

Zagadnienia do egzaminu licencjackiego

Stanisław Sołtan
student fizyki F UW

rok 2014

Spis treści

Część A	3
I. Podstawowe prawa fizyki	3
1. Zasady względności Galileusza i Einsteina; układy inercjalne.	3
2. Jednoczesność zdarzeń i przyczynowość w szczególnej teorii względności. .	5
3. Transformacja Lorentza czasu i położenia i jej konsekwencje (skrócenie Lorentza, dylatacja czasu); przykłady wielkości podlegających transformacji Lorentza podobnie jak czas i położenie (czterowektory).	6
4. Pęd, energia całkowita i energia wewnętrzna cząstek relatywistycznych. . .	9
5. Zasady zachowania w fizyce.	10
6. Oddziaływania fundamentalne: nośniki i zasięg oddziaływania, ładunki. .	12
II. Mechanika	12
7. Zasady dynamiki Newtona i granice ich stosowalności.	12
8. Niezmienniczość równań Newtona względem transformacji Galileusza. . .	13
9. Przykłady sił potencjalnych i niepotencjalnych.	14
10. Prawo powszechnego ciążenia.	15
11. Rozwiązania równań Newtona ruchu punktu materialnego dla potencjału harmonicznego i centralnego.	15
12. Opis ruchu N oddziałujących mas, w tym zagadnienie dwóch ciał i problem Keplera (środek masy i zasada zachowania momentu pędu).	17
13. Moment bezwładności i zasady dynamiki ruchu bryły sztywnej.	19
14. Hydrostatyka: ciśnienie, prawo Pascala, prawo Archimedesasa i pływanie ciał.	21
III. Elektrodynamika	23
15. Ładunek elementarny i doświadczenie Millikana.	23
16. Prawo Coulomba, prawo Gaussa, potencjał pola elektrycznego.	23
17. Prąd elektryczny, prawo Ohma, rozkład prądu i pola elektrycznego w przewodniku, zasada zachowania ładunku elektrycznego. równanie ciągłości dla prądu.	26
18. Metale, półprzewodniki.	27
19. Obwody elektryczne: prawo Ohma i prawa Kirchhoffa.	30
20. Pole magnetyczne prądu stałego, prawo Biot-Savarta.	31
21. Siła Lorentza i ruch cząstek naładowanych w polach elektrycznym i magnetycznym.	33
22. Wyznaczanie stosunku e/m , spektroskop masowy i wyznaczanie mas atomów (izotopów).	34
23. Prawo indukcji Faradaya i reguła Lenza.	35
24. Obwody LC i RLC: drgania, drgania tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.	36
25. Pełny układ równań Maxwella z warunkami brzegowymi na granicy ośrodków. Równania Maxwella w ośrodkach materialnych – przykłady równań materiałowych.	39

26.	Fale elektromagnetyczne jako rozwiązanie równania Maxwella.	43
27.	Prawa odbicia i załamania fal elektromagnetycznych; współczynnik odbicia, polaryzacja fali odbitej i załamanej (kąt Brewstera).	44
IV.	Drgania i fale	47
28.	Ruch okresowy (parametry); rozkład na drgania proste (analiza Fouriera).	47
29.	Oscylator harmoniczny: drgania swobodne, tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.	48
30.	Rozkład drgań układów o wielu stopniach swobody (np. układu punktów materialnych połączonych sprężynami) na drgania własne.	50
31.	Prawa odbicia i załamania fal na granicy ośrodków.	51
32.	Zjawisko Dopplera dla różnych rodzajów fal (akustycznych i elektromagnetycznych w próżni).	52
33.	Spójność, dyfrakcja i interferencja fal: dyfrakcja na pojedynczej szczelinie, doświadczenie Younga, siatka dyfrakcyjna.	53
V.	Termodynamika	55
34.	Równowaga termiczna i temperatura; skale temperatury.	55
35.	Ciepło, procesy wymiany ciepła.	57
36.	Równanie przewodnictwa cieplnego i zjawiska przewodzenia ciepła w kryształach.	58
37.	Promieniowanie cieplne ciał: współczynniki absorpcji i emisji promieniowania, ciało doskonale czarne, prawo przesunięć Wiena, prawo Stefana-Boltzmanna.	59
38.	Stan równowagi termodynamicznej.	61
39.	II zasada termodynamiki i pojęcie entropii.	61
40.	Równanie stanu gazu doskonałego, przemiany gazowe, molowe ciepła właściwe gazów.	64
41.	Przemiany fazowe I rodzaju (przykłady) i współlistnienie faz; przemiany fazowe II rodzaju.	67
42.	Gazy rzeczywiste i ciecze: para nasycona, parowanie i wrzenie.	68
43.	Granice rozdziału faz; napięcie powierzchniowe, włoskowatość.	69
44.	III zasada termodynamiki i nieosiągalność zera bezwzględnego.	69
	Część B	73
VI.	Fizyka kwantowa	73
45.	Doświadczenia świadczące o istnieniu atomów i cząsteczek; liczba Avogadro.	73
46.	Gazy, ciecze i ciała stałe z punktu widzenia atomowej (cząsteczkowej) teorii budowy materii.	74
47.	Rozkład Boltzmanna: związek temperatury z energią kinetyczną cząsteczek gazu, zależność gęstości gazu od wysokości w zewnętrznym polu grawitacyjnym.	74
48.	Statystyki kwantowe; bozony i fermiony.	75
49.	Zjawisko fotoelektryczne; energia i pęd fotonu.	77
50.	Zjawisko Comptona.	77
51.	Hipoteza de Broglie'a, dualizm korpuskularno-falowy.	78
52.	Dyfrakcja fotonów i elektronów (doświadczenie Younga, dyfrakcja na kryształach).	79
53.	Doświadczenie Francka-Hertza.	79
54.	Pomiar w mechanice kwantowej (obserwable); zasada nieoznaczoności.	79
55.	Równanie Schrödingera, funkcja falowa i jej interpretacja.	81
56.	Rozwiązania równania Schrödingera dla cząstki w jednowymiarowej studni potencjału.	82
57.	Rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki rozpraszającej się na jednowymiarowej barierze potencjału i zjawisko tunelowe.	82
58.	Rozwiązania równania Schrödingera dla ruchu cząstki w potencjale harmonicznym.	83

59.	Atom wodoru w mechanice kwantowej.	84
60.	Stany energetyczne atomów; absorpcja i emisja promieniowania elektromagnetycznego.	85
61.	Emisja spontaniczna i wymuszona, zasada działania lasera.	86
62.	Atom w zewnętrznym polu elektrycznym i magnetycznym – zjawisko Starka, zjawisko Zeemana.	87
63.	Atomy wieloelektronowe, zakaz Pauliego.	88
64.	Nośniki prądu i modele mechanizmów przewodzenia prądu w metalach i półprzewodnikach.	89
65.	Budowa jądra atomowego: model kroplowy, półempiryczny wzór na masę jądra, średnia energia wiązania nukleonu w jądrze; „ścieżka stabilności” jąder.	91
66.	Rozpady jąder atomowych (promieniowanie alfa, beta i gamma): przykłady reakcji, zasady zachowania.	91
67.	Rozszczepienie jąder ciężkich: reakcje łańcuchowe, reaktor jądrowy, masa krytyczna.	92
68.	Rodzaje cząstek elementarnych: leptony i hadrony i kwarkowa teoria budowy hadronów.	93
VII.	„Astrofizyka dla fizyków”	93
69.	Kosmiczna nukleosynteza: rola gwiazd i wczesnych etapów ewolucji Wszechświata.	93
70.	Hipoteza Wielkiego Wybuchu; rozszerzanie Wszechświata, promieniowanie reliktowe.	94
71.	Ciemna materia, ciemna energia – zagadki współczesnej kosmologii.	94

Część A

I. Podstawowe prawa fizyki

1. Zasady względności Galileusza i Einsteina; układy inercjalne.

Definicja 1 (Układ inercjalny [1]) *Układ odniesienia, w którym punkt materialny porusza się bez przyspieszenia (tzn. jednostajnie i prostoliniowo), gdy „nic” z zewnątrz nań nie działa.*

Twierdzenie 1 (Równoważność układów inercjalnych [1]) *Każdy układ U' poruszający się względem układu inercjalnego U ruchem postępowym bez przyspieszenia jest też układem inercjalnym i odwrotnie, jeśli układy U i U' są inercjalne, to wynika stąd, że poruszają się względem siebie ruchem postępowym bez przyspieszenia.*

Można tym samym sformułować zasadę względności, że układy inercjalne względem siebie są sobie równoważne (nie istnieje wyróżniony układ odniesienia). Można oczekiwać istnienie pewnego przekształcenia pozwalającego znaleźć położenie danego punktu układu U' w innym układzie U . Mówi się o dwóch przekształceniach - Galileusza i Lorentza - i w związku z tym o dwóch zasadach względności¹. W zasadzie przekształcenie Galileusza jest jedynie przypadkiem granicznym przekształcenia Lorentza, lecz zasadnym jest mówienie o dwóch różnych zasadach względności:

- Wychodząc od podstawowych definicji kinematycznych prędkości i przyspieszenia oraz założenia absolutnych czasu i przestrzeni można po pierwsze udowodnić twierdzenie 1, a po drugie wyprowadzić przekształcenie Galileusza. Jest ono prawdziwe dla małych prędkości względnych, zaś absolutny czas i przestrzeń jest powszechnym wyobrażeniem i zgodny jest z historycznie ukształtowaną ludzką intuicją.

¹Przypis historyczny: zasada względności nosi imię Einsteina, gdyż to on stwierdził pierwszy, że przekształcenie Lorentza opisuje rzeczywistą transformację czasu i przestrzeni a nie jest tylko efektem związanym z eterem czy ciekawostką matematyczną.

- Postulat absolutnych czasu i przestrzeni okazał się trudny do uzgodnienia z wynikającą z praw Maxwella stałą prędkością światła; Einstein odrzucił go i zapostulował po pierwsze stałość prędkości światła w dowolnym inercjalnym układzie odniesienia, po drugie równoważność układów (patrz twierdzenie 1) [13].

Warto więc może podkreślić, że przekształcenie Lorentza wynika bezpośrednio z pewnych postulatów wyciąganych z zasady względności układów inercjalnych; więcej, jest to chyba jedyna możliwa transformacja spełniająca poniższe postulaty.

Zdefiniujmy układ inercjalny nieprimowany i primowany; zapiszmy od razu pozycję tego drugiego za pomocą czterowektora:

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} t \\ vt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor ten wskazuje pozycję $\mathbf{r}' = [t, 0, 0, 0]^T$ układu primowanego; zakładamy istnienie już wspomnianego przekształcenia współrzędnych przestrzennych i czasu:

$$\mathbf{r} = U_{\mathbf{v}}(\mathbf{r}')$$

zgodnie z którym

$$\mathbf{r}_0 = U_{\mathbf{v}} \left(\begin{bmatrix} t' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

Postulujemy na bazie zasady względności:

1. Punkt $x = 0$ w układzie primowanym to zgodnie z symetrią

$$\mathbf{r}'_0 = \begin{bmatrix} t \\ -vt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Nie spodziewamy się, że biegnąc w stronę krawężnika urośnie on nam tak, że się z nim zdeżymy; albo ruszając na słup uliczny, że z tego tylko powodu złamie się i uderzy nas w głowę. Zakładamy więc, że przekształcenie nie modyfikuje wektorów przestrzennych w płaszczyźnie prostopadłej do przestrzeni ruchu (i dalej ograniczymy się tylko do osi x).
3. $U_{\mathbf{v}}$ jest liniowe (dalej będzie więc zapisywane w formie macierzowej) co wynika z pewnej dowolności wyboru początku układu czy mierzenia czasu.
4. jeśli dodamy układ bisowany, możemy zapisać

$$\mathbf{r} = U_{\mathbf{v}_1} U_{\mathbf{v}_2} \mathbf{r}'' = U_{\mathbf{v}_2} U_{\mathbf{v}_1} \mathbf{r}'' = U_{\mathbf{v}} \mathbf{r}''$$

gdzie prędkości są względem odpowiednich układów.

Na bazie tych postulatów wyznaczamy kolejne wyrazy macierzy

$$U_{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

1. z (1): $C = vA$; $t_{x'=0} = At'_{x'=0}$;
2. z punktu 1: $D = A$; $t'_{x=0} = \frac{1}{A-vB} t_{x=0}$;

3. ale z symetrii zagadnienia: $t_{x'=0} = t'_{x=0}$, czyli

$$B = \frac{1}{v} \left(A - \frac{1}{A} \right)$$

W tym miejscu można przeskoczyć do Galileusza (najprostsze rozwiązanie: $A = 1$) albo dodać postulat o stałej prędkości światła i wysłać puls światła z układu nieprimowanego w momencie mijania się układów ($t = t' = 0$) [13]; my jednak postąpimy ciut inaczej.

4. Znajdźmy wartości i wektory własne macierzy:

$$\lambda_{\pm} = A + \sqrt{A^2 - 1}, \quad \left[1, \pm \frac{vA}{\sqrt{A^2 - 1}} \right]^T$$

Wektory własne są tak samo dobrym opisem przekształcenia co A , więc oznaczmy

$$c \equiv \frac{VA}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

i podstawmy

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma$$

$$B = \frac{1}{v} \left(A - \frac{1}{A} \right) = \frac{v}{c^2} \gamma \equiv \frac{1}{c} \beta \gamma$$

I rzeczywiście $\gamma \xrightarrow{c \rightarrow \infty} 1$.

5. Zapewne wypada teraz z punktu 4 wykazać, że c jest jednakowe dla przekształceń dla wszystkich v , ale to strasznie mozolne.

2. Jednoczesność zdarzeń i przyczynowość w szczególnej teorii względności.

Przez zdarzenie rozumie się konkretny punkt w czasoprzestrzeni, wyrażony przez czterowektor. Pojęcia jednoczesności i przyczynowości są ściśle związane z istnieniem w szczególnej teorii względności (STW) granicznej prędkości:

Twierdzenie 2 (Prędkość światła w próżni [14]) *Prędkość światła w próżni nie zależy od układu odniesienia, w którym jest obserwowana.*

Żaden sygnał nie może być przekazany ani w próżni, ani w ośrodku materialnym z prędkością większą niż prędkość światła w próżni.

Tym samym warunkiem koniecznym by zdarzenie A mogło być przyczyną zdarzenia B jest możliwość przesłania doń sygnału świetlnego. Jeśli więc dane zdarzenia zachodzą równocześnie², to nie są powiązane przyczynowo. Jednakże jednoczesność zdarzeń jest względna - zależy od wyboru układu odniesienia (przyczynowość lub jej możliwość nie jest względna). Jeśli dwa zjawiska nie mogą być powiązane przyczynowo, to istnieje układ odniesienia w którym zachodzą jednocześnie. Udowodnijmy to wszystko (po części), zaczynając od przyczynowości.

Ponieważ dyskutujemy dwa punkty, wystarczy że ograniczymy się do przestrzeni jednowymiarowej. Jeśli odległość pomiędzy zdarzeniami w jakimś układzie to $\Delta x = x_1 - x_2$, zaś odstęp czasowy to $\Delta t = t_1 - t_2$. Skoro prędkość światła w próżni to c , warunek konieczny dla przyczynowości wyznacza

$$c\Delta t \geq \Delta x$$

zaś niemożność powiązania zdarzeń przyczynowo wyznacza

$$c\Delta t < \Delta x$$

²Mamy np. dwie równoodległe eksplozje gwiazdowe na przeciwnych krańcach galaktyki, z których odbieramy sygnały świetlne - czy coś równie wytwornego

Oba wyrażenia możemy podnieść do kwadratu i zapisać jako:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 \geq 0, \quad (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$$

Definicja 2 (Interwał czasoprzestrzenny [13]) W trzech wymiarach:

$$(\Delta S)^2 := (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

Jest on niezmienniczy ze względu na obroty, przesunięcia i pchnięcia (tzn. zmianę układu odniesienia).

$(\Delta S)^2 > 0$ nazywamy interwałem czasowym, $(\Delta S)^2 = 0$ - zerowym, zaś $(\Delta S)^2 < 0$ - przestrzennym.

Niezmienniczość wykażę tylko dla pchnięć (wystarczy jeden wymiar) [13]. Weźmy przekształcenie Lorentza:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}$$

Ponieważ

$$\gamma^2 - (\beta\gamma)^2 = 1$$

możemy zapisać przekształcenie w postaci obrotu hiperbolicznego

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \chi & \sinh \chi \\ \sinh \chi & \cosh \chi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie $\chi = \operatorname{artanh} \beta$ nazywa się pospiesznością. Zapisujemy:

$$\begin{aligned} (ct)^2 - x^2 &= (ct' \cosh \chi + x' \sinh \chi)^2 - (ct' \sinh \chi + x' \cosh \chi)^2 = \\ &= (ct')^2 (\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi) - x'^2 (\cosh^2 \chi - \sinh^2 \chi) = (ct')^2 - x'^2 \end{aligned}$$

c.b.d.u.

Jak pokazałem tuż przed definicją 2, interwał czasowy lub zerowy to warunek konieczny dla istnienia związku przyczynowego między zdarzeniami.

Twierdzenie 3 (Względność jednoczesności) [13] *Dla interwału przestrzennego możemy znaleźć układ odniesienia, w którym dwa zdarzenia odbywają się w tej samej chwili, czyli są przyczynowo niezależne.*

Dowód (własny) dla pchnięć wzdłuż osi x (obroty i przesunięcia nie powinny nic zmienić w tej materii). Mamy jakieś wartości x' i $ct' \neq 0$; przekształcamy:

$$0 \equiv ct = ct' \cosh \chi + x' \sinh \chi$$

ale bardzo łatwo znaleźć przekształcenie odwrotne dla (2) - czy też przekształcenie do układu lecącego w drugą stronę:

$$ct'' = ct' \cosh \chi - x' \sinh \chi$$

To jest to samo χ , a iloczyn obu wyrażeń musi być zero, czyli

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (ct' \cosh \chi + x' \sinh \chi)(ct' \cosh \chi - x' \sinh \chi) = (ct')^2 \cosh^2 \chi - x'^2 \sinh^2 \chi = \\ &= (ct')^2 \cosh^2 \chi + ((\Delta S)^2 - (ct')^2) \sinh^2 \chi = (\Delta S)^2 \sinh^2 \chi + (ct')^2 \end{aligned}$$

tym samym $\sinh^2 \chi = -\frac{(ct')^2}{(\Delta S)^2} > 0$, co ma rozwiązanie - c.b.d.u.

3. Transformacja Lorentza czasu i położenia i jej konsekwencje (skrócenie Lorentza, dylatacja czasu); przykłady wielkości podlegających transformacji Lorentza podobnie jak czas i położenie (czterowektory).

Przekształcenie Lorentza pozwala wyrazić współrzędne przestrzenne i czas w jednym układzie inercyjnym współrzędnymi w innym układzie inercyjnym. Niech v będzie prędkością wzdłuż osi x układu primowanego; wtedy

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

a c to stała przyrody równa prędkości światła w próżni. Przekształcenie Lorentza można wyprowadzić z równoważności układów inercjalnych (łącznie ze stałą c , choć oczywiście bez stwierdzenia jej fizycznego znaczenia). Elementy przestrzeni wektorowej na której działa to przekształcenie nazywa się czterowektorami. Pierwszą współrzędną czterowektora nazywa się zerową, pozostałe - przestrzennymi [13]. Ponieważ

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \quad (4)$$

, widać od razu, że przekształcenie odwrotne powstaje przez podstawienie $-v$ zamiast v

Twierdzenie 4 (Niezmienność transformacji [13]) *Wielkość*

$$S^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

jest niezmiennikiem przekształcenia Lorentza. Wielkość ta, wyrażona dla różnic czterowektorów, nazywa się interwałem czasoprzestrzennym.

Macierz

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

nazywa się niezmiennikiem w postaci macierzowej i dla przekształcenia Lorentza Λ spełnia

$$\Lambda^{-1}g\Lambda = g \quad (5)$$

By wykazać (3.), trzeba znowu skorzystać z (4). Warto pokazać następnie, że dla obrotu we współrzędnych przestrzennych R także $R^{-1}gR = g$, więc wreszcie

$$(R^{-1}\Lambda R)^{-1}gR^{-1}\Lambda R = R^{-1}\Lambda^{-1}RgR^{-1}\Lambda R = g$$

jak możnaby oczekiwać, obrót Λ zachowuje niezmiennik. W ogóle macierz $R^{-1}\Lambda R$ też jest przekształceniem Lorentza.

Skoro zaś równanie (3) zapiszemy jako $\mathbf{A} = \Lambda\mathbf{A}'$, to możemy zdefiniować mnożenie w przestrzeni czterowektorów, zachowywane przez Λ :

$$\mathbf{A}^T g \mathbf{B} = \mathbf{A}'^T \Lambda^{-1} g \Lambda \mathbf{B}' = \mathbf{A}'^T g \mathbf{B}'$$

Dla $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ uzyskujemy niezmiennik S^2 przekształcenia Lorentza, mający matematycznie sens normy (długości czterowektora).

Definicja 3 (Skrócenie Lorentza i dylatacja czasu [15]) Dla np. pręta o długości $L_0 = x_2 - x_1$, gdzie x_1 i x_2 to współrzędne początku i końca pręta, z transformacji Lorentza uzyskujemy $L = x'_2(t) - x'_1(t) = \frac{L_0}{\gamma}$, co nazywamy skróceniem Lorentza-Fitzgeralda. Wynik ten uzyskaliśmy dla warunku $t' = 0$; ponieważ pręt w układzie nieprimowanym spoczywa, jego długość w tym układzie nie zależy od czasu. Nakładając warunek $t = 0$, uzyskujemy $L = \gamma L_0$

Podobnie, poruszający zegar wydaje się opóźniać w stosunku do zegara w spoczynku: $t = \gamma \tau$ (gdzie τ to czas własny), co nazywamy dylatacją (wydłużeniem) czasu.

Zjawiska te można omawiać na diagramie Minkowskiego. Osie diagramu Minkowskiego wyznaczają współrzędna zerowa oraz np. pierwsza współrzędna przestrzenna. Linie odpowiadające spoczynkowi oraz linie odpowiadające ciągom jednoczesnych zdarzeń w jakimś układzie inercyjnym primowanym w ruchu względem nieprimowanego wyznaczają „przekrzywiony” układ współrzędnych układu primowanego:

$$ct' = 0 \Rightarrow \begin{cases} ct = \beta \gamma x' = \beta x \\ x = \gamma x' \end{cases}, \quad x' = 0 \Rightarrow \begin{cases} ct = \gamma ct' \\ x = \beta \gamma ct' = \beta ct \end{cases} \quad (6)$$

Skrócenie Lorentza jest ściśle związane z kwestią jednoczesności pomiaru położenia końców pręta. Oba zjawiska można łatwo wyznaczyć z pomocą interwału czasoprzestrzennego. Niech pręt spoczywa w układzie poruszającym się - jego długość w tym układzie jest niezmiennikiem Lorentza; mamy

$$(ct)^2 - L^2 = -L_0^2.$$

Ale z (6) dla $ct' = 0$ uzyskujemy

$$L^2 (1 - \beta^2) = L_0^2, \text{ czyli } L = \gamma L_0$$

Niech teraz jakiś zegar porusza się między dwoma zsynchronizowanymi zegarami - czas własny τ który odmierzy jest niezmiennikiem Lorentza; mamy

$$(ct)^2 - x^2 = \tau^2.$$

Ale z (6) dla $x' = 0$ uzyskujemy

$$(ct)^2 (1 - \beta^2) = \tau^2, \text{ czyli } t = \gamma \tau$$

Z dylatacją czasu związany jest paradoks bliźniąt: jeśli jeden bliźniak porusza się rakieta podświetlną a drugi spoczywa na Ziemi, to gdy pierwszy powróci na Ziemię będzie młodszy od drugiego. Paradoks pojawia się, gdy zauważamy, że przecież drugi też się poruszał względem pierwszego. Błąd rozumowania polega na tym, że bliźniak w rakiecie nie znajdował się w układzie inercyjnym. Należy jednak zauważyć, że jeśli odległości w czasoprzestrzeni wyznaczane są przez interwały czasoprzestrzenne, to najprostsza droga pomiędzy dwoma punktami w czasoprzestrzeni (po linii prostej) wcale nie jest najkrótsza! W istocie im bardziej zaplątana i dłuższa droga w czasoprzestrzeni, tym krótsza ona jest dla bliźniaka w rakiecie [25].

Działając transformacją Lorentza na infinitesimalne zmiany dt' , dx' , dy' i dz' i znajdując następnie pochodne w układzie nieprimowanym (bądź korzystając z warunku, że złożenie transformacji Lorentza też daje transformację Lorentza), można znaleźć przekształcenie prędkości [15] (V to prędkość względna układów odniesienia):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V c^{-2}}, \\ v_y &= \frac{v'_y}{1 + v'_x V c^{-2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \\ v_z &= \frac{v'_z}{1 + v'_x V c^{-2}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Widać więc, że prędkość nie transformuje się jak czterowektor – i w związku z tym również pęd w rozumieniu Newtonowskim.

Możemy jednak obliczyć pochodną czterowektora położenia po czasie własnym τ poruszającego się ciała. Z dylatacji czasu uzyskujemy od razu

$$dt = \gamma d\tau$$

, czyli

$$M \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)^T = \mathbf{v} \gamma M$$

gdzie przemnożyliśmy wszystko przez masę cząstki M . Wzór ten jest analogiczny do Newtonowskiej definicji pędu, jeśli masa rejestrowana cząstki poruszającej się wynosi γM .

Definicja 4 (Pęd relatywistyczny [16])

$$\mathbf{p} \equiv \frac{M \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Idąc dalej, τ jest to niezmiennik transformacji Lorentza, więc

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (cdt)^2$$

dzielimy więc przez $(d\tau)^2$, mnożymy przez $M^2 c^2$ (M to masa) i uzyskujemy kolejny niezmiennik

$$M^2 c^4 = M^2 c^4 \gamma^2 - c^2 p^2$$

Definicja 5 (Całkowita energia relatywistyczna [16]) Dla $\beta \ll 1$ otrzymamy

$$Mc^2 \gamma \approx Mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \dots\right) \approx Mc^2 + \frac{1}{2} M v^2 + \dots$$

Wyraz $\frac{1}{2} M v^2$ jest energią kinetyczną w przypadku nierelatywistycznym. Załóżmy, że definiujemy całkowitą energię relatywistyczną E cząstki swobodnej wzorem

$$E \equiv \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ponieważ M i $d\tau$ są niezmiennikami Lorentza, $[Ec^{-2}, p_x, p_y, p_z]$ transformuje się zgodnie z przekształceniem Lorentza i jest czterowektorem. Zachęteni tym przykładem, możemy próbować przedstawić czterowektor siły [13]

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma [Pc^{-1}, F_x, F_y, F_z]^T.$$

4. Pęd, energia całkowita i energia wewnętrzna cząstek relatywistycznych.

Obliczmy pochodną czterowektora położenia po czasie własnym τ poruszającego się ciała. Z dylatacji czasu uzyskujemy od razu

$$dt = \gamma d\tau,$$

czyli

$$M \left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right)^T = \mathbf{v} \gamma M$$

gdzie przemnożyliśmy wszystko przez masę cząstki M . Wzór ten jest analogiczny do Newtonowskiej definicji pędu, jeśli masa rejestrowana cząstki poruszającej się wynosi γM .

Definicja 6 (Pęd relatywistyczny [16])

$$\mathbf{p} \equiv \frac{M\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Idąc dalej, τ jest to niezmiennik transformacji Lorentza, więc

$$(cd\tau)^2 = (cdt)^2 - ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) (cdt)^2$$

dzielimy więc przez $(d\tau)^2$, mnożymy przez M^2c^2 (M to masa) i uzyskujemy kolejny niezmiennik

$$M^2c^4 = M^2c^4\gamma^2 - c^2p^2 \quad (7)$$

Definicja 7 (Całkowita energia relatywistyczna [16]) Dla $\beta \ll 1$ otrzymamy

$$Mc^2\gamma \approx Mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \dots\right) \approx Mc^2 + \frac{1}{2}Mv^2 + \dots$$

Wyraz $\frac{1}{2}Mv^2$ jest energią kinetyczną w przypadku nierelatywistycznym. Załóżmy, że definiujemy **całkowitą energię relatywistyczną** E cząstki swobodnej wzorem

$$E \equiv \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (8)$$

Ponieważ M i $d\tau$ są niezmiennikami Lorentza, $[Ec^{-2}, p_x, p_y, p_z]$ transformuje się zgodnie z przekształceniem Lorentza i jest czterowektorem.

Rozważmy przy tej okazji cząstkę przyspieszaną w kierunku swojego ruchu przez pole elektryczne [17]:

$$\dot{p} = q\varepsilon.$$

Całkując to równanie i przekształcając możemy uzyskać wyrażenie na v^2 :

$$v^2 = \frac{\left(\frac{q\varepsilon t}{Mc}\right)}{1 + \left(\frac{q\varepsilon t}{Mc}\right)^2} c^2 \approx \left(1 - \left(\frac{Mc}{q\varepsilon t}\right)^2\right) c^2,$$

gdzie przybliżenie uzyskano dla dużych t . Dla tego przybliżenia

$$\gamma \approx \frac{q\varepsilon t}{Mc}$$

Więc z (8) wynika, że energia rośnie w nieskończoność (podobnie pęd) podczas gdy prędkość zbiega coraz wolniej do c .

Pojawiająca się w (8) γ jest związana z przekształceniem do układu własnego, w którym $\mathbf{p} = 0$; dla cząstek relatywistycznych jest sens rozważać tylko takie wartości czteropędu, które odpowiadają interwałom czasowym. Wyjątkiem są np. fotony, odpowiadające interwałom zerowym - a więc z (7) wynika, że bezmasowym. Dla cząstek poruszających się z $v = c$ mamy więc $E = pc$ w każdym układzie odniesienia.

Suma czteropędów wielu cząstek zwykle odpowiada jednak niezerowej masie niezmienniczej - nawet przy udziale cząstek bezmasowych. W takim przypadku zawsze można znaleźć układ własny. Dla wyizolowanego układu cząstek taki układ odniesienia będzie nazywany układem środka masy.

/Dokończę to po wypożyczeniu ponownym zadań z STW./

5. Zasady zachowania w fizyce.

Obowiązują dla układów mniej lub bardziej izolowanych; zachowanie można rozumieć na parę sposobów.

- Pewna wartość liczbową jakiejś wielkości charakteryzującej dynamikę układu nie zmienia się - np. energia, pęd czy moment pędu. Zachowanie tych wielkości wynika ściśle z praw dynamiki Newtona.
- Mówi się o zachowaniu ładunku i jemu podobnych wielkości; lecz dla takich ściśle z materią związanych cech właściwym określeniem byłoby równanie ciągłości.
- W mechanice kwantowej zachowywane są liczby kwantowe – w pełni analogiczny rodzaj zachowywania co w pierwszym punkcie – oraz istnieją operatory komutujące z operatorem ewolucji czasowej. W tym drugim przypadku zachowanie wielkości polega na niezmiennianiu rozkładów prawdopodobieństwa. Zasady zachowania wynikają tutaj z formalizmu hamiltonowskiego, i przechodzą w granicy klasycznej na odpowiednie zasady zachowania mechaniki klasycznej.

Ze względu więc na pierwszy i trzeci powyższy punkt, postaram się pokazać zasady zachowania wynikające z równań Hamiltona. Poniższe dwie kolumny tylko dla przypomnienia.

Definicja 8 (Współrzędne uogólnione [2])

Załóżmy, że układ n punktów materialnych podlega dwustronnym więzom holonomicznym danym przez p równań

$$f_k(x, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Z tych równań można na ogół wyznaczyć p spośród współrzędnych x_j ($j = 1, 2, \dots, 3n$) jako funkcje $f = 3n - p$ pozostałych, które będziemy wobec tego uważać za niezależne. Widzimy więc, że każdemu zespołowi wartości tych f współrzędnych z ich obszaru zmienności odpowiada jednoznacznie pewne położenie układu zgodne z więzami i odwrotnie. Możemy zatem przy pomocy tych f współrzędnych niezależnych opisywać położenie układu.

Przez q_l oznaczamy będziemy współrzędne uogólnione, $v_l = \dot{q}_l$ nazywać będziemy prędkościami uogólnionymi, zaś $Q_l = \sum_{j=1}^{3n} X_j \frac{\partial x_j}{\partial q_l}$ siłami uogólnionymi (X_j to siły).

Twierdzenie 5 (Równania Lagrange'a drugiego rodzaju [2])

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial T}{\partial q_l} = Q_l$$

przy czym T to oczywiście energia kinetyczna. Jeśli istnieje taka funkcja $U(q, \dot{q}, t)$, że

$$Q_l = -\frac{\partial U}{\partial q_l} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_l}$$

to

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} - \frac{\partial L}{\partial q_l} = 0 \\ \text{gdzie } L = T - U \end{array} \right.$$

$p_l = \frac{\partial L(q, v, t)}{\partial v_l}$ nazywa się pędami uogólnionymi.

Definicja 9 (Funkcja Hamiltona [3])

$$H(q, p, t) = \sum_{l=1}^f p_l v_l(g, p, t) - L(g, v(g, p, t), t).$$

Najczęściej kończy się to tak, że $H = T + V$.

Twierdzenie 6 (Równania kanoniczne Hamiltona [3])

$$\dot{q}_l = \frac{\partial H}{\partial p_l}, \quad \dot{p}_l = -\frac{\partial H}{\partial q_l}. \quad (9)$$

Jeśli w funkcji Hamiltona $H(q, p, t)$ nie występuje pewna zmienna q_r lub p_s , wówczas z równań Hamiltona wnioskujemy, że

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} = 0 \quad \text{lub} \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0, \quad (10)$$

czyli

$$p_r = \text{const} = \beta_r \quad \text{lub} \quad p_s = \text{const} = \beta_s.$$

Definicja 10 (Nawiasy Poissona [3]) Weźmy pod uwagę dwie funkcje zmiennych kanonicznych i czasu: $F(q, p, t)$ i $G(q, p, t)$. Załóżmy, że mają one pochodne cząstkowe. Nawiasami Poissona (Simeon Denis P o i s s o n, 1781-1840) dla tych funkcji nazywać będziemy wyrażenie

$$(F, G) = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial p_l} - \frac{\partial F}{\partial p_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} \right). \quad (11)$$

Z definicji wynikają bezpośrednio następujące własności:

$$\begin{aligned} (F_1, F_2) &= -(F_2, F_1), \\ (F, F) &= 0, \\ (F_1 + F_2, G) &= (F_1, G) + (F_2, G), \\ (F_1 F_2, G) &= F_1(F_2, G) + F_2(F_1, G), \\ (F, q_l) &= -\frac{\partial F}{\partial p_l}, \quad (F, p_l) = \frac{\partial F}{\partial q_l}. \end{aligned}$$

Wykorzystując (9) i (11), znajdujemy

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{l=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial F}{\partial p_l} \dot{p}_l \right) + \frac{\partial F}{\partial t} = (F, H) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (12)$$

Pozwala to podstawić $F = H$:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Jeśli więc H nie zależy jawnie od czasu, jest stałe. Zwykle H odpowiada energii.

Twierdzenie 7 (Twierdzenie Poissona-Jacobiego [3]) Jeśli $F_1(q, p, t) = \text{const}$ i $F_2(q, p, t) = \text{const}$ są całkami pierwszymi równań kanonicznych Hamiltona [znaczy się ich pochodne po czasie się zerują], to wyrażenie $(F_1, F_2) = \text{const}$ też jest całką pierwszą tych równań.

Równania (10), (12) oraz twierdzenie 7 wyznaczają pełny arsenał narzędzi do poszukiwania wielkości zachowywanych w danym układzie. Można jeszcze powiedzieć, jak wygląda to w mechanice relatywistycznej [3]:

$$L = S - U, \quad S = -Mc^2 \sqrt{1 - \beta^2},$$

reszta bez zmian. Pozostaje jeszcze tylko omówić analogię w mechanice kwantowej.

