależność  $\delta \approx a_p A - 1/3$ .

### 65.3 Półempiryczny wzór na masę jądra

Masę jądra atomowego możemy wyliczyć znając masę neutronu i protonu, a także energię wiązania nukleonów jądra atomowego na podstawie wzoru (1.8):

$$M(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - B(A, Z) \quad (165)$$

Gdzie B to energia wiązania

## 65.4 Średnia energia wiązania nukleonów w jądrze

Energia wiązania nukleonów w jądrze jest równa energii, jaką należałoby dostarczyć, aby rozłożyć jądro na poszczególne składniki. Okazuje się, że suma mas wszystkich nukleonów w jądrze jest większa niż masa całego jądra utworzonego z tych nukleonów. Różnicę między tymi masami nazywamy deficytem masy i oznaczamy  $\Delta M$ . Ta brakująca masa jest równoważna energii wiązania nukleonów zgodnie ze wzorem podanym przez Einsteina:  $\Delta E = \Delta M \Delta c^2$ .

$$\Delta M(A, Z) = Z m_p + (A - Z) m_n - M_a \quad (166)$$

## 65.5 Ścieżka stabilności $\beta$

Stabilność jąder atomowych jest uzależniona od liczby masowej danego pierwiastka, czyli od łącznej liczby protonów i neutronów wchodzących w skład określonego jądra. Dzieje się tak dlatego, że energia wiązania przypadająca na jeden nukleon przyjmuje różne wartości dla różnych jąder. W przypadku jąder stabilnych siły jądrowe muszą przeciwdziałać odpychaniu kulombowskemu pomiędzy protonami. W przeciwnym wypadku jądro ulega samorzutnemu rozpadowi, tworząc tym samym jądro nowego pierwiastka. Zjawisko to nosi nazwę promieniotwórczości naturalnej.

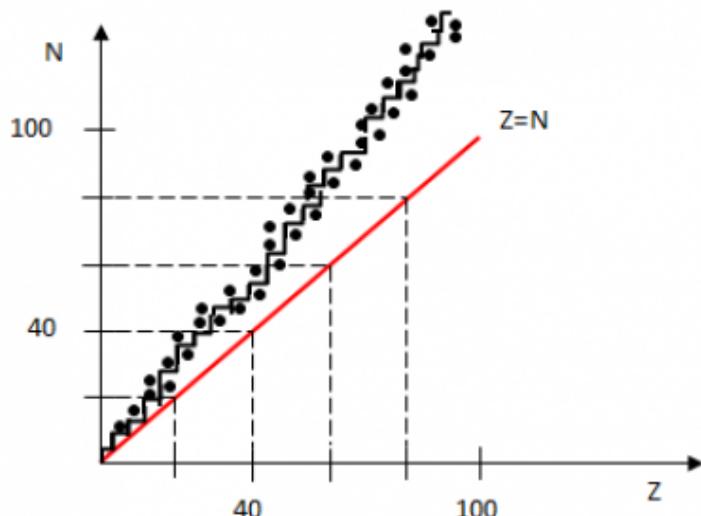


Figure 34: Ścieżka stabilności

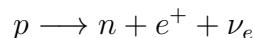
## 66 66. Promieniowanie alfa

promieniowanie, którego cząstką jest stablina konfiguracja 2 protonów i 2 neutronów, która jest taka sama jak w jądrze helu. Jest to promieniowanie jonizujące słabo przenikliwe (nawet naskórek jest w stanie je zatrzymać) powstające głównie przy rozpadach alfa. Energia promieniowania to przeważnie kilka MeV. Do rozpadu dochodzi, gdy niestabilne jądra (przy zjawisku tunelowania kwantowego) doiązy do mniejszej energii, która związana jest z inną

konfiguracją nukleonów. Liczba protonów i neutronów jest zachowana. Przykładem jest rozpad radony w powietrzu (Pracownia Technik Pomiarowych :3).

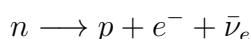
**Promieniowanie beta** - promieniowanie, którego cząstką jest elektron lub pozyton. Źródłem jest rozpad beta minus (z elektronem) i beta plus (z pozytonem). Promieniowanie bardziej przenikliwe od promieniowania alfa. Energie promieniowania związane z rodzajem źródła (od kilku keV do kilku MeV).