6. Oddziaływania fundamentalne: nośniki i zasięg oddziaływania, ładunki.

Definicja 11 (Oddziaływania fundamentalne [43])

1. **grawitacyjne**, których źródłem jest masa i energia. Nośnik : grawiton (postulowany), zasięg: ∞ .
2. **słabe**, odpowiedzialne za większość (choć nie wszystkich) procesów rozpadu cząstek metatrwałych. Nośniki : W^\pm, Z^0 , zasięg - $10^{-18}m$.
3. **elektromagnetyczne**, których źródłem jest ładunek elektryczny, odpowiedzialne za zderzenia i rozpady z udziałem kwantów γ . To jest właśnie nośnik, zasięg: ∞ .
4. **silne**, których źródłem jest ładunek kolorowy, odpowiedzialne za szybkie rozpady cząstek rezonansowych (o bardzo krótkich czasach życia) oraz za zderzenia z udziałem wyłącznie hadronów, jeżeli w takim zderzeniu są zachowane odpowiednie liczby kwantowe. W przypadku jąder atomowych, rozumianych jako zbiór kolorowo neutralnych nukleonów (protonów i neutronów), oddziaływanie silne ma charakter oddziaływania resztkowego, przenoszonego efektywnie przez mezony (pary kwark-antykwar). Nośnik: gluon, zasięg: $\leq 10^{-15}$.

II. Mechanika

7. Zasady dynamiki Newtona i granice ich stosowalności.

Twierdzenie 8 (Zasady dynamiki [13])

1. W układzie inercyjnym ciało swobodne (tj. takie, na które nie działa żadna siła) porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym (**jest to definicja układu inercyjnego**).
2. Jeżeli na ciało działa siła \mathbf{F} , to doznaje ono przyspieszenia \mathbf{a} , danego w układzie inercyjnym wyrażeniem $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, gdzie m jest masą bezwładną (**to jest definicja stosunku mas ciała**).
3. Jeśli ciało A działa na ciało B siłą \mathbf{F} , to B działa na A siłą $-\mathbf{F}$.

Twierdzenie 9 (Zasada niezależności sił [4]) Powstaje pytanie, jaką postać mają równania ruchu, gdy siły \mathbf{F}_i działają na masę m równocześnie. Otóż jest faktem empirycznym, że w tym przypadku przyspieszenie masy m równa się sumie (geometrycznej) przyspieszeń \mathbf{a}_i .

Zasady dynamiki Newtona są prawdziwe dla wszystkich układów inercjalnych. Masa bezwładna nie musi być równa w różnych układach inercjalnych; w ramach szczególnej teorii względności $m = \gamma M$, gdzie M to masa w układzie własnym ciała, w którym ono spoczywa. W mechanice klasycznej zasady dynamiki są identyczne we wszystkich układach przechodzących na siebie przez przekształcenie Galileusza. Istotną różnicą między mechaniką klasyczną a STW jest jeszcze brak w tej drugiej oddziaływań na odległość - w rozważanym układzie ciał trzeba więc explicite uwzględniać pole np. elektromagnetyczne, przenoszące oddziaływania. Okazuje się jednak, że zawsze można pojęcie pędu uogólnić na wszystkie działy fizyki, w tym pola; tym samym opisując siły na odległość jako właśnie oddziaływania na pola, można się i w tym przypadku posługiwać trzecim prawem dynamiki [7].

W układach nieinercjalnych nie obowiązują zasady dynamiki Newtona z jednym istotnym wyjątkiem - układów spadających swobodnie pod wpływem grawitacji. Wyniki doświadczenia nie wykazują różnicy pomiędzy masą bezwładną i grawitacyjną ciał [18]. Jeśli znajdujemy się w spadającej swobodnie windzie zjawiska wywołane przez ruch przyspieszony i przez siły grawitacyjne dokładnie się znoszą [18].

Twierdzenie 10 (Zasada równoważności [13]) Nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy znajdujemy się w układzie inercyjnym, czy nieinercyjnym układzie spadającym w polu grawitacyjnym (**jest to założenie ogólnej teorii względności**).

Można jednak przejść do układów nieinercjalnych „zachowując” prawa dynamiki Newtona, jeśli fakt nieporuszania się ciał swobodnych po liniach prostych przypisze się działaniu sił bezwładności. Są one oczywiście obserwowane; zwane są jednak siłami pozornymi, gdyż nie zachowują swej wartości przy przejściu do różnych układów odniesienia.

Analogię do mechaniki kwantowej zostawiam na później.

8. Niezmienniczość równań Newtona względem transformacji Galileusza.

Przekształcenie Galileusza przy przejściu z układu poruszającego się wzdłuż os x z prędkością v :

$$\begin{aligned}t &= t' \\x &= x' + vt \\y &= y' \\z &= z'\end{aligned}\tag{13}$$

Równania Newtona

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

czy też

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}.$$

Łatwo się przekonać, że przy przekształceniu Galileusza nie zmieniają się pochodne położenia rzędu drugiego lub pierwszego. Nie ma jednak oczywistego powodu, dlaczego nie miałyby zmieniać się funkcja \mathbf{F} , zwykle zależąca od położenia, pędu i prędkości. Można jednak argumentować, że ponieważ siła opisuje oddziaływanie wzajemne dwóch ciał (3 zasada dynamiki), winna zależeć od wzajemnych położenia i prędkości, a tym samym nie zmieniać się w zależności od układu odniesienia. Zamiast tego machania rękami można też po prostu opierać się na doświadczeniu.

Twierdzenie 11 (Zasady dynamiki [13])

1. W układzie inercyjnym ciało swobodne (tj. takie, na które nie działa żadna siła) porusza się ruchem jednostajnym i prostoliniowym (**jest to definicja układu inercyjnego**).
2. Jeżeli na ciało działa siła \mathbf{F} , to doznaje ono przyspieszenia \mathbf{a} , danego w układzie inercyjnym wyrażeniem $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, gdzie m jest masą bezwładną (**to jest definicja stosunku mas ciała**).
3. Jeśli ciało A działa na ciało B siłą \mathbf{F} , to B działa na A siłą $-\mathbf{F}$.

Twierdzenie 12 (Zasada niezależności sił [4]) Powstaje pytanie, jaką postać mają równania ruchu, gdy siły \mathbf{F}_i działają na masę m równocześnie. Otóż jest faktem empirycznym, że w tym przypadku przyspieszenie masy m równa się sumie (geometrycznej) przyspieszeń \mathbf{a}_i .

Skoro siła się nie zmienia, spełniona jest też 3 zasada. Z twierdzenia 12 mamy tym samym, dla całego izolowanego układu punktów materialnych, siłę równą zero, a więc zerową zmianę pędu całego układu w czasie. Można w szczególności przejść do układu środka masy, w którym pęd całkowity równa się zero.

Właściwie nie mam pojęcia, co możnaby tu napisać.

9. Przykłady sił potencjalnych i niepotencjalnych.

- Siła harmoniczna $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, z potencjałem $V = \frac{1}{2}kr^2$. Tego typu potencjał odgrywa ważną rolę w mechanice kwantowej; w ogóle dla małych wychyleń od położenia równowagi siły harmoniczne stanowią często stosowane przybliżenie. Z potencjału tej siły nie można uciec do nieskończoności ze skończoną energią.
- Siła grawitacji $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, z potencjałem $V = -\frac{GMm}{r}$ (oraz podobna do niej siła Coulomba). Z potencjału tej siły można uciec do nieskończoności. Dla takich sił centralnych, dla pewnego rozkładu ładunku $\rho(\mathbf{r})$ (przechodzimy teraz do siły Coulomba) możemy zastosować przybliżenie multipolowe potencjału: do

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

podstawiamy

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta'),$$

gdzie $P_n(x)$ to wielomiany Legendre'a [26].

- Siły odpowiadające stałemu polu jednorodnemu - np. elektrycznemu między okładkami kondensatora, czy grawitacyjnemu blisko powierzchni.

- Przez siły potencjalne rozumie się zwykle siły zachowawcze, ale można wprowadzić uogólnienie potencjału. Chociażby, dla potencjału spełniającego dla każdej współrzędnej

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \quad (14)$$

prawdziwe są równania Lagrange'a drugiego rodzaju. Przykładem takiej siły jest siła Lorentza:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Z równań Clerka Maxwella³ wynikają potencjały skalarny i wektorowy

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Potencjał

$$U = q\varphi - q\mathbf{A}\mathbf{v}$$

oraz siła Lorentza spełniają (14) [2].

- Ogólnie więc pewne siły niezachowawcze mają potencjał wektorowy - chociażby właśnie siły elektromagnetyczne - ale nie to rozumie się zwykle przez siły potencjalne.
- Wszelkie siły tarcia, zależne od pochodnych położenia względem ośrodka, nie są potencjalne (nie ma V takiego, że $\mathbf{F} = -\nabla \times V$). Można zauważyć, że za tarcie odpowiadają siły elektryczne między cząstkami trących o siebie ciał.

10. Prawo powszechnego ciążenia.

Twierdzenie 13 (Prawo powszechnego ciążenia [6]) *Wszystkie ciała materialne przyciągają się nawzajem, przy czym w przypadku dwu ciał 1 i 2, które można uważać za punkty materialne, siła ciężkości, czyli grawitacyjna \mathbf{F}_{12} , z jaką punkt 2 przyciąga punkt 1, ma postać*

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{Gm'_1 m'_2}{r^2}. \quad (15)$$

Równocześnie punkt 1 przyciąga punkt 2 z siłą

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}.$$

We wzorze (15) współczynnik G równy według współczesnych pomiarów $G = (6,6720 \pm 0,0006) \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ nazywamy stałą grawitacyjną. Wektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ łączy punkty 1 i 2, przy czym początek ma w punkcie 1, koniec zaś w punkcie 2. Wreszcie m'_1 i m'_2 są masami ciężkimi obu punktów.

Prawo powszechnego ciążenia obejmuje wszystkie ciała obdarzone masą; nie trzeba się nim jednak specjalnie zajmować w mikroświecie ze względu na niewielką siłę grawitacji. Siła grawitacji jest ok. 10^{-40} razy słabsza od oddziaływań silnych, i ok. 10^{-39} razy słabsza od elektromagnetycznych [43]

Za znaczenie grawitacji w makroświecie odpowiada przede wszystkim jej kumulatywny charakter - nie ma ujemnych mas, więc im więcej masy się gromadzi, tym potężniejszym źródłem sił się staje.

Wyniki doświadczenia nie wykazują różnicy pomiędzy masą bezwładną i grawitacyjną ciał [18]. Jeśli znajdujemy się w spadającej swobodnie windzie zjawiska wywołane przez ruch przyspieszony i przez siły grawitacyjne dokładnie się znoszą [18].

Twierdzenie 14 (Zasada równoważności [13]) *Nie jesteśmy w stanie stwierdzić, czy znajdujemy się w układzie inercyjnym, czy nieinercyjnym układzie spadającym w polu grawitacyjnym (jest to założenie ogólnej teorii względności).*

Zgodnie z ogólną teorią względności, masa ciał wpływa również na tor cząstek bezmasowych.

³Przypis historyczny: jest to podwójne nazwisko Jamesa Clerka Maxwella, ale potem będę już pisał pewnie samo „Maxwella”.

11. Rozwiązania równań Newtona ruchu punktu materialnego dla potencjału harmonicznego i centralnego.

- Potencjał harmoniczny ma postać

$$V = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2 \quad (16)$$

czyli równania ruchu Newtona są postaci

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}$$

co można rozpisać osobno na składowe

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}y \\ \ddot{z} &= -\frac{k}{m}z \end{aligned} \quad (17)$$

Rozwiązanie każdego z równań (17) można zapisać w postaciach

$$x = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = x_0 \cos(\omega t + \delta) = \mathbf{Re} \left(\tilde{x}_0 e^{i\omega t + \delta} \right) \text{ etc.},$$

przy czym $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ to częstość własna. W (16) i (17) od razu rzuca się w oczy możliwość rozważania każdego drgania osobno, i rozdzielenia energii potencjalnej (kinetycznej też, czyli ogółem całej energii) niezależnie na każdy kierunek drgań. Generalnie, gdy mamy układ ciał o n stopniach swobody oddziałujących tylko siłami harmonicznymi, można zmieniając współrzędne sprowadzić go do zagadnienia n niezależnych oscylatorów, zwykle o różnych współczynnikach k , a tym samym różnych częstościach własnych.

- Przez pojęcie siły centralnej najogólniej można rozumieć siły postaci

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{r}.$$

Zwykle opłaca się je opisywać we współrzędnych sferycznych (ważnym wyjątkiem od tej reguły jest powyższy przykład). Równania ruchu:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = F_r \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Łatwo pokazać, że dla sił centralnych zachowany jest moment pędu $\mathbf{J} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a} = 0 + \mathbf{r} \times f(\mathbf{r})\mathbf{r} = 0 + 0 = 0. \quad (18)$$

Z zachowania momentu pędu wynika natychmiast, że ruch ciała w polu siły centralnej odbywa się w stałej płaszczyźnie. Wyrażmy więc wielkości w odpowiednich współrzędnych:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \dot{r} &= \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{\varphi} \\ y &= r \sin \varphi & \dot{\varphi} &= \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \hat{r} \\ \hat{r} &= \cos \varphi \hat{x} + \sin \varphi \hat{y} \\ \hat{\varphi} &= \cos \varphi \hat{y} - \sin \varphi \hat{x} \end{aligned}$$

Twierdzenie 15 (Wzór Bineta [5])

$$-\frac{J^2}{mr^2} \left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = F_r \quad (19)$$

Ze wzoru tego, jeśli F_r nie zależy od czasu *explicite*, wyznaczamy tor

$$r = r(\varphi)$$

punktu materialnego. Zależność czasową

$$\phi = \phi(t)$$

dostajemy z całki momentu pędu.

Początek dowodu:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{r}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\dot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{r} + \dots, \\ \mathbf{J} &= mr^2\dot{\varphi}(\hat{r} \times \hat{\varphi}), \end{aligned}$$

przy czym z (18) $\dot{J} = 0$, a pierwszy człon ostatniej równości jest równy działającej sile. Należy teraz wykorzystać $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$ oraz $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi}$.

- Przez siłę centralną rozumie się zwykle, ze względu na powszechność występowania, siłę centralną malejącą z kwadratem odległości – o potencjale

$$V = -Ar^{-1}.$$

czyli w tym przypadku $F_r = -Ar^{-2}$. Z wzoru 19 powinniśmy uzyskać równanie elipsy.

12. Opis ruchu N oddziałujących mas, w tym zagadnienie dwóch ciał i problem Keplera (środek masy i zasada zachowania momentu pędu).

Definicja 12 (Środek masy układu punktów materialnych [8]) Oznaczmy przez M masę całkowitą układu:

$$M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Środkiem masy układu n punktów materialnych będziemy nazywać punkt geometryczny dany przez wektor

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i.$$

Położenie środka masy nie zależy od obioru układu współrzędnych, w którym liczymy wektory \mathbf{r}_i , tak że przy zmianie układu współrzędnych wektor \mathbf{R} transformuje się jak promień wodzący punktu (co łatwo pokazać).

Środek masy zachowuje się tak jak punkt materialny o masie M spełniający równania Newtona

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F}$$

gdzie F to suma wszystkich sił. Ze względu na zasadę równej akcji i reakcji, siły wewnętrzne układu znoszą się, więc na ruch całego układu wpływają tylko siły zewnętrzne. W przypadku nierelatywistycznym oddziaływania na odległość są przenoszone ze skończoną prędkością i w tym przypadku zasada równej akcji i reakcji nie jest spełniona; ponieważ jednak każdemu polu fizycznemu możemy przypisać pęd, tym samym można i taki układ opisać należycie. Jeśli siły zewnętrzne też się znoszą, pęd całkowity układu nie zmienia się i mówimy o zasadzie zachowania pędu [7].

Poniższe da się stosunkowo łatwo pokazać, kiedy wszystko odbywa się w jednej płaszczyźnie.

Definicja 13 (Układ środka masy w przypadku relatywistycznym [44]) *Układ środka masy dla n cząstek określamy jako taki układ odniesienia, w którym:*

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i^* = 0.$$

Prędkość takiego układu:

$$\vec{\beta} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\sum E_i}$$

Twierdzenie 16 (Zasada zachowania momentu pędu [9]) *Równania Newtona*

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

mnożymy stronami wektorowo przez \vec{r}_i :

$$\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt},$$

mamy

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Sumując stronami po i otrzymujemy

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{D}$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{p}_i, \quad \vec{D} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i.$$

Wektory \vec{J} i \vec{D} nazywamy odpowiednio całkowitym momentem pędu układu n punktów materialnych i całkowitym momentem sił działających na ten układ. Gdy $\vec{D} = 0$, moment pędu jest zachowany.

Twierdzenie 17 (Moment sił dla sił centralnych [9]) *Przy założeniu zasady równej akcji i reakcji ($\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$) w przypadku, gdy siły wewnętrzne są centralne ($\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$), moment całkowity sił równa się całkowitemu momentowi sił zewnętrznych.*

(Przy dowodzie należy w podwójnej sumie po i oraz j na moment sił wewnętrznych użyć zależności podanych przed chwilą w nawiasach.)

Jeszcze jest oczywiście zachowana zasada zachowania energii, ale to sobie odpuścmy. W przypadku występowania więzów najlepiej jest wykorzystać do znalezienia ruchu układu równania Lagrange'a drugiego rodzaju [2] lub równania Hamiltona [3].

Rozważmy dwa ciała 1 i 2 oddziałujące na siebie siłami centralnymi malejącymi z kwadratem odległości:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \end{array} \right.$$

Brak sił wewnętrznych, więc pęd całego układu jest zachowany.

Mnożąc każde z równań przez odwrotności odpowiednich mas i odejmując równania od siebie, uzyskujemy równanie różniczkowe opisujące ruch względny punktu 2 względem 1:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\vec{r}}{r} \frac{\alpha}{r^2}.$$

gdzie wprowadzono tzw. masę zredukowaną μ :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}.$$

Powyższe równania przypominają równania ruchu Newtona. *Możemy powiedzieć, że punkt materialny 2 porusza się względem nieinercyjnego układu związanego z punktem 1, tak jakby układ ten był inercyjny, zaś punkt 2 miał masę μ równą masie zredukowanej układu dwu punktów 1 i 2 [9].* Problem dwóch ciał został zredukowany do problemu jednego ciała. Jeśli chodzi o środek masy układu, leży on na odcinku łączącym oba punkty, dzieląc ten odcinek w stosunku odwrotnym do mas punktów [9]. Promienie wodzące obu punktów:

$$\vec{r}_1^{(S)} = -\frac{\mu}{m_1}\vec{r}, \quad \vec{r}_2^{(S)} = \frac{\mu}{m_2}\vec{r}$$

Moment pędu (stały):

$$\vec{J}^{(S)} = \vec{r}_1^{(S)} \times m_1 \dot{\vec{r}}_1^{(S)} + \vec{r}_2^{(S)} \times m_2 \dot{\vec{r}}_2^{(S)} = \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} + \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}, \quad J^{(S)} = \mu r^2 \dot{\varphi}.$$

Do wzoru na energię

$$E^{(S)} = \frac{\mu v^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

wstawiamy

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{J^{(S)2}}{\mu^2} \left(\left(\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right).$$

Rozwiązaniem na tor ruchu jest krzywa stożkowa o mimośrodku $\epsilon = \sqrt{1 + E^{(S)} \frac{2J^{(S)2}}{\alpha^2 \mu}}$ i parametrze $p = \frac{J^{(S)2}}{\alpha \mu}$:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\varphi - \gamma)}.$$

dla $E^{(S)} < 0$ ($\epsilon < 1$) krzywa jest elipsą. Półosie:

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

Problem Keplera polegał na znalezieniu kształtu orbit planet krążących wokół Słońca. Można tak określać zagadnienie dwóch ciał oddziałujących grawitacyjnie (...)

Twierdzenie 18 (Prawa Keplera [19])

1. Wszystkie planety krążą po elipsach; w jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce.
2. Promień wodzący planety zakreśla w równych czasach równe pole.
3. Kwadraty okresów obiegu różnych planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi elips (twierdzenie to jest ogólniejsze od pierwotnego sformułowania Keplera).

Pierwsze prawo wykazaliśmy. By wykazać drugie prawo, należy skorzystać z zasady zachowania pędu:

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{J^{(s)}}{2\mu} = \text{const}$$

ale zakreślane przez promień pole to:

$$\int \frac{1}{2} r(\varphi) \cdot r(\varphi) d\varphi = \int \frac{1}{2} r(t) \cdot r(t) \dot{\varphi} dt = \int \text{const} \cdot dt = \text{const} \cdot t$$

(dodawanie takich nieskończenie cienkich trójkątów.) Skoro tak to $\frac{J^{(s)}}{2\mu}$ ma sens prędkości polowej ciała, czyli

$$\frac{J^{(s)}}{2\mu} T = \pi ab$$

i wstawiając wszystkie wielkości co trzeba, powinniśmy uzyskać trzecie prawo.

13. Moment bezwładności i zasady dynamiki ruchu bryły sztywnej.

To omówienie będzie stosunkowo długie - praktycznie same na żywo przepisane definicje i twierdzenia stanowiące kwintesencję mechaniki bryły sztywnej.

Definicja 14 (Ciało sztywne [10]) *Ciałem sztywnym nazywać będziemy układ punktów materialnych, których odległości wzajemne są wielkościami stałymi.*

Często w podręcznikach mechaniki nazwą ciała sztywnego określa się ośrodek o ciągłym rozkładzie materii, nie ulegający odkształceniom. Zauważmy, że ciało sztywne w sensie drugiej definicji możemy dowolnie przybliżać przez sztywne układy punktów materialnych, czyli ciała sztywne według przyjętego przez nas określenia. W tym celu dzielimy w myśli ośrodek ciągły na coraz bardziej wzrastającą liczbę części i części te zastępujemy przez punkty materialne o równych im masach. Z fizycznego punktu widzenia przyjęta przez nas definicja jest dopuszczalna, a nawet, być może, bardziej poprawna z uwagi na atomistyczną strukturę materii.

Twierdzenie 19 (O położeniu ciała sztywnego [10]) *Położenie ciała sztywnego jest wyznaczone przez podanie trzech jego punktów nie leżących na jednej prostej.*

Gdy $n \geq 3$ ciało sztywne swobodne ma

$$f = 3 \cdot 3 - 3 = 6$$

stopni swobody.

Widzimy następnie, że (gdy $n \geq 3$) ciało sztywne o p niezależnych od siebie równaniach więzów holonomicznych dwustronnych ma

$$f = 6 - p$$

stopni swobody, przy czym wynika stąd, że musi być $p \leq 6$.

Definicja 15 (Tensor momentu bezwładności [11]) *Niech U' jest układem (o początku O') w którym ciało sztywne spoczywa. Moment pędu ciała sztywnego względem punktu O (będącego początkiem układu U ; $\vec{OO'} = \vec{r}_0 = \vec{r}_i - \vec{r}'_i$; primowane wielkości są z układu U' , nieprimowane - z U) możemy wyrazić następująco:*

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{v}_{tr} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_{tr} + \sum_i (\vec{r}_0 + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \\ &= \vec{R} \times M \vec{v}_{tr} + \vec{r}_0 \times M (\vec{\omega} \times \vec{R}') + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i), \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad \vec{R}' = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}'_i$$

są odpowiednio masą ciała sztywnego i promieniami wodzącymi jego środka masy S względem układów U i U' .

Przekształcimy teraz dalej ostatni wyraz we wzorze (20). Powołując się na tożsamość wektorową

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

otrzymujemy

$$\sum_i \vec{r}'_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}'_i) = \sum_i m_i [\vec{r}'_i{}^2 \vec{\omega} - \vec{r}'_i (\vec{r}'_i \cdot \vec{\omega})].$$

Widzimy, że wektor stanowiący prawą stronę ostatniej równości jest funkcją liniową wektora $\vec{\omega}$, można więc przedstawić go jako iloczyn pewnego tensora drugiego rzędu⁴, który oznaczamy symbolem \hat{I} , oraz wektora $\vec{\omega}$:

$$\hat{I}\vec{\omega} = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i^2 \vec{\omega} - \vec{r}_i \left(\vec{r}_i \vec{\omega} \right) \right].$$

Ostatni wzór uważać będziemy za definicję tensora \hat{I} żądając, aby zachodził on dla dowolnego wektora $\vec{\omega}$. Tensor \hat{I} określony w ten sposób nosi nazwę **tensora momentu bezwładności ciała sztywnego** względem punktu O' . Kładąc $\vec{v}_{tr} = 0$ i obierając przy tym początek O układu U w punkcie O' (który w przypadku tym spoczywa w układzie U) mamy

$$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega}.$$

Wielkość $I_e = \vec{e}\hat{I}\vec{e}$ nazywać będziemy **momentem bezwładności ciała sztywnego** względem osi o kierunku \vec{e} przechodzącej przez punkt O' .

Wielkość $D_{e_1 e_2} = -\vec{e}_1 \hat{I} \vec{e}_2$ nazywać będziemy **momentem zboczenia, czyli dewiacji ciała sztywnego** w płaszczyźnie przechodzącej przez O' równoległej do wektorów \vec{e}_1 i \vec{e}_2 .

W macierzy tensora momentu bezwładności, momenty zboczenia ze znakiem minus reprezentują wyrazy pozadiagonalne, momenty bezwładności z plusem - diagonalne. Energia kinetyczna ruchu obrotowego ciała wokół punktu O' :

$$T = \frac{\vec{\omega} \hat{I} \vec{\omega}}{2} = \frac{I_{\omega} \omega^2}{2}.$$

Twierdzenie 20 (Twierdzenie Steinera [11]) Między I_e i $I_e^{(S)}$, czyli między momentem bezwładności ciała sztywnego względem dwu osi o kierunku \vec{e} , z których pierwsza przechodzi przez punkt O' , a druga przez środek masy S ciała, zachodzi związek

$$I_e = Md^2 + I_e^{(S)},$$

gdzie d jest odległością środka masy S od pierwszej osi.

[12] – Równania ruchu ciała sztywnego:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_{Ri}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie do \vec{F}_{Ri} wchodzi siły wewnętrzne i siły reakcji więzów; gdy zgodnie z doświadczeniem uznamy, że dla sił wewnętrznych zachodzi zasada równej akcji i reakcji (nadto zgodnie z doświadczeniem są to siły centralne), do \vec{F}_{Ri} wchodzi już tylko max. 6 równań reakcji więzów. Idąc dalej, można wyrazić równania ruchu przez

$$M\ddot{\vec{R}} = \vec{F} + \vec{F}_R$$

oraz

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{D} + \vec{D}_R, \text{ albo } \frac{d\vec{J}^{(S)}}{dt} = \vec{D}^{(S)} + \vec{D}_R^{(S)},$$

gdzie oznaczono przez \vec{D} moment siły, zaś

$$\vec{J} = \vec{R} \times M\dot{\vec{R}} + \hat{I}^{(S)}\vec{\omega}, \quad \vec{J}^{(S)} = \hat{I}^{(S)}\vec{\omega}.$$

Ogólnie nie można pogubić się w układach współrzędnych.

⁴Tensorom drugiego rzędu nazywamy operator liniowy przeprowadzający wektory w wektory.

14. Hydrostatyka: ciśnienie, prawo Pascala, prawo Archimedesesa i pływanie ciał.

Zacznę od spisania dwóch podstawowych praw hydroDYNAMIKI dla cieczy idealnej, gdyż ich podstawy fizyczne są intuicyjne; stąd prościutko do hydrostatyki.

Twierdzenie 21 (tzw. Zasada zachowania materii [20])⁵ Przez element $d\vec{f}$ powierzchni ograniczającej rozpatrywaną objętość przepływa w ciągu jednostki czasu ilość $\rho \vec{v} d\vec{f}$ cieczy. Całkowita ilość cieczy wypływającej w ciągu jednostki czasu z objętości V_0 jest równa

$$\oint \rho \vec{v} d\vec{f},$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całą zamkniętą powierzchnię obejmującą rozpatrywaną objętość.

Z drugiej strony, zmniejszenie ilości cieczy w objętości V_0 można napisać w postaci

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Przyrównując oba wyrażenia i przekształcając całkę po objętości zgodnie ze wzorem Ostrogradzkiego⁶ w całkę po objętości otrzymujemy

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} \right) dV = 0.$$

Ponieważ równość ta winna mieć miejsce dla dowolnej objętości, więc musi być równe zeru wyrażenie podcałkowe, tj.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Jest to tak zwane **równanie ciągłości**.

Twierdzenie 22 (Równanie ruchu cieczy (równanie Eulera) [21]) Całkowita siła działająca na wydzieloną objętość cieczy równa jest całce

$$-\oint p d\vec{f} \quad (21)$$

z ciśnienia, wziętej po powierzchni rozpatrywanej cieczy. Przekształcając tę całkę w całkę po objętości mamy

$$-\oint p d\vec{f} = - \int \nabla p dV.$$

Widać stąd, że na każdy element objętości dV cieczy działa ze strony okrążającej go cieczy siła $-dV \nabla p$. Innymi słowy można powiedzieć, że na jednostkę objętości cieczy działa siła $-\nabla p$.

Możemy teraz napisać równanie ruchu elementu objętości cieczy:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p.$$

Występująca tu pochodna $\frac{d\vec{v}}{dt}$ określa nie zmianę prędkości cieczy w danym nieruchomym punkcie przestrzeni, lecz zmianę prędkości określonej, poruszającej się w przestrzeni, cząstki cieczy. Pochodną tę należy wyrazić przez wielkości, odnoszące się do punktów nieruchomych w przestrzeni (by móc przyrównywać spokojnie do ciśnienia, będącego cechą punktu). Ostatecznie otrzymujemy

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}.$$

Jest to poszukiwane **równanie ruchu cieczy**, wyprowadzone po raz pierwszy przez L. Eulera w 1756 r.

W obecności siły ciężkości równanie ruchu przybierze postać

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g. \quad (22)$$

Należy dodać, że jest to adiabatyczny ruch cieczy idealnej.

⁵Można argumentować, że nazywać się to powinno po prostu równaniem ciągłości.

⁶Gaussa?

Twierdzenie 22 definiuje nam też de facto ciśnienie w cieczy. Stosowany tu opis jest dość intuicyjny.

Do hydrostatyki przechodzimy jak od każdej dynamiki do każdej statyki: kładąc siłę na każdą jednostkę objętości równą zero. Przyrównując (22) do zera i przyjmując $\rho = \text{const}$ (ciecz jest nieściśliwa) uzyskujemy

Twierdzenie 23 (Prawo Pascala) ⁷

$$p = p_0 + \rho g(h - z) \quad (23)$$

gdzie p_0 to ciśnienie na powierzchnię słupa cieczy, h to wysokość słupa cieczy, a z to odległość od dna.

- *Sformułowanie w literaturze angielskiej: zmiana ciśnienia w dowolnym punkcie w zamkniętej cieczy jest przenoszona bez strat do wszystkich punktów w cieczy; czy też, ciśnienie w cieczy na tym samym poziomie jest jednakowe.*
- *Sformułowanie w literaturze polskiej: pomijając ciśnienie hydrostatyczne, ciśnienie wewnątrz zbiornika jest wszędzie jednakowe i równe ciśnieniu zewnętrznemu; czy też, ciśnienie zewnętrzne wywierane na ciecz lub gaz znajdujące się w naczyniu zamkniętym rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach.*

Przyjmując za punkt wyjścia Prawo Pascala, staje się w pełni jasne podobieństwo skalarne ciśnienia p do potencjału.

Prawo Archimidesa w swoim pierwotnym sformułowaniu brzmi, że objętość cieczy wypartej przez jakieś ciało zanurzone w tej cieczy jest równa objętości zanurzonego ciała - więc, przy stałej gęstości cieczy, to prawo wynika z równania ciągłości. Zwykle jednak mówi się o prawie Archimidesa w kontekście warunku na pływanie ciał, i wartości siły działającej na ciało. Zgodnie z (21), ciśnienie na granicy danej objętości opisuje siłę pochodzącą od cieczy spoza tej objętości, i kompletnie nie zależy od tego, co znajduje się w objętości; tym samym, z (21) obliczyć można siłę od cieczy działającą na dowolne zanurzone ciało, a siła ta jest identyczna z siłą jaką działałaby na wypartą ciecz, gdyby nie została wyparta. Ponieważ mamy do czynienia z hydrostatyką, siła ta równa jest ciężarowi wypartej wody. Z (21) i (23) szybko można wyciągnąć wniosek, że siła ta będzie skierowana do góry. Na ciało działa jeszcze tylko siła ciężkości skierowana w dół. Mamy więc pełną siłę wypadkową działającą na zanurzone ciało (częściowe zanurzenie nie jest trudne); zerowanie się tej siły wypadkowej to **warunek pływania ciała**; sprowadza się on do tego, że gęstość zanurzonego ciała musi być mniejsza od gęstości cieczy.

III. Elektrodynamika

15. Ładunek elementarny i doświadczenie Millikana.

Ładunek elementarny e jest stałą podstawową. Jest to wartość ładunku m.in. elektronu i neutronu, równą $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. W swoim doświadczeniu z lat 1910-1913, Robert A. Millikan po raz pierwszy stwierdził skwantowanie ładunku w materii. Doświadczenie polegało na tym, że umieścił zawieszinę olejową w jednorodnym polu elektrycznym i wyznaczał ładunki kropelek oleju na podstawie ich ruchu. Obecnie wartość e wyznacza się poprzez różne powiązane ze sobą doświadczenia [45].

Doświadczenie Millikana może więc świadczyć o istnieniu nieciągłego nośnika ładunku (np. właśnie elektronów i protonów).

Nazywamy e ładunkiem elementarnym, gdyż wszystkie bezpośrednio obserwowalne składniki materii posiadają ładunki będące wielokrotnościami e . Jednakże, należy wskazać, gdzie e już nie jest znowu tak elementarny (fundamentalny):

⁷sformułowania z Wikipedii, wyprowadzenie w [22]

- W ramach modelu standartowego, termin „bezpośrednio obserwowane składniki materii” można odnieść jedynie do leptonów (elektrony, miony, neutrina itp) mezonów (piony⁸, kaony itp) i barionów (protony, neutrony itp)⁹. Jednakże powszechnie przyjmuje się, że bariony i mezony składają się z kwarków, których ładunki mogą mieć wartości $\frac{1}{3}e$ i $\frac{2}{3}e$ [43].
- W ramach fizyki ciała stałego można wyróżnić pewne pseudocząstki, również charakteryzujące się tego typu ułamkowymi ładunkami¹⁰[72].

Niezależnie od tego, można i tak nazywać e stałą fundamentalną, gdyż powyższe przypadki sprowadzają się do tego, że tak naprawdę rzeczywisty ładunek elementarny jest konkretnym ułamkiem e ; wciąż można go więc określać przez tą stałą.

16. Prawo Coulomba, prawo Gaussa, potencjał pola elektrycznego.

Twierdzenie 24 (Prawo Coulomba [27]) *Jest to prawo oparte na doświadczeniu. Prawo Coulomba głosi, że siła jest wprost proporcjonalna do iloczynu ładunków i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi.*

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R^2} \hat{R}.$$

Stała ϵ_0 nazywa się **przenikalnością elektryczną próżni**.

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m}.$$

Prawo Coulomba i zasada superpozycji stanowią fizyczne podstawy elektrostatyki – reszta, poza pewnymi szczególnymi własnościami materii, jest tylko kwestią matematycznej obróbki tych podstawowych zasad.

Dla zadanego układu ładunków, możemy określić pole elektryczne dla każdego punktu w przestrzeni wg przepisu:

$$\vec{F} = Q\vec{E},$$

gdzie Q to ładunek próbny. Dla dyskretnego rozkładu

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{R_i^2} \hat{R}_i;$$

zaś dla ciągłego oczywiście

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2} \hat{R}.$$

Twierdzenie 25 (Prawo Gaussa [27]) *Dla dowolnej zamkniętej powierzchni od punktowego ładunku (pojawia się delta Diraca, a rozszerzająca się powierzchnia całkowania znosi się z malejącym z kwadratem polem, stąd stałość)*

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} q.$$

Całka z pola od rozkładu ładunków równa się sumie całek od każdego ładunku osobno. Zatem dla dowolnej zamkniętej powierzchni

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{wew},$$

⁸i poziomy:)

⁹Można też długo dyskutować, co to znaczy bezpośrednio obserwowane.

¹⁰Nie podejmuję się tu wyjaśnienia ontologicznej natury pseudocząstek. Niestety, nikt się chyba tego nie podjął, a liczba znanych pseudocząstek rośnie.

przy czym Q_{wew} jest całkowitym ładunkiem w obszarze ograniczonym przez tę powierzchnię. Jest to ilościowe sformułowanie prawa Gaussa. W takiej postaci jest równaniem całkowym, ale możemy łatwo przekształcić je w prawo różniczkowe, stosując twierdzenie o dywergencji ($Q_{wew} = \int_{obj} d\tau \rho$):

$$\int_{obj} d\tau (\nabla \cdot \vec{E}) = \int_{obj} d\tau \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Ponieważ wzór ten obowiązuje dla dowolnego obszaru całkowania, więc funkcje podcałkowe muszą być równe

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (24)$$

Jest to **prawo gaussa w postaci różniczkowej**.

Co można uzyskać obliczając bezpośrednio dywergencję pola. Obliczmy teraz

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} d\vec{l} \vec{E} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Big|_{r_a}^{r_b}.$$

Dla całki zamkniętej powyższe znika:

$$\oint d\vec{l} \vec{E} = 0,$$

co można uogólnić na pole od dowolnego rozkładu ładunków. Korzystając z twierdzenia Stokesa:

$$\nabla \times \vec{E} = 0.$$

Z faktu znikania rotacji wynika możliwość przedstawienia \vec{E} jako gradientu pola skalarного.

Definicja 16 (Potencjał elektryczny [27]) *Ponieważ całka krzywoliniowa nie zależy od wyboru drogi całkowania, możemy za jej pomocą zdefiniować funkcję*

$$V(\vec{r} \equiv \int_O^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}).$$

W tym wzorze O jest jakimś standardowym punktem odniesienia, który ustalamy wcześniej.

Łatwo sprawdzić, że

$$-\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (\nabla V) \cdot d\vec{l}.$$

Ponieważ zachodzi to dla dowolnych punktów \vec{a} i \vec{b} , więc wyrażenia pod całkami muszą być równe:

$$\vec{E} = -\nabla V.$$

Potencjał podlega zasadzie superpozycji. Zasada ta przechodzi od zasady superpozycji sił (fakt doświadczalny) na pola \vec{E} , a z nich po scałkowaniu od wspólnego punktu odniesienia do \vec{r} na potencjały.

Możemy zastosować przybliżenie multipolowe potencjału: do

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

podstawiamy

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta'),$$

gdzie $P_n(x)$ to wielomiany Legendre'a [26].

Korzystając z 24, uzyskujemy **równanie Poissona**

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dla obszarów bez ładunków to redukuje się do równania Laplace'a:

$$\Delta V = 0.$$

Równanie Poissona rozwiązuje się wyrafinowanymi metodami; funkcją Greena, kładąc przy tym warunki brzegowe Dirichleta (znana wartość potencjału na jakiejś powierzchni) albo von Neumanna (wartość pochodnej w kierunku normalnej na jakiejś powierzchni, czyli w jakimś sensie pola) [24]. Równania Laplace'a rozwiązuje się zwykle, najpierw kładąc rozwiązanie z separowanymi zmiennymi, a potem, ponieważ w trzech ważnych układach współrzędnych te rozwiązania są ortogonalnymi wielomianami, kładzie się rozwiązanie w postaci szeregu i szuka się rozwiązania w oparciu o warunki brzegowe [26]. Także pomocne są twierdzenia o jednoznaczności.

Twierdzenie 26 (Twierdzenia o jednoznaczności [26])

- *Pierwsze: rozwiązanie równania Laplace'a w pewnym obszarze V jest określone jednoznacznie, jeśli podana jest wartość rozwiązania V na powierzchni S będącej brzegiem obszaru V .*
- *Drugie: w obszarze V otoczonym przez przewodniki i zawierającym ładunki objętościowe o gęstości ρ pole elektryczne jest określone jednoznacznie, jeśli zadany jest całkowity ładunek na każdym z przewodników (Obszar może być otoczony innym przewodnikiem, może też być nieograniczony).*

17. Prąd elektryczny, prawo Ohma, rozkład prądu i pola elektrycznego w przewodniku, zasada zachowania ładunku elektrycznego. równanie ciągłości dla prądu.

Przez prąd elektryczny rozumie się uporządkowany ruch ładunku

Definicja 17 (Natężenie prądu [32]) Natężeniem prądu płynącego przez przewodnik nazywamy ładunek przepływający w jednostkowym czasie przez dany przekrój przewodnika. Zdefiniujemy wektor natężenia prądu¹¹

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

W przypadku ładunków płynących po powierzchni wprowadzamy pojęcie **powierzchniowej gęstości prądu \vec{K}** . Jest to natężenie prądu na jednostkę długości o kierunku prostopadłym do kierunku przepływu

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}}, \text{ w szczególności } \vec{K} = \sigma \vec{v}.$$

Jeśli przepływ ładunku zachodzi w obszarze trójwymiarowym, definiujemy **objętościową gęstość prądu \vec{J}** . Jest to natężenie prądu na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu

$$\vec{J} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}, \text{ w szczególności } \vec{J} = \rho \vec{v}.$$

Dla przewodników w polu elektrycznym, prędkość ładunków jest zazwyczaj bardzo mała. Możemy po pierwsze pominąć więc czynnik magnetyczny w sile Lorentza, po drugie, uznać że jest znacznie mniejsza od prędkości termicznej. Tak więc to ta druga prędkość odpowiada za zderzenia z atomami przewodnika; średni czas pomiędzy zderzeniami to

$$t = \frac{\lambda}{v_{term}},$$

¹¹specyficzna idea u Griffithsa

czyli w kierunku pola

$$v_r = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{term}}.$$

Jeśli liczba nośników prądu na jednostkę objętości wynosi n (nośniki mają zaś ładunek e i masę m), to

$$\vec{J} = ne\vec{v}_r = \frac{ne\lambda}{2v_{term}} \frac{\vec{F}}{m} = \frac{n\lambda e^2}{2mv_{term}} \vec{E}.$$

Wynik ten jest nie do końca prawdziwy, ale wskazuje od czego zależy i poprawnie przewiduje proporcjonalność do gęstości ładunków i spadek wraz z temperaturą[36].

Twierdzenie 27 (Prawo Ohma [36]) *Dla większości substancji gęstość prądu \vec{J} jest proporcjonalna do siły działającej na jednostkowy ładunek. W zasadzie siła powodująca ruch może mieć dowolną naturę, lecz zwykle jest to siła elektromagnetyczna. Zazwyczaj prędkość ładunków jest na tyle mała, że wyraz magnetyczny można pominąć. Ostatecznie*

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (25)$$

(Kontrprzykładem jest plazma, w której magnetyczny wkład do siły może być istotny). Równanie (31) nosi nazwę **prawa Ohma**. Współczynnik proporcjonalności σ jest stałą empiryczną zależną od materiału, z którego wykonany jest półprzewodnik; nosi on nazwę **przewodności elektrycznej właściwej** substancji. Częściej posługujemy się jego odwrotnością, nazywaną **oporem elektrycznym właściwym**: $\rho = \frac{1}{\sigma}$.

Bardziej znana postać prawa Ohma to oczywiście

$$U = IR,$$

gdzie stała R zależy od geometrii układu, a wzór ten powstaje przez scałkowanie po całym układzie od jego początku do końca. W przypadku prądu stałego i jednorodnego przewodnictwa

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

czyli jest dokładnie jak z ładunkami w elektrostatyce - wewnątrz przewodnika równają się zero, zbierają się tylko na powierzchni. Jeśli chodzi o rozkład prądu w przewodniku, jego przebieg jest wygładzany w całym przewodniku w wyniku sprzężenia zwrotnego. Jeśli gdziekolwiek wytworzy się niezrównoważony ładunek, spowalnia on dalsze nagromadzanie się w tym punkcie ładunku i „rozpuszcza” już zgromadzony ładunek. Można więc przyjąć, że natężenie prądu w całym obwodzie elektrycznym (bez rozgałęzień) jest jednakowe - ściśle to można omówić, mając w ręku równanie ciągłości. Jeśli chodzi o natężenie pola w dobrym przewodniku, można spokojnie założyć że cały taki fragment przewodnika jest ekwipotencjalny, gdyż niewielki potencjał jest w ogóle potrzebny, żeby prąd zaczął płynąć. Więc pole elektryczne jest stałe, co już stwierdziliśmy [36].

Twierdzenie 28 (Zasady zachowania ładunku [39])

- *Globalna: całkowity ładunek we Wszechświecie jest stały*
- *Lokalna: jeśli całkowity ładunek zawarty w jakiejś objętości zmienia się o pewną wartość, to dokładnie taka sama ilość ładunku musi przepłynąć przez powierzchnię ograniczającą tę objętość.*

Ta druga, lokalna, jest stwierdzeniem znacznie silniejszym

Twierdzenie 29 (Równanie ciągłości [39]) *Na podstawie powyższego i stosując prawo Gaussa niemal od razu możemy zapisać*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

Skoro więc ładunek w przewodniku nie może się gromadzić gdyż musi natychmiast się rozptywać, mamy wszystko co wyżej od razu.

18. Metale, półprzewodniki.

Przerobię podejście mikroskopowe, zanim w ogóle przejdę do makroskopowego.

Definicja 18 (Wiązania w kryształach [49])

- **Wiązanie kowalencyjne:** *elektrony sąsiednich atomów są wspólne dla sąsiadów, ale przestrzenie zlokalizowane. Wiązania takie są kierunkowe (nieizotropowy rozkład ładunku) i prowadzą do zapełnionego „pasma walencyjnego” i pustego „pasma przewodnictwa”, co zostanie objaśnione dalej.*
- **Wiązania metaliczne:** *elektrony zostają „uwspólnione” w całym kryształ. Są więc zdelokalizowane i tworzą izotropowy rozkład ładunku. Można powiedzieć, że jony dodatnie zanurzone są w morzu gęstości ładunku ujemnego (metale są bardzo kowalne).*

Metale powstające dzięki temu wiązaniu krystalizują w strukturach najgęstszego upakowania o liczbie koordynacyjnej 12.

Będziemy traktować elektrony (cząstki lekkie) jako dopasowujące się do chwilowego położenia rdzeni w węzłach sieci - przybliżenie adiabatyczne. Będziemy również traktować elektrony jako cząstki niezależne poruszające się w potencjale periodycznym o okresie sieci, będącym wypadkowym potencjałem rdzeni i wszystkich pozostałych elektronów walencyjnych - przybliżenie jednoelektronowe [49].

Twierdzenie 30 (Twierdzenie Blocha [49]) *Ponieważ hamiltonian naszego problemu musi mieć także symetrię translacyjną, więc komutuje z operatorami translacji (o wielokrotność stałej sieci).*

Z tego ostatecznie wynika, że funkcje własne operatora translacji, a więc i hamiltonianu, możemy przedstawić w postaci iloczynu fali płaskiej i funkcji o okresie sieci:

$$\psi_k(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot u_k(\vec{r}).$$

By opisać zachowanie elektronów w metalach, stosuje się przybliżenie elektronów prawie swobodnych - elektronowe funkcje falowe mogą być kombinacjami fal płaskich. W rezultacie takiego działania uzyskuje się potencjał z przerwami na kolejnych wielokrotnościach (poza zerem) połówki szerokości tzw. strefy Brillouina, która jest odpowiednikiem komórki elementarnej w przestrzeni wektorów falowych. Można wprowadzić quasielektrony, których pęd ograniczony jest do pierwszej strefy Brillouina - uzyskuje się strukturę pasmową i opis takiego elektronu wymaga teraz podania także numeru pasma.

By opisać zachowanie elektronów w kryształach o wiązaniach kowalencyjnych, stosuje się model ciasnego wiązania. Składowa periodyczna funkcji Blocha przyjęta jest w postaci sumy zawierającej m.in. funkcje atomowe zlokalizowane w kolejnych węzłach sieci. Tu od razu wszystko jest ograniczone do pierwszej strefy Brillouina, i także uzyskuje się strukturę pasmową.

Niezależnie od opisu: prędkość elektronu definiuje się jako prędkość grupową

$$\vec{v}_{gr} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E.$$

Cząstka w kryształ może zmniejszać prędkość, zwiększając swoją energię. Dzieje się tak ze względu na ujemną krzywiznę pasma na granicy strefy [49] (chodzi o wykres energii od wektora falowego, czyli (quasi)pędu). Należy to oczywiście rozumieć, jako efekt związany z oddziaływaniem z siecią.

Wykorzystując zakaz Pauliego, warunki Borna-Karmana (te o wyznaczeniu funkcji falowych periodycznych w zadanym obszarze) i może jeszcze statystykę Fermiego-Diraca, dochodzimy do podstawowych możliwości jeśli chodzi o obsadzenia pasm: za [68]:

- Elektronów jest tyle, że obsadzają pasmo tylko częściowo. Istnieje pewna wartość energii taka, że stany w temperaturze 0 K powyżej tej energii są całkowicie puste, poniżej całkowicie zajęte. Wartość tę nazywamy energią Fermiego. W języku „korpuskularnym” możemy powiedzieć, że do przejścia ze stanu pełnego do pustego potrzebna jest bardzo mała energia. Energia ta może być dostarczona przez słabe zewnętrzne pole elektryczne. Pole to może więc zmienić symetryczny rozkład elektronów (dla każdej energii są elektrony o różnych kierunkach pędu) i spowodować przepływ prądu elektrycznego. Tego typu sytuacja istnieje w metalach.
- Elektronów jest tyle, że w temperaturze zera bezwzględnej wypełniają pewne pasma całkowicie, a inne są całkowicie puste. Używając języka „korpuskularnego” powiemy, że na to, aby elektron mógł przejść z poziomu pełnego do pustego, potrzebna jest skończona energia E_g . Wartość tej energii nazywamy przerwą energetyczną. Słabe zewnętrzne pole elektryczne nie może zmienić rozkładu elektronów; ciała takie w temperaturze 0 K nie przewodzą prądu elektrycznego. Często za podstawę podziału na półprzewodniki i izolatory przyjmuje się wartość $E_g = 2,5 \text{ eV}$, ale taka linia podziału nie zawsze się zgadza i nie zawsze ma sens.

Tak czy siak, możemy opisać przepływ prądu przy obecności siły. Z nadmiaru wszystkich przybliżeń dochodzi się ostatecznie do istnienia masy efektywnej, która może być ujemna.

Definicja 19 (Masa efektywna [49]) W krótkim przedziale czasu Δt siła \vec{F} spowoduje zmianę energii elektronu $\Delta E = Fv\Delta t$. Z drugiej strony $\Delta E = \frac{dE}{dk} \cdot \Delta k$. Ta pochodna zadana jest przez prędkość i otrzymujemy

$$\Delta E = \hbar v \Delta k = Fv\Delta t, \quad \text{czyli} \quad \hbar \Delta k = F\Delta t.$$

Jak więc widać, $\hbar k$ można interpretować jako pęd elektronu. Zastanówmy się jeszcze nad przyspieszeniem elektronu:

$$a_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} F.$$

Współczynnik stojący przed siłą ma znaczenie odwrotności masy

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}.$$

a ponieważ pochodna energii dla dużych pędów (energii) maleje, druga pochodna spada poniżej zera. Jeśli więc pasmo jest niemal zajęte, to przyspieszane elektrony należą właśnie do tych dziwnych elektronów, więc przyspieszają w przeciwnym kierunku niż powinny - i uzyskawszy prędkość suną w stronę przeciwną do przyłożonego napięcia. Prąd sunący w inną stronę niż powinien obserwuje się. Ponieważ pasma są niemal całkowicie zajęte, wygodniej jest traktować jako nośniki przerwy pomiędzy elektronami.

Definicja 20 (Dziury [49]) Taką hipotetyczną cząstkę – quasi-cząstkę – nazywamy **dziurą**. Pęd dziury jest sumą wszystkich elektronów w paśmie, czyli wynosi

$$\hbar \vec{k}_{\text{hole}}, \text{ czyli dziura} = \hbar \vec{k}_{\text{elektron bez pary, reszta się znosi}}$$

. Masa dziury jest równa masie elektronu, ale ze zmienionym znakiem.

O ile w niektórych metalach dziury mogą się pojawiać, o tyle w półprzewodnikach, przy przepływie prądu muszą - gdyż elektrony przewodzące zostały wyrzucone do wyższego pasma energetycznego, pozostawiając wolne miejsce. Taki elektron może oddziaływać z dziurą, tworząc różne rzeczy.

Twierdzenie 31 (Opis ruchu ładunków P. Drude [50]) Ruch elektronów Drude przyjął za ruch ze stałą siłą tłumiącą

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v_D = -e\varepsilon.$$

W przypadku stacjonarnym po osiągnięciu równowagi prędkość już nie ulega zmianie i otrzymujemy wyrażenie na równowagową prędkość dryfu ładunków

$$v_D = -\frac{e\tau}{m}\varepsilon = -\mu\varepsilon.$$

Ruchliwość jest w pewnym sensie miarą jakości sieci krystalicznej. Gęstość prądu możemy zapisać jako

$$j = -env_D = ne\mu\varepsilon = \sigma\varepsilon,$$

co oznacza, że w przypadku jednego rodzaju nośników przewodność właściwa opisana jest wzorem

$$\sigma = ne\mu.$$

Dla przewodnictwa elektronów i dziur zapiszemy

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h.$$

W metalach mamy właściwie stałą koncentrację nośników, więc wraz z temperaturą wpływ na prąd ma jedynie zmniejszenie ruchliwości. W półprzewodnikach wraz z temperaturą rośnie koncentracja nośników, i ten efekt tu dominuje.

Wreszcie, półprzewodniki można domieszkowywać – wprowadzając dodatkowe związki, które, zależnie czy przyjmują dodatkowe elektrony z dolnego pasma czy oddają swoje do górnego, są źródłem dodatkowych nośników, dziur bądź elektronów. Półprzewodniki z Wikipedii:

- samoistne: aluminium, diament, german
- domieszkowe:
 - typu n (negative, więcej elektronów): typowo dodaje się fosfor do aluminium
 - typu p (positive, więcej dziur): boron do aluminium

19. Obwody elektryczne: prawo Ohma i prawa Kirchhoffa.

Przez obwód elektryczny rozumie się zamknięty układ przewodników itp., w którym występuje siła wywołująca ruch ładunków w całym obwodzie. Można napisać dla siły całkowitej $\left(f = \frac{F}{q}\right)$:

$$\vec{f} = \vec{f}_r + \vec{E}$$

Siła elektrostatyczna \vec{E} wygładza przepływ prądu i przenosi wpływ źródła do odległych części obwodu. Ponieważ ma naturę wyłącznie elektrostatyczną, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$. Źródło \vec{f}_r może być różne [36].

Definicja 21 (Siła elektromotoryczna [36])

$$\varepsilon = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f}_r \cdot d\vec{l}.$$

SEM ε , wbrew nazwie, nie jest siłą, lecz całką siły działającej na jednostkowy ładunek.

Przedyskutujmy jeszcze jednak ruch ładunków w przewodniku pod wpływem pola elektromagnetycznego. Dla przewodników w polu elektrycznym, prędkość ładunków jest zazwyczaj bardzo mała. Możemy po pierwsze pominąć więc czynnik magnetyczny w sile Lorentza, po drugie, uznać że jest znacznie mniejsza od prędkości termicznej. Tak więc to ta druga prędkość odpowiada za zderzenia z atomami przewodnika; średni czas pomiędzy zderzeniami to

$$t = \frac{\lambda}{v_{term}},$$

czyli w kierunku pola

$$v_r = \frac{1}{2}at = \frac{a\lambda}{2v_{term}}.$$

Jeśli liczba nośników prądu na jednostkę objętości wynosi n (nośniki mają zaś ładunek e i masę m), to

$$\vec{J} = ne\vec{v}_r = \frac{ne\lambda}{2v_{term}} \frac{\vec{F}}{m} = \frac{n\lambda e^2}{2mv_{term}} \vec{E}.$$

Wynik ten jest nie do końca prawdziwy, ale wskazuje od czego zależy i poprawnie przewiduje proporcjonalność do gęstości ładunków i spadek wraz z temperaturą[36].

Twierdzenie 32 (Prawo Ohma [36]) *Dla większości substancji gęstość prądu \vec{J} jest proporcjonalna do siły działającej na jednostkowy ładunek. W zasadzie siła powodująca ruch może mieć dowolną naturę, lecz zwykle jest to siła elektromagnetyczna. Zazwyczaj prędkość ładunków jest na tyle mała, że wyraz magnetyczny można pominąć. Ostatecznie*

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (26)$$

Równanie (31) nosi nazwę **prawa Ohma**. Współczynnik proporcjonalności σ jest stałą empiryczną zależną od materiału, z którego wykonany jest półprzewodnik; nosi on nazwę **przewodności elektrycznej właściwej** substancji. Częściej posługujemy się jego odwrotnością, nazywaną **oporem elektrycznym właściwym**: $\rho = \frac{1}{\sigma}$.

Bardziej znana postać prawa Ohma to oczywiście

$$U = IR,$$

gdzie stała R zależy od geometrii układu, a wzór ten powstaje przez scałkowanie po całym układzie od jego początku do końca. Prawo Ohma nie jest spełnione chociażby w:

- plazmie, w której wkład magnetyczny do siły może być istotny [36];
- w nadprzewodnikach, gdzie przepływem prądu rządzi równanie Londona lub bardziej rozwinięta teoria Ginsburga-Landaua, która uzależnia przepływ prądu od magnetycznego potencjału wektorowego [24].

Twierdzenie 33 (Prawa Kirchhoffa [47, 46])

1. *Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.*
2. *Algebraiczna suma zmian potencjału napotykanym przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zero.*

Pierwsze prawo Kirchhoffa wynika od razu z równania ciągłości zastosowanego do obszarów bez ładunków.

Twierdzenie 34 (Lokalna zasada zachowania ładunku [39]) *Jeśli całkowity ładunek zawarty w jakiejś objętości zmienia się o pewną wartość, to dokładnie taka sama ilość ładunku musi przepłynąć przez powierzchnię ograniczającą tę objętość.*

Twierdzenie 35 (Równanie ciągłości [39]) *Na podstawie powyższego i stosując prawo Gaussa niemal od razu możemy zapisać*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

Drugie prawo Kirchhoffa wynika z elektrostatycznego charakteru \vec{E} ; należy jednak zauważyć, co wchodzi w skład tych potencjałów. Ponieważ praca wykonana nad ładunkiem to εq , i tylko siła zewnętrzna wykonała pracę, to znaczy to, że musiała wytworzyć napięcie sprzeciwiające się wszystkim innym napięciom w obwodzie. Tym samym $\varepsilon = \sum U_i$, gdzie U_i to napięcia nie wynikające z siły zewnętrznej.

Mogłoby się na pierwszy rzut oka wydawać, że cała powyższa dyskusja nie nadaje się w następujących przypadkach:

- Kiedy obwód elektryczny znajduje się w polu zmiennego pola magnetycznego. Jednakże wtedy pole elektryczne wywołane zmiennym polem po prostu wchodzi do SEM, a elektrostatyczną siłę wciąż można wyróżnić i nie się tu nie zmienia.
- Kiedy w układzie znajdują się kondensatory. Jednakże ładunek gromadzący się na jednej okładce kondensatora praktycznie natychmiast powoduje odkładanie się przeciwnego ładunku na drugiej; wypadkowo nie ma więc tak naprawdę niezrównoważonych ładunków w układzie.
- Kiedy w układzie znajdują się cewki indukcyjne, w których prąd elektryczny wywołuje pole magnetyczne. W takim przypadku jednak wystarczy traktować dodatkowy SEM jako dodatek do pierwszego i tyle.
- Wreszcie, w krótkich okresach czasu przy zmianie sytuacji w obwodzie, włączaniu i wyłączaniu obwodu itp., rzeczywiście to wszystko powyżej nie jest spełnione. No i wtedy, gdy wolne nieskompensowane ładunki nie mają okazji się rozpuścić.

20. Pole magnetyczne prądu stałego, prawo Biota-Savarta.

Jeśli przez dwa równoległe druty przepuścimy prąd w przeciwnych kierunkach, zauważymy ich wzajemne przyciąganie; jeśli w tych samych - odpychanie. Już sam ten fakt świadczy o tym, że za to zjawisko nie odpowiada elektrostatyka. W istocie, prąd to ruch ładunków ujemnych wzdłuż drutów złożonych z dodatnich jąder atomowych, więc żadne niezrównoważone ładunki się nie pojawiają. Warto więc stwierdzić:

Definicja 22 (Elektrostatyka i magnetostatyka [33])

Ładunki stacjonarne \Rightarrow stałe pole elektryczne: elektrostatyka.

Stale prądy \Rightarrow stałe pole magnetyczne: magnetostatyka.

Zacznę jednak od przyjęcia istniejących pól i ładunku w nich się poruszającym

Definicja 23 (Siła Lorentza) *Siła działająca na ładunek Q poruszający się z prędkością \vec{v} w polu o indukcji magnetycznej \vec{B} jest dana wzorem*

$$\vec{F}_{mag} = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Nosi ona nazwę **siły Lorentza**. W obecności obu pól, elektrycznego i magnetycznego, siła wypadkowa jest równa

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Równanie to jest faktem doświadczalnym, jego słuszności nie można udowodnić.

Pozostał jeszcze prąd, czyli uporządkowany ruch ładunku

Definicja 24 (Natężenie prądu [32]) *Natężeniem prądu płynącego przez przewodnik nazywamy ładunek przepływający w jednostkowym czasie przez dany przekrój przewodnika. Zdefiniujemy wektor natężenia prądu¹²*

$$\vec{I} = \lambda \vec{v}$$

W przypadku ładunków płynących po powierzchni wprowadzamy pojęcie **powierzchniowej gęstości prądu \vec{K}** . Jest to natężenie prądu na jednostkę długości o kierunku prostopadłym do kierunku przepływu

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{dl_{\perp}}, \text{ w szczególności } \vec{K} = \sigma \vec{v}.$$

Jeśli przepływ ładunku zachodzi w obszarze trójwymiarowym, definiujemy **objętościową gęstość prądu \vec{J}** . Jest to natężenie prądu na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku przepływu

$$\vec{K} \equiv \frac{d\vec{I}}{da_{\perp}}, \text{ w szczególności } \vec{J} = \rho \vec{v}.$$

¹²specyficzna idea u Griffithsa

Twierdzenie 36 (Prawo Biota-Savarta [33])

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{R}}{R^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}.$$

Ostatnia równość dla prądów stałych; dla prądów powierzchniowych i objętościowych postacie analogiczne. Całka liczona jest wzdłuż całej drogi prądu w kierunku jego przepływu; $d\vec{l}'$ jest elementem długości przewodnika, a R jest jak zawsze wektorem skierowanym od źródła do punktu \vec{r} . Stała μ_0 nazywana jest przenikalnością magnetyczną próżni:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}.$$

To nie jest stała empiryczna, ale ściśła wartość. Służy ona do zdefiniowania ampera, a amper z kolei definiuje kulomba.

Bo eksperyment z przyciągającymi się dwoma drutami istotnie służy do zdefiniowania ampera:

Definicja 25 (ampere [75]) *The ampere is that constant current which, if maintained in two straight parallel conductors of infinite length, of negligible circular cross-section, and placed 1 m apart in vacuum, would produce between these conductors a force equal to 2×10^{-7} newton per metre of length.*

Wróćmy na chwilę do tego doświadczenia; rozważmy dwa nieskończone równoległe druty. Od skończonego prostego drutu mamy siłę Lorentza

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1),$$

gdzie kąty to kąty widzenia drutu z punktu, w którym szukamy indukcji, zaś s to odległość od linii drutu. Tak więc dla nieskończonego drutu mamy

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

czyli gęstość siły przyciągania dwóch drutów w odległości d [33]:

$$f = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{4\pi s}$$

stąd definicja ampera.

21. Siła Lorentza i ruch cząstek naładowanych w polach elektrycznym i magnetycznym.

Definicja 26 (Siła Lorentza) *Siła działająca na ładunek Q poruszający się z prędkością \vec{v} w polu o indukcji magnetycznej B jest dana wzorem*

$$\vec{F}_{mag} = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Nosi ona nazwę **siły Lorentza**. Ponieważ \vec{F} i \vec{v} są wektorami, \vec{B} musi być pseudowektorem. W obecności obu pól, elektrycznego i magnetycznego, siła wypadkowa jest równa

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Równanie to jest faktem doświadczalnym, jego słuszności nie można udowodnić.

Definicja 27 (Transformacje wektorów, pseudowektorów i skalarów [24])

- wektor - zmienia się pod wpływem odbić i rotacji;
- pseudowektor - tylko pod wpływem rotacji;
- skalar - odporny na rotacje i odbicia.

Jeśli więc występuje samo jednorodne pole \vec{E} , mamy do czynienia z przyspieszaniem liniowym cząstki:

$$p = QEt.$$

Takie przyspieszanie to podstawowy mechanizm w akceleratorach. Siła Lorentza, jak widać, jest zawsze prostopadła do kierunku ruchu; więc po pierwsze nie wykonuje pracy, po drugie, w jednorodnym polu \vec{B} wywołuje ruch kołowy w płaszczyźnie prostopadłej do tego pola, z prędkością obiegu równą rzutowi prędkości na tę płaszczyznę. Można znaleźć promień tego koła ze wzoru na siłę dośrodkową:

$$QvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Stałe pole magnetyczne to mechanizm zakręcania torów w cyklotronach i spektroskopach masowych.

W przypadku krzyżujących się prostopadle pól \vec{E} i \vec{B} , można rozwiązać problem oczywiście klasycznie, uzyskując różne dziwne krzywe. Ale najlepiej zrobić to relatywistycznie. W ogóle więc przyjrzyjmy się kwestii relatywistycznie.

Przekształcenie Lorentza pozwala wyrazić współrzędne przestrzenne i czas w jednym układzie inercyjnym współrzędnymi w innym układzie inercyjnym. Niech v będzie prędkością wzdłuż osi x układu primowanego; wtedy

$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

a $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ to stała przyrody równa prędkości światła w próżni. Jeśli mamy dwa układy poruszające się z

prędkościami v' i v'' względem jakiegoś innego układu, i względną prędkością v między sobą (wszystko wzdłuż tej samej linii), to

$$v' = \frac{v + v''}{1 + \frac{vv''}{c^2}}; \quad (27)$$

a korzystając z tego, można obliczyć

$$\gamma' = \gamma\gamma'' \left(1 + \frac{vv''}{c^2}\right). \quad (28)$$

Jeśli jakiś odcinek o długości l w układzie własnym jest obserwowany w układzie poruszającym się w tym samym kierunku co skierowany jest odcinek, to z warunku że pomiar musi być wykonany **w układzie obserwacji** w tym samym czasie wynika skrócenie Lorentza:

$$l' = \frac{l}{\gamma}. \quad (29)$$

Jeśli mamy duży kondensator płaski o okładkach równoległych do płaszczyzny xz , zaś dolna(górna) okładka ma ładunek $\pm\sigma$, napięcie między okładkami wynosi $\vec{E} = \epsilon_0\sigma\hat{y}$. Poruszajmy się teraz w kierunku \hat{x} . Ze skrócenia Lorentza (29) wynika skrócenie w układzie poruszającym się odległości pomiędzy ładunkami, czyli zwiększenie gęstości ładunków o czynnik γ' . Jednocześnie, ładunki te w tym układzie poruszają się, czyli wytwarza się prąd powierzchniowy:

$$\sigma' = \gamma'\sigma, \quad \vec{K}' = \mp\gamma'v'\sigma\hat{x},$$

czyli

$$\vec{E}' = \epsilon_0\gamma'\sigma\hat{y}, \quad \vec{B}' = -\mu\gamma'\sigma v'\hat{x};$$

a w innym układzie

$$\vec{E}'' = \epsilon_0\gamma''\sigma\hat{y}, \quad \vec{B}'' = -\mu\gamma''\sigma v''\hat{x}.$$

Wykorzystując teraz (27) i (29), uzyskujemy

$$E_y = \gamma\gamma'' \left(1 + \frac{vv''}{c^2}\right) \sigma = \gamma \left(E_y'' - \frac{v}{c^2\epsilon_0\mu_0} B_z''\right) = \gamma(E_y' - vB_z'),$$

$$B_z = \dots = \gamma(B_z' - \frac{v}{c^2} E_y').$$

Warto może wykazać, że (ρ, \vec{j}) to czterowektor, i na tej podstawie wykazać transformację całego pola. Może żeby „pierwotnym” polem było magnetyczne, można dodać jakieś ładunki kompensujące albo wystartować z nieskończonego solenoidu. Ja się tu zatrzymam na tym, i tylko tu

wyprowadzę niezmiennik transformacji

$$E^2 - c^2 B^2 = \gamma^2 E'^2 - 2\gamma^2 v E' B' + \gamma^2 v^2 B'^2 - c^2 \gamma^2 B'^2 + 2\gamma^2 v B' E' - \gamma^2 v^2 c^{-2} E'^2 = (\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2) (E'^2 - c^2 B'^2) = E'^2 - c^2 B'^2$$

Zależnie więc od znaku niezmiennika, można przejść do układu w którym jest tylko jedno z tych dwóch pól.

22. Wyznaczanie stosunku e/m , spektroskop masowy i wyznaczanie mas atomów (izotopów).

Definicja 28 (Siła Lorentza) Siła działająca na ładunek Q poruszający się z prędkością \vec{v} w polu o indukcji magnetycznej B jest dana wzorem

$$\vec{F}_{mag} = Q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Nosi ona nazwę **siły Lorentza**. W obecności obu pól, elektrycznego i magnetycznego, siła wypadkowa jest równa

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Równanie to jest faktem doświadczalnym, jego słuszności nie można udowodnić.

Ale nas interesuje siła Lorentza, gdyż dostarcza ona mechanizmu do mierzenia stosunku $\frac{e}{m}$. Siła Lorentza, jak widać, jest zawsze prostopadła do kierunku ruchu; więc po pierwsze nie wykonuje pracy, po drugie, w jednorodnym polu \vec{B} wywołuje ruch kołowy w płaszczyźnie prostopadłej do tego pola, z prędkością obiegu równą rzutowi prędkości na tę płaszczyznę. Można znaleźć promień tego koła ze wzoru na wartość siły dośrodkowej:

$$QvB = \frac{mv^2}{R}$$

czyli

$$R = \frac{mv}{QB}. \quad (30)$$

Ogólny schemat spektroskopów masowych jest więc taki: najpierw cząstki są rozpędzane chociażby w jednorodnym polu elektrycznym do określonej energii, potem wpuszczane są w jednorodne pole magnetyczne. Mierzy się wtedy promień ich skrzywienia. Oczywiście dla dużych prędkości do powyższego wzoru należy wstawić $m = M\gamma$. W ogóle to mając pola \vec{E} i \vec{B} to można wszystko powyznaczyć z równań Newtona - a przede wszystkim stosunek $\frac{Q}{m}$ - trzeba mieć tylko trajektorię.

Masy różnych izotopów wyznacza się tak, że się je jonizuje i strzela się nimi w pole magnetyczne. Stosunek ładunku elementarnego do różnych mas wyznacza się, strzelając jądrami wodoru albo elektronami. Właściwie nie wiem, co można jeszcze napisać.

23. Prawo indukcji Faradaya i reguła Lenza.

Eksperymenty Faradaya [37] niedokładnie, jak było

1. Przemieszczamy pętlę z drutu w polu magnetycznym w prawo. W pętli płynie prąd.
2. Przesuwamy magnes w lewo, pętla pozostaje nieruchoma. I tym razem w pętli płynie prąd.
3. Pętla i magnes pozostają w spoczynku, zmieniamy natomiast indukcję pola magnetycznego. Raz jeszcze w pętli płynie prąd.

Na podstawie tych argumentów można sformułować...

Twierdzenie 37 (Uniwersalna reguła strumienia [37]) Jeśli (z jakichkolwiek powodów) zmienia się strumień magnetyczny przenikający przez obwód, w obwodzie indukuje się SEM

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Z kolei, na podstawie drugiego eksperymentu:

Twierdzenie 38 (Prawo Faradaya) Zmiana pola magnetycznego indukuje pole elektryczne indukuje pole elektryczne. *To właśnie owo „indukowane” pole elektryczne powoduje powstanie SEM w eksperymencie 2 i 3. Jeśli SEM jest równa szybkości zmiany strumienia, to natężenie pola elektrycznego \vec{E} wiąże się ze zmianą indukcji magnetycznej \vec{B} równaniem*

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

to natężenie pola elektrycznego \vec{E} wiąże się ze zmianą indukcji magnetycznej \vec{B} równaniem

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{a}.$$

Jest to całkowa postać prawa Faradaya. Posługując się twierdzeniem Stokesa, znajdziemy jego postać różniczkową:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Podobieństwo wyników eksperymentów Faradaya naprowadziło Einsteina na teorię względności.

Zauważmy, że wszędzie tu są minusy. Jeśli więc złożymy wyindukowany SEM z prawem Ampera

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \text{lub} \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J},$$

gdzie nie ma minusów, dojdziemy do reguły Lenza, która jest wygodna w praktyce.