Równanie rozpadu beta plus:



UWAGA! proton musi być związany w jądrze, gdzie efektywna masa protonu musi być większa niż efektywna masa neutronu (wpływ na tę masę mają mn. energie wiązania w jądrze). Reakcja zachodzi np. na słońcu.

Równanie rozpadu beta minus:



Do rozpadu dochodzi również, gdy neutron jest swobodny. Czas życia neutronu to około 15 min. Do rozpadu dochodzi np. w reaktorach (rozпадy uranu oraz plutonu).

Oba rozпадy są przejawem oddziaływania słabego. Zaochowany ładunek, liczba leptonowa itd, ale zmienia się liczba protonów i neutronów.

**Promieniowanie gamma** - promieniowanie, którego cząstką jest kwant gamma i stanowi ono wysokoenergetyczne promieniowanie elektromagnetyczne. Energi są zwykle pomiędzy 100 keV i 10 MeV, choć nie ma ścisłego określenia. Promieniowanie jest najbardziej przenikliwe z wymienionych. Jest wiele źródeł jak na przykład promieniowanie hamowania, anihilacja.

## 67 67. Rozszczepienie jąder ciężkich: reakcje łańcuchowe, reaktor jądrowy, masa krytyczna.

Rozszczepienie- przemiana jądrowa, w której cięższe jądra rozpadają się na kilka lżejszych (najczęściej dwa). Zjawisko może zachodzić samoistnie (wykorzystywane np. do datowania radioizotopowego), lecz często wykorzystuje się rozszczepienie wymuszone polegające na destabilizacji jądra ciężkiego pierwiastka (na przykład  $U^{235}$ ,  $U^{238}$ ,  $Pu^{239}$ ,  $Pu^{241}$ ) poprzez zderzenie z neutronami (najczęściej), protonami i innymi cząstkami. Jest to wykorzystywane w reaktorach jądrowych.

Obok lżejszych jąder pierwiastków powstają również duże ilości energii wynoszone przez między innymi kwanty gamma, a także wolne neutrony, będące w stanie kontynuować reakcje i destabilizować kolejne jądra (reakcja łańcuchowa). Masą krytyczną nazywamy masę danego paliwa, w której dochodzi do podtrzymywania reakcji łańcuchowej. Masa ta zależna jest nie tylko od rodzaju paliwa, ale też od kształtu i materiału otaczającego paliwo. Zwiększenie masy prowadzi do kumulowania coraz większej energii (broń atomowa).

## 68 68. Rodzaje cząstek elementarnych: leptony i hadrony i kwarkowa teoria budowy hadronów.

Cząstakimi elementarnymi budującymi materię są leptony i kwarki. Leptony są w statnie występuwać samoistnie, natomiast kwarki potrzebują "partnerów", tworząc hadrony.

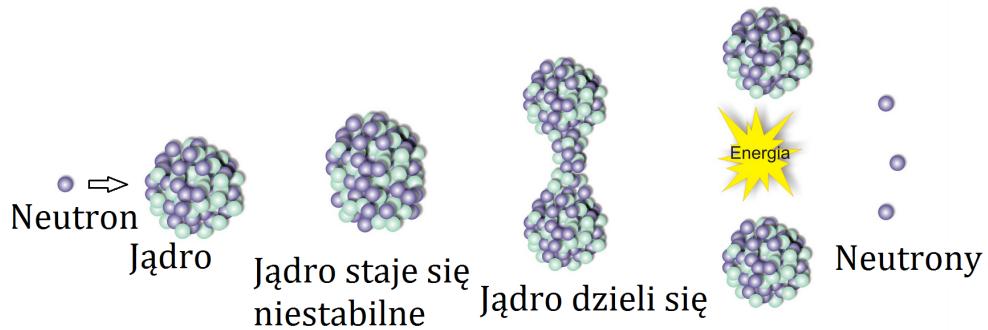


Figure 35: Schemat rozczepienia wymuszonego

Leptony to grupa 12 cząstek:

- elektron,
- mion,
- taon,
- 3 rodzaje neutrin (elektronowe, mionowe, taonowe)

oraz odpowiadające antycząstki:

- pozyton,
- antymion,
- antytaon,
- 3 rodzaje antyneutrin.

Poza neutrinami wszystkie mają ładunek elektryczny równy "-1" (dla antycząstek "+1"), wszystkie oddziaływują słabo. Posiadają liczbę leptonową, która mówi o tym, że po obu stronach reakcji liczba leptonów jest sobie równa. Posiadają zapach (elektronowy, mionowy bądź taonowy), który nie jest zachowany w oscylacjach neutrin.