Twierdzenie 39 (Reguła Lenza [36]) Natura nie znosi zmiany strumienia.

Indukowany prąd będzie płynął w takim kierunku, że dodatkowy strumień powstały w wyniku jego przepływu sprzeciwia się zmianie pierwotnego strumienia.

To chyba jest przejawem jakichś zasad zachowania.

Warto może wspomnieć o indukcijnościach. Jeśli mamy jakąś pętlę z prądem, w której płynie stały prąd, mamy indukowane pole proporcjonalne do natężenia prądu:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{R}}{R^2}.$$

Strumień przez jakąś inną pętlę wyniesie więc

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

gdzie M_{21} nazywamy indukcijnością wzajemną. Można pokazać, że M_{21} jest wyrażeniem czysto geometrycznym. Tym samym, jeśli pętla nie latająca, zróżniczkowanie tego da wyrażenie na SEM w drugiej pętli w zależności od zmiany prądu w pierwszej. Rzecz jasna, równie dobrze można rozważać jedną i tą samą pętlę. Wtedy współczynnik nazywa się L i nosi miano indukcijności własnej.

24. Obwody LC i RLC: drgania, drgania tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.

Zacznijmy od elementów R , L i C .

Twierdzenie 40 (Prawo Ohma [36]) *Dla większości substancji gęstość prądu \vec{J} jest proporcjonalna do siły działającej na jednostkowy ładunek. W zasadzie siła powodująca ruch może mieć dowolną naturę, lecz zwykle jest to siła elektromagnetyczna. Zazwyczaj prędkość ładunków jest na tyle mała, że wyraz magnetyczny można pominąć. Ostatecznie*

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

(31)

Równanie (31) nosi nazwę **prawa Ohma**. Współczynnik proporcjonalności σ jest stałą empiryczną zależną od materiału, z którego wykonany jest półprzewodnik; nosi on nazwę **przewodności elektrycznej właściwej** substancji. Częściej posługujemy się jego odwrotnością, nazywaną **oporem elektrycznym właściwym**: $\rho = \frac{1}{\sigma}$.

Bardziej znana postać prawa Ohma to oczywiście

$$U = IR, \quad (32)$$

gdzie stała R zależy od geometrii układu, a wzór ten powstaje przez scałkowanie po całym układzie od jego początku do końca. Z reguły przewodniki mają tak wysoką przewodność, że można traktować różnicę potencjału na ich końcach jako znikomą. Można oczywiście przygotowywać oporniki; a przy opisie nawet zwykłych układów stosuje się czasem opis oporu przez umieszczone w konkretnych miejscach oporniki.

Jeśli mamy jakąś pętlę z prądem, w której płynie stały prąd, mamy indukowane pole proporcjonalne do natężenia prądu:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{R}}{R^2}.$$

Strumień przez jakąś inną pętlę wyniesie więc

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 \quad (33)$$

gdzie M_{21} nazywamy indukcyjnością wzajemną.

Twierdzenie 41 (Wzór Neumanna [37]) Wyrażmy strumień przez potencjał wektorowy i skorzystajmy z twierdzenia Stokesa:

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 d\vec{a}_2 = \int (\nabla \times \vec{A}_1) \cdot d\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2.$$

Albo

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l}_1}{R}.$$

Podstawiając to do strumienia i przyrównując do (33), ostatecznie otrzymujemy

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{R}. \quad (34)$$

Jest to **wzór Neumanna**. Nie jest on zbyt użyteczny w praktycznych obliczeniach, wskazuje jednak na dwa ważne fakty dotyczące indukcyjności wzajemnej:

1. M_{21} jest wielkością czysto geometryczną, zależną od rozmiarów, kształtów i wzajemnego położenia obu pętli.

2. Całka w równaniu (34) nie zmienia się, jeśli pętle zamienimy rolami; wynika stąd więc, że

$$M_{21} = M_{12} \equiv M.$$

Oczywiście, zmiana natężenia prądu indukuje SEM w drugiej pętli.

Definicja 29 (Indukcyjność wzajemna [37]) Po chwili namysłu dochodzimy do wniosku, że zmiana natężenia prądu nie tylko indukuje SEM w położonych w pobliżu obwodach, ale także indukuje SEM w tej samej pętli, w której płynie prąd. Także i tym razem indukcja magnetyczna (a więc także i strumień) jest proporcjonalna do natężenia prądu:

$$\Phi = LI.$$

Stała proporcjonalności L , zależną jedynie od geometrii, nazywa się indukcyjnością własną obwodu. Jeśli zmienia się natężenie prądu, SEM indukująca się w obwodzie jest równa

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}. \quad (35)$$

Indukcyjność mierzymy w henrach; $H = V \cdot s \cdot A^{-1}$.

No, kondensator to teraz łatwizna.

Twierdzenie 42 (Drugie twierdzenie o jednoznaczności [26]) W obszarze V otoczonej przez przewodniki i zawierającym ładunki objętościowe o gęstości ρ pole elektryczne jest określone jednoznacznie, jeśli zadany jest całkowity ładunek na każdym z przewodników (Obszar może być otoczony innym przewodnikiem, może też być nieograniczony).

Dowód za [26]: przypuśćmy że mamy dwa pola E_1 i E_2 spełniające warunki brzegowe na granicach półprzewodników. Muszą więc spełniać odpowiednie prawa Gaussa:

$$\begin{aligned} \oint_{i-\text{ta pow.przew.}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_i, & \oint_{i-\text{ta pow.przew.}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_i \\ \oint_{zewn.pow.przew.} \vec{E}_1 \cdot d\vec{a} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{całk}}, & \oint_{zewn.pow.przew.} \vec{E}_2 \cdot d\vec{a} &= \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{całk}}. \end{aligned}$$

Z kolei dla ich różnicy $\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_2$ mamy na każdej powierzchni granicznej

$$\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0. \quad (36)$$

Zaś z różniczkowego prawa Gaussa

$$\nabla \cdot \vec{E}_3 = 0$$

Wiemy nadto, że powierzchnia każdego przewodnika jest ekwipotencjalna, wobec czego potencjał na każdej z nich jest stały. Wykorzystajmy zależność

$$\nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) = V_3 (\nabla \cdot \vec{E}_3) + \vec{E}_3 \cdot (\nabla V_3) = -E_3^2.$$

Możemy scałkować cały ten wzór po obszarze między przewodnikami i zastosować twierdzenie o dywergencji.

$$\int \nabla \cdot (V_3 \vec{E}_3) d\tau = \oint V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = - \int E_3^2 d\tau.$$

Całka powierzchniowa: stałe potencjały wyciągamy przed znak całki, a to co pozostaje jest z (36) równe zeru; więc i prawa strona jest równa zeru. Ale funkcja podcałkowa jest kwadratem, więc jest zawsze dodatnia, więc $E_3 = 0$.

Skoro pole, to i potencjał zadany jest jednoznacznie. Skoro tak, to przemnożenie i potencjału i ładunku przez tą samą stałą wciąż opisuje sytuację fizyczną, i potencjał jest proporcjonalny do ładunku:

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (37)$$

gdzie C to **pojemność kondensatora**, stała zależna jedynie od geometrii.

Twierdzenie 43 (Prawa Kirchhoffa [47, 46])

1. Suma natężeń prądów wpływających do dowolnego węzła musi być równa sumie natężeń prądów wypływających z tego węzła.
2. Algebraiczna suma zmian potencjału napotykanym przy pełnym obejściu dowolnego oczka musi być równa zero.

Pierwsze prawo Kirchhoffa wynika od razu z równania ciągłości zastosowanego do obszarów bez ładunków.

Twierdzenie 44 (Lokalna zasada zachowania ładunku [39]) *Jeśli całkowity ładunek zawarty w jakiejś objętości zmienia się o pewną wartość, to dokładnie taka sama ilość ładunku musi przepłynąć przez powierzchnię ograniczającą tę objętość.*

Twierdzenie 45 (Równanie ciągłości [39]) *Na podstawie powyższego i stosując prawo Gaussa niemal od razu możemy zapisać*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{J}.$$

Drugie prawo wynika z faktu, że w obwodzie oddzielić można SEM od siły elektrostatycznej wygładzającej przepływ prądu. A skoro elektrostatycznej, to bezwzględnej. Należy jednak zauważyć, co wchodzi w skład tych potencjałów. Ponieważ praca wykonana nad ładunkiem to εq , i tylko siła zewnętrzna wykonała pracę, to znaczy to, że musiała wytworzyć napięcie sprzeciwiające się wszystkim innym napięciom w obwodzie. Tym samym $\varepsilon = \sum U_i$, gdzie U_i to napięcia nie wynikające z siły zewnętrznej.

To wszystko wstawiłem tu, gdyż same równania różniczkowe to łatwizna. Ale warto rozumieć chyba fizyczne podstawy. Tak więc dla układu LC mamy równanie różniczkowe

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{Q}{C}.$$

Możemy przyjąć, że przepływ prądu następuje, gdyż podłączyliśmy naładowany kondensator przez solenoid. Korzystamy z faktu stałości natężenia prądu w całym układzie oraz lokalnej zasady zachowania ładunku: $I = \frac{dQ}{dt}$ czyli uzyskujemy typowe równanie drgań harmonicznym

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\omega^2 Q, \text{ gdzie } \omega = \frac{1}{LC}.$$

Rozwiązanie szczególne to $Q = Q_0 \cos \omega t$, gdyż na początku prąd nie płynął.

Dla RLC analogicznie mamy równanie harmoniczne tłumione

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

co rozwiązuje się tradycyjnie podstawiając

$$Q = Z \exp(ft)$$

i uzyskując z równania kwadratowego dwa rozwiązania

$$f = \frac{-R \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

co daje wynik zespolony bądź rzeczywisty, czyli rozwiązanie drgań tłumionych o częstości $\sqrt{\frac{-R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}} 2^{-1}$ bądź też rozwiązanie z silnym tłumieniem (czy przypadek graniczny). Jakikolwiek będzie wynik, warto podać rozwiązanie dla I , gdyż tę wielkość się realnie mierzy.

No to przechodzimy teraz do przypadku drgań wymuszonych, kiedy to LC bądź RLC podłączamy do zmiennego źródła prądu, którego napięcie zapiszemy w formie zespolonej $\varepsilon = \varepsilon_0 \exp(i\Omega t)$. Pełne równanie:

$$\varepsilon_0 \exp(i\Omega t) - L \frac{dI}{dt} = RI + \frac{Q}{C}.$$

- W przypadku bez tłumienia mamy rozwiązanie równania jednorodnego

$$Q(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}.$$

Przypomnijmy sobie rozwiązywanie metodą uśredniania stałych Z (38) i (39) możemy wyznaczyć stałe [74]. Zapisujemy

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{C}_1 e^{i\omega t} + \dot{C}_2 e^{-i\omega t} + i\omega C_1 e^{i\omega t} - i\omega C_2 e^{-i\omega t}. \\ \text{Kładziemy} \quad \dot{C}_1 e^{i\omega t} + \dot{C}_2 e^{-i\omega t} &= 0 \quad (38) \\ \text{chyba dlatego, że możemy. Dalej} \quad \ddot{Q} &= i\omega (\dot{C}_1 e^{i\omega t} - \dot{C}_2 e^{-i\omega t}) - \omega^2 Q. \\ \text{czyli mamy} \quad i\omega (\dot{C}_1 e^{i\omega t} - \dot{C}_2 e^{-i\omega t}) &= \frac{\varepsilon_0}{L} e^{i\Omega t}. \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 &= +\frac{\varepsilon_0}{2i\omega L} e^{i(\Omega-\omega)t}, \\ \dot{C}_2 &= -\frac{\varepsilon_0}{2i\omega L} e^{i(\Omega+\omega)t}, \\ \text{czyli} \quad C_1 &= -\frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{2\omega(\Omega-\omega)} e^{i(\Omega-\omega)t} + A \\ C_2 &= +\frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{2\omega(\Omega+\omega)} e^{i(\Omega+\omega)t} + B \end{aligned}$$

Po uśrednieniu stałych:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \left(\frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{2\omega(\Omega+\omega)} - \frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{2\omega(\Omega-\omega)} \right) e^{i\Omega t} + A e^{-i\omega t} + B e^{i\omega t} \\ &= \{Re\} = \frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{\Omega^2 - \omega^2} \cos \Omega t + A' \sin \omega t + B' \cos \omega t, \end{aligned}$$

gdzie przy przejściu do części rzeczywistej uwzględniono, że stałe A i B mogą być zespolone. Zauważmy, że przy $Q(0) = 0$ i $I(0) = 0$, uzyskujemy dudnienia:

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{\Omega^2 - \omega^2} (\cos \Omega t - \cos \omega t) = -\frac{2\varepsilon_0 L^{-1}}{\Omega^2 - \omega^2} \sin \left(\frac{\Omega - \omega}{2} t \right) \sin \left(\frac{\Omega + \omega}{2} t \right).$$

Widać nadto, że dla $\Omega = \omega$, zwaną częstością rezonansową, amplituda rośnie do nieskończoności.

- Eh. Zapiszę tylko wynik dla słabego tłumienia, jakoś sobie poradzę z wyprowadzeniem:

$$Q(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) + A \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\text{gdzie } A = \frac{\varepsilon_0 L^{-1}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \text{a } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

25. Pełny układ równań Maxwella z warunkami brzegowymi na granicy ośrodków. Równania Maxwella w ośrodkach materialnych – przykłady równań materiałowych.

Twierdzenie 46 (Równania Maxwella [24]) w pełnej chwale¹³

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Prawo Gaussa} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Prawo Faradaya} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \text{chyba niczyje} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Prawo Ampere'a z poprawką Maxwella} \end{array} \right.$$

2 i 3 równanie możemy wyeliminować wprowadzając potencjały

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{array} \right.$$

Istotnym uzupełnieniem równań Maxwella jest równanie ciągłości [24].

Twierdzenie 47 (Równanie ciągłości [39]) Na podstawie powyższego i stosując prawo Gaussa niemal od razu możemy zapisać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}.$$

¹³Maxwell's equations in full glory

Gdyby istniał ładunek magnetyczny, równania Maxwella miałyby piękną symetrię. Nadto, Dirac wykazał, że możnaby wyjaśnić, dlaczego ładunek jest skwantowany [38].

Definicja 30 (Moment dipolowy [28])

$$\vec{p} \equiv \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'.$$

Człon dipolowy w potencjale możemy więc zapisać w prosty sposób:

$$V_{dip}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (40)$$

Dla dipola „fizycznego” (dwa ładunki o różnej wartości bezwzględnej i przeciwnych znakach $\pm q$) mamy

$$\vec{p} = q\vec{d},$$

przy czym \vec{d} jest wektorem łączącym położenie ładunku ujemnego z położeniem ładunku dodatniego. Aby otrzymać „idealny” dipol, którego potencjał dany jest dokładnie wzorem (40), należałoby zmniejszyć \vec{d} do zera. Niestety, spowodowałoby to wyzerowanie całego członu dipolowego, chyba że jednocześnie pozwolimy q rosnąć do nieskończoności!

Nie jest to zbyt naturalne; niemniej przyjąć swobodnie można, że w materii w której występują ładunki związane coś podobnego istnieje

Definicja 31 (Polaryzacja elektryczna [29]) Co dzieje się z kawałkiem dielektryka, który zostaje umieszczony w polu elektrycznym? Jeśli materiał składa się z obojętnych elektrycznie atomów (lub cząsteczek niepolarnych), to pole zewnętrzne wyindukuje w każdym z nich nieduży moment dipolowy, skierowany zgodnie z kierunkiem pola. Jeśli materiał składa się z cząsteczek polarnych, to na każdy trwały dipol zacznie działać pewien moment siły, skierowany tak, by ustawić moment dipolowy zgodnie z polem. (Procesowi temu przeciwstawiają się przypadkowe ruchy termiczne.)

Oba mechanizmy dają jednak ten sam efekt: pojawia się wiele małych dipoli, skierowanych zgodnie z kierunkiem pola - materiał zostaje spolaryzowany. Wygodną wielkością opisującą to zjawisko jest wektor

$$\vec{P} \equiv \text{moment dipolowy na jednostkę objętości},$$

który nazywa się **polaryzacją elektryczną**.

Generalnie mechanizm polaryzacji może prowadzić do dwóch rzeczy: indukcji ładunku na powierzchni dielektryka oraz indukcji gęstości ładunku w środku. Do obu rzeczy można dojść, wychodząc z (40) i dostosowując go do obecnego przypadku:

$$V(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P} \cdot \hat{R}}{R^2} d\tau'.$$

1. Podstawimy teraz $\nabla'(\frac{1}{R}) = \frac{\hat{R}}{R^2}$ - różniczkowanie po współrzędnych całkowania: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \vec{P} \cdot \nabla'(\frac{1}{R})$
2. scałkujemy przez części - skorzystamy z $\nabla \cdot (f\vec{A}) = f(\nabla \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\nabla f)$: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{P}}{R} \right) d\tau' - \int \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau' \right]$
3. teraz z twierdzenia o dywergencji: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\oint \frac{1}{R} \vec{P} \cdot d\vec{a}' - \int \frac{1}{R} (\nabla' \cdot \vec{P}) d\tau' \right]$.

Definicja 32 (Ładunki związane [30])

$$\sigma_{zw} \equiv \vec{P} \cdot \hat{n}, \quad \rho_{zw} \equiv -\nabla \cdot \vec{P}.$$

Korzystając z tych definicji, możemy zapisać

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma_{zw}}{R} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{zw}}{R} d\tau'$$

Ładunki te, jak już napisałem, interpretuje się jako rzeczywiste.

Definicja 33 (Wektor indukcji elektrycznej [31]) *Prawo Gaussa przybiera postać*

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_{zw} + \rho_{sw} = -\nabla \cdot \vec{P} + \rho_{sw}.$$

Wygodnie jest teraz połączyć człony z dywergencją:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{sw}.$$

Wyrażenie w nawiasie, oznaczone przez \vec{D} ,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

nazywa się **wektorem indukcji elektrycznej**.

Wprowadzając więc \vec{D} , wystarczy uwzględniać już tylko ładunki swobodne. Zupełnie analogicznie rzecz idzie dla pola magnetycznego z magnetyzacją \vec{M} .

Definicja 34 (Ładunki związane [34])

$$\vec{K}_{zw} \equiv \vec{M} \times \hat{n}, \quad \vec{j}_{zw} \equiv \nabla \times \vec{M}.$$

Uwzględniając te definicje, otrzymujemy

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{\vec{K}_{zw}}{R} da' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_{zw}}{R} d\tau'$$

Definicja 35 (Natężenie pola magnetycznego [35]) *Możemy zapisać prawo Ampere'a w postaci*

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} = \vec{j}_{zw} + \vec{j}_{sw} = \nabla \times \vec{M} + \vec{j}_{sw}$$

Lub po zebraniu w jeden wyraz obu rotacji – w postaci

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{sw}.$$

Wyrażenie w nawiasie nazywamy **natężeniem pola magnetycznego** i będziemy oznaczać symbolem \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}.$$

nazywa się **wektorem indukcji elektrycznej**.

Twierdzenie 48 (Równania Maxwella w materiale [24])

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{sw} & \text{Prawo Gaussa w materiale} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Prawo Faradaya} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{chyba niczyje} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{sw} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{Prawo Ampere'a z poprawką Maxwella} \end{array} \right.$$

Istotnym ich uzupełnieniem jest równanie ciągłości dla ładunków swobodnych. Korzystając z równań Maxwella w postaci całkowej oraz z istnienia prądów i ładunków związanych powierzchniowych, uzyskujemy

Twierdzenie 49 (Warunki brzegowe [38])

$$\begin{aligned} D_1^\perp - D_2^\perp &= \sigma_{zw}, \\ \vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel &= 0, \\ B_1^\perp - B_2^\perp &= 0, \\ \vec{H}_1^\parallel - \vec{H}_2^\parallel &= \vec{K}_{sw} \times \hat{n}. \end{aligned} \tag{41}$$

- Oczywistym przykładem ośrodka jest ośrodek liniowy.

Definicja 36 (Ośrodek liniowy)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad i \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

tak więc

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad i \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B},$$

gdzie $\epsilon \equiv \epsilon_0(1 + \chi_e)$ i $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$. Indukcja elektryczna nosi również nazwę „przesunięcia” elektrycznego; to właśnie dlatego drugi wyraz w równaniu Ampere’a/Maxwella można nazwać prądem przesunięcia. Możemy napisać

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

- Uzupełnieniem ośrodka liniowego byłoby wprowadzenie jakiegoś rodzaju przewodnictwa, na przykład zgodnego z prawem Ohma: $\vec{j}_{sw} = \sigma \vec{E}$. Wychodząc od równania ciągłości, możemy zapisać korzystając kolejno z Ohma i z Gaussa:

$$\frac{\partial \rho_{sw}}{\partial t} = -\sigma (\nabla \cdot \vec{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_{sw},$$

z czego wynika rozpuszczanie ładunku z czasem charakterystycznym $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ [42]:

$$\rho_{sw}(t) = e^{-\left(\frac{\sigma}{\epsilon}t\right)} \rho_{sw}(0).$$

Nadto, w prawie Ampere’a/Maxwella zależność od prądu można zamienić wyłącznie już na zależność od natężenia prądu. (Warto uzupełnić tę informacją parę poprzednich punktów)

- W nadprzewodnikach dzieją się dziwne rzeczy

Twierdzenie 50 (Równanie Londona [24]) *Coś tak konkretnego, jak \vec{j} , zależy od czegoś tak pomocniczego, jak \vec{A} ; które w związku z tym nabiera jakiegoś fizycznego znaczenia. Oto równanie:*

$$\vec{j} = -\frac{e^2 n}{m} \vec{A},$$

gdzie n to gęstość nośników (elektronów), m to masa nośników. Z czasem okazało się, że nośnikami w nadprzewodnikach są pary. W związku z tym n zmniejszyło się o czynnik 2, a ładunek i masa powiększyły się o ten czynnik – co nic nie zmieniło. Ponieważ \vec{A} nie jest jednoznacznie określony, należy dodać dodatkowy warunek. Wynika on z równania ciągłości, jako że nie pojawiają się w nadprzewodniku nieskompensowane ładunki:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0.$$

Korzystamy więc z prawa Ampere’a

$$\nabla \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0 e^2 n}{m} \vec{A}.$$

Z prawa niczyjego widzimy, że

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B},$$

czyli z definicji potencjału wektorowego

$$-\Delta \vec{B} = -\frac{\mu_0 e^2 n}{m} \vec{B}$$

co można rozwiązać

Definicja 37 (Efekt Meissnera [24]) (nie wykładowcy) Pole \vec{B} nie wnika do nadprzewodnika. Ściśle rzecz biorąc

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 e^{-\frac{z}{\lambda}},$$

gdzie $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 e^2 n}} < 1 \mu m$. Czyli \vec{B} wchodzi w nadprzewodnik na głębokość $1 \mu m$.

Istnieje ulepszenie równania Londona: teoria Ginsburga (chyba)–Landau.

26. Fale elektromagnetyczne jako rozwiązanie równania Maxwella.

Twierdzenie 51 (Równania Maxwella [24]) w pełnej chwale¹⁴ i w materiale

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{sw} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{sw} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Prawo Gaussa} \\ \text{Prawo Faradaya} \\ \text{chyba niczyje} \\ \text{Prawo Ampere'a z poprawką Maxwella} \end{array}.$$

Definicja 38 (Trójwymiarowe równanie falowe [40])

$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Przez rozwiązanie równań Maxwella rozumie się rozwiązanie tych równań przy braku ładunków i prądów. Zaczynamy więc (wyprowadzenie z [40]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Prawo Gaussa} \\ \text{Prawo Faradaya} \\ \text{chyba niczyje} \\ \text{Prawo Ampere'a z poprawką Maxwella} \end{array}.$$

Do prawa Faradaya i prawa Ampere'a/Maxwella zastosować możemy rotację (stosując tam gdzie trzeba też dwa pozostałe równania Maxwella)

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = \\ &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} = \\ &= \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

czyli ostatecznie otrzymujemy równania falowe dla każdej współrzędnej wektorów

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2},$$

gdzie

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

to prędkość tej fali, czyli światła w próżni.

Każdą falę złożyć można z fal sinusoidalnych; tu zaprezentowanych w formie zespolonej (z zerowania się dywergencji dla pól wynika poprzeczność fali $\hat{n} \cdot \hat{k} = 0$):

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}, \quad \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}.$$

¹⁴Maxwell's equations in full glory

Dla takiej fali mamy podstawowe wielkości opisujące pole elektromagnetyczne (trzeba pamiętać o braniu części rzeczywistej w kwadratach):

$$u \equiv \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} \right) = \epsilon_0 E^2,$$

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B}) = cu\hat{n},$$

jest jeszcze gęstość pędu $\vec{p} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2,$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{n},$$

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2.$$

Jeśli równania Maxwella w ośrodku materialnym bez wolnych ładunków zastosujemy w ośrodku liniowym

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B},$$

to uzyskamy całą powyższą dyskusję, tylko przenikalności wymienią się na powyższe stałe proporcjonalności. Prędkość fali w takim ośrodku

$$v = \frac{c}{n}, \text{ gdzie } n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}.$$

Jako że zwykle przenikalność magnetyczna i względna magnetyczna zanadto się od siebie nie różnią, wystarczy rozpatrywać tylko elektryczne.

Możemy jednak zająć się przewodnikiem: takim materiałem liniowym, w którym nie ma wolnych ładunków, ale są wolne prądy – proporcjonalne do \vec{E} . Zmienia nam to prawo Ampera'a/Maxwella:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\sigma \vec{E}.$$

Rotując jak poprzednio, uzyskujemy równania falowe tłumione

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \Delta \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Uzyskane rozwiązania wzdłuż, dajmy na to, osi z (poprzeczność fal znowu wynika ze znikania dywergencji):

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x},$$

$$\vec{E} = \frac{k + i\kappa}{\omega} \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y},$$

gdzie

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Głębokość wnikania fali elektromagnetycznej do przewodnika określamy przez

$$d = \frac{1}{\kappa}.$$

nie wiem, czy podam te najbardziej rozwinięte wzory; raczej tylko powiem o tłumieniu i tyle.

27. Prawa odbicia i załamania fal elektromagnetycznych; współczynnik odbicia, polaryzacja fali odbitej i załamanej (kął Brewstera).

Twierdzenie 52 (Równania Maxwella [24]) w pełnej chwale¹⁵

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Prawo Gaussa} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Prawo Faradaya} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{chyba niczyje} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Prawo Ampere'a z poprawką Maxwella} \end{array} \right.$$

W próżni naturalnie wszystkie ładunki ładnie znikają.

Twierdzenie 53 (Warunki brzegowe [38])

$$\begin{array}{lll} D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_{zw} & \text{czyli przy braku ładunków} & \epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp, \\ \vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel = 0 & \text{i na granicy} & \\ B_1^\perp - B_2^\perp = 0 & \text{dwóch ośrodków} & \\ \vec{H}_1^\parallel - \vec{H}_2^\parallel = \vec{K}_{sw} \times \hat{n} & \text{będzie} & \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel. \end{array} \quad (42)$$

Wszystko teraz z [41]. Każdą falę elektromagnetyczną możemy rozłożyć na monochromatyczne płaskie. Nadto, w takiej fali wartość jednego z pól zadaje jednoznacznie drugie. Oznaczmy więc falę pierwotną, odbitą i przechodzącą:

$$\begin{aligned} \vec{E}_I &= \vec{E}_{0I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, & \vec{B}_I &= \frac{1}{v_1} (\hat{k}_I \times \vec{E}_I), \\ \vec{E}_R &= \vec{E}_{0R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, & \vec{B}_R &= \frac{1}{v_1} (\hat{k}_R \times \vec{E}_R), \\ \vec{E}_T &= \vec{E}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}, & \vec{B}_T &= \frac{1}{v_2} (\hat{k}_T \times \vec{E}_T). \end{aligned}$$

1. Trzy liczby falowe są powiązane

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \text{ czyli } k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T.$$

2. Poprzez warunki brzegowe należy porównać sumy pól $\vec{E}_I + \vec{E}_R$ i $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ w jednym ośrodku z polami \vec{E}_T i \vec{B}_T w drugim. Tu tylko korzystamy z faktu, że (dla każdego x) $(Ae^{iax} + Be^{ibx} = Ce^{icx}) \Rightarrow (A + B = C \text{ i } a = b = c)$, czyli, w punkcie $z = 0$ i $x = 0$ otrzymujemy

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty},$$

a dla $z = 0$ i $y = 0$

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}.$$

3. Na podstawie powyższego wnioskujemy, że

Twierdzenie 54 (Pierwsze prawo [41]) *Wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w tej samej płaszczyźnie (zwanej **płaszczyzną padania**) wyznaczonej przez wektor falowy fali padającej i normalną do płaszczyzny (tu oś z).*

BSO wybieramy, by płaszczyzną padania było xz .

4. z równości współrzędnych ix owych mamy

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T,$$

gdzie kolejne kąty to kąty padania, odbicia i załamania. Uwzględniamy teraz punkt 1 i

¹⁵Maxwell's equations in full glory

Twierdzenie 55 (Drugie prawo (prawo odbicia) [41]) *Kąt padania jest równy kątowi odbicia*

oraz

Twierdzenie 56 (Trzecie prawo (prawo załamania, Snella) [41])

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}.$$

By prosto zastosować (42), potrzebne teraz założenia co do polaryzacji (wciąż z to kierunek prostopadły do powierzchni).

- polaryzacja równoległa. Pole elektryczne ma składową z , pole magnetyczne nie. Z kolejnych równań z (42) uzyskujemy

$$\begin{aligned}\epsilon_1(-E_{0I} \sin \theta_I + E_{0R} \sin \theta_R) &= \epsilon_2(-E_{0T} \sin \theta_T), \\ E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R &= E_{0T} \cos \theta_T, \\ 0 &= 0, \\ \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_{0I} - E_{0R}) &= \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T}\end{aligned}$$

Podstawiamy $\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$ i $\beta = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}$ i rozwiązujemy korzystając z praw odbicia i załamania

Twierdzenie 57 (Równania Fresnela [41]) *dla polaryzacji w płaszczyźnie padania.*

$$E_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) E_{0I}, \quad E_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) E_{0I}$$

Jeśli zrobimy natężenia (kwadraty), będą nam się sumować do natężenia padającego - co spełnia zasadę zachowania energii.

Definicja 39 (Kąt Brewstera [41]) *przy którym fala odbita jest całkowicie stłumiona. Zgodnie z równaniami Fresnela występuje to, gdy $\alpha = \beta$, czyli*

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 - \beta^2}.$$

W typowym przypadku $\mu_1 \simeq \mu_2$ i wtedy $\beta \simeq \frac{n_2}{n_1}$, $\sin^2 \theta_B \simeq \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}$, a stąd

$$\tan \theta_B \simeq \frac{n_2}{n_1}.$$

- polaryzacja prostopadła (problem 9.16 z [41]). Pole elektryczne nie ma składowej z , pole magnetyczne ma. Z kolejnych równań z (42) uzyskujemy

$$\begin{aligned}0 &= 0, \\ E_{0I} + E_{0R} &= E_{0T}, \\ \frac{1}{v_1}(-E_{0I} \sin \theta_I - E_{0R} \sin \theta_R) &= -\frac{1}{v_2} E_{0T} \sin \theta_T, \\ \frac{1}{\mu_1 v_1}(E_{0I} \cos \theta_I - E_{0R} \cos \theta_R) &= \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T} \cos \theta_T,\end{aligned}$$

czego rozwiązaniem jest (tu $\alpha = \frac{\cos \theta_T \mu_1 v_1}{\cos \theta_I \mu_2 v_2}$)

$$E_{0R} = \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right) E_{0I}, \quad E_{0T} = \left(\frac{2}{1 + \alpha} \right) E_{0I},$$

czyli pod kątem Brewstera (tylko) składowa odbita o polaryzacji prostopadłej przetrwa.

IV. Drgania i fale

28. Ruch okresowy (parametry); rozkład na drgania proste (analiza Fouriera).

Ograniczmy się do przypadku jednowymiarowego. Przez ruch okresowy możemy rozumieć albo punkt materialny wykonujący regularnie powtarzane drgania

$$x(t) = A(t), \quad (43)$$

albo falę

Definicja 40 (Fala [73]) *Biorąc pod uwagę nasze codzienne doświadczenia z falami możemy powiedzieć, że fala jest to przenoszenie informacji i energii z jednego punktu do drugiego, mimo, że żaden obiekt materialny takiej podróży nie odbywa.*

Możemy powiedzieć, że pod terminem informacji rozumiemy następującą sytuację: układ zostaje wyprowadzony z położenia równowagi w pewnym punkcie i te niewielkie lokalne zmiany pewnej wielkości fizycznej propagują się w przestrzeni.

Może istnieć lokalne, nieprzemieszczające się zaburzenie w przestrzeni, jedynie zmieniające się w czasie. Taki przypadek nazywa się falą stojącą, choć nie jest on falą w myśl powyższej definicji. Jednakże, fala stojąca powstaje najczęściej ze złożenia fal propagujących się.

Możemy wyrazić zaburzenie w danym punkcie przez funkcję falową; jeśli wychodzimy z pojęcia propagacji, jak w powyższej definicji, możemy zapisać

$$\Phi(z, t) = A \left(t - \frac{z}{v} \right), \quad (44)$$

Omówmy ważne (w większości analogiczne) cechy i parametry obu przypadków (43) i (44).

- Okresowość; znaczy się, istnieje okres T taki, że $A(t) = A(t + T)$.
- Można więc zdefiniować częstotliwość $\nu = \frac{1}{T}$ i oczywiście częstość (kołową) $\omega = 2\pi\nu$, często wykorzystywaną ze względu na powszechność sinusów i cosinusów w opisie ruchów okresowych.
- Wielkość ωt bądź $\omega \left(t - \frac{z}{v} \right)$ opisuje ruch układu niezależnie od skali czasowej (tak samo z ν oczywiście).
- Amplituda; znaczy się, największa wartość osiągnięta przez funkcję A .
- W przypadku fal wprowadzono prędkość propagacji v , którą należy rozumieć w następujący sposób: jeśli w chwili t w punkcie z istniało zaburzenie Φ_0 , to w chwili $t + \Delta t$ zaburzenie Φ_0 przemieści się do punktu $z + v\Delta t$. Stąd definicja (44).
- Definiuje się liczbę falową $k = \frac{\omega}{v}$, która opisuje periodyczność zaburzenia w przestrzeni w danej chwili czasu. Definiuje się długość fali $\lambda = vT$ (czyli $k = \frac{2\pi}{\lambda}$), i już mamy opis zaburzenia w przestrzeni w pełni analogiczny do zaburzenia w czasie.
- W przypadku dwu(trój)wymiarowym, uwzględnia się prędkości rozchodzenia się fali w różnych kierunkach. Liczba falowa przechodzi na wektor falowy. Możemy zapisać

$$\Phi(\vec{r}, t) = A \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right),$$

ale my wracamy do przypadku jednowymiarowego.

- Zależność $k(\omega)$ nazywa się związkiem dyspersyjnym. Ale my właściwie tu jesteśmy na poziomie opisu kinematycznego, związek dyspersyjny jest już opisem dynamicznym.

Opis zaburzenia poprzez funkcję Φ jest ściśle związany z faktem superpozycji tego zaburzenia. Tym samym nakładające się fale z różnych źródeł sumują się do jednego zaburzenia, które już nie musi być falą zgodnie z definicją (44) (no właśnie – fale stojące). Z drugiej strony, każde zaburzenie opisywane, dajmy na to, funkcją $f(t)$ można przedstawić jako superpozycję fal - co jest podstawową ideą transformaty Fouriera. Ogólnie, transformata Fouriera dla funkcji ograniczonej i całkowalnej w danym obszarze wygląda tak:

$$\hat{f}\omega = \int dx f(x)e^{-i\omega x}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{f}(\omega)e^{i\omega x},$$

co przedstawiono dla zakresu od $-\infty$ do $+\infty$. Dla jakiegoś zakresu o szerokości T szerokość ta zastąpi czynnik 2π .

/jak udowodnić te wzory???

W przypadku gdy f jest periodyczne – czyli w szczególności może reprezentować falę – uzyskujemy

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \int dx f(x)e^{-i\omega x}, \text{ czyli } f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\frac{2\pi kx}{T}}, \text{ gdzie } c_k = \frac{1}{T} \int dx f(x)e^{-i\frac{2\pi kx}{T}}.$$

/jak żesz to udowodnić????/

Nie powinno być i nie ma problemu z liczbami urojonymi, gdyż wszystkie eksponenty złożą się do sinusów i cosinusów.

29. Oscylator harmoniczny: drgania swobodne, tłumione i wymuszone oraz zjawisko rezonansu.

Zacznijmy od tego, że wszystkie równania różniczkowe możemy rozumieć jako równania na funkcje zespolone. Potem wystarczy wziąć część rzeczywistą wyniku.

Przez oscylator harmoniczny rozumie się punkt materialny pod działaniem siły harmonicznej $\vec{F} = -k\vec{r}$; tłumienie, jakie się może pojawiać, zwykle wystarczy rozumieć jako siłę oporu zależną liniowo od prędkości. Zewnętrzną siłę wymuszającą zwykle traktuje się jako siłę harmonicznie zmienną w czasie.

Poprzestaniemy na przypadku jednowymiarowym - uzyskane rezultaty i tak mają dość szerokie zastosowania.

Najpierw jednak bez siły

1. Drgania swobodne. Równanie Newtona:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

czego rozwiązaniem jest

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (45)$$

2. Drgania tłumione. Równanie Newtona:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Podstawiamy $x = Ae^{i\omega t}$; będziemy chcieli wyznaczyć ω . Po zróżniczkowaniu skracamy powtarzające się wyrazy i zostaje równanie kwadratowe

$$-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2 = 0,$$

czyli tak jak trzeba będą dwa rozwiązania. Rozwiązujemy więc:

$$\omega_{\pm} = i\beta \pm \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \equiv i\beta \pm \Omega$$

Pytanie teraz, jak się ma β do ω_0 .

- **Słabe tłumienie:** $\omega_0 > \beta$. Czyli Ω jest rzeczywiste, i mamy

$$x = e^{-\beta t} (Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) = Ce^{-\beta t} \sin(\Omega t + \delta). \quad (46)$$

- **Tłumienie krytyczne:** $\omega_0 = \beta$. Nazywane tak dlatego, że po pierwsze, jest to przypadek graniczny, po drugie, wtedy najszybciej układ przemieszcza się do stanu równowagi. Przy silniejszym tłumieniu, spowalnia ono już nawet ten powrót.

$$x = Ce^{-\beta t}.$$

Jak widać, następuje też redukcja liczby rozwiązań. Łatwo pokazać, że w istocie równanie redukuje się do równania pierwszego rzędu:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \beta^2 x = (\ddot{x} + \beta\dot{x}) + \beta(\dot{x} + \beta x) = d_t(\dot{x} + \beta x) + \beta(\dot{x} + \beta x).$$

- **Silne tłumienie:** $\omega_0 < \beta$.

$$x = e^{-\beta t} (Ae^{|\Omega|t} + Be^{-|\Omega|t})$$

Jeśli chodzi o drgania wymuszone, można zastosować do obliczeń metodę uzmienniania stałych. By uwzględnić fakt, że równanie jest drugiego rzędu, a metoda ta stosuje się do pierwszego rzędu, należy zapisać równanie różniczkowe w postaci dwóch zależnych równań niższych rzędów. Przypuśćmy, że mamy:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0;$$

zapisujemy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = \dot{x} \\ \frac{d}{dt}\dot{x} = a\dot{x} + bx \end{cases}.$$

Jeśli teraz dodamy stałą do równania początkowego, zmodyfikuje ona tylko drugie powyższe; dodatkowe wyrazy w pierwszym wynikające z uzmienniania stałych winny się wyzerować. A przez to pierwsze równanie musimy uzmienniając stałe przejść, by dojść do drugiego. Uzyskamy więc dwa równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu, gdyż pochodne uzmiennionych stałych wyższych rzędów się nie wytworzą.

1. $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Uzmienniamy stałe z równania (45):

$$\begin{cases} \dot{A}e^{i\omega_0 t} + \dot{B}e^{-i\omega_0 t} = 0 \\ i\omega_0(\dot{A}e^{i\omega_0 t} - \dot{B}e^{-i\omega_0 t}) = f \end{cases}$$

Wynik:

$$A(t) = \frac{1}{2i\omega_0} \int_0^t d\tau f e^{-i\omega_0 \tau},$$

$$B(t) = -\frac{1}{2i\omega_0} \int_0^t d\tau f e^{+i\omega_0 \tau}.$$

Jeśli $f(t) = f_0 e^{i\omega_f t}$, to w wykładniku w tych uzmiennionych stałych pojawi się różnica dwóch częstotliwości. Jednakże, jeśli $\omega_f = \omega_0$, w wyniku całkowania uzyskamy liniowy wzrost $A(t)$, co jest zjawiskiem rezonansu. Można nadto pokazać, że dla początkowych położenia i prędkości równych zero uzyskujemy ładne dudnienia.

2. $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. Rozważmy same słabe tłumienie, pozostałe tłumienia są analogiczne. Uzmienniamy stałe z równania (46) i ostatecznie uzyskujemy:

$$A(t) = \frac{1}{2i\Omega} \int_0^t d\tau f e^{+i\Omega\tau - \beta\tau},$$

$$B(t) = -\frac{1}{2i\Omega} \int_0^t d\tau f e^{-i\Omega\tau - \beta\tau}.$$

Znowu, dla $f(t) = f_0 e^{i\omega_f t}$, można uzyskać rezonansowe wzmocnienie. Choć ostatecznie zanik wykładniczy zabije wszystko (chyba).

30. Rozkład drgań układów o wielu stopniach swobody (np. układu punktów materialnych połączonych sprężynami) na drgania własne.

W tym przypadku doprawdy wystarczy rozważać nielumione drgania. Jeśli mamy układ punktów materialnych oddziałujących na siebie siłami wyłącznie harmonicznymi, uzyskujemy układ równań różniczkowych liniowych drugiego rzędu o wyjątkowo prostej postaci; możemy ją zapisać jako:

$$\ddot{\vec{x}} = \hat{M}\vec{x},$$

gdzie \vec{x} to wektor opisujący wychylenia od położenia równowagi we wszystkich współrzędnych położenia, zaś \hat{M} to macierz tego układu równań.

Zastanówmy się, co by było, gdyby nie przerzucać mas z lewej strony. Z zasady równej akcji i reakcji wynika, że jeśli \ddot{x}_i zależy przez jakieś k od x_j , to \ddot{x}_j zależy przez $-k$ od x_i . Więc dla $i \neq j$ mamy $m_{ij} = -m_{ji}$. Niestety, macierz nie jest w pełni antysymetryczna, gdyż nie muszą wcale zniknąć wielkości na diagonalu - ba, nawet na pewno nie znikają, gdy siły zależą tylko od wzajemnych położań punktów. Jeśli jednak wystartowaliśmy jak należy ze współrzędnych kartezjańskich, lub chociaż ortogonalnych, to \hat{M} obliczona bezpośrednio z równań Newtona jest hermitowska, a więc jest diagonalizowalna, a jego wartości własne są wyłącznie rzeczywiste (twierdzenie spektralne dla operatorów hermitowskich), a nadto posiada bazę ortonormalnych wektorów własnych (gdyż jest to normalny operator). Ponieważ zaś przerzucenie mas na prawą stronę nie zmienia układu równań, to samo tyczy się \hat{M} po tym przekształceniu.

Możemy więc przekształcić początkowe równanie do postaci

$$\ddot{\vec{q}} = -\hat{M}'\vec{q},$$

gdzie \vec{q} to współrzędne bazy o.n. wektorów własnych, zaś $-\hat{M}'$ to zdiagonalizowane \hat{M} . Drgania współrzędnych \vec{q} są niezależne od pozostałych - to nazywamy rozkładem drgań na drgania własne. Należy jednak w takim razie stwierdzić, czy wszystkie wartości własne \hat{M} (\hat{M}') są ujemne(dodatnie). Należy jednak spodziewać się ujemnych, gdyż jeśli byśmy mieli dodatnie, to układ wybuchałby nam w nieskończoność - co dałoby się pewnie zauważyć jeszcze na poziomie równań Newtona.

Rozważmy diagonalny element λ macierzy \hat{M}' :

- $\lambda \neq 0$, **i niezdegenerowane**. W tym przypadku jednoznacznie mamy kierunek drgań własnych dla tej wartości. No i tyle. Niezerowy $\sqrt{\lambda}$ słusznie nazywa się częstością własną.
- $\lambda \neq 0$, **i zdegenerowane**. Dla takiej częstości własnej istnieje podprzestrzeń drgań własnych. Kierunek więc drgań w tej podprzestrzeni zależy wyłącznie od warunków początkowych.
- $\lambda = 0$, **i niezdegenerowane**. Taka wartość oznacza brak drgań względem danej współrzędnej q ; a zgodnie z równaniem Newtona, w tym kierunku brak przyspieszeń, a więc cały układ spoczywa bądź porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym. Ruch ten jest niezależny od drgań, więc musi zachowywać odległości między punktami.
- Tym samym wymiar $\ker \hat{M}'$ powinien równać się liczbie współrzędnych przestrzeni, wzdłuż których brak sił zewnętrznych.

Przykład Trzy punkty materialne o masach m , M i m w jednym wymiarze, połączonych w tej kolejności dwoma sprężynami o współczynniku sprężystości k . Widać, że ruch pierwszego punktu zależy wyłącznie od jego położenia względnego względem drugiego punktu; tak samo ruch trzeciego. Ruch drugiego punktu zależy od położenia względem dwóch pozostałych. Równania ruchu:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \omega^2 & 0 \\ \Omega^2 & -2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega^2 & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

gdzie ω i Ω odpowiadają odpowiednio masom m i M . Częstości własne i kierunki drgań zapiszę w sposób szpanerski:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} vt \\ vt \\ vt \end{bmatrix}, \quad |\omega\rangle = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \quad |\omega + 2\Omega\rangle = \begin{bmatrix} x \\ -\frac{2\Omega}{\omega}x \\ x \end{bmatrix}.$$

Da się je łatwo skomentować.

31. Prawa odbicia i załamania fal na granicy ośrodków.

Całość niemal na podstawie [40] i [41], gdzie są przedyskutowane fale elektromagnetyczne; ale swobodnie da się to zastosować z małymi przeróbkami do fal mechanicznych.

Definicja 41 (Trójwymiarowe równanie falowe [40])

$$\Delta\Phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Każdą falę możemy rozłożyć na fale płaskie o zadanej częstości. Oznaczmy więc falę pierwotną, odbitą i przechodzącą:

$$\begin{aligned} \Phi_I &= \Phi_{0I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \Phi_R &= \Phi_{0R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \Phi_T &= \Phi_{0T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)}. \end{aligned}$$

Jedną ω we wszystkich ośrodkach wynika z ciągłości na granicy tychże. Niech granica ośrodków leży w płaszczyźnie xy dla $z = 0$.

Twierdzenie 58 (Warunki brzegowe [73, 23])

$$\begin{aligned} \Phi_I(z=0, t) + \Phi_R(z=0, t) &= \Phi_T(z=0, t) \\ \frac{d}{dt}\Phi_I|_{z=0} + \frac{d}{dt}\Phi_R|_{z=0} &= \frac{d}{dt}\Phi_T|_{z=0} \\ B_1 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_I|_{z=0} + B_1 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_R|_{z=0} &= B_2 \frac{\partial}{\partial z}\Phi_T|_{z=0}, \end{aligned} \tag{47}$$

gdzie B_i to moduł ściśliwości w i -tym ośrodku. Prędkość rozchodzenia się fali w tymże:

$$v_i = \sqrt{\frac{B_i}{\rho_i}}.$$

1. z pierwszego i drugiego z warunków (47) wynika rzeczywiście jednakowość ω we wszystkich ośrodkach.
2. Tak więc trzy liczby falowe są powiązane

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \text{ czyli } k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T,$$

gdzie v_1 i v_2 to prędkości rozchodzenia się fal w różnych ośrodkach.

3. Wykorzystujemy pierwszy i drugi z warunków (47). Korzystamy z faktu, że (dla każdego x) $(Ae^{iax} + Be^{ibx} = Ce^{icx}) \Rightarrow (A + B = C \text{ i } a = b = c)$, czyli, w punkcie $z = 0$ i $x = 0$ otrzymujemy

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty},$$

a dla $z = 0$ i $y = 0$

$$k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}.$$

4. Na podstawie powyższego wnioskujemy, że

Twierdzenie 59 (Pierwsze prawo [41]) *Wektory falowe fali padającej, odbitej i przechodzącej leżą w tej samej płaszczyźnie (zwanej **płaszczyzną padania**) wyznaczonej przez wektor falowy fali padającej i normalną do płaszczyzny (tu oś z).*

BSO wybieramy, by płaszczyzną padania było xz .

5. Tym samym dla składowej x :

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T,$$

gdzie kolejne kąty to kąty padania, odbicia i załamania. Uwzględniamy teraz punkt 1 i

Twierdzenie 60 (Drugie prawo (prawo odbicia) [41]) *Kąt padania jest równy kątowi odbicia*

oraz

Twierdzenie 61 (Trzecie prawo (prawo załamania, Snella) [41])

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{v_2}{v_1}.$$

/Poniżej coś nie wyszło/

6. Z pierwszego i ostatniego z warunków (47) mamy

$$\begin{aligned} \Phi_{0I} + \Phi_{0R} &= \Phi_{0T}, \\ B_1 \Phi_{0I} \cos \theta_I - B_1 \Phi_{0R} \cos \theta_R &= \frac{v_1}{v_2} B_2 \Phi_{0T} \cos \theta_T. \end{aligned} \quad (48)$$

Podstawiamy B i wykorzystujemy prawa odbicia i załamania:

$$\begin{aligned} \Phi_{0I} + \Phi_{0R} &= \Phi_{0T}, \\ v_1 \rho_1 \Phi_{0I} - v_1 \rho_1 \Phi_{0R} &= v_2 \rho_2 \Phi_{0T} \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}. \end{aligned} \quad (49)$$

Rozwiązanie:

$$\Phi_{0R} = \frac{v_1 \rho_1 \cos \theta_I - v_2 \rho_2 \cos \theta_T}{v_1 \rho_1 \cos \theta_I + v_2 \rho_2 \cos \theta_T} \Phi_{0I}, \quad \Phi_{0T} = \frac{2}{v_1 \rho_1 \cos \theta_I + v_2 \rho_2 \cos \theta_T} \Phi_{0I}.$$

32. Zjawisko Dopplera dla różnych rodzajów fal (akustycznych i elektromagnetycznych w próżni).

Oba zjawiska okazują się bardzo podobne, lecz ich przyczyny są odmienne. Zjawisko Dopplera dla fal akustycznych jest zjawiskiem nierelatywistycznym, zaś dla elektromagnetycznych w próżni - relatywistycznym.

Rozważamy naturalnie fale kołowe produkowane przez jakieś źródło w przybliżeniu punktowe. Oznaczmy przez λ długość fali a przez ν jej częstotliwość. Naturalnie $\lambda = \frac{v}{\nu}$ lub $\frac{c}{\nu}$.

- W przypadku fali akustycznej można powiedzieć, że istnieje wyróżniony układ odniesienia: związany z nieruchomym ośrodkiem. Fale w tym układzie mają prędkość zależną jedynie od rodzaju ośrodka, nie od prędkości źródła. W rezultacie jednak położenie kolejnych grzbietów fal zależy od prędkości źródła. Okres rejestrowanej przez obserwatora fali zależy od położenia przestrzennego grzbietów fal (które zależy od ruchu źródła) i od prędkości z jaką mija się grzbiety fal (która zależy od stałej prędkości fali i prędkości obserwatora).

1. Niech v_D będzie prędkością obserwatora, v zaś prędkością fali. Jeśli kąt między prędkościami v a v_D wynosi φ , to po zrzutowaniu tej drugiej na kierunek rozchodzenia się fali uzyskujemy prędkość mijania grzbietów

$$v' = v - v_D \cos \varphi.$$

2. Niech v_S będzie prędkością źródła. Jeśli kąt między kierunkiem ruchu źródła a linią łączącą go z obserwatorem wynosi θ (która to linia jest zgodna z kierunkiem rozchodzenia się fali w poprzednim punkcie), to odległość między tymi punktami grzbietów fal które mijają obserwatora wynosi

$$\lambda' = \frac{v - v_S \cos \theta}{\nu}.$$

3. Łącząc oba powyższe wyniki uzyskujemy

$$\nu' = \nu \frac{v - v_D \cos \varphi}{v - v_S \cos \theta}.$$

4. Oczywiście, φ i θ nie są stałe w czasie. Przyjmując, że częstotliwość jest bardzo wysoka w porównaniu ze skalą czasową ruchu obu obiektów, możnaby znaleźć zależność częstotliwości od czasu. Jeśli w trakcie ruchu kąty te jednak pozostają jednakowe, efekt Dopplera daje stały efekt.
5. W przypadku fali świetlnej nie ma wyróżnionego układu odniesienia. Fala świetlna ma za to tę samą prędkość zarówno w układzie źródła jak i obserwatora. Próbowałem znaleźć ogólny efekt Dopplera w języku czysto falowym, co mi się nie udało. Wygodnie jednak wszystko znajduje się, wprowadzając foton, któremu, jak to fotonowi, możemy przypisać częstotliwość:

$$h\nu = E = cp.$$

Niech teraz taki foton, opuszczający nieruchome w jednym układzie źródło pod kątem φ od osi x doleci do obserwatora poruszającego się równolegle do osi x z prędkością $-v$. Rzecz jasna, obserwator zauważy źródło pod tym kątem. Składowa ix owa pędu tego fotonu wyniesie $h\nu \cos \varphi$. Przechodzimy teraz zgodnie z przekształceniem Lorentza do układu obserwatora i uzyskujemy wartość energii tego fotonu

$$h\nu = \gamma h\nu' + \gamma \beta h\nu' \cos \varphi,$$

czyli

$$\nu' = \frac{\nu}{\gamma(1 + \beta \cos \varphi)} = \nu \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

33. Spójność, dyfrakcja i interferencja fal: dyfrakcja na pojedynczej szczelinie, doświadczenie Younga, siatka dyfrakcyjna.

Wszystkie te terminy stosują się naturalnie do wszystkich rodzajów fal, dlatego posługiwać się będę zaburzeniem skalarnym; ponieważ jednak najczęściej się eksperymentuje dla światła, najlepiej wszystko rozumieć w kontekście fal elektromagnetycznych o zadanej częstotliwości i polaryzacji. Tak też zrobię.

Przez **spójność w przestrzeni i w czasie** rozumie się istnienie związku między zaburzeniami w różnych punktach w przestrzeni i czasie dla danej fali. Można to wszystko zrozumieć na przykładzie doświadczenia Younga.

Najpierw wyobraźmy sobie, że przed jakąś dowolną acz spolaryzowaną falą o określonej częstotliwości stawiamy ścianę z otworem; za otworem będzie naturalnie rozchodzić się fala kolista. Nowe rozchodzące się zaburzenie jest w każdym miejscu i czasie jednoznacznie wyznaczone przez otwór, który można traktować po prostu jako źródło światła. Przyjmując pewną minimalną spójność fali pierwotnej, światło po przejściu przez otwór jest też spójne czasowo.

Jeśli teraz postawimy następną ścianę z dwoma otworami, to będą one źródłami spójnymi, gdyż związek między światłem z jednego i z drugiego będzie stały i jednoznaczny. Założmy, że szczeliny są tak ustawione, że w danej chwili opuszcza każdą z nich światło o tej samej fazie.

Definicja 42 (Dyfrakcja i interferencja [73]) Zjawisko interferencji [dla natężeń, patrz wyżej], czyli nakładania się (superpozycji) fal występuje tylko w przypadku gdy interferujące fale są spójne.

Między zjawiskiem dyfrakcji a interferencji nie ma zasadniczej różnicy; przyjęto historycznie że zmiany natężenia powstające w wyniku superpozycji fal wytwarzanych przez skończoną liczbę dyskretnych spójnych źródeł nazywamy interferencją, a przez spójne źródła rozłożone w sposób ciągły przyjęto nazywać dyfrakcją.

Tak więc teraz mamy do czynienia z interferencją; Jeśli ustawimy teraz ekran, zaobserwujemy naturalnie nie aktualny stan fal ale ich natężenie - uśredniony strumień energii niezmienny w czasie. Zaobserwujemy jednak prążki interferencyjne, ze względu na superpozycję konstruktywną i destruktywną.

Mamy więc wartość fal w danym punkcie na ekranie

$$\begin{aligned}\psi_1(r_1, t) &= A(r_1) \cos(kr_1 - \omega t) \\ \psi_2(r_2, t) &= A(r_2) \cos(kr_2 - \omega t)\end{aligned}$$

gdzie r_1 i r_2 to drogi optyczne z każdej ze szczelin do obserwowanego punktu na ekranie. W tzw. **przybliżeniu optyki geometrycznej**, kiedy ekran jest raczej daleko od szczelin w stosunku do odległości między szczelinami, przyjmujemy, że amplitudy są stałe. Uzyskujemy więc

$$\psi_1 + \psi_2 = 2A \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right).$$

Drugi cosinus przy obliczaniu natężenia da stały czynnik wynikający z uśrednienia. Warunki na maksima i minima wyznacza pierwszy cosinus.

Rozważmy teraz tę dyfrakcję na pojedynczej szczelinie. Generalnie warto stosować przybliżenia. Jeśli oznaczmy $\eta = \frac{\Sigma}{r\lambda}$, gdzie Σ to rozmiar szczeliny, r to droga optyczna zaś λ to długość fali, mamy do dyspozycji następujące przybliżenia [73]:

- $\eta \gg 1$: opis w ramach optyki geometrycznej
- $\eta \approx 1$: tzw. dyfrakcja Fresnela, gdzie trzeba brać pod uwagę zakrzywienie powierzchni falowej.
- $\eta \ll 1$: przybliżenie Fraunhofera, czyli fali płaskiej
- jest jeszcze przybliżenie Kirchhoffa, ale nie wiem jakie to.

Zaczynamy; nasza funkcja falowa (szczelina jest płaska i fala pierwotna jest płaska i pada prostopadłe na obiekt, czyli w ogóle nie trzeba uwzględniać czynnika opisującego ułożenie wzajemne tych dwóch rzeczy)

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\sigma'.$$

W przybliżeniu Fraunhofera w wykładniku eksponensu bierzemy $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \hat{r}\vec{r}'$ (droga optyczna z punktu \vec{r}' jest o jeno rzut krótsza od drogi z punktu 0) zaś w mianowniku $|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r$ (fala płaska). Mamy

$$\psi(\vec{r}, t) \cong \frac{A_0}{4\pi} e^{-i(kr-\omega t)} \int_{\Sigma} e^{ik\hat{r}\vec{r}'} d\sigma'.$$

Rozwiążmy szczelinę $L \times a$:

$$\int_{\Sigma} e^{ik\hat{r}\vec{r}'} d\sigma' = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy' \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ik \sin \theta x'} dx' = La \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta}$$

czyli ostatecznie

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta} \right)^2.$$

Uogólniając ten wynik na siatkę dyfrakcyjną o N szczelinach w odstępach d , uzyskamy

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \left(\frac{ka}{2} \sin \theta \right)}{\frac{ka}{2} \sin \theta} \right)^2 \left(\frac{\sin \left(\frac{N\varphi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\varphi}{2} \right)} \right)^2,$$

gdzie $\varphi = kd \sin \theta$.

Weźmy jeszcze otwór kołowy, i znajdziemy natężenie na środku ekranu w dyfrakcji Fresnela (czyli bez przybliżenia):

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^R \frac{e^{ik\sqrt{L^2+\rho'^2}}}{\sqrt{L^2+\rho'^2}} \rho' d\rho' = \frac{A_0}{k} e^{i\left(\frac{k}{2}(\sqrt{L^2+R^2}+L)-\omega t\right)} \sin \left(\frac{k}{2} \left(\sqrt{L^2+R^2} - L \right) \right),$$

czyli możemy uzyskać czarną plamkę w centrum ekranu (sinus nie ginie).

V. Termodynamika

34. Równowaga termiczna i temperatura; skale temperatury.

Definicja 43 (Równowaga termodynamiczna [51]) *Układ jest w równowadze termodynamicznej, jeżeli nie zachodzą w nim żadne systematyczne zmiany opisujących go parametrów i nie występują zjawiska transportu.*

Definicja 44 (Równowaga termiczna [51]) *Równowagą termiczną nazywamy stan, w którym nastąpiło wyrównanie temperatur w układzie i temperatura układu zrównała się z temperaturą otoczenia (poza oczywistym przypadkiem, kiedy układ jest oddzielony od otoczenia ścianką adiabaticzną), ale niekoniecznie zostały osiągnięte inne etapy równowagi termodynamicznej.*

Czyli równowaga termiczna jest pewnym rodzajem równowagi niepełnej. Zastosowano tu intuicyjne, empiryczne pojęcie temperatury jako miary „gorąca”; można stworzyć jakąś skalę temperatury posługując się jakimś materiałem (substancją), którego konkretna cecha zależy od „gorąca”; i do przypisywania ciałom temperatury posłużyć się:

Twierdzenie 62 (tzw. Zerowa zasada termodynamiki [51]) *Relacja równowagi termicznej jest przechodnia.*

Przy takich empirycznych rozważaniach nie można zapomnieć o powolnym dochodzeniu do równowagi termicznej.

Znacznie lepiej jest jednak oprzeć się na temperaturze termodynamicznej, wychodząc ze wzoru Boltzmanna, pierwszej zasady termodynamiki i równania stanu gazu doskonałego

$$pV = nRT$$

które traktujemy jako empiryczną definicję temperatury empirycznej.

Twierdzenie 63 (Pierwsza zasada termodynamiki [54]) *Zasada zachowania energii (w przypadku quazistatycznym) może być zapisana jako*

$$\Delta U = Q + W,$$

co oznacza, że wzrost (zmniejszenie) energii wewnętrznej układu jest równy sumie zaabsorbowanego (wydzielonego) ciepła i pracy mechanicznej wykonanej nad układem (przez układ).

Definicja 45 (Entropia [63, 64]) *Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem*

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \tag{50}$$

gdzie k jest stałą, której wartość zostanie określona później. Wzór (56), zwany wzorem Boltzmann, stosuje się do układów izolowanych w równowadze (pełnej lub niepełnej).

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch podukładów. Podukłady oznaczamy wskaźnikami „1” i „2” i zaniebujemy oddziaływanie między nimi. W takim razie dla całego układu

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1\Delta\Gamma_2,$$

a zatem

$$S = S_1 + S_2.$$

Definicja 46 (Proces quasistatyczny [60]) Proces nazywamy quasistatycznym, jeśli nieskończenie mała zmiana wartości parametrów wystarcza do odwrócenia jego kierunku.

Dla przemian quasistatycznych entropia, ściśle związana z odwracalnością, się nie zmienia. Tak więc dla procesów adiabatyczno-quasistatycznych mamy

$$dS = DQ = 0.$$

Definicja 47 (Temperatura termodynamiczna [66]) Z wzoru Boltzmann (56) otrzymujemy entropię jako funkcję energii układu i parametrów zewnętrznych x_1, \dots, x_n . Temperaturę T definiujemy wzorem

$$\frac{\partial S(U, x_1, \dots, x_n)}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (51)$$

Dalsze wyprowadzenia z [65] i [66]. Najpierw dowiedzimy zerowej zasady termodynamiki dla układów stykających się ze sobą lecz niezależnych, następnie z podstawowych założeń wyprowadzimy empiryczne równanie stanu gazu doskonałego.

1. Mamy entropię dwóch stykających się podukładów

$$S = S_1 + S_2,$$

o których zakładamy, że są w pełni izolowane, czyli

$$U = U_1 + U_2 = \text{const}$$

i nie ma żadnej ucieczki ciepła ani wykonywanej pracy; ciepło może jedynie przepływać między układami. Warunek maksymalnej entropii:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_1}\right)_{U,x} = 0$$

daje nam po podstawieniu (51) ($U_2 = U - U_1 \Rightarrow dU_2 = -dU_1$)

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0.$$

c.b.d.u.

2. Za model gazu doskonałego przyjmuje się układ latających i odbijających się N punktów; można je spokojnie uważać za niezależne od siebie, każda z jakimiś możliwymi stanami położenia i pędu. Skoro są niezależne od siebie, można przyjąć, że każda ma energię $E = \frac{U}{N}$. Możemy tak wyznaczyć liczbę stanów przypadającą na jedną cząstkę:

$$\Delta\Gamma_1 = \int \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) d^3p d^3x = V \int \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) d^3p.$$

Wymnażamy po wszystkich cząstkach

$$\Delta\Gamma = V^N \int \delta \left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right) d^{3N}p,$$

i uzyskujemy wzór na entropię

$$S = kN \ln V + f(E).$$

Dla przemiany adiabatyczno-quasistatycznej mamy

$$0 = dS = \left(\frac{kN}{V} \right)_U dV + \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V dU.$$

Ale w takiej przemianie

$$dU = DW = pdV,$$

co podstawiamy i mamy

$$p = \frac{NkT}{V}.$$

Definicja 48 (Stała Boltzmanna [66])

$$k = \frac{R}{N_{AV}},$$

gdzie R jest stałą gazową, a N_{AV} liczbą Avogadra. Tak więc stała k jest określona przez wybór skali temperatury. Przy ogólnie przyjętym wyborze skali zakłada się, że $T = 273,16$ K dla punktu potrójnego wody. Wówczas

$$k = 8,62 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$$

Mamy przy okazji skalę Kelvina. Należy zauważyć, że stopień w skali Kelvina jest zgodny ze skalą Celcjusza.

Definicja 49 (Skale Celcjusza i Fahrenheita [52]) Skale te wyznaczają następujące punkty (pierwsza podana wartość jest dla skali, dla której tę wartość właśnie stosowano jako definicję):

- temperatura mieszaniny lodu z salmiakiem: $0^\circ F$, $-17,8^\circ C$;
- temperatura topnienia lodu: $0^\circ C$, $32^\circ F$ (punkt umowny w drugiej skali Fahrenheita);
- temperatura chorej żony Fahrenheita: $100^\circ F$, $37,8^\circ C$;
- temperatura wrzenia wody: $100^\circ C$, $212^\circ F$.

Wspólnym punktem obu skal jest -40 stopni.

Generalnie empiryczne skale temperatur ustala się tak: znajduje się substancję, której objętość zależy od temperatury, i zależnie od zależności wyszukuje się odpowiedniej liczby punktów do skali.

35. Ciepło, procesy wymiany ciepła.

Definicja 50 (Ciepło [60]) Jeśli proces nie przebiega adiabatycznie, to $dU \neq DW$. Dla układów zamkniętych, to znaczy takich, które nie wymieniają cząstek z otoczeniem, piszemy

$$dU - DW = DQ$$

Wielkość stojącą po prawej stronie tego wzoru nazywamy ciepłem. Wzór ten jest jego definicją.

Przekaz energii w postaci pracy różni się od przekazu w postaci ciepła uporządkowaniem; praca napędza ruch uporządkowany, ciepło zaś chaotyczny. Oczywiście, to rozróżnienie stosuje się do pracy makroskopowej (nie ma zresztą czegoś takiego jak ciepło mikroskopowe).

Twierdzenie 64 (Przenoszenie ciepła [54]) 1. przez konwekcję (unoszenie),

2. przez promieniowanie,

3. przez przewodnictwo.

Co trzeba wiedzieć o tych procesach? Ciepło nie jest funkcją stanu, więc całka zwykle zależy od drogi - chyba, że próbka ma stałą objętość. Można też wyrazić ciepło przez entropię:

$$DQ = TdS$$

co już jest różniczką zupełną. Jeśli zdefiniować entalpię

$$H = U + pV$$

to

$$(DQ)_p = dH$$

też jest różniczką zupełną. Oczywiście

$$(DQ)_V = dU.$$

36. Równanie przewodnictwa cieplnego i zjawiska przewodzenia ciepła w kryształach.

Definicja 51 (Ciepło [60]) Jeśli proces nie przebiega adiabatycznie, to $dU \neq DW$. Dla układów zamkniętych, to znaczy takich, które nie wymieniają cząstek z otoczeniem, piszemy

$$dU - DW = DQ$$

Wielkość stojącą po prawej stronie tego wzoru nazywamy ciepłem. Wzór ten jest jego definicją.

Przekaz energii w postaci pracy różni się od przekazu w postaci ciepła uporządkowaniem; praca napędza ruch uporządkowany, ciepło zaś chaotyczny. Oczywiście, to rozróżnienie stosuje się do pracy makroskopowej (nie ma zresztą czegoś takiego jak ciepło mikroskopowe).

Dla przepływu ciepła, możemy zdefiniować wielkości charakterystyczne jak dla przewodzenia prądu.

Twierdzenie 65 („Prawo Ohma” dla ciepła [58]) Możemy zdefiniować strumień cieplny (natężenie prądu cieplnego) jako

$$\Phi = \frac{dQ}{dt},$$

gdzie dQ oznacza tym razem ilość energii przekazywanej w postaci ciepła, która „przepłynęła” przez przekrój poprzeczny S w czasie dt . Dla ustalonego przepływu energii w postaci ciepła przez przewodnik cieplny o długości l i przekroju poprzecznym S obowiązuje zależność podobna do prawa Ohma

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_C},$$

gdzie R_C jest oporem cieplnym, wyrażającym się przez przewodność cieplną λ zależnością

$$R_C = \frac{l}{\lambda S}.$$

Przez stan nieustalony rozumiemy taką sytuację, kiedy zmienia się pod wpływem przepływu ciepła temperatura przewodnika się zmienia. Przez stan ustalony rozumiemy taki przypadek, kiedy tak się już nie dzieje.

Przyjmijmy jednak, że „prawo Ohma” obowiązuje zawsze, zaś ΔT można nadać sens różnicy temperatur na końcach dowolnego infinitesimalnego fragmentu drutu. Możemy przekształcić

$$\rho C = \frac{dx}{\lambda S}$$

i mamy

$$\Phi = -S\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

gdzie minus wynika z tego, że ciepło płynie do zimniejszego. Jeśli prąd cieplny nie jest stały, gdzieś zmienia się gęstość energii wewnętrznej. Ogólnie, jeśli nie jest wykonywana praca, przepływające ciepło musi spełniać prawo Gaussa. W postaci całkowitej jest to dosyć naturalne, a z niego natychmiast wynika postać różniczkowa (ponieważ całkowanie może być po dowolnym fragmencie przewodnika):

$$du = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} dt = S\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dt.$$

Z drugiej strony, ten przyrost gęstości energii wewnętrznej przekłada się na zmianę temperatury:

$$du = \rho S c dT.$$

Porównujemy obie strony i uzyskujemy wreszcie

Twierdzenie 66 (Równanie przewodnictwa cieplnego [58])

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Dla $t \rightarrow \infty$ układ jest w stanie ustalonym, a wtedy

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Rozwiązaniem tego drugiego równania różniczkowego jest funkcja liniowa.

W kryształach za przewodnictwo cieplne odpowiadają fonony i ewentualnie elektrony.

37. Promieniowanie cieplne ciał: współczynniki absorpcji i emisji promieniowania, ciało doskonale czarne, prawo przesunięć Wiena, prawo Stefana-Boltzmanna.

Na początek na bazie [52]. **Zdolność emisyjna ciała**

$$E(\nu, T) = \frac{dP}{dS}$$

oznacza ilość energii wyemitowanej przez jednostkową powierzchnię w przeciągu jednostki czasu;
zdolność absorpcyjna ciała

$$A(\nu, T) = \frac{P_1}{P_0}$$

jest stosunkiem mocy pochłoniętego promieniowania do mocy całego padającego na ciało promieniowania. Oznaczmy przez $C(\nu, T)$ gęstość mocy promieniowania w równowadze termodynamicznej z ciałem padającego na jednostkę powierzchni tego ciała. Jest ono naturalnie proporcjonalne do objętościowej gęstości mocy tego promieniowania $\rho(\nu, T)$. Z warunku równowagi termodynamicznej wyciągamy dwa wnioski:

- że jest również równowaga termiczna, a więc promieniowaniu należy przypisać taką samą temperaturę; o wnioskach z tego za chwilę.

- że ilość energii pochłoniętej w jednostce czasu przez ciało musi być równa ilości energii wyemitowanej; tym samym

$$E(\nu, T) = C(\nu, T)A(\nu, T)$$

Rzecz jasna, ciało rzadko znajduje się w równowadze termicznej ze światłem nań padającym. Jednak jako że zdolność emisyjna jest cechą ciała zależną tylko od jego sytuacji wewnętrznej, powyższy wzór pozwala ją znaleźć zawsze.