Kwarków również jest 12:

- górnny (u) - ładunek  $+\frac{2}{3}$ ,
- dolny (d) - ładunek  $-\frac{1}{3}$ ,
- dziwny (s) - ładunek  $-\frac{1}{3}$ ,
- powabny (c) - ładunek  $+\frac{2}{3}$ ,
- niski (b) - ładunek  $-\frac{1}{3}$ ,
- wysoki (t) - ładunek  $+\frac{2}{3}$

oraz odpowiadające antycząstki. Poza oddziaływaniami elektromagnetycznymi i słabymi, oddziaływują również silnie, co jest związane z ich ładunkiem kolorowym (zielony, niebieski, czerwony. To tylko nazwy i nie są związane w żaden sposób z optyką). Bozonami w tym oddziaływaniu jest 8 bezmasowych gluonów, które same również posiadają kolor (sprzegają się same do siebie). Koniecznym do utworzenia hadronu jest, aby efektywny ładunek kolorowy był neutralny, co można osiągnąć przez złożenie trzech kwarków o trzech różnych kolorach (barion) lub z dwóch w parach np. czerwony-antyczerwony (mezon). Charakterystyczną liczbą kwantową jest liczba barionowa (1 dla barionów, 0 dla mezonów), która poki co nie jest skojarzona z żadną symetrią wynikającą z głębszych praw fizyki (poszukiwania rozpadu protony, czyli najbliższego hadronu).

Hadronami (barionami) są np. proton i neutron, razem nazywane "nukleonami".

## Astrofizyka dla fizyków

### 69 Kosmiczna nukleosynteza: rola gwiazd i wcześniejszych etapów ewolucji Wszechświata.

Można wyróżnić trzy sposoby naturalnej produkcji pierwiastków (pomijając rozpady). Są to pierwotna nukleosynteza, nukleosynteza poprzez reakcje termojądrowe zachodzące w gwiazdach oraz nukleosynteza następująca w wybuchach supernowych.

Pierwsze jądra wodoru (protony) powstały, gdy temperatura się na tyle ochłodziła, by kwarki mogły się związać w hadrony. Za okres dominacji hadronów uznaje się okres  $10^{-6}$  s – 1 s po Wielkim Wybuchu (pBB). Dalsze formowanie się pierwiastków następowało w trakcie pierwotnej nukleosyntezy, którą datuje się na 10 s –  $10^3$  s pBB. Powstały wtedy jądra deuteru ( $^2\text{H}$ ), trytu ( $^3\text{H}$ ), helu ( $^3\text{He}$  i  $^4\text{He}$ ), litu ( $^7\text{Li}$ ) oraz berylu ( $^7\text{Be}$ ). Znajdywane próbki berylu-7 nie są uznawane za pochodzące z tego okresu ze względu na niewielki czas półtrwania (53 dni). W trakcie rozpadu  $^7\text{Be}$  przekształcał się w  $^7\text{Li}$ .

Gwiazdy, które powstały znacznie później odpowiedzialne były za kolejną nukleosyntezę. Dzięki nim powstały pierwiastki aż do żelaza włącznie. Pierwotnym substratem był wodór, który był spalany w hel. Dalej jądra helu były syntetyzowane w atomy cięższych pierwiastków, aż do żelaza.

Często się mówi, że na żelazie synteza się kończy, bo jądro żelaza  $^{56}\text{Fe}$  jest najstabilniejszym jądrem w przyrodzie. Tak naprawdę  $^{56}\text{Fe}$  posiada najmniejszą masę przypadającą na nukleon, a najstabilniejszym jądrem w przyrodzie jest nikiel  $^{62}\text{Ni}$ . Posiada on największą energię wiązana na nukleon (masa na nukleon  $\neq$  energia wiązania na nukleon, bo masa protonu  $\neq$  masa neutronu). Procesy syntezy w gwiazdach faworyzują produkcję izotopu  $^{56}\text{Ni}$  (zamiast  $^{62}\text{Ni}$ ), który jest mniej stabilny i rozpada się do żelaza  $^{56}\text{Fe}$ .

Największe gwiazdy gdy kończą swój żywot, eksplodują w postaci supernowej. W tym procesie powstaje duże ciśnienie i uwalnia się dużo energii. Właśnie wtedy powstaje reszta znanego nam układu okresowego.