Definicja 52 (Ciało doskonale czarne) *Ciało, którego zdolność absorpcyjna wynosi 1.*

Tak więc $C(\nu, T)$ (czy też $\rho(\nu, T)$) całkowicie określają $E(\nu, T)$ ciała doskonale czarnego; jest ona nadto zależna wyłącznie od temperatury.

Przejdę teraz do wyprowadzenia z [48].

1. Musimy zacząć od koncepcji gęstości modów. Rozważmy sześcian o boku L , w którego wnętrzu znajdują się fale stojące o częstotliwościach

$$\omega = \frac{\pi c}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \text{ gdzie } L = \frac{\lambda}{c} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}, \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Najpierw znajdziemy liczbę modów o częstości poniżej ω ; wystarczy rozpatrzyć $\frac{1}{8}$ kuli w „przestrzeni możliwych częstości”, o promieniu

$$R = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{2L}{\lambda} = \frac{L\omega}{\pi c}.$$

czyli (dodatkowo uwzględniamy dwie polaryzacje)

$$N(\omega) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{L\omega}{\pi c} \right)^3,$$

co trzeba zróżniczkować i można zapisać w częstościach:

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}.$$

Najważniejszą rzeczą w tym wyniku jest niezależność od objętości. Wnioskować więc można, że gęstość modów jest w jakiś sposób cechą światła. Że jest to światło pozostające z czymś w równowadze, można argumentować rozważając promieniowanie zamknięte w jakiejś wnęce.

2. Teraz ważna rzecz:

Twierdzenie 67 (Hipoteza Maxa Plancka [48]) *W roku 1900 opublikował on pracę, w której założył, że każdy mod pola promieniowania może emitować i absorbować energię jedynie w dyskretnych porcjach (kwantach) $nh\nu$, czyli fotonach (n jest liczbą naturalną, $h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ - stałą Plancka).*

3. Z rozkładu Boltzmanna prawdopodobieństwo dla danego modu o częstości ν :

$$p(E = nh\nu) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right),$$

gdzie

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right).$$

Podstawmy $x = \exp\left(-\frac{nh\nu}{kT}\right)$ i obliczmy średnią energię:

$$\langle E \rangle = \sum_n p(n)nh\nu = h\nu x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} = \frac{h\nu x}{1 - x} = \frac{h\nu}{\frac{1}{x} - 1}.$$

4. Co mnożymy przez gęstość modów:

Twierdzenie 68 (Rozkład Plancka [48])

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu.$$

Wzór ten, zwany rozkładem Plancka, prawidłowo opisuje widmową gęstość mocy promieniowania ciała doskonale czarnego.

Twierdzenie 69 (Prawo przesunięć Wiena [71]) *Otrzymywane w wyniku znajdowania maksimum, czyli różniczkowania:*

$$\nu_{max} = aT,$$

czy też

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}.$$

Twierdzenie 70 (Prawo Stefana-Boltzmann [52]) *Otrzymywane w wyniku przecałkowania:*

$$E_c(T) = \sigma T^4.$$

38. Stan równowagi termodynamicznej.

Definicja 53 (Równowaga termodynamiczna [51]) *Układ jest w równowadze termodynamicznej, jeżeli nie zachodzą w nim żadne systematyczne zmiany opisujących go parametrów i nie występują zjawiska transportu.*

Równowaga termodynamiczna nie jest przechodnia. Podstawowym zajęciem w termodynamice jest właśnie rozważanie wyłącznie przejść przez stany równowagi – a więc przynajmniej teoretycznie zjawisk bardzo powolnych i odwracalnych.

Definicja 54 (Proces quasistatyczny [60]) *Proces nazywamy quasistatycznym, jeśli nieskończenie mała zmiana wartości parametrów wystarcza do odwrócenia jego kierunku.*

Stan równowagi termodynamicznej makroskopowo można zadać szeregiem parametrów, na przykład ciśnieniem, objętością, liczbą moli i temperaturą. Istnieje zawsze równanie stanu układu

$$f(n, p, V, T) = 0$$

z którego, przy niezmienniej liczbie moli, wynikają oczywiście funkcje każdego z parametrów p , V i T od dwóch pozostałych.

Biorąc pod uwagę drugą zasadę termodynamiki, możemy stwierdzić, że w stanie równowagi termodynamicznej w układzie izolowanym układ będzie miał maksymalną możliwą entropię pośród innych możliwych stanów tego układu. Zachodzi to też w przypadku ogólniejszym, gdy układ jest izolowany wyłącznie adiabatycznie - gdyż układ sam nie może się ochłodzić, wykonując pracę.

39. II zasada termodynamiki i pojęcie entropii.

Tutaj skupię się najpierw na różnych sformułowaniach II zasady; przejdę następnie do pojęcia entropii i podam wyprowadzenie definicji fenomenologicznej z definicji Boltzmann.

Twierdzenie 71 (Druga zasada termodynamiki [56])

1. *Sformułowanie Rudolfa Clausiusa: Niemożliwy jest samorzutny przepływ ciepła od ciała zimniejszego do cieplejszego. Oznacza to, że nie może istnieć maszyna, która by samoczynnie przenosiła ciepło od ciała o niższej temperaturze do ciała o temperaturze wyższej bez żadnej dodatkowej, wkładanej z zewnątrz pracy.*
2. *Sformułowanie Williama Thomsona (Kelvina): Niemożliwe jest otrzymywanie pracy mechanicznej z jakiegokolwiek układu materialnego przez oziębienie się tego układu poniżej temperatury najzimniejszego z otaczających go obiektów bez żadnego innego efektu.*
Bardzo podobne sformułowanie Maxa Plancka: Niemożliwe jest zbudowanie maszyny, która pracując cyklicznie, wykonywałaby pracę mechaniczną kosztem oziębiania zbiornika ciepła bez jakiegokolwiek innego efektu. Wolfgang Ostwald takiej niemożliwej do zbudowania maszynie cieplnej dał nazwę perpetuum mobile II rodzaju. W związku z tym postulat Kelvina-Plancka można sformułować następująco: Niemożliwe jest zbudowanie perpetuum mobile
3. *Sformułowanie dzięki pracom Nicolasa Carnota: Żadna cykliczna maszyna cieplna pracująca między temperaturami: maksymalną T_2 i minimalną T_1 nie może mieć sprawności większej niż $1 - \frac{T_1}{T_2}$.*
4. *Sformułowanie w ujęciu entropowym: W układzie zamkniętym entropia nie może maleć.*

Definicja 55 (Perpetuum mobile [56]) *Perpetua mobile I i II rodzaju są zaprzeczeniami odpowiednio I i II zasady termodynamiki. Pierwsza miałaby produkować ciągle pracę z układu zamkniętego, druga też, lecz kosztem ad infinitum obniżania temperatury.*

Przyjmijmy teraz jako postulat istnienie czegoś co możemy przybliżyć przez gaz doskonały.

Twierdzenie 72 (Pierwsza zasada termodynamiki [54]) *Zasada zachowania energii (w przypadku quasistatycznym) może być zapisana jako*

$$\Delta U = Q + W,$$

co oznacza, że wzrost (zmniejszenie) energii wewnętrznej układu jest równy sumie zaabsorbowanego (wydzielonego) ciepła i pracy mechanicznej wykonanej nad układem (przez układ).

Definicja 56 (Entropia [63, 64]) *Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem*

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \quad (52)$$

gdzie k jest stałą, której wartość zostanie określona później. Wzór (52), zwany wzorem Boltzmann, stosuje się do układów izolowanych w równowadze (pełnej lub niepełnej).

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch podukładów. Podukłady oznaczamy wskaźnikami „1” i „2” i zaniedbujemy oddziaływanie między nimi. W takim razie dla całego układu

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1 \Delta\Gamma_2,$$

a zatem

$$S = S_1 + S_2.$$

Definicja 57 (Proces quasistatyczny [60]) *Proces nazywamy quasistatycznym, jeśli nieskończenie mała zmiana wartości parametrów wystarcza do odwrócenia jego kierunku.*

Dla przemian quasistatycznych entropia, ściśle związana z odwracalnością, się nie zmienia. Tak więc dla procesów adiabatyczno-quasistatycznych mamy

$$dS = DQ = 0.$$

Definicja 58 (Temperatura termodynamiczna [66]) Z wzoru Boltzmanna (52) otrzymujemy entropię jako funkcję energii układu i parametrów zewnętrznych x_1, \dots, x_n . Temperaturę T definiujemy wzorem

$$\frac{\partial S(U, x_1, \dots, x_n)}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (53)$$

Dalsze wyprowadzenia z [65] i [66]. Najpierw dowiedzimy zerowej zasady termodynamiki dla układów stykających się ze sobą lecz niezależnych, następnie z podstawowych założeń wyprowadzimy empiryczne równanie stanu gazu doskonałego.

1. Mamy entropię dwóch stykających się podukładów

$$S = S_1 + S_2,$$

o których zakładamy, że są w pełni izolowane, czyli

$$U = U_1 + U_2 = \text{const}$$

i nie ma żadnej ucieczki ciepła ani wykonywanej pracy; ciepło może jedynie przepływać między układami. Warunek maksymalnej entropii:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_1} \right)_{U, x} = 0$$

daje nam po podstawieniu (53) ($U_2 = U - U_1 \Rightarrow dU_2 = -dU_1$)

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0.$$

c.b.d.u.

2. Za model gazu doskonałego przyjmuje się układ latających i odbijających się N punktów; można je spokojnie uważać za niezależne od siebie, każda z jakimiś możliwymi stanami położenia i pędu. Skoro są niezależne od siebie, można przyjąć, że każda ma energię $E = \frac{U}{N}$. Możemy tak wyznaczyć liczbę stanów przypadającą na jedną cząstkę:

$$\Delta\Gamma_1 = \int \delta \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) d^3p d^3x = V \int \delta \left(E - \frac{p^2}{2m} \right) d^3p.$$

Wymnażamy po wszystkich cząstkach

$$\Delta\Gamma = V^N \int \delta \left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \right) d^{3N}p,$$

i uzyskujemy wzór na entropię

$$S = kN \ln V + f(E).$$

Dla przemiany adiabatyczno-quasistatycznej mamy

$$0 = dS = \left(\frac{kN}{V} \right)_U dV + \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_V dU.$$

Ale w takiej przemianie

$$dU = DW = pdV,$$

co podstawiamy i mamy

$$p = \frac{NkT}{V}.$$

Dalej za [67]. Tutaj chodzi nam tylko o to, by przyjąć do wiadomości, że jeśli p ma jakąś skończoną niezerową wartość i opisujemy tylko układy w równowadze, temperatura istnieje. Skoro tak, to możemy odwrócić wzór (52) oraz istnieje różniczka energii:

$$dU(S, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_x dS + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_{S, x_j \neq i} dx_i.$$

Znowu korzystamy z procesu adiabaticzno-quasistatycznego

$$dU = DW = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_{S, x_j \neq i} dx_i,$$

czyli

$$dU = TdS + DW.$$

Korzystając z I zasady termodynamiki mamy wreszcie

Definicja 59 (Entropia fenomenologiczna [67])

$$dS = \frac{DQ}{T}.$$

W termodynamice fenomenologicznej ten wzór był używany jako definicja entropii. Definiuje on jednak tylko przyrost entropii, a zatem sama entropia jest tu określana z dokładnością do stałej. Tak więc wzór Boltzmanna (52) zawiera więcej informacji o entropii.

Mając już wszystko, naszkicujmy tylko zależności pomiędzy sformułowaniami II zasady.

1. Sformułowanie Carnota jest eliminowane jako wynikające z entropii; jeśli bowiem przedstawić dowolny cykl we współrzędnych S – T , to można będzie ten cykl zamknąć w prostokącie; pole wewnątrz cyklu to wykonana praca, pole pod dolną granicą cyklu to pobrane ciepło (co wynika z fenomenologicznej definicji), stosunek tych dwóch rzeczy (praca do ciepła) to sprawność. Od razu widać, że sprawność tego optymalnego prostokąta zależy jedynie od temperatur, oraz będzie większa od sprawności cyklu, który zamyka [57].
2. Słabsze sformułowanie, o istnieniu sprawności granicznej, jest tożsame ze sformulowaniem Clausiusa, jeśli rozważyć „supermaszynę” zasilałą pompę ciepłą (czyli odwrotny silnik) Carnota, oba pomiędzy tymi samymi zbiornikami. Choć szczegóły tego dowodzenia lepiej staranniej przemyśleć.
3. Ostatnie sformułowanie jest postulatem tkwiącym w definicji entropii. Jest znacznie solidniejsza tożsamość Clausiusa ze wzrostem entropii, przez rozpatrywanie dwóch stykających się ciał.

40. Równanie stanu gazu doskonałego, przemiany gazowe, molowe ciepła właściwe gazów.

Można wyprowadzić równanie stanu gazu doskonałego z pewnych założeń mikroskopowych (lub traktować je jako prawo empiryczne).

Twierdzenie 73 (Pierwsza zasada termodynamiki [54]) *Zasada zachowania energii (w przypadku quazistatycznym) może być zapisana jako*

$$\Delta U = Q + W,$$

co oznacza, że wzrost (zmniejszenie) energii wewnętrznej układu jest równy sumie zaabsorbowanego (wydzielonego) ciepła i pracy mechanicznej wykonanej nad układem (przez układ).

Definicja 60 (Entropia [63, 64]) Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \quad (54)$$

gdzie k jest stałą, której wartość zostanie określona później. Wzór (54), zwany wzorem Boltzmanna, stosuje się do układów izolowanych w równowadze (pełnej lub niepełnej).

Przypuśćmy, że układ składa się z dwóch podukładów. Podukłady oznaczamy wskaźnikami „1” i „2” i zanedbujemy oddziaływanie między nimi. W takim razie dla całego układu

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_1 \Delta\Gamma_2,$$

a zatem

$$S = S_1 + S_2.$$

Definicja 61 (Proces quasistatyczny [60]) Proces nazywamy quasistatycznym, jeśli nieskończenie mała zmiana wartości parametrów wystarcza do odwrócenia jego kierunku.

Dla przemian quasistatycznych entropia, ściśle związana z odwracalnością, się nie zmienia. Tak więc dla procesów adiabatyczno-quasistatycznych mamy

$$dS = DQ = 0.$$

Definicja 62 (Temperatura termodynamiczna [66]) Z wzoru Boltzmanna (54) otrzymujemy entropię jako funkcję energii układu i parametrów zewnętrznych x_1, \dots, x_n . Temperaturę T definiujemy wzorem

$$\frac{\partial S(U, x_1, \dots, x_n)}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (55)$$

Dalsze wyprowadzenia z [65] i [66]. Najpierw dowiedzimy zerowej zasady termodynamiki dla układów stykających się ze sobą lecz niezależnych, następnie z podstawowych założeń wyprowadzimy empiryczne równanie stanu gazu doskonałego.

1. Mamy entropię dwóch stykających się podukładów

$$S = S_1 + S_2,$$

o których zakładamy, że są w pełni izolowane, czyli

$$U = U_1 + U_2 = \text{const}$$

i nie ma żadnej ucieczki ciepła ani wykonywanej pracy; ciepło może jedynie przepływać między układami. Warunek maksymalnej entropii:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial U_1} \right)_{U, x} = 0$$

daje nam po podstawieniu (51) ($U_2 = U - U_1 \Rightarrow dU_2 = -dU_1$)

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0.$$

c.b.d.u.

2. Za model gazu doskonałego przyjmuje się układ latających i odbijających się N punktów; można je spokojnie uważać za niezależne od siebie, każda z jakimiś możliwymi stanami położenia i pędu. Skoro są niezależne od siebie, można przyjąć, że każda ma energię $E = \frac{U}{N}$. Możemy tak wyznaczyć liczbę stanów przypadającą na jedną cząstkę:

$$\Delta\Gamma_1 = \int \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) d^3p d^3x = V \int \delta\left(E - \frac{p^2}{2m}\right) d^3p.$$

Wymnażamy po wszystkich cząstkach

$$\Delta\Gamma = V^N \int \delta\left(E - \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}\right) d^{3N}p,$$

i uzyskujemy wzór na entropię

$$S = kN \ln V + f(E).$$

Dla przemiany adiabatyczno-quasistatycznej mamy

$$0 = dS = \left(\frac{kN}{V}\right)_U dV + \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_V dU.$$

Ale w takiej przemianie

$$dU = DW = pdV,$$

co podstawiamy i mamy

$$p = \frac{NkT}{V}.$$

Definicja 63 (Stała Boltzmanna [66])

$$k = \frac{R}{N_{AV}},$$

gdzie R jest stałą gazową, a N_{AV} liczbą Avogadra. Tak więc stała k jest określona przez wybór skali temperatury. Przy ogólnie przyjętym wyborze skali zakłada się, że $T = 273,16$ K dla punktu potrójnego wody. Wówczas

$$k = 8,62 \cdot 10^{-5} \frac{eV}{K}$$

Mamy więc przy okazji stwierdzenie, że istnieje jakaś wielkość T charakteryzująca pewien rodzaj równowagi pomiędzy układami. Stałe są wyznaczone już empirycznie. Pod pojęciem przemiany gazowej rozumieć można zmianę stanu makroskopowego danego gazu. Zmiana takich parametrów jak p , V czy T zależy od wykonanej nad gazem pracy czy włożonego ciepła (lub na odwrót – przez gaz i oddanego). Generalnie, przemianę opisuje się poprzez wielkość, która jest podczas niej zachowana; można wtedy znaleźć z tej wielkości i z równania stanu zależność jednej stałej stanu od drugiej.

Definicja 64 (ciepło właściwe i pojemność cieplna [62]) Ciepło właściwe jest to stosunek pojemności cieplnej fazy do jej masy. Pojemność cieplną przy stałych parametrach x definiujemy wzorem

$$C_x = \left(\frac{DQ}{dT}\right)_x.$$

Definicja ta ma sens wtedy i tylko wtedy, gdy $(DQ)_x$ jest różniczką zupełną. W przeciwnym bowiem razie, ilość ciepła potrzebna do ogrzania układu o dT stopni zależałaby od tego, po jakiej drodze przebiega proces i definicja byłaby niejednoznaczna.

Dalej za [62]. Można łatwo pokazać z pierwszej zasady, że

$$(DQ)_V = dU, \quad (DQ)_p = (d(U + pV))_p \equiv dH,$$

czyli istnieją jednoznaczne definicje

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V, \quad C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p.$$

Można znaleźć ogólny stosunek na C_V i C_p . Z I zasady uzyskujemy

$$DQ = dU + pdV = C_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV + pdV.$$

Dla stałego ciśnienia dzielimy przez $(dT)_p$

$$C_p = C_V + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p.$$

Dla gazu doskonałego wzór na energię to $E = \frac{3}{2}nkT$, z czego mamy już szybko wartości pojemności cieplnych dla gazu doskonałego.

41. Przemiany fazowe I rodzaju (przykłady) i współistnienie faz; przemiany fazowe II rodzaju.

Definicja 65 (Faza [53]) Fazą nazywamy makroskopową część substancji, mającą wszędzie jednakowe właściwości fizyczne (czyli jednorodną), oddzieloną od pozostałych części (faz) tej substancji powierzchnią rozdziału (granicą faz).

Przekształcenie jednej fazy w drugą nazywamy przejściem fazowym.

Właściwie należałoby to dyskutować tzw. potencjałami Gibbsa, ale kompletnie nie wiem, z czym to się je. Tak więc ze wszystkich cytatów wyciąłem wszelkie o potencjałach Gibbsa wspomnienie.

Twierdzenie 74 (Przemiany fazowe [69]) Rozróżnia się przemiany pierwszego i drugiego rodzaju.

- Przemiany fazowe I-go rodzaju charakteryzuje skokowa zmiana gęstości substancji oraz funkcji termodynamicznych (energii, energii swobodnej, entropii, entalpii i innych) w punkcie przejścia. Następstwem tego jest istnienie różnego od zera ciepła przejścia fazowego, które w stałej temperaturze i pod stałym ciśnieniem można mierzyć skokiem entalpii ΔH . Do przemian fazowych I-go rodzaju należą wszelkie zmiany stanu skupienia, przejścia jednych modyfikacji krystalicznych w inne itp.
- Podczas przemian fazowych II-go rodzaju gęstość oraz funkcje termodynamiczne są ciągłe; skoku doznają pochodne tych funkcji względem parametrów fizycznych: ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem $c_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p$; ściśliwość $\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$; współczynnik rozszerzalności cieplnej $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$ i inne. Z powodu ciągłości funkcji termodynamicznych ciepło właściwe przejść fazowych II-go rodzaju równe jest zeru. Do przejść fazowych drugiego rodzaju zalicza się np. przejście paramagnetyka w ferromagnetyk w nieobecności pola magnetycznego, przejście helu w stan nadciekły, przemiany w stopach binarnych związane ze skokową zmianą symetrii przy uporządkowaniu itp.

Twierdzenie 75 (Reguła faz Gibbsa [69]) Zależność między liczbą składników (k), liczbą faz (n) oraz liczbą parametrów określających warunki istnienia układu (r) w stanie równowagi:

$$n \leq k + r.$$

Reguła faz wywodzi się z warunków równowagi termodynamicznej układów wieloskładnikowych. W postaci powyższej jest ona spełniona przy następujących założeniach: 1) fazy są jednorodne w całej objętości i mają dostatecznie duże rozmiary, aby można było pominąć zjawiska powierzchniowe; 2) każdy składnik może swobodnie przechodzić przez powierzchnię rozdziału z jednej fazy do drugiej.

No i co? Jestem dosyć niedouczony z termodynamiki, więc kompletnie nie mam pojęcia, na co powinienem zwrócić uwagę.

42. Gazy rzeczywiste i ciecze: para nasycona, parowanie i wrzenie.

Równanie stanu gazu doskonałego jest dobrym przybliżeniem dla gazów jednoatomowych; dla innych gazów i do pewnego stopnia dla cieczy należy przyjąć inne równania – w dużej mierze empiryczne.

Twierdzenie 76 (Równanie van der Waalsa [53]) *Do równania Clapeyrona zamiast objętości mierzonej wstawiamy objętość pomniejszoną o objętość zajęta przez cząsteczki o skończonych rozmiarach. Objętość ta wynosić będzie nb , gdzie b ma sens objętości zajętej przez jeden mol cząsteczek. Mamy zatem*

$$p(V - nb) = nRT.$$

Założmy teraz, że siły oddziaływań międzycząsteczkowych zanikają bardzo szybko z odległością, tak że można uwzględnić oddziaływanie jedynie między cząsteczką i jej najbliższym otoczeniem. Te cząsteczki, które są w najbardziej zewnętrznych warstwach, odczuwają wypadkowe oddziaływania skierowane w głąb gazu. Oznacza to, że cząsteczka dochodząca do ścianki naczynia jest spowalniana i średnia siła wywierana na ścianki naczynia ulega zmniejszeniu. Zatem ciśnienie wewnątrz gazu jest większe od mierzonego ciśnienia o pewien człon, który oszacujemy. Siła wywierana na zewnętrzną warstwę wskutek oddziaływań międzycząsteczkowych $F \sim \rho \sim \frac{n}{V}$. Natomiast obniżenie ciśnienia będzie proporcjonalne do liczby cząsteczek w warstwie zewnętrznej oraz do tej siły: $\rho F \sim \frac{n^2}{V^2}$. Ostatecznie

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

Dalej wciąż za [53]. Oznaczmy $v = \frac{V}{n}$. Przekształcamy równanie van der Waalsa:

$$(pv^2 + a)(v - b) = v^2RT;$$

$$pv^3 - (bp + RT)v^2 + av - ab = 0.$$

Dla określonego T i p równanie to ma trzy pierwiastki. Dla rosnącego T pierwiastki te schodzą się do jednego punktu. Taką temperaturę T_k nazywamy krytyczną, tak samo nazywamy izotermę.

Sens tych pierwiastków jest następujący: przypuśćmy, że jedziemy wzdłuż izoterm poniżej izoterm krytycznej od dużych do małych objętości. Najpierw zwiększając objętość zmniejszamy ciśnienie, aż dochodzimy do pierwszego pierwiastka, gdy w całej objętości mamy parę nasyconą. Dalej już uzyskane równanie 3-go stopnia nie odpowiada rzeczywistości, i przesuwamy się po prostoliniowym (we wsp. p i v) odcinku izotermicznym przez następne pierwiastki. Zmniejszanie objętości polega na stopniowym skraplaniu pary aż do całkowitego zajęcia objętości przez ciecz przy trzecim pierwiastku. Wracamy do pierwotnej izotermi, a ściskanie cieczy wymaga ogromnych ciśnień. Tak więc można skraplać gaz izotermicznie; nie jest to możliwe powyżej temperatury krytycznej.

Skoro już przy tym jesteśmy:

Definicja 66 (Para nasycona [55]) *Kiedy ciśnienie parcjale pary osiąga wartość ciśnienia przejścia fazowego para-ciecz w temperaturze pokojowej, mamy wtedy parę nasyconą.*

Twierdzenie 77 (Parowanie [55]) *Parowanie (przechodzenie ze stanu ciekłego w gazowy) odbywa się na powierzchni cieczy w każdej temperaturze. Szybkość parowania zależy od temperatury i ciśnienia. Wzrost temperatury powoduje zwiększenie szybkości parowania wszystkich cieczy, wzrost ciśnienia zaś – zmniejszenie szybkości parowania.*

Definicja 67 (Wrzenie [55]) *Wrzenie to parowanie w całej objętości cieczy. Pod określonym ciśnieniem każda ciecz wrze w określonej temperaturze. Podczas wrzenia temperatura utrzymuje stałą wartość.*

Pozostaje jeszcze wspomnieć o:

Twierdzenie 78 (Rozwinięcie wirialne [53]) *Modyfikację równania $\frac{pV}{RT} = 1$ dla gazów rzeczywistych można w ogólności zapisać w postaci*

$$\frac{pV}{RT} = 1 + \frac{B(T)}{V} + \frac{C(T)}{V^2} + \frac{D(T)}{V^3}.$$

W takiej postaci można przedstawić dowolne równanie stanu gazu rzeczywistego.

43. Granice rozdziału faz; napięcie powierzchniowe, włoskowatość.

Definicja 68 (Faza [53]) *Fazą nazywamy makroskopową część substancji, mającą wszędzie jednakowe właściwości fizyczne (czyli jednorodną), oddzieloną od pozostałych części (faz) tej substancji powierzchnią rozdziału (granicą fazy).*

Przekształcenie jednej fazy w drugą nazywamy przejściem fazowym.

Twierdzenie 79 (Reguła faz Gibbsa [69]) *Zależność między liczbą składników (k), liczbą faz (n) oraz liczbą parametrów określających warunki istnienia układu (r) w stanie równowagi:*

$$n \leq k + r.$$

Reguła faz wywodzi się z warunków równowagi termodynamicznej układów wieloskładnikowych. W postaci powyższej jest ona spełniona przy następujących założeniach: 1) fazy są jednorodne w całej objętości i mają dostatecznie duże rozmiary, aby można było pominąć zjawiska powierzchniowe; 2) każdy składnik może swobodnie przechodzić przez powierzchnię rozdziału z jednej fazy do drugiej.

Należałoby ogarnąć potencjały Gibbsa, by to wszystko opanować. No ale cóż.

Definicja 69 (Napięcie powierzchniowe [70]) *Praca tworzenia w izotermicznym procesie odwracalnym jednostkowego pola powierzchni rozdziału dwóch faz S_{12} znajdujących się w równowadze. Miarą napięcia powierzchniowego jest stosunek pracy do powierzchni.*

Przy wystarczająco dużej wielkości faz graniczących ze sobą, napięcie powierzchniowe nie zależy od wielkości powierzchni powstającej i może być określone jako praca przeniesienia wszystkich cząsteczek tworzących jednostkę powierzchni warstwy powierzchniowej z objętościowej fazy do warstwy powierzchniowej (?).

Nie mam zielonego pojęcia, co to jest włoskowatość. W encyklopedii tego nie ma. Dlaczego tak nagle ta włoskowatość jest taka ważna?

44. III zasada termodynamiki i nieosiągalność zera bezwzględnego.

Twierdzenie 80 (III zasada termodynamiki (postulat Nernsta) [59]) *Jeśli temperatura układu dąży do zera bezwzględnego, to entropia układu, niezależnie od wartości parametrów zewnętrznych określających jego stan, dąży do pewnej wartości skończonej, którą ze względu na dowolność wyznaczenia bezwzględnej wartości entropii można przyjąć za równą zero.*

Istnienie takiej stałej wynika w naturalny sposób z Boltzmannowskiej definicji entropii.

Definicja 70 (Entropia [63, 64]) *Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem*

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \tag{56}$$

gdzie k jest stałą.

My tu jednak będziemy stosować definicję fenomenologiczną $dS = \frac{DQ}{T}$. Dalej na podstawie [59].

Pierwszą konsekwencją III zasady jest to, że ciepła właściwe dążą do zera. Rozważmy proces przy stałym x o pojemności cieplnej $C_x = \left(\frac{DQ}{dT}\right)_x$ poczynawszy od zera bezwzględnego; w oparciu o entropię fenomenologiczną mamy

$$S(x, T) = \int_0^T dT' \frac{C_x(T')}{T'}.$$

By całka ta osiągała wartość skończoną, pojemność cieplna musi dążyć do zera. Także, współczynnik temperaturowy ciśnienia i rozszerzalność cieplna dążą do zera, ale nie ogarnąłem dowodu.

Twierdzenie 81 (Niemożliwość osiągnięcia 0K [59]) *Niemożliwe jest zredukowanie temperatury jakiegoś układu do zera bezwzględnego w wyniku skończonej liczby procesów.*

Dowód przez machanie rękami: entropia jest funkcją stanu, lecz najwyraźniej punkt 0, 0 na wykresie T – S ma specjalne prawa. Z samej definicji fenomenologicznej jasno wynika, że nie można z tego punktu wyjść przez przemianę izotermiczną. Rozważmy przemianę adiabatyczną prowadzącą do punktu A i jakąś inną przemianę do tego samego punktu przy stałym X ; ale przemiana adiabatyczna nie zmienia entropii; jeśli jednak przesuwamy się do wyższych temperatur, pojemność cieplna musi być różna od zera, a więc i zdobyte ciepło - więc znowu nie działa.

Literatura

- [1] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, I.B.6, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [2] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, II.12, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [3] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, III.1, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [4] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, I.B.10, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [5] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, I.B.14, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [6] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, I.B.9, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [7] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, II.4, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [8] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, II.3, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [9] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, II.5, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [10] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, IV.1, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [11] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, IV.3, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012

- [12] W. Rubinowicz, W. Królikowski, *Mechanika teoretyczna*, IV.3, wydanie IX, PWN, Warszawa 2012
- [13] Wykład prof. Banaszka z roku akademickiego 2012/2013
- [14] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 10, PWN, Warszawa 1975
- [15] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 11, PWN, Warszawa 1975
- [16] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 12, PWN, Warszawa 1975
- [17] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 13, PWN, Warszawa 1975
- [18] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 14, PWN, Warszawa 1975
- [19] C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, 9, PWN, Warszawa 1975
- [20] L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*, I.1, PWN, Warszawa 1958
- [21] L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*, I. 2, PWN, Warszawa 1958
- [22] L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*, I.3, PWN, Warszawa 1958
- [23] L. Landau, E. Lifszyc, *Mechanika ośrodków ciągłych*, VIII.65, PWN, Warszawa 1958
- [24] Wykład prof. Meissnera z elektrodynamiki, rok 2014
- [25] Dygresje do wykładu prof. Meissnera
- [26] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 3.1, PWN, Warszawa 2006
- [27] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 2.1, PWN, Warszawa 2006
- [28] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 3.4, PWN, Warszawa 2006
- [29] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 4.1, PWN, Warszawa 2006
- [30] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 4.2, PWN, Warszawa 2006
- [31] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 4.3, PWN, Warszawa 2006
- [32] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 5.1, PWN, Warszawa 2006
- [33] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 5.2, PWN, Warszawa 2006
- [34] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 6.2, PWN, Warszawa 2006
- [35] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 6.3, PWN, Warszawa 2006
- [36] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 7.1, PWN, Warszawa 2006
- [37] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 7.2, PWN, Warszawa 2006
- [38] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 7.3, PWN, Warszawa 2006
- [39] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 8.1, PWN, Warszawa 2006
- [40] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 9.2, PWN, Warszawa 2006
- [41] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 9.3, PWN, Warszawa 2006
- [42] D. J. Griffiths, *Podstawy elektrodynamiki*, 9.4, PWN, Warszawa 2006
- [43] T. Matulewicz, E. Skrzypczak, *Fizyka subatomowa w zadaniach*, PWN, Warszawa 2005

- [44] T. Matulewicz, E. Skrzypczak, *Kinematyka relatywistyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2003
- [45] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, 23.8, PWN, Warszawa 2009
- [46] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, 28.3, PWN, Warszawa 2009
- [47] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, 28.6, PWN, Warszawa 2009
- [48] T. Stacewicz, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do optyki i fizyki ciała stałego*, rozdz. I, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2002
- [49] T. Stacewicz, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do optyki i fizyki ciała stałego*, rozdz. XV, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2002
- [50] T. Stacewicz, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do optyki i fizyki ciała stałego*, rozdz. XVII, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2002
- [51] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. I, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [52] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. II, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [53] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. III, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [54] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. IV, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [55] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. V, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [56] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. VIII, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [57] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. VII, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [58] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. IX, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [59] M. Kamińska, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do termodynamiki fenomenologicznej*, rozdz. XI, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego
- [60] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. I.3, PWN, Warszawa 1978
- [61] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. II.15, PWN, Warszawa 1978
- [62] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. II.17, Warszawa 1978
- [63] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.19, PWN, Warszawa 1978
- [64] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.20, PWN, Warszawa 1978
- [65] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.22, PWN, Warszawa 1978

- [66] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.24, PWN, Warszawa 1978
- [67] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.25, PWN, Warszawa 1978
- [68] J. Ginter, *Wstęp do fizyki atomu, cząsteczki i ciała stałego*, 9.9, PWN, Warszawa 1979
- [69] *Encyklopedia fizyki*, tom 1, PWN, Warszawa 1972
- [70] *Encyklopedia fizyki*, tom 2, PWN, Warszawa 1972
- [71] *Encyklopedia fizyki*, tom 2, PWN, Warszawa 1972
- [72] Dygresje dr Wismołka do wykładu pt. „Wstęp do optyki i fizyki ciała stałego” (chyba; może do wykładu o grafenie w dniu fizyka AD 2014)
- [73] Wykład „Fizyka III” prowadzony przez dr Dariusza Wasika.
- [74] Wykłady z analizy prof. Napiórkowskiego.
- [75] http://www.bipm.org/en/si/base_units/

Część B

VI. Fizyka kwantowa

45. Doświadczenia świadczące o istnieniu atomów i cząsteczek; liczba Avogadro.

Naturalnie, obecnie możemy za pomocą mikroskopów elektronowych i tym podobnych po prostu „widzieć” cząsteczki i atomy; warto jednak wskazać pewne mniej bezpośrednie doświadczenia. Ale po kolei.

Twierdzenie 82 (Podstawowe założenia kinetycznej teorii materii [1])

1. *materia składa się z maleńkich, odrębnych cząstek zwanych cząsteczkami*
2. *cząsteczki te są w nieustannym ruchu.*

Na poparcie tej teorii idą sukcesy w wyprowadzaniu termodynamiki fenomenologicznej z kinetycznej teorii materii. Najlepszym dowodem są ruchy Browna - chaotyczne ruchy cząstek widzialnych pod mikroskopem, wywołanych ciągłymi zderzeniami z cząsteczkami już pod mikroskopem niewidzialnymi.

Twierdzenie 83 (Założenia teorii atomistycznej [2]) *Podstawowe założenia, które składają się na teorię atomistyczną Daltona, są następujące (niektóre z nich podajemy w skróconej formie):*

1. *Każdy pierwiastek składa się z maleńkich cząstek zwanych atomami.*
2. *Atomy każdego pierwiastka są dokładnie takie same.*
3. *Atomy są niepodzielne. Nie można ich podzielić, stworzyć lub zniszczyć.*
4. *Gdy dwa lub więcej pierwiastków tworzą związek chemiczny, ich atomy łączą się na cząsteczki tego związku.*
5. *Na ogół atomy łączą się w prostych stosunkach. 1 atom pierwiastka A może połączyć się z 1 atomem pierwiastka B, albo 2 lub 3 atomami, ale nigdy z dużą liczbą atomów.*
6. *Gdy dwa pierwiastki łącząc się mogą tworzyć więcej niż jeden związek, to cząsteczki trwalszego i pospoliej występującego związku zawierają tylko po 1 atomie każdego pierwiastka (wiemy obecnie, że to założenie jest fałszywe).*

Pierwsze cztery założenia zupełnie wystarczają do wyjaśnienia prawa stosunków stałych i prawa zachowania masy. Piąte założenie ma uzasadnienie w tym, że wypływają z niego proste wnioski dotyczące zależności wagowych.

Podstawowym dowodem teorii atomistycznej jest zgodność z doświadczeniami chemicznymi; lecz pełne uzgodnienie (łącznie z wyjaśnieniem objętości produkowanych i pierwotnych gazów) możliwe było dopiero po sformułowaniu prawa Avogadra.

Twierdzenie 84 (Prawo Avogadra [2]) Jednakowe objętości wszystkich gazów w tych samych warunkach ciśnienia i temperatury zawierają takie same liczby cząsteczek.

Definicja 71 (mol i liczba Avogadro [3]) Jeden mol to liczba atomów w próbce węgla-12 o masie 12 g.

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

46. Gazy, ciecze i ciała stałe z punktu widzenia atomowej (cząsteczkowej) teorii budowy materii.

Na podstawie [1].

- Gazy składają się z pojedynczych cząsteczek, niezłączonych ze sobą nawzajem (tym samym wzór chemiczny jakiejś substancji zwykle opisuje cząstkę gazu powstałego z tejże).
- Niektóre ciecze składają się z cząsteczek, trochę podobnie jak gazy (można wykonać bardzo ładne eksperymenty z CO, pokazując jego zachowanie się podobne do cieczy - na przykład ściekający CO po stopniach schodów gasi kolejne świece). Inne, np. roztopione metale, składają się z naelektryzowanych cząsteczek. Jeszcze inne zawierają skupiska cząsteczek.
- ciała stałe zawierają cząsteczki złączone kowalencyjnie lub jonowo. Niektóre mają strukturę krystaliczną.

Są w związku z tym pewne umowy co do nazewnictwa chemicznego, które można omówić. Wzór chemiczny gazu zawsze przedstawia odrębne cząstki tego ciała; wzory cieczy i ciał stałych niekoniecznie, choć wzór chemiczny zawsze oddaje proporcje substratów potrzebnych do wytworzenia danej substancji.

No i co jeszcze?

47. Rozkład Boltzmanna: związek temperatury z energią kinetyczną cząsteczek gazu, zależność gęstości gazu od wysokości w zewnętrznym polu grawitacyjnym.

Potrzebujemy:

Definicja 72 (Entropia [5, 6]) Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \quad (57)$$

gdzie k jest stałą, której wartość zostanie określona później. Wzór (57), zwany wzorem Boltzmanna, stosuje się do układów izolowanych w równowadze (pełnej lub niepełnej).

Definicja 73 (Temperatura termodynamiczna [7]) Z wzoru Boltzmanna (57) otrzymujemy entropię jako funkcję energii układu i parametrów zewnętrznych x_1, \dots, x_n . Temperaturę T definiujemy wzorem

$$\frac{\partial S(U, x_1, \dots, x_n)}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (58)$$

Najpierw na podstawie [9]. Rozważmy duży układ o dużej liczbie cząstek, oraz jego mały podukład w równowadze termodynamicznej z resztą. Przez $\Delta\Gamma_c$ oznaczmy liczbę wszystkich możliwych stanów mikroskopowych układu, przez $\Delta\Gamma_o(Q)$ rozumiemy liczbę wszystkich stanów mikroskopowych, w których wspomniany podukład przyjmuje postać Q . Można przyjąć

$$P(Q) = \frac{\Delta\Gamma_o(Q)}{\Delta\Gamma_c};$$

ale z (57)

$$\Delta\Gamma_o(Q) = \exp \frac{S_o(Q)}{k}.$$

Parametry otoczenia nie zależą od tego podukładu, interesuje nas więc tylko funkcja

$$S_o(Q) = S_o(U - E(Q))$$

którą rozpisujemy w szereg Taylora i podstawiamy (57)

$$S_o(Q) = S_o(U) - \frac{E(Q)}{T}, \quad (59)$$

przy czym, ponieważ wszystko jest w równowadze, temperatura dotyczy i układu i podukładu. Druga pochodna będzie proporcjonalna do odwrotności ciepła właściwego - a więc, skoro cząstek jest dużo, będzie mała. Podstawiamy (59) do poprzednich wzorów, i uzyskujemy twz. rozkład Maxwella-Boltzmanna:

$$P(Q) = Z^{-1} e^{-\frac{E(Q)}{kT}},$$

gdzie

$$Z = \sum_Q e^{-\frac{E(Q)}{kT}}.$$

Gdy możemy przybliżyć cząsteczki gazu jako posiadające wyłącznie energię kinetyczną, wiemy już, jaka jest zależność energii cząstek gazu od temperatury.

Przyjmijmy jednak, że gaz jest w jednorodnym polu grawitacyjnym, zaś energia kinetyczna cząstek jest mniej więcej wszędzie taka sama, lub też może być rozpatrywana osobno od potencjalnej. Wtedy szybko uzyskujemy zależność gęstości od wysokości:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{-\frac{h g M}{kT}}.$$

48. Statystyki kwantowe; bozony i fermiony.

No to naszkicuję najpierw bozony i fermiony, na bazie [17]. Warunek identyczności cząstek występujących w zagadnieniu oznacza konieczność hamiltonianu symetrycznego ze względu na zamianę cząstek. Okazuje się, że rozwiązaniami na funkcje falowe grupy cząstek, przynajmniej tymi rozwiązaniami, które mają fizyczny sens, są funkcje symetryczne i antysymetryczne ze względu na zamianę cząstek. Cząstki, dla których zachodzi pierwsza sytuacja, to bozony; dla których druga, to fermiony.

Funkcja falowa grupy cząstek jest kombinacją liniową funkcji pojedynczych cząstek. Łatwo zauważyć, że funkcja symetryczna ze względu na zamianę cząstek może zawierać w swej sumie identyczne funkcje falowe pojedynczych cząstek. Funkcja antysymetryczna nie, gdyż wtedy zamiana cząstek nie będzie zmieniać jej znaku - chyba, że funkcja się zeruje. Stąd dla fermionów obowiązuje zakaz Pauliego.

Teraz przechodzę do statystyk, na bazie [10] i częściowo [8, 11].

Przyda się:

Definicja 74 (Entropia [5, 6]) Oznaczmy przez $\Delta\Gamma$ liczbę stanów mikroskopowych odpowiadających danemu stanowi makroskopowemu. Wygodnie jest zamiast liczb $\Delta\Gamma$ wprowadzić entropię zdefiniowaną wzorem

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \quad (60)$$

gdzie k jest stałą, której wartość zostanie określona później. Wzór (60), zwany wzorem Boltzmanna, stosuje się do układów izolowanych w równowadze (pełnej lub niepełnej).

Definicja 75 (Temperatura termodynamiczna [7]) Z wzoru Boltzmanna (60) otrzymujemy entropię jako funkcję energii układu i parametrów zewnętrznych x_1, \dots, x_n . Temperaturę T definiujemy wzorem

$$\frac{\partial S(U, x_1, \dots, x_n)}{\partial U} = \frac{1}{T}. \quad (61)$$

- Dla układu otwartego złożonego z jednej fazy i jednego typu cząstek możemy napisać

$$dU = TdS - pdV + \mu dn,$$

gdzie

$$\mu = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{U,V} \quad (62)$$

nosi nazwę potencjału chemicznego.

- Przez $\Delta\Gamma_c$ oznaczmy liczbę wszystkich możliwych stanów mikroskopowych układu, przez $\Delta\Gamma_o(Q)$ rozumiemy liczbę wszystkich stanów mikroskopowych, w których wyróżniony podukład przyjmuje postać Q . Można przyjąć

$$P(Q) = \frac{\Delta\Gamma_o(Q)}{\Delta\Gamma_c};$$

ale z (60)

$$\Delta\Gamma_o(Q) = \exp \frac{S_o(Q)}{k}.$$

- Parametry otoczenia nie zależą od tego podukładu, interesuje nas więc tylko funkcja

$$S_o(Q) = S_o(U - E(Q), N - n(Q))$$

którą rozpisujemy w szereg Taylora i podstawiamy (60) i (62)

$$S_o(Q) = S_o(U, N) - \frac{E(Q)}{T} + \frac{\mu n(Q)}{T}, \quad (63)$$

przy czym, ponieważ wszystko jest w równowadze, temperatura dotyczy i układu i podukładu. Wyższe wyrazy możemy zaniedbać.

- Podstawiając (63) do wzorów z punktu 48., uzyskujemy

$$P(Q) = Z^{-1} e^{-\frac{E(Q) - \mu n(Q)}{kT}},$$

gdzie

$$Z = \sum_Q e^{-\frac{E(Q) - \mu n(Q)}{kT}}.$$

- Teraz przez wyróżniony podukład rozumiemy te cząstki, które przyjmą energię ϵ ; tak więc wielkość $E(Q)$ jest całkowicie określona przez n i mamy

$$P(\epsilon, n) = \frac{e^{-\frac{(\epsilon - \mu)n(Q)}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{(\epsilon - \mu)n(Q)}{kT}}}.$$

Interesuje nas wartość oczekiwana:

$$\langle n(\epsilon) \rangle = \frac{\sum_n n e^{-\frac{(\epsilon - \mu)n(Q)}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{(\epsilon - \mu)n(Q)}{kT}}}. \quad (64)$$

- Dla fermionów n przyjmuje tylko 0 i 1, czyli (64) przechodzi na

$$f(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}}}$$

co nosi nazwę statystyki Fermiego-Diraca.

- Dla bozonów zakładamy najpierw, że $\epsilon > \mu$, i możemy wykonać sumowania. Podstawmy $x = e^{-\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}}$, i mamy

$$b(\epsilon) = x \frac{1 + 2x + 3x^2 + \dots}{1 + x + x^2 + \dots} = \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1}.$$

Okazuje się na szczęście, że założenie $\epsilon > \mu$ jest spełnione.

49. Zjawisko fotoelektryczne; energia i pęd fotonu.

No to wiadomo - światło wybija elektrony z anody, które przelatują do anody, o ile napięcie między nimi na to pozwala. Okazuje się, że zachodzenie zjawiska fotoelektrycznego zależy od długości fali świetlnej. Powyżej pewnej długości (poniżej określonej częstotliwości inaczej) światło nie wybija elektronów. Wyjaśnił to Einstein, stosując w pewien sposób hipotezę Plancka. Że elektrony pochłaniają światło w pewnych paczkach energii, zwanych fotonami.

Zjawisko fotoelektryczne jest poszlaką, że fotony można traktować jak cząstki. Jeśli można, to oczywiście muszą poruszać się z prędkością światła, więc ich pęd równy jest ich energii podzielonej przez prędkość światła.

Nawiasem mówiąc, hipoteza Einsteina nie ma zupełnie ogólnego charakteru; istnieje bardzo małe prawdopodobieństwo pochłonięcia przez jakiś układ dwóch fotonów naraz. Co zaobserwowano znacznie później.

No i co jeszcze?

50. Zjawisko Comptona.

Całość na podstawie [4]

Definicja 76 (Rozpraszanie Comptona [4]) *Rozpraszaniem Comptona historycznie nazywano rozpraszanie kwantu γ na swobodnym elektronie. Współcześnie rozszerzamy tę definicję i do procesów Comptona zaliczamy rozpraszanie kwantu γ na dowolnej cząstce.*

Niech φ to kąt pod którym zostaje wybite centrum rozpraszania, zaś θ - kąt rozproszenia fotonu.

1. Z zasady zachowania energii i pędu (poprzecznego i równoległego)

$$\begin{cases} E_f + mc^2 = E'_f + m\gamma c^2, \\ E_f c^{-1} = E'_f c^{-1} \cos \theta + p \cos \varphi, \\ 0 = E'_f c^{-1} \sin \theta - p \sin \varphi. \end{cases}$$

2. Z trzeciego wyznaczamy $\sin \varphi$

$$\begin{cases} E_f + mc^2 = E'_f + m\gamma c^2, \\ E_f - E'_f \cos \theta = \sqrt{(pc)^2 - (E'_f \sin \theta)^2}. \end{cases}$$

3. Drugie równanie podnosimy do kwadratu, nadto podstawiamy $p^2 = m^2 \gamma^2 \beta^2 c^2 = m^2 c^2 (\gamma^2 - 1)$:

$$\begin{cases} E_f + mc^2 = E'_f + m\gamma c^2, \\ E_f^2 - 2E_f E'_f \cos \theta + E'^2_f \cos^2 \theta = m^2 c^4 (\gamma^2 - 1) - (E'_f \sin \theta)^2. \end{cases}$$

4. Czyli

$$E'_f = E_f \frac{1}{1 + \frac{E_f}{mc^2} (1 - \cos \theta)};$$

podstawiamy $E_f = \frac{hc}{\lambda}$:

$$\lambda' = \lambda + \frac{hc}{m} (1 - \cos \theta).$$

Definicja 77 (Comptonowska długość fali [4])

$$\lambda_c = \frac{hc}{m_e}.$$

51. Hipoteza de Broglie'a, dualizm korpuskularno-falowy.

Skoro fotony mogą być czasem cząstką, czasem falą, to dlaczego i nie elektrony i inne składniki materii? Jedyna różnica między tymi cząsteczkami a fotonem jest taka, że ten ostatni ma zerową masę.

Twierdzenie 85 (Hipoteza de Broglie'a [24]) *Dla cząstki (nierelatywistycznej) o energii kinetycznej wynoszącej*

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

długość odpowiedniej fali („fali materii”) jest równa

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \text{czyli} \quad p = \hbar k \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right),$$

co jest słuszne również i dla fotonów. Jest to w istocie hipoteza de Broglie'a, która cząstkom przypisuje własności falowe.

Oczywiście, dla takiego sformułowania właściwie nie ma żadnych motywacji doświadczalnych. Pierwotnie jednak, de Broglie chciał dać swoją teorią fizyczną podstawę do pierwszego postulatu Bohra

Twierdzenie 86 (Postulaty Bohra [23])

1. *Wodór ma tylko dyskretne stany energetyczne. Stany te scharakteryzowane są dyskretnymi wartościami momentu pędu, zgodnie z relacją*

$$\oint p_\theta d\theta = nh,$$

gdzie n jest liczbą całkowitą większą od zera, a całkowanie przebiega po pełnej orbicie elektronu wokół jądra. Ze wzoru tego wynika dyskretny zbiór energii. Atom znajdujący się w tych stanach nie promieniuje.

2. *Gdy energia atomu ulega zmianie od E_n do E_m , wtedy emitowane jest promieniowanie elektromagnetyczne (foton) o częstotliwości ν danej wzorem*

$$h\nu = E_n - E_m.$$

Teraz za [24]. Uzasadnijmy za de Broglie'm pierwszy postulat. Podstawiamy pęd (który jest stały) i mamy po prze całkowaniu:

$$2\pi r p = nh,$$

czyli

$$2\pi r = n\lambda,$$

czyli na orbicie mieści się całkowita liczba fal, co jest klasycznym warunkiem istnienia fali stojącej.

Naturalnie, to tłumaczenie de Broglie'a uznajemy za nieprawdziwe, gdyż inaczej teraz wyobrażamy sobie elektron wokół jądra. Ale koncepcja korpuskularno-falowa znalazła kolejne potwierdzenia. Chociażby, w doświadczeniu Davissona-Germera uzyskano interferencję strzelając wiązką elektronów w kryształ o stałej sieci zbliżonej do długości fali de Broglie'a. Wprowadzono wtedy wreszcie funkcję falową ϕ .

Dualizm korpuskularny można próbować interpretować

- **Hipoteza Borna**; Born zaproponował, by wielkość $|\phi|^2$ traktować jako gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w przestrzeni. Mechanika kwantowa dostarcza praw pozwalających znaleźć ewolucję prawdopodobieństwa w czasie. Ostatecznie, świat nie jest deterministyczny [25].
- **Teorie zmiennych ukrytych**; świat jest deterministyczny, a przypadkowy charakter mechaniki kwantowej wynika, jak to zwykle, z niepełnej wiedzy o układzie. Jednak teorie zmiennych ukrytych mają własne problemy, w tym nielokalność.

52. Dyfrakcja fotonów i elektronów (doświadczenie Younga, dyfrakcja na kryształach).

W doświadczeniu Younga podstawowa różnica między cząstkami a falami jest następująca:

- Przede wszystkim, przy cząstkach stosujemy opis probabilistyczny, opisujący przejścia cząstek przez dwie szczeliny. Przy dolatywaniu do ekranu, prawdopodobieństwa dodają się. Przy szybkim strzelaniu, można wprowadzić pojęcie natężenia, proporcjonalnego do prawdopodobieństwa, opisującego przekaz pędu ekranowi.
- W przypadku fali omawiamy rozchodzenie się zaburzenia w ośrodku, które, spotkawszy inne, może się wygaszać. Zatem po uśrednieniu w czasie, natężenia fal nie będą wcale sumą natężeń każdej fali z osobna

W mechanice kwantowej cząstki (fotony, elektrony ...) przechodząc przez różne układy interferencyjne, są opisywane przez fale. Zgodnie z probabilistyczną interpretacją Borna, funkcje falowe określają zmiany prawdopodobieństwa znalezienia cząstek. Ta interpretacja znajduje w tym uzasadnienie, że obserwuje się też obrazy interferencyjne dla pojedynczo wysyłanych fotonów (elektronów). Można rozumieć, że foton (elektron) interferuje sam ze sobą, cokolwiek to znaczy, lub leci dwoma trasami. Rozsądniej jest chyba jednak mówić, że o fotonie (elektronie) przed zmierzeniem go na ekranie nie możemy nic a nic powiedzieć poza prawdopodobieństwami.

Twierdzenie 87 (Hipoteza de Broglie'a [24]) *Dla cząstki (nierelatywistycznej) o energii kinetycznej wynoszącej*

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

długość odpowiedniej fali („fali materii”) jest równa

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \text{czyli} \quad p = \hbar k \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right),$$

co jest słuszne również i dla fotonów. Jest to w istocie hipoteza de Broglie'a, która cząstkom przypisuje własności falowe.

Tak więc, dokonując dyfrakcji na kryształach, których stała sieci jest rzędu długości fali de Broglie'a, oczekujemy interferencji na sieci krystalicznej.

53. Doświadczenie Francka-Hertza.

za [41]: Mamy bańkę próżniową wypełnioną parami jakiegoś gazu; *mierzy się zależność natężenia prądu anodowego I_a od potencjału siatki V_s między katodą a anodą. Od katody do siatki potencjał przyspieszający, dalej w przeciwną stronę. Przy niskich napięciach V_s prędkość elektronów jest mała i ulegają one jedynie zderzeniom sprężystym. Prąd anodowy rośnie ze wzrostem V_s . Gdy V_s osiąga wartość krytyczną, przy której prędkość elektronów jest wystarczająca do wzbudzenia atomów w zderzeniu (zderzenia są wówczas niesprężyste i elektrony oddają praktycznie całą swoją energię), prąd anodowy ulega zmniejszeniu. W ten sposób wykazano, że energia wewnętrzna atomu może zmieniać się jedynie skokowo, a nie w sposób ciągły.*

Będę umiał jeszcze narysować wykres i tyle.

54. Pomiar w mechanice kwantowej (obserwable); zasada nieoznaczoności.

Wypiszmy sobie postulaty:

Twierdzenie 88 (Postulaty mechaniki kwantowej [26, 27, 28, 29])

1. *Dowolnej, dobrze określonej obserwabli w fizyce (nazwijmy ją A), takiej jak pęd, energia, masa, moment pędu czy liczba cząstek, odpowiada operator [hermitowski!] (nazwijmy go \hat{A}) taki, że w wyniku pomiaru obserwabli A otrzymujemy wartości (te zmierzone wartości nazwijmy a) które są wartościami własnymi operatora \hat{A} .*

2. Stan układu w dowolnej chwili może reprezentować funkcja stanu ψ , zwana też funkcją falową, ciągła i różniczkowalna. Zawarte są w niej wszystkie informacje dotyczące stanu układu.
3. Funkcja stanu układu (np. pojedynczej cząstki) zależy od czasu zgodnie z równaniem

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t).$$

Równanie to nosi nazwę zaleźnego od czasu równania Schrödingera. Operator \hat{H} jest operatorem Hamiltona, zwanym też hamiltonianem. [Powstaje z klasycznego hamiltonianu przez wstawienie operatorów zamiast zwykłych obserwabli].

4. Pomiar obserwabli A dający w wyniku wartość a pozostawia układ w stanie φ_a , gdzie φ_a jest funkcją własną operatora \hat{A} , odpowiadającą wartości własnej a .

Byłoby dobrze, gdyby można po prostu uznać, że w funkcji falowej tkwi cząstka, a w operatorach (obserwabliach) - konfiguracja możliwego układu pomiarowego przeznaczonego do badania cząstki. Niestety, ze względu na matematyczną elastyczność przy opisie zmian układu w czasie, tak nie jest.

Twierdzenie 89 (Obrazy Schrödingera i Heisenberga[16]) W obrazie Schrödingera zmienne dynamiczne [operatory] są stałe w czasie, a wektory stanu się zmieniają. W obrazie Heisenberga wektory stanu są stałe w czasie, a zmienne dynamiczne zmieniają się.

Ważna rzecz, że operatory hermitowskie. Dzięki temu wartości własne są rzeczywiste, jak to wielkości fizyczne. Wydaje się, że przy omawianiu operatorów, wypada omówić dwa twory:

- Działanie $\hat{A}|\psi\rangle$ da, rzecz jasna, wektor. Ponieważ $|\psi\rangle$ można rozłożyć na wektory własne \hat{A} , uzyskany nieznormalizowany wektor o dziwnej interpretacji.
- $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$, zgodnie z powyższym, da średnią (wartość oczekiwaną), którą oznaczyć można jako $\langle A \rangle$. W świetle tego można próbować coś wymyślać o poprzednim tworze.

Jeśli chodzi o postulat pomiaru, dla mnie to błahostka o nim mówić.

Wyprowadźmy teraz z tych podstaw zasadę nieoznaczoności Heisenberga (za [43]). Oznaczmy, zgodnie z powyższym,

$$\Delta A^2 = \langle\psi| \underbrace{(\hat{A} - \langle A \rangle)^2}_{\alpha} |\psi\rangle, \quad \Delta B^2 = \langle\psi| \underbrace{(\hat{B} - \langle B \rangle)^2}_{\beta} |\psi\rangle.$$

(Korzystamy ze starych trików przy obliczaniu dyspersji). A teraz korzystamy ze starej dobrej nierówności Schwartza:

$$\|\alpha|\psi\rangle\|^2 \cdot \|\beta|\psi\rangle\|^2 \geq |\langle\psi|\alpha^\dagger\beta|\psi\rangle|^2,$$

ale korzystamy z fizyczności obserwabli, czyli także $\alpha^\dagger = \alpha$ i $\beta^\dagger = \beta$:

$$\begin{aligned} \left[\Delta A^2 \cdot \Delta B^2 = |\langle\psi|\alpha\alpha|\psi\rangle| \cdot |\langle\psi|\beta\beta|\psi\rangle| \right] &\geq |\langle\psi|\alpha\beta|\psi\rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{4} |\langle\psi|\{\alpha, \beta\} + [\alpha, \beta]|\psi\rangle|^2 \geq \frac{1}{4} |[\alpha, \beta]|^2. \end{aligned}$$

Dla położenia i pędu mamy $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, więc odtworzyliśmy pierwotne sformułowanie. Osobno trzeba wyróżnić zasadę nieoznaczoności dla energii i czasu, gdyż nie ma przecież operatora czasu.

55. Równanie Schrödingera, funkcja falowa i jej interpretacja.

Wypiszmy sobie postulaty:

Twierdzenie 90 (Postulaty mechaniki kwantowej [26, 27, 28, 29])

1. Dowolnej, dobrze określonej obserwabli w fizyce (nazwijmy ją A), takiej jak pęd, energia, masa, moment pędu czy liczba cząstek, odpowiada operator [hermitowski!] (nazwijmy go \hat{A}) taki, że w wyniku pomiaru obserwabli A otrzymujemy wartości (te zmierzone wartości nazwijmy a) które są wartościami własnymi operatora \hat{A} .
2. Stan układu w dowolnej chwili może reprezentować funkcja stanu ψ , zwana też funkcją falową, ciągła i różniczkowalna. Zawarte są w niej wszystkie informacje dotyczące stanu układu.
3. Funkcja stanu układu (np. pojedynczej cząstki) zależy od czasu zgodnie z równaniem

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t).$$

Równanie to nosi nazwę zależnego od czasu równania Schrödingera. Operator \hat{H} jest operatorem Hamiltona, zwanym też hamiltonianem. [Powstaje z klasycznego hamiltonianu przez wstawienie operatorów zamiast zwykłych obserwabli].

4. Pomiar obserwabli A dający w wyniku wartość a pozostawia układ w stanie φ_a , gdzie φ_a jest funkcją własną operatora \hat{A} , odpowiadającą wartości własnej a .

Czyli najpierw trzeci postulat. Najlepiej chyba unaocznic związek tego równania z mechaniką klasyczną wyprowadzając równanie Ehrenfesta (bez pola elektromagnetycznego, za [12]). Hamiltonian:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{r}).$$

W reprezentacji położeniowej $\hat{p} = -i\hbar \nabla$, czyli

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V.$$

Jedziemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x \rangle &= \frac{d}{dt} \int d^3r \psi^* x \psi = \int d^3r \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int d^3r \frac{\partial \psi^*}{\partial t} x \psi = \\ &= -\frac{i}{\hbar} \left[\int d^3r \psi^* x \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi \right) - \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V \psi^* \right) x \psi \right] = \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int d^3r \left[\psi^* x (\nabla^2 \psi) - (\nabla^2 \psi^*) x \psi \right]. \end{aligned}$$

Całkujemy ostatnią całkę przez części:

$$\int d^3r (\nabla^2 \psi^*) x \psi = - \int d^3r (\nabla \psi^*) \cdot \nabla (x \psi) + \oint dA x \psi \nabla \psi^*.$$

Ponieważ funkcja falowa znika w nieskończoności, całka powierzchniowa znika. Drugi raz całkujemy przez części i drugi raz całka powierzchniowa znika, czyli

$$\int d^3r (\nabla^2 \psi^*) x \psi = \int d^3r \psi^* \nabla^2 (x \psi),$$

co podstawiamy do naszego równania:

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{i\hbar}{2m} \int d^3r \psi^* x [x \nabla^2 \psi - \nabla^2 (x \psi)] = -\frac{i\hbar}{m} \int d^3r \psi^* x \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{m} \langle p_x \rangle.$$

Analogicznie:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle &= -i\hbar \frac{d}{dt} \int d^3r \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\hbar \left(\int d^3r \psi^* \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int d^3r \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \\ &= \text{wstawiamy hamiltonian i kasujemy fragmenty przez części} = \\ &= - \int d^3r \psi^* \left[\frac{\partial}{\partial x} (V\psi) - V \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = - \int d^3r \psi^* \frac{\partial V}{\partial x} = \langle -\frac{\partial V}{\partial x} \rangle.\end{aligned}$$

Odnosnie drugiego postulatu, należy zaznaczyć, że istnieje pewna dowolność gdzieś schowa informacje o układzie ze względu na pewną matematyczną elastyczność.

Twierdzenie 91 (Obrazy Schrödingera i Heisenberga[16]) *W obrazie Schrödingera zmienne dynamiczne [operatory] są stałe w czasie, a wektory stanu się zmieniają. W obrazie Heisenberga wektory stanu są stałe w czasie, a zmienne dynamiczne zmieniają się.*

Jeśli jednak jesteśmy w obrazie Schrödingera, można rozumieć zgodnie z interpretacją Borna kwadrat modułu funkcji falowej jako gęstość prawdopodobieństwa posiadania przez cząstki takich obserwowalnych cech w danej przestrzeni stanów.

56. Rozwiązania równania Schrödingera dla cząstki w jednowymiarowej studni potencjału.

Za [31]. Obszary wyglądają tak:

1. $x < -a$; $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -|E|\varphi$; $\varphi_I = Ae^{\kappa x}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar} > 0$.
2. $-a < x < a$; $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = (|V| - |E|)\varphi$; $\varphi_{II} = Be^{ikx} + Ce^{-ikx}$, $k = \frac{\sqrt{2m(|V| - |E|)}}{\hbar} > 0$
3. $x > a$; $\varphi_{III} = De^{-\kappa x}$

Nadto mamy warunek

$$k^2 + \kappa^2 = \frac{2m|V|}{\hbar^2}.$$

Plan rozwiązania tego jest następujący:

1. Sformułować warunki ciągłości dla funkcji i pierwszej pochodnej. Rzecz jasna, równania te mają nietrywialne rozwiązania na A , B , C i D wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są odpowiednie warunki.
2. Eliminujemy A i D i zapisujemy w formie macierzowej; wyznacznik macierzy musi się zerować.
3. Z wyznacznika macierzy uzyskujemy dwa rozwiązania - parzyste i nieparzyste - oraz drugi warunek wiążący κ i k , który konfrontujemy graficznie z poprzednim.

Szczegóły sobie darujemy. A nieskończona studnia potencjału (pudło) jest proste.

57. Rozwiązanie równania Schrödingera dla cząstki rozpraszającej się na jednowymiarowej barierze potencjału i zjawisko tunelowe.

Dzielimy na obszary (najpierw $E > V$):

1. $x < -a$; $V = 0$; $\varphi_I = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$, $k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.
2. $-a \leq x \leq a$; $V > 0$; $\varphi_{II} = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$; $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$.
3. $a < x$; $V = 0$; $\varphi_{III} = Fe^{ik_1x}$.

Nietrudno wskazać, które funkcje reprezentują cząstkę odbitą, które przeszłą itp. Dalsze rozwiązywanie jest dosyć proste.

1. Zapisujemy warunki brzegowe z ciągłości funkcji i jej pierwszej pochodnej. Mamy więcej niewiadomych niż równań.
2. Tak naprawdę interesują nas współczynniki transmisji $T = \left| \frac{F}{A} \right|^2$ i odbicia $R = \left| \frac{B}{A} \right|^2$. Dzielimy więc równania przez A i teraz rozwiązujemy. Uzyskamy już teraz ścisłe rozwiązania.

Łatwo też omówić przypadek $E < V$. Jeśli bariera nie jest prostokątna, trzeba zwykle stosować jakieś przybliżenia. Np. przybliżenie WKB, które każe szukać rozwiązania postaci $\varphi(x) = Ae^{iS(x)\hbar^{-1}}$. Ale to zawiła historia.

58. Rozwiązania równania Schrödingera dla ruchu cząstki w potencjale harmonicznym.

Rozważmy przypadek jednowymiarowy. Przypadek wielowymiarowy, jak to zwykle bywa z potencjałem harmonicznym, da się rozseparować. Równanie Schrödingera niezależne od czasu:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2} \right) \varphi = E\varphi.$$

Ponieważ w reprezentacji położeniowej $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, zaś w pędowej $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$, rozwiązania w obu reprezentacjach będą miały tę samą postać.

Rozwiązanie mniej więcej za [30], od razu przez operatory anihilacji i kreacji:

1. oznaczamy $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hamiltonian wygląda teraz tak:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$$

2. Wprowadzamy operatory anihilacji i kreacji:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega}} \right).$$

Mamy:

$$\hat{a} + \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\hat{x} \quad \hat{a} - \hat{a}^\dagger = i\sqrt{\frac{2}{m\omega\hbar}}\hat{p},$$

czyli

$$\sqrt{m\omega}\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \frac{\hat{p}}{\sqrt{m}} = \frac{\sqrt{\hbar\omega}}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger).$$

3. Zanim wstawimy to do hamiltonianu zauważmy, że z $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ wynika $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, z czego wynika $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$.
4. Teraz, jak wstawimy co trzeba do hamiltonianu, uzyskamy

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2} \right)$$

Widać, że problem znalezienia wartości własnych hamiltonianu sprowadza się do badania operatora

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

Oznaczmy

$$\hat{N}\varphi_n = n\varphi_n$$

5. Stosując punkt 3, ze złożenia $\hat{N}\hat{a}\varphi_n$ dowodzimy, że \hat{a} jest operatorem anihilacji. Podobnie, że \hat{a}^\dagger jest operatorem kreacji.

6. Kwadrat dwóch operatorów hermitowskich nakłada warunek $\langle N \rangle \geq 0$ (co łatwo wykazać), z czego dowodzimy $n \geq 0$. Czyli wektory własne dla mniejszych wartości własnych muszą być tożsamościowo równe zeru.
7. co oznacza, że $\hat{a}\varphi_0 = 0$, co, jak łatwo pokazać, ma rozwiązanie w postaci funkcji Gaussa. Naturalnie widać, że $\hat{N}\varphi_0 = 0$. Mamy więc od tej chwili rozwiązania dla wszystkich liczb naturalnych.
8. Podobnie, od razu też stwierdzamy, że nie istnieją wektory własne dla nienaturalnych wartości własnych

59. Atom wodoru w mechanice kwantowej.

Atom wodoru jest ważny, gdyż:

- jest najprostszym obiektem, składającym się tylko z protonu i elektronu.
- Na jego podstawie powstała tzw. stara teoria kwantów, tzn. model Bohra. Wokół tego atomu de Broglie tworzył swą hipotezę.
- W nowszej teorii kwantów przypadek atomu wodoru (czyli równania Schrödingera z potencjałem Coulombowskim) jest możliwy analitycznie do rozwiązania. Rozwiązanie jest oczywiście w postaci separowalnej - $R(r) \cdot Y(\theta, \varphi)$. Równanie na Y można też separować dalej, aż uzyska się funkcje kuliste będące iloczynem wielomianów Legendra indeksowanych liczbą l oraz funkcji wykładniczej indeksowanej liczbą m [14].

Ale część kątowna to ogólne rozwiązanie dla potencjału sferycznie symetrycznego. Jeśli chodzi o funkcję radialną, pierwszy ogólny fakt to taki, że wszystkie operatory różniczkowania po kątach złożą się do operatora momentu pędu. Funkcje kuliste dają eleganckie wartości własne, i mamy równanie radialne dla potencjału sferycznie symetrycznego:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 R}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R = ER.$$

Ten dodatkowy fragment przy potencjale można rozumieć jako „odśrodkową energię potencjalną”; takie rozumowanie przynajmniej łatwo pozwala zapamiętać postać tego dodatku - wychodząc od postaci siły dośrodkowej. Być może uda mi się przedstawić początkową drogę rozwiązywania tego równania, w każdym razie wynikiem są tzw. wielomiany Laguerre'a przemnożone przez eksponens.

- Dość, że poziomy energii atomu wodoru to (μ to masa zredukowana)

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

Gdyby jądro wodoru miało ładunek Ze , energię należałoby przemnożyć przez Z^2 . [15]

- Poziomy energetyczne atomu wodoru są zdegenerowane ze względu na moment pędu (liczba kwantowa l), a ten zaś ze względu na rzut momentu pędu na oś pionową (liczba atomowa m).

$$0 \leq l \leq n-1,$$

$$-l \leq m \leq l.$$

Degeneracja ze względu na m wynika z symetrii sferycznej; degeneracja poziomów energetycznych ze względu na l nosi miano degeneracji przypadkowej, gdyż nie wynika z jakiegś szczególnej symetrii układu.

- Oczywiście, ten podstawowy wynik można ulepszać, wprowadzając poprawki np. na oddziaływanie spin-orbita. To kolejny powód, dla którego atom wodoru jest ważny: można bardzo dokładnie wyznaczyć energię jego podstawowego poziomu energetycznego i porównać z w pełni rozwiniętą teorią tego atomu. Z ćwiczeń z mechaniki kwantowej dowiedziałem się, że podobno istnieje rozbieżność.
- Wreszcie, atom wodoru jest ważny gdyż jego opis można zastosować dokładnie lub w przybliżeniu do wielu innych obiektów: par pozytron-elektron, elektron-dziura, czy też w przybliżeniu do metali alkalicznych z jednym atomem walencyjnym.

Reasumując, atom wodoru zasługuje na osobną książkę.