## 70 70.Hipoteza Wielkiego Wybuchu; rozszerzanie Wszechświata; promieniowanie reliktowe.

Obecnie wiemy, że wszechświat się rozszerza (i to coraz szybciej). Wynika to z obserwacji Hubble'a, który zauważył, że widma wszystkich galaktyk są przesunięte w kierunku czerwieni. Zgodnie ze zjawiskiem Dopplera, wskazuje a to na to, że wszystkie te galaktyki się od nas oddalają, co interpretujemy jako rozszerzanie się samego wszechświata. Mimo że rozszerzanie się lokalnie nie jest duże, rozszerzanie między odległymi punktami wszechświata dzieje się z prędkością większą niż prędkość światła. Oznacza to, że są obszary wszechświata, które nie są w stanie się skomunikować.

Ekstrapolacja ekspansji wszechświata wstecz w czasie wskazuje na to, że wszechświat kiedyś był niezwykle gęstym i zwartym miejscem. OTW wskazuje na istnienie osobliwego punktu, w którym gęstość była nieskończona. Ten opis jest w konflikcie z mechaniką kwantową i nie wiemy, jak było naprawdę.

To co udało nam się potwierdzić eksperymentalnie to czas od  $10^{-12}$  s od Wielkiego Wybuchu (dzięki LHC). Był to okres istnienia plazmy kwarkowo-gluonowej, a temperatura wszechświata wynosiła wtedy ok.  $10^{12}$  K. W tej temperaturze, w której wszystkie cztery znane oddziaływanie istniały niezależnie od siebie, ale ciągle zbyt duża by powstały hadrony. Wszechświat był wtedy nieprzejrzysty, fotony silnie oddziaływały z plazmą i ich średnia droga swobodna była niewielka.

Wraz z ochładzaniem się wszechświata powstały hadrony  $10^{-6}$  s pBB, a w końcu też pierwsze jądra wodoru, helu i litu. Wszechświat wtedy przestał być przezroczysty i "uwięzione" fotony mogły się wydostać. Teraz ich ślad widzimy w postaci promieniowania reliktowego zwanego też mikrofalowym promieniowaniem tła (Rysunek 36). Wtedy te fotony miały znacznie wyższe energie (temperatura 4000 K), ale rozszerzanie się przestrzeni wszechświata doprowadziło do tego, że teraz widzimy ich fal jako dużo dłuższe niż w momencie ich uwolnienia.