60. Stany energetyczne atomów; absorpcja i emisja promieniowania elektromagnetycznego.

Przez stany energetyczne atomów rozumie się wartości własne hamiltonianu elektronów atomu - czyli wartości energii, jakie mogą przyjmować elektrony. Fakt istnienia dyskretnych stanów energetycznych dla równań z potencjałem wiążącym jest ściśle związany ze znikaniem funkcji falowej na dużych odległościach. Dla potencjałów nieciągłych oraz w metodach przybliżonych wynika to z warunków zszycia. Dla potencjałów ciągłych rozwiązywalnych analitycznie wynika to bezpośrednio z nakładanych warunków znikania funkcji falowej w nieskończoności [13, 15].

Jeśli chodzi o analizę oddziaływania promieniowania elektromagnetycznego z atomami, w pełni precyzyjny opis wymaga zastosowania kwantowej teorii pola. W pracy licencjackiej stosowałem pewne wyniki tej teorii w dużym uproszczeniu, mogę więc wskazać jak przedstawić emisję wymuszoną i spontaniczną - bez wgłębiania się w fizyczne podstawy. Można jednak pokusić się o zastosowanie pewnych półklasycznych modeli.

- Można potraktować pole elektromagnetyczne klasycznie, a następnie wstawić je do równania Schrödingera jako zaburzenie i posłużyć się rachunkiem zaburzeń zależnym od czasu. To rozumowanie doprowadza do absorpcji i emisji wymuszonej - gdyż zachodzi przy obecności fali elektromagnetycznej [18].

W próżni, można wybrać takie cechowanie, by $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ i $\varphi = 0$. Musi być wtedy spełnione równanie falowe

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,$$

czyli BSO

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + c.c..$$

Przejdźmy teraz do równania Schrödingera w polu elektromagnetycznym przy warunkach $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ i $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + V(\vec{r}) \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \nabla \psi + V \psi = \\ &= (H_0 + H') \psi, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V, \quad H' = \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \nabla.$$

No dobrze, dalej tego nie dociągnę. Ważną rzeczą jest jeszcze to wspomnieć, że dla stanów dyskretnych prawdopodobieństwa przejścia będą zależne od czasu. Fakt, że niektóre przejścia będą odpowiadały obniżeniu energii, inne podwyższeniu, można interpretować jako absorpcja i emisja.

- Inny model półklasyczny należy zastosować, by dojść do emisji spontanicznej. Tutaj najpierw bierze się klasyczny elektryczny dipol i znajduje się moc wypromieniowywaną w zależności od gęstości prądu. Dokonuje się następnie przejścia kwantowego wstawiając odpowiednik prądu w mechanice kwantowej, który wygląda jakoś tak: $ie u_n^* \frac{\vec{p}}{m} u_k$; zaś moc interpretuje się jako iloczyn względnej liczby przejść z k do n razy wypromieniowana energia tego przejścia [19]

Z obu modeli wynika zawieranie $\langle k|\vec{r}|n\rangle$ przez wszystkie współczynniki. Z tego faktu wynikają reguły wyboru dla przejść elektromagnetycznych [20], co może uda mi się naszkicować.

61. Emisja spontaniczna i wymuszona, zasada działania lasera.

Jeśli chodzi o analizę oddziaływania promieniowania elektromagnetycznego z atomami, w pełni precyzyjny opis wymaga zastosowania kwantowej teorii pola. W pracy licencjackiej stosowałem pewne wyniki tej teorii w dużym uproszczeniu, mogę więc wskazać jak przedstawić emisję wymuszoną i spontaniczną - bez wgłębiania się w fizyczne podstawy. Można jednak pokusić się o zastosowanie pewnych półklasycznych modeli.

- Można potraktować pole elektromagnetyczne klasycznie, a następnie wstawić je do równania Schrödingera jako zaburzenie i posłużyć się rachunkiem zaburzeń zależnym od czasu. To rozumowanie doprowadza do absorpcji i emisji wymuszonej - gdyż zachodzi przy obecności fali elektromagnetycznej [18].

W próżni, można wybrać takie cechowanie, by $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ i $\varphi = 0$. Musi być wtedy spełnione równanie falowe

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0,$$

czyli BSO

$$\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} + c.c..$$

Przejdźmy teraz do równania Schrödingera w polu elektromagnetycznym przy warunkach $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ i $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi + V(\vec{r}) \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \nabla \psi + V\psi = \\ &= (H_0 + H') \psi, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V, \quad H' = \frac{ie\hbar}{mc} \vec{A} \cdot \nabla.$$

No dobrze, dalej tego nie dociągnę. Ważną rzeczą jest jeszcze to wspomnieć, że dla stanów dyskretnych prawdopodobieństwa przejścia będą zależne od czasu. Fakt, że niektóre przejścia będą odpowiadały obniżeniu energii, inne podwyższeniu, można interpretować jako absorpcja i emisja.

- Inny model półklasyczny należy zastosować, by dojść do emisji spontanicznej. Tutaj najpierw bierze się klasyczny elektryczny dipol i znajduje się moc wypromieniowywaną w zależności od gęstości prądu. Dokonuje się następnie przejścia kwantowego wstawiając odpowiednik prądu w mechanice kwantowej, który wygląda jakoś tak: $ie u_n^* \frac{\vec{p}}{m} u_k$; zaś moc interpretuje się jako iloczyn względnej liczby przejść z k do n razy wypromieniowana energia tego przejścia [19]

Z obu modeli wynika zawieranie $\langle k|\vec{r}|n\rangle$ przez wszystkie współczynniki. Z tego faktu wynikają reguły wyboru dla przejść elektromagnetycznych [20], co może uda mi się naszkicować.

Współczynniki oznaczające prawdopodobieństwa absorpcji i emisji nazywa się współczynnikami Einsteina. Na powyżej przedstawiony sposób można pokazać, że współczynnik absorpcji i współczynnik emisji wymuszonej między dwoma poziomami 1 i 2 są identyczne:

$$B_{12} = B_{21} \equiv B;$$

o ile nie ma degeneracji. Ale związki między współczynnikami Einsteina można też pokazać wychodząc z prawa Plancka. Przypuśćmy, że mamy jakąś substancję o N atomach; N_1 jest w stanie podstawowym, N_2 we wzbudzonym (naturalnie $N = N_1 + N_2$). Niech substancja będzie

w równowadze termodynamicznej z promieniowaniem; naturalnie, liczba obsadzonych poziomów nie ulega zmianie

$$\frac{dN_1}{dt} = AN_2 + B_{21}\rho(\nu)N_2 - B_{12}\rho(\nu)N_1 = 0,$$

znajdujemy ρ :

$$\rho = \frac{A}{B_{21}} \cdot \frac{1}{\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}}}.$$

To musi być równe rozkładowi Plancka. Od razu mamy

$$\frac{A}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}.$$

Z kolei z rozkładu Boltzmann

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}} = \frac{g_1}{g_2} e^{\frac{h\nu}{kT}},$$

(gdzie g to degeneracje) co zgadza się z rozkładem Plancka, o ile

$$\frac{B_{12}g_1}{B_{21}g_2} = 1.$$

W laserze generalnie chodzi o to, by uzyskać inwersję obsadzeń - tzn. nierównowagową konfigurację gdy jest więcej atomów wzbudzonych niż niewzbudzonych. Emisja wymuszona będzie wtedy dominować nad spontaniczną, i po dojściu do stanu stacjonarnego uzyska się całkiem spójne i monochromatyczne światło. Można jednak łatwo pokazać, że uzyskanie inwersji obsadzeń jest niemożliwe w układzie wyłącznie dwupoziomowym. Tak mi się nie chce pisać o laserach, że kończę.

62. Atom w zewnętrznym polu elektrycznym i magnetycznym – zjawisko Starka, zjawisko Zeemana.

Hamiltonian w zewnętrznym polu elektromagnetycznym wygląda tak:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi.$$

Można teraz zająć się dwoma ważnymi zjawiskami: jednorodnym polem magnetycznym i elektrycznym. Na początku wyciągniemy podstawowe wnioski bez uwzględniania spinu czy czegoś.

- **Zjawisko Zeemana**, czyli atom w jednorodnym polu magnetycznym. Potencjał skalarny można przyjąć zero, zaś za potencjał wektorowy:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r};$$

dywergencja tego znika, a rotacja da pole \vec{B} . Wstawiamy to do hamiltonianu; po obcięciu wyrazów kwadratowych uzyskamy przybliżony dodatkowy potencjał zaburzający (zaczynamy nagle używać masy zredukowanej):

$$H' = \frac{e}{2\mu c} \vec{B} \cdot \hat{L}.$$

Czyli w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń modyfikacja do energii:

$$W_1 = \langle m | H' | m \rangle = e 2\mu c B m \hbar$$

czyli jest usuwana degeneracja ze względu na m .

- **Zjawisko Starka**, czyli atom w jednorodnym polu elektrycznym. Tu rachunki są na początku prostsze:

$$H' = eEz = eEr \cos \theta.$$

Jest to nieparzyste, a więc obłożenie tego czymś o tej samej parzystości da zero. Tak więc niezdegenerowane stany o określonej parzystości nie ulegają zjawisku Starka. Jeśli chodzi o zdegenerowane stany atomu, łatwo pokazać, że mogą przetrwać tylko te pozadiagonalne elementy macierzowe $\langle j|H'|k \rangle$, dla których m jest identyczne. Wynika to po prostu z tej komutacji: $[L_z, z] = 0$.

W przypadku obecności spinu trzeba uwzględnić raz – oddziaływanie LS , a dwa – oddziaływanie spinu z polem. Dla silnych pól oddziaływanie LS można zaniedbać (w związku z czym m_S jest stałą ruchu), a w zjawisku Zeemana trzeba uwzględnić wyraz kwadratowy [22].

63. Atomy wieloelektronowe, zakaz Pauliego.

No to naszkicuję najpierw bozony i fermiony, na bazie [17]. Warunek identyczności cząstek występujących w zagadnieniu oznacza konieczność hamiltonianu symetrycznego ze względu na zamianę cząstek. Okazuje się, że rozwiązaniami na funkcje falowe grupy cząstek, przynajmniej tymi rozwiązaniami, które mają fizyczny sens, są funkcje symetryczne i antysymetryczne ze względu na zamianę cząstek. Cząstki, dla których zachodzi pierwsza sytuacja, to bozony; dla których druga, to fermiony.

Funkcja falowa grupy cząstek jest kombinacją liniową funkcji pojedynczych cząstek. Łatwo zauważyć, że funkcja symetryczna ze względu na zamianę cząstek może zawierać w swej sumie identyczne funkcje falowe pojedynczych cząstek. Funkcja antysymetryczna nie, gdyż wtedy zamiana cząstek nie będzie zmieniać jej znaku - chyba, że funkcja się zeruje. Stąd dla fermionów obowiązuje zakaz Pauliego.

Teraz dalej na podstawie [21]. Z zakazu Pauliego wynikają reguły zapełniania przez elektrony kolejnych powłok elektronowych - stanów charakteryzujących się danymi liczbami l , n , m_l , m_s . Należy zaznaczyć, że o ile dla atomu wodoru występuje tzw. degeneracja przypadkowa poziomów energetycznych ze względu na l , w atomach wieloelektronowych już ona nie występuje. Zachowana jest natomiast degeneracja ze względu na m_l i m_s , o czym za chwilę. Dość, że z tej degeneracji dla poziomu energetycznego wyznaczonego przez n i l wynika istnienie $2(2l + 1)$ stanów elektronów o tej samej energii. Zapełnienie kolejnych powłok prowadzi do układu okresowego pierwiastków.

Powiedziawszy to, możemy przejść do punktu wyjścia wszelkiego tego typu rozważań – do przybliżenia pola centralnego. Zakłada się, że każdy z elektronów porusza się w sferycznym symetrycznym potencjale pochodzącym od jądra i pozostałych elektronów. Tym samym, w porównaniu z atomem wodoru i jego potencjałem kulombowskim, zniesiona zostaje degeneracja przypadkowa ze względu na l , a zachowana degeneracja ze względu na m .

Do wyznaczania energii potencjalnej $V(r)$ używa się m.in. tych dwóch metod:

- **Model statystyczny Thomasa-Fermiego.** Zakłada się w nim, że $V(r)$ zmienia się na tyle wolno wraz z długością fali elektronu, że wiele elektronów może być zlokalizowanych w obszarze, w którym względna zmiana potencjału jest niewielkim ułamkiem. Elektrony te można wówczas badać metodami mechaniki statystycznej i spełniają one statystykę Fermiego-Diraca. Ogólnie procedura jest następująca:

1. Wyznacza się liczbę stanów elektronowych w zadanej objętości o periodycznej na brzegu tej objętości funkcji falowej. Mnoży się to przez 2 dla uwzględnienia spinu.
2. Wyznacza się liczbę stanów posiadających energię kinetyczną mniejszą od pewnej wielkości (co można też znaleźć na bazie pędu).
3. Ponieważ energia termiczna jest raczej mała w porównaniu z energią potencjalną, przyjmuje się wszystkie stany za zapełnione. Maksymalna energia kinetyczna w dowolnej odległości od jądra nie może przekroczyć energii potencjalnej, skąd mamy zależność $n(r)$ od $V(r)$.

4. Znajdujemy jeszcze z elektrodynamiki równanie różniczkowe na $V(r)$ od gęstości ładunku $en(r)$ i mamy już zdefiniowany problem.

- **Pola samouzgodnione Hartree’go.** Hartree założył, że każdy elektron porusza się w polu centralnym dającym się obliczyć z potencjału jądrowego i funkcji falowych wszystkich pozostałych elektronów, przy założeniu, że gęstość ładunku związana z elektronem jest równa $-e$ razy gęstość prawdopodobieństwa położenia. Rzecz jasna, rozwiązanie zagadnienia dla Z elektronów jest praktycznie niemożliwe, i Hartree użył do tego celu metody kolejnych przybliżeń.

Nadto jeszcze wypada uwzględnić poprawki do przybliżenia pola centralnego wynikające choćby z oddziaływania spin-orbita. Tu wypada znać mechanikę relatywistyczną, by cokolwiek wyjaśnić.

64. Nośniki prądu i modele mechanizmów przewodzenia prądu w metalach i półprzewodnikach.

Będziemy traktować elektrony (cząstki lekkie) jako dopasowujące się do chwilowego położenia rdzeni w węzłach sieci - przybliżenie adiabatyczne. Będziemy również traktować elektrony jako cząstki niezależne poruszające się w potencjale periodycznym o okresie sieci, będącym wypadkowym potencjałem rdzeni i wszystkich pozostałych elektronów walencyjnych - przybliżenie jednoelektronowe [32].

Twierdzenie 92 (Twierdzenie Blocha [32]) *Ponieważ hamiltonian naszego problemu musi mieć także symetrię translacyjną, więc komutuje z operatorami translacji (o wielokrotność stałej sieci).*

Z tego ostatecznie wynika, że funkcje własne operatora translacji, a więc i hamiltonianu, możemy przedstawić w postaci iloczynu fali płaskiej i funkcji o okresie sieci:

$$\psi_k(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot u_k(\vec{r}).$$

By opisać zachowanie elektronów w metalach, stosuje się przybliżenie elektronów prawie swobodnych - elektronowe funkcje falowe mogą być kombinacjami fal płaskich. W rezultacie takiego działania uzyskuje się potencjał z przerwami na kolejnych wielokrotnościach (poza zerem) połówek szerokości tzw. strefy Brillouina, która jest odpowiednikiem komórki elementarnej w przestrzeni wektorów falowych. Można wprowadzić quasielektrony, których pęd ograniczony jest do pierwszej strefy Brillouina - uzyskuje się strukturę pasmową i opis takiego elektronu wymaga teraz podania także numeru pasma.

By opisać zachowanie elektronów w kryształach o wiązaniach kowalencyjnych, stosuje się model ciasnego wiązania. Składowa periodyczna funkcji Blocha przyjęta jest w postaci sumy zawierającej m.in. funkcje atomowe zlokalizowane w kolejnych węzłach sieci. Tu od razu wszystko jest ograniczone do pierwszej strefy Brillouina, i także uzyskuje się strukturę pasmową.

Niezależnie od opisu: prędkość elektronu definiuje się jako prędkość grupową

$$\vec{v}_{gr} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E.$$

Cząstka w kryształach może zmniejszać prędkość, zwiększając swoją energię. Dzieje się tak ze względu na ujemną krzywiznę pasma na granicy strefy [49] (chodzi o wykres energii od wektora falowego, czyli (quasi)pędu). Należy to oczywiście rozumieć, jako efekt związany z oddziaływaniem z siecią.

Wykorzystując zakaz Pauliego, warunki Borna-Karmana (te o wyznaczeniu funkcji falowych periodycznych w zadanym obszarze) i może jeszcze statystykę Fermiego-Diraca, dochodzimy do podstawowych możliwości jeśli chodzi o obsadzenia pasm: za [35]:

- *Elektronów jest tyle, że obsadzają pasmo tylko częściowo. Istnieje pewna wartość energii taka, że stany w temperaturze 0 K powyżej tej energii są całkowicie puste, poniżej całkowicie zajęte. Wartość tę nazywamy energią Fermiego. W języku „korpuskularnym” możemy*

powiedzieć, że do przejścia ze stanu pełnego do pustego potrzebna jest bardzo mała energia. Energia ta może być dostarczona przez słabe zewnętrzne pole elektryczne. Pole to może więc zmienić symetryczny rozkład elektronów (dla każdej energii są elektrony o różnych kierunkach pędu) i spowodować przepływ prądu elektrycznego. Tego typu sytuacja istnieje w metalach.

- Elektronów jest tyle, że w temperaturze zera bezwzględnej wypełniają pewne pasma całkowicie, a inne są całkowicie puste. Używając języka „korpuskularnego” powiemy, że na to, aby elektron mógł przejść z poziomu pełnego do pustego, potrzebna jest skończona energia E_g . Wartość tej energii nazywamy przerwą energetyczną. Słabe zewnętrzne pole elektryczne nie może zmienić rozkładu elektronów; ciała takie w temperaturze 0 K nie przewodzą prądu elektrycznego. Często za podstawę podziału na półprzewodniki i izolatory przyjmuje się wartość $E_g = 2,5 \text{ eV}$, ale taka linia podziału nie zawsze się zgadza i nie zawsze ma sens.

Tak czy siak, możemy opisać przepływ prądu przy obecności siły. Z nadmiaru wszystkich przybliżeń dochodzi się ostatecznie do istnienia masy efektywnej, która może być ujemna.

Definicja 78 (Masa efektywna [32]) W krótkim przedziale czasu Δt siła \vec{F} spowoduje zmianę energii elektronu $\Delta E = Fv\Delta t$. Z drugiej strony $\Delta E = \frac{dE}{dk} \cdot \Delta k$. Ta pochodna zadana jest przez prędkość i otrzymujemy

$$\Delta E = \hbar v \Delta k = Fv\Delta t, \quad \text{czyli} \quad \hbar \Delta k = F\Delta t.$$

Jak więc widać, $\hbar k$ można interpretować jako pęd elektronu. Zastanówmy się jeszcze nad przyspieszeniem elektronu:

$$a_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \frac{dE}{dk} = \frac{1}{\hbar} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2} F.$$

Współczynnik stojący przed siłą ma znaczenie odwrotności masy

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}.$$

a ponieważ pochodna energii dla dużych pędów (energii) maleje, druga pochodna spada poniżej zera. Jeśli więc pasmo jest niemal wypełnione, to przyspieszane elektrony należą właśnie do tych dziwnych elektronów, więc przyspieszają w przeciwnym kierunku niż powinny - i uzyskawszy prędkość suną w stronę przeciwną do przyłożonego napięcia. Prąd sunący w inną stronę niż powinien obserwuje się. Ponieważ pasma są niemal całkowicie wypełnione, wygodniej jest traktować jako nośniki przerwy pomiędzy elektronami.

Definicja 79 (Dziury [32]) Taką hipotetyczną cząstkę – quasi-cząstkę – nazywamy **dziurą**. Pęd dziury jest sumą wszystkich elektronów w paśmie, czyli wynosi

$$\hbar \vec{k}_{\text{hole, czyli dziura}} = \hbar \vec{k}_{\text{elektron bez pary, reszta się znosi}}$$

. Masa dziury jest równa masie elektronu, ale ze zmienionym znakiem.

O ile w niektórych metalach dziury mogą się pojawiać, o tyle w półprzewodnikach, przy przepływie prądu muszą - gdyż elektrony przewodzące zostały wyrzucone do wyższego pasma energetycznego, pozostawiając wolne miejsce. Taki elektron może oddziaływać z dziurą, tworząc różne rzeczy.

Twierdzenie 93 (Opis ruchu ładunków P. Drude [33]) Ruch elektronów Drude przyjął za ruch ze stałą siłą tłumiącą

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau} v_D = -e\varepsilon.$$

W przypadku stacjonarnym po osiągnięciu równowagi prędkość już nie ulega zmianie i otrzymujemy wyrażenie na równowagową prędkość dryfu ładunków

$$v_D = -\frac{e\tau}{m} \varepsilon = -\mu \varepsilon.$$

Ruchliwość jest w pewnym sensie miarą jakości sieci krystalicznej. Gęstość prądu możemy zapisać jako

$$j = -env_D = ne\mu\varepsilon = \sigma\varepsilon,$$

co oznacza, że w przypadku jednego rodzaju nośników przewodność właściwa opisana jest wzorem

$$\sigma = ne\mu.$$

Dla przewodnictwa elektronów i dziur zapiszemy

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h.$$

W metalach mamy właściwie stałą koncentrację nośników, więc wraz z temperaturą wpływ na prąd ma jedynie zmniejszenie ruchliwości. W półprzewodnikach wraz z temperaturą rośnie koncentracja nośników, i ten efekt tu dominuje.

65. Budowa jądra atomowego: model kroplowy, półempiryczny wzór na masę jądra, średnia energia wiązania nukleonu w jądrze; „ścieżka stabilności” jąder.

Jądro atomowe o liczbie masowej A i liczbie atomowej Z składa się z Z protonów i $N = A - Z$ neutronów. Jądro jest utrzymywane oddziaływaniami silnymi.

Twierdzenie 94 (Model kroplowy jądra [34]) *Krótki zasięg silnego oddziaływania nukleon-nukleon oraz gęste upakowanie nukleonów w jądrze, w analogii do krótkozasięgowych sił międzycząsteczkowych typu van der Waalsa, pozwala na rozpatrywanie jądra atomowego jako kropli materii jądrowej. Obecność dodatnio naładowanych protonów, odpychających się poprzez (długozasięgowe) oddziaływanie elektromagnetyczne, zmniejsza energię wiązania takiej kropli. Rozpatrywanie w ramach modelu cząstek niezależnych jądra jako cieczy złożonej z dwóch rodzajów cząstek wymaga uwzględnienia w energii wiązania członu wynikającego z asymetrii w liczbie protonów i neutronów. Obserwowana eksperymentalnie zwiększona energia wiązania jąder nieparzystoparzystych, a jednocześnie zmniejszona energia wiązania jąder nieparzysto-nieparzystych, opisywane są prostą zależnością o charakterze fenomenologicznym.*

Energję wiązania nuklidu $B(A, Z)$ określa związek

$$M(A, Z) = NM_n + ZM_H - B(A, Z),$$

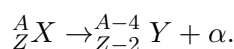
gdzie M_N jest masą neutronu, M_H - masą atomu wodoru. Model kroplowy jądra atomowego prowadzi do półempirycznego wyrażenia na energję wiązania nuklidu, zwanego wzorem Weizsäckera:

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}}.$$

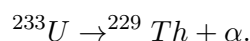
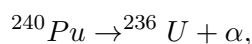
Średnia energia wiązania na nukleon to rzecz jasna $\frac{B(A, Z)}{A}$. W modelu kroplowym trwałość jądra jest określona przez stosunek energii powierzchniowej jądra do jego energii kulombowskiej [37]. Warunkiem okazuje się $\frac{Z^2}{A} < 49$, co jak rozumiem wyznacza ścieżkę stabilności jądra.

66. Rozpady jąder atomowych (promieniowanie alfa, beta i gamma): przykłady reakcji, zasady zachowania.

• Rozpad α :



Na przykład [36]:



Cząstka α ma spin równy zero i dodatnią parzystość, może wynosić różny od zera orbitalny moment pędu – czyli muszą być spełnione zasada zachowania

$$P_{12} = P_1 P_2 (-1)^l$$

oraz

$$|J_p - J_k| \leq l \leq J_p + J_k.$$

• **Rozpad β :**

$$\begin{array}{ll} \beta^- & {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \nu_e^-, \\ \beta^+ & {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e, \\ \text{Wychwyt elektronu (WE)} & {}^A_Z X + e^-_{\text{walencyjny}} \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e. \end{array}$$

Na przykład [38]:

$${}^1_0 n \rightarrow {}^1_1 H,$$

(w umownym zapisie)

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e,$$

$$p + e \rightarrow n + \nu_e$$

Przy tym rozpadzie parzystość nie musi być zachowana. Elektron ma spin połówkowy.

• **Rozpad γ :**

Wszelkie deekscytacje wzbudzonych jąder atomowych.

Kwant ma spin jednostkowy - czyli niemożliwe przejście między stanami o zerowych spinach;

$$|J_p - J_k| \leq L \leq J_p + J_k,$$

gdzie L , nazywane polowością, jest momentem pędu wynoszonym przez kwant γ . Wyróżnia się przejścia elektryczne i magnetyczne, z następującymi prawidłowościami co do parzystości:

$$\begin{array}{ll} EL & P_p = (-1)^L P_k, \\ ML & P_k = (-1)^{L+1} P_k. \end{array}$$

67. Rozszczepienie jąder ciężkich: reakcje łańcuchowe, reaktor jądrowy, masa krytyczna.

Definicja 80 (Rozszczepienie jądra atomowego [42]) Zjawisko rozpadu jądra wzbudzonego na kilka (na ogół 2, niekiedy 3 lub 4) jąder-fragmentów rozszczepienia o porównywalnej masie. Zjawisku temu towarzyszy emisja wtórnych neutronów rozszczepienia, promieniowanie γ oraz wydzielanie się znacznej ilości energii. Jądra ciężkie rozszczepiają się na skutek bombardowania neutronami, protonami, kwantami γ i innymi cząstkami (rozszczenie wymuszone) lub samorzutnie (rozszczenie samorzutne). Ubytek masy jąder ciężkich jest mniejszy niż ubytek masy jąder średnich, co jest przyczyną energetycznej nietrwałości tych jąder.

Definicja 81 (Reakcje jądrowe łańcuchowe [42]) Reakcje rozszczepienia przez neutrony ciężkich jąder, w których powstają neutrony wtórne, zdolne wywołać tę samą reakcję. W pewnych warunkach może powstać samopodtrzymujący się proces rozszczepienia.

Ogólnie, idąc wciąż za [42], rdzeń reaktora jądrowego (termicznego) składa się z:

- bloki paliwa, np. ${}^{235}_{92}U$ bądź ${}^{239}_{94}Pu$;
- moderator, np. woda, ciężka woda, beryl czy grafit. Przekrój czynny na rozpady chociażby powyższych izotopów rośnie bardzo szybko ze spadkiem energii neutronów. Moderator ma za zadanie spowalniać neutrony do neutronów termicznych.
- Bloki są omywane chłodziwem - np. wodą.

- Rdzeń jest otoczony reflektorem, zmniejszającym ucieczkę neutronów przez spowalnianie neutronów prędkich i dyfuzję termicznych (czyli jest też z materiałów moderatorowych).

Rozmiary rdzenia i masa paliwa, przy których rdzeń jest w stanie krytycznym, tj. warunki zapewniają stacjonarną pracę reaktora, nazywają się rozmiarami krytycznymi i masą krytyczną.

Rozpadu neutronu nie trzeba brać pod uwagę, gdyż jego czas życia (12 s) jest wyraźnie dłuższy od czasu przebywania w reaktorze (1 s).

68. Rodzaje cząstek elementarnych: leptony i hadrony i kwarkowa teoria budowy hadronów.

Twierdzenie 95 (Model standardowy [39]) *Praktycznie wszystkie dane doświadczalne z eksperymentów w zakresie fizyki wysokich energii można wyjaśnić za pomocą tzw. modelu standardowego cząstek elementarnych i ich oddziaływań, sformułowanego w latach siedemdziesiątych XX wieku. Zgodnie z tym modelem cała materia zbudowana jest z niewielkiej liczby cząstek o spinie $\frac{1}{2}$, czyli fermionów: sześciu kwarków i sześciu leptonów.*

Model standardowy nie obejmuje oddziaływań grawitacyjnych, a podejmowane od wielu lat próby włączenia grawitacji do tego modelu przynoszą nikłe rezultaty. W modelu standardowym przyjmuje się, że neutrino są bezmasowe, ale wzrasta liczba danych – na przykład z anomalii neutrino słonecznych i atmosferycznych – sugerujących, iż neutrino mają jednak różne od zera masy.

Definicja 82 (Lepton [40]) *Do leptonów zaliczamy elektrony i jego cięższe wersje, czyli mion i taon, związane z nimi neutrino, a także odpowiednie antycząstki. Nazwa pochodzi od greckiego określenia dla „lekkiej cząstki”. Leptonom przypisuje się liczbę leptonową $L = +1$, natomiast antyleptonom – liczbę leptonową $L = -1$. Całkowita liczba leptonowa jest zachowana.*

Definicja 83 (Hadron [40]) *Określenie „hadron” oznacza cząstkę oddziałującą silnie, w odróżnieniu od leptonu, czyli cząstki oddziałującej jedynie słabo i elektromagnetycznie. Hadrony dzielą się na bariony, zbudowane z trzech kwarków, oraz mezony, będące parami kwark-antykwar.*

Taki opis hadronów to mniej więcej kwarkowa teoria budowy hadronów; kwarków nie zaobserwowano doświadczalnie. Kwarki umiem wymienić: u, d, s, c, b, t; d, s, b mają minus jedną trzecią ładunku „elementarnego”, zaś pozostałe – plus dwie trzecie.

VII. „Astrofizyka dla fizyków”

Bezw wgłębiania się dokładnie, co skąd, część tego co poniżej napisałem na podstawie osłuchania, część na podstawie *Encyklopedii geograficznej świata*, tomu VIII, Kraków 1997 (praca zbiorowa), oraz D. H. Perkins, *Wstęp do fizyki wysokich energii*, rozdz. 10, PWN, Warszawa 2005

69. Kosmiczna nukleosynteza: rola gwiazd i wczesnych etapów ewolucji Wszechświata.

1. Podczas Wielkiego Wybuchu, gdy energie cząstek spadły dostatecznie nisko, zaczęło dochodzić do wychwytu elektronów przez protony, tworząc atomy wodoru. Zaczęło także dochodzić do wychwytu swobodnych neutronów przez protony, czyli zaczęły powstawać jądra deuteru. Przez 100 sekund od tego momentu trwała pierwotna nukleosynteza, w wyniku której skład chemiczny Wszechświata ustalił się na ok. 23% helu, niemal cała reszta – wodoru, i jakieś maleńkie fragmenty dla izotopów helu i wodoru oraz berylu i litu.
2. Potem, w wyniku zderzeń promieniowania kosmicznego z materią międzygwiazdową, wzrosła liczba lekkich jąder berylu, boru i litu.
3. Obfitości cięższych pierwiastków wytworzone zostały w wyniku reakcji termojądrowych w gwiazdach i supernowach. Gwiazdy, przechodząc w wyniku samograwitacyjnego zapadania się do kolejnych etapów reakcji termojądrowych, produkują w trakcie swej ewolucji coraz cięższe pierwiastki aż do żelaza.

70. Hipoteza Wielkiego Wybuchu; rozszerzanie Wszechświata, promieniowanie reliktowe.

Warto zacząć od tego, że Wielki Wybuch to tak właściwie nie wybuch. Taki prawdziwy wybuch to krótkotrwałe wydzielanie się energii w konkretnym miejscu, wywołujące znaczny gradient ciśnienia i temperatury. Wielki Wybuch po pierwsze „zaczął się” wszędzie w jednym momencie, a nadto przyjmuje się w nim w miarę rozszerzania Wszechświata przejścia przez stany równowagi termodynamicznej.

Motywacja dla hipotezy WW jest następująca: obserwuje się (przesunięcie ku czerwieni) świadectwa tego, że Wszechświat się rozszerza. Ekstrapolując za pomocą ogólnej teorii względności dochodzimy do wniosku, że kilkanaście miliardów lat temu Wszechświat był skupiony w bardzo małym obszarze. Wnioskując, że proces rozszerzania Wszechświata jest adiabatyczny, stwierdzamy więc, że kiedyś był bardzo gorący. Podstawą do stosowania OTW są również poparte obserwacjami założenia o jednorodności Wszechświata w przestrzeni.

Hipoteza WW ma się dobrze, gdyż: wyjaśnia wiele obserwowalnych cech Wszechświata, jak gęstość materii, skład chemiczny czy promieniowanie reliktowe. Nadto, unika tzw. paradoksów kosmologicznych w rodzaju zupełnie jasnego nieba od wszystkich gwiazd czy też nieskończonego potencjału grawitacyjnego.

Jak już napisałem, przyjmuje się, że WW przechodził przez stany równowagi termodynamicznej - czyli promieniowanie pozostawało w równowadze termodynamicznej z materią, kiedy mogło. W momencie, gdy przestały powstawać pary elektron-pozyton i protony zaczęły wychwytywać elektrony, gwałtownie wzrosła przezroczystość materii dla obecnego wtedy promieniowania. Promieniowanie to, będąc z definicji promieniowaniem ciała doskonale czarnego, jest obserwowane do dzisiaj; jedynie, w wyniku rozszerzania się Wszechświata zmianie uległa obserwowana temperatura tego promieniowania.

W epoce wychwyty obszary, z których dociera teraz obecnie do nas promieniowanie, dzieliła już taka odległość, że nie mogły już istnieć związki przyczynowo-skutkowe między tymi obszarami. Implikuje to pewną niejednorodność promieniowania - znacznie większą niż się obserwuje. By wyjaśnić obserwacje, uzupełnia się hipotezę WW o element nie wynikający z OTW - „Wielką Inflację”, gwałtowny wzrost rozmiarów Wszechświata wtedy, gdy był on jeszcze stosunkowo mały i powiązany ze sobą. „Wielka Inflacja” o tyle jest uzasadniona, że w najwcześniejszych etapach Wielkiego Wybuchu spodziewamy się nowej fizyki.

71. Ciemna materia, ciemna energia – zagadki współczesnej kosmologii.

Na gwiazdę krążącą w jakiejś galaktyce działa siła dośrodkowa

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{mM(\text{masa zawarta wewnątrz promienia } r)G}{r^2}.$$

Dla gwiazdy w części centralnej oczekujemy $M \sim r^3$, więc $v \sim r$; dla gwiazdy dalszej oczekujemy $M \simeq \text{const}$, zatem $v \sim r^{-1/2}$. Jednak z obserwacji wynika, że spełniona jest raczej zależność liniowa prędkości od promienia. Jest to przesłanka dla istnienia ciemnej materii (ciemnej bo niewidocznej i nieświecącej), stanowiącej około 90% całkowitej masy galaktyki. A gdy rozważa się jeszcze większe skale, udział ciemnej materii okazuje się jeszcze większy.

Jeśli chodzi o to, co to może być:

- Część ciemnej materii może mieć charakter barionowy, gdyż przewidywania co do zawartości barionów we Wszechświecie są większe niż się obserwuje. W szczególności, wykrywa się za pomocą soczewkowania grawitacyjnego zwarte ciemne obiekty (MACHO).
- Neutrino - jeśli mają masę - mogą stanowić część ciemnej materii.
- Różne inne hipotetyczne cząstki, np. aksjony, których obecność postuluje się w fizyce wysokich energii by wyjaśnić pewne rozbieżności dotychczasowych modeli z obserwacjami.
- Tzw. WIMPY, stabilne i słabo oddziałujące cząstki, które odprężyły się podczas Wielkiego Wybuchu.

Literatura

- [1] K. Bates Krauskopf, *Podstawy nauk przyrodniczych*, rozdz. 10, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [2] K. Bates Krauskopf, *Podstawy nauk przyrodniczych*, rozdz. 14, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- [3] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 2, 20.2, PWN, Warszawa 2009
- [4] T. Matulewicz, E. Skrzypczak, *Kinematyka relatywistyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2003
- [5] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.19, PWN, Warszawa 1978
- [6] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.20, PWN, Warszawa 1978
- [7] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. III.24, PWN, Warszawa 1978
- [8] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. IV.37, PWN, Warszawa 1978
- [9] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. V.44, PWN, Warszawa 1978
- [10] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. V.48, PWN, Warszawa 1978
- [11] Kacper Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fenomenologicznej i statystycznej*, rozdz. VI.55, PWN, Warszawa 1978
- [12] L. I. Schiff, *Mechanika