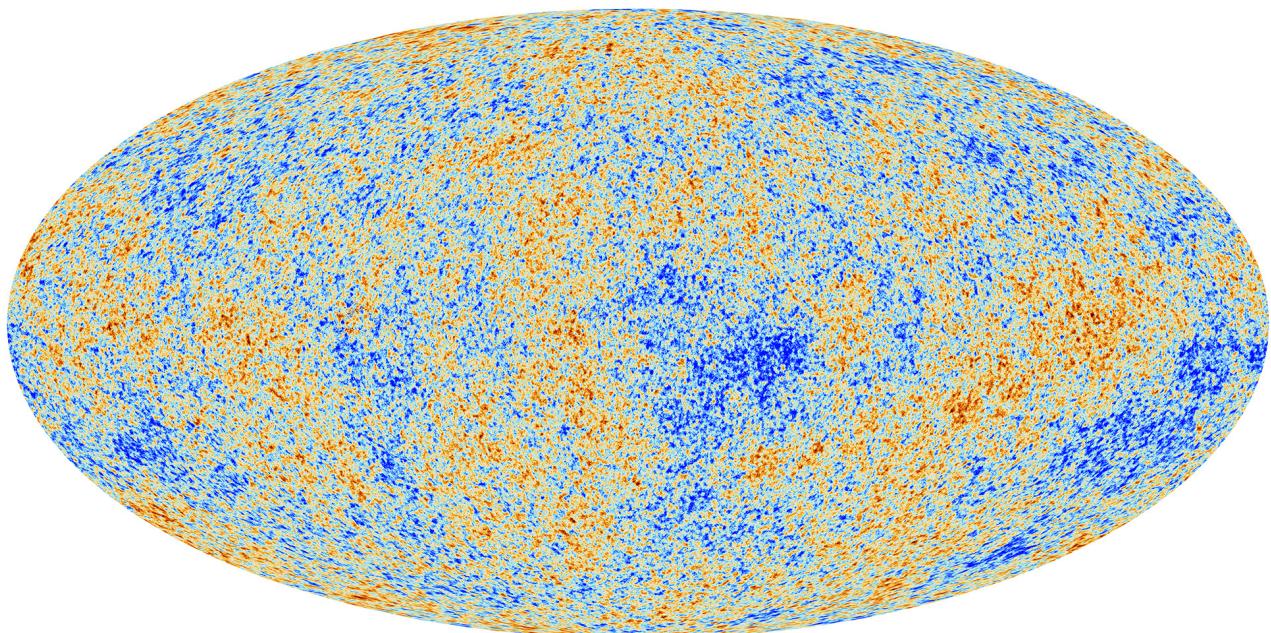


Figure 36: Promieniowanie reliktowe obserwowane przez satelitę Planck

Rysunek 36 przedstawia rozrztut temperatury wszechświata na podstawie promieniowania reliktowego. Odchylenia temperatury są rzędu 0,01 – 0,001 % (słownie: jednej setnej – jednej tysięcznej procenta). Wobec czego mikrofalowe promieniowanie tła daje obraz wszechświata niezwykle jednorodnego, z niewielkimi odchyleniami temperatury. To rodziło wiele pytań, np. jak to możliwe, że tak duża przestrzeń mogła mieć tak równomierny rozkład temperatury (biorąc pod uwagę, że dla odpowiednio odległych punktów niemożliwe jest przesłanie informacji między nimi ze względu na rozszerzanie się wszechświata)? To oznaczało, że wszechświat kiedyś musiał być bardzo dobrze wymieszany miejscem, jeszcze zanim nastąpiło jego rozszerzanie.

Aby wytłumaczyć jednorodność wszechświata, został zaproponowany model inflacji według którego wszechświat rzeczywiście kiedyś był bardzo gęstym, jednorodnym miejscem. Potem jednak doszło do niezwykle szybkiego powiększania się liniowych rozmiarów wszechświata o czynnik  $10^{26}$  (czyli objętość o czynnik  $10^{78}$ ) w ciągu zaledwie  $10^{-33} – 10^{-32}$  s. Brak idealnej jednorodności wszechświata mógłby też być tłumaczony przez kwantowe fluktuacje sprzed inflacji.

Metaforycznie rzecz ujmując, wszechświat kiedyś był powierzchnią małego balonika, na której wszystko (czymkolwiek to „wszystko” było) było świetnie wymiesiane. Następnie balonik nadmuchał się do niemożliwie wielkich rozmiarów, ale pierwotne uporządkowanie między odległymi jego fragmentami pozostało.

## 71 71. Ciemna materia, ciemna energia – zagadki współczesnej kosmologii.

Zarówno ciemna materia, jak i ciemna energia są terminami określającymi byty, które nie wiemy czym są, ale z naszych obserwacji wynika, że powinny mieć pewne określone własności. Nazwy odzwierciedlają nasz skrajny brak wiedzy co do ich natury.

### Ciemna materia

Ciemna materia jest substancją, która ma oddziaływać wyłącznie grawitacyjnie. Co za tym idzie, nie może być zaobserwowana przy pomocy fal elektromagnetycznych. Jej obecność możemy rejestrować tylko poprzez obserwację innych obiektów oddziałujących grawitacyjnie. Obserwowanej, promieniującej materii jest zbyt mało by móc nią wytłumaczyć ruch gwiazd oddalonych od centrum galaktyk oraz ruch galaktyk w gromadach.

Przykładem jest problem krzywych rotacji galaktyk. Obserwowana zależność prędkości gwiazd w galaktyce w zależności od odległości od centrum nie zgadza się z rozkładem widocznej masy. Wygląda to tak, jakby tej materii było zwyczajnie więcej, niż jesteśmy w stanie jej dostrzec na podstawie jej świecenia. W związku z tym, że istnieją eksperymenty, które potwierdzają, jak i przeczą istnieniu ciemnej materii powstały inne modele mające tłumaczyć obserwowane zjawiska jak m.in. zmodyfikowana mechanika Newtonowska (MOND). Niezależnie od tego, czy ciemna materia istnieje, czy nie, są zjawiska grawitacyjne, które nie zgadzają się ze współczesną fizyką. Ciemna materia jest próbą wytłumaczenia ich.

Istnieją różne propozycje czym ciemna materia mogłaby być. Mogłyby się na nią składać słabo widoczne ciała niebieskie jak czarne dziury, gwiazdy neutronowe, brązowe karły zbiorczo nazywane MACHO (massive astrophysical compact halo object). Na ciemną materię mogłyby się też składać skupiska cząstek, których jeszcze nie było nam dane obserwować – np. takie,

które przewiduje koncepcja supersymetrii. Z obserwacji halo naszej Galaktyki wynika, że najwyżej 2% ciemnej materii można wytłumaczyć obiektami typu MACHO.

## Ciemna energia

Po przeglądaniu różnych źródeł znalazłem fajny „artykuł” który w zgrabny i zwięzły sposób opisuje ciemną energię. Link jest <https://www.quora.com/What-is-the-relation-between-dark-energy-and-virtual-particle-production-Can-the-expansion-of-the-universe-be-attributed-to-an-increase-in-the-number-of-virtual-particles>. To, co tutaj napisałem, głównie jest przetłumaczoną częścią tekstu z tej strony, ale nie tylko.

Zaczęło się od tego, że Einstein szukał sposobu na zmodyfikowanie swojego równania OTW łączącego tensor metryczny z gęstością materii-energii tak by mógł jego wynikiem być statyczny wszechświat (Einstein wtedy jeszcze nie wiedział, że wszechświat się rozszerza). Wprowadził wtedy do równania stałą kosmologiczną  $\Lambda$ . Okazało się, że taki wszechświat nie może być stabilny. Akurat w międzyczasie Hubble odkrył, że wszechświat się rozszerza.

Gdyby uznać, że stała kosmologiczna nie jest jedynie stałą, a rzeczywiście reprezentuje jakiś byt będący formą masy/energii to okazuje się, że to coś (ciemna energia) jest opisywane przez równanie stanu  $p = -\rho$ , gdzie  $p$  to ciśnienie, a  $\rho$  to gęstość (tego czegoś). Wynikają z tego dwie interesujące własności. Normalnie, podczas kompresji gazu trzeba wykonać pracę, zaś gaz wykonuje pracę podczas rozprężania. W powyższym równaniu stanu dzieje się na odwrót. W efekcie grawitacja działa repulsywnie na ciemną energię i prowadzi do rozszerzania się wszechświata.

Wraz z rozszerzaniem się wszechświata gęstość materii i promieniowania spada, a ciemnej energii jest stała. Wraz z rozszerzaniem się wszechświata repulsywne działanie ciemnej energii staje się czynnikiem dominującym, co powoduje przyspieszanie ekspansji.

Ciekawym kandydatem na ciemną energię jest kwantowa próżnia (której istnienie zostało udowodnione przez Casimira, ciekawy eksperyment, warto przeczytać). Kwantowa próżnia jest morzem fluktuujących wirtualnych cząstek i posiada podobne właściwości do ciemnej energii, tzn. jej gęstość energii jest większa od zera oraz również cechuje się powyższym równaniem stanu. Jednak gdy próbowało oszacować gęstość energii próżni i porównać ją z ta wynikającą ze stałej kosmologicznej otrzymano wartości różniące się o dziesiątki rzędów wielkości (sic!). W zależności od założeń różnica wynosi między 40 a 100 rzędów wielkości.

Obecnie rozważaną inną formą ciemnej materii jest kwintesencja, będąca polem skalarnym o równaniu stanu  $p = \omega\rho$ , gdzie  $\omega$  jest stałą  $< -\frac{1}{3}$ . Tak więc można ją traktować, jak uogólnienie stałej kosmologicznej. Zasadniczą różnicą jest to, że gęstość kwintesencji, jak i jej równanie stanu, mogą się zmieniać w przeciwnieństwie do statycznej stałej kosmologicznej.

Z pomiarów krzywizny wszechświata na podstawie mikrofalowego promieniowania tła wynika, że geometria wszechświata jest płaska (kartezjańska, suma kątów w trójkącie =  $180^\circ$ ) albo bardzo zbliżona do płaskiego. Daje to wiąz na gęstość całej masy-energii we wszechświecie i w efekcie pozwala oszacować ilość ciemnej energii. Szacunki dają, że nasz wszechświat składa się w 4.9% ze zwykłej materii barionowej, w 26.8% z ciemnej materii oraz w 68.3% z ciemnej energii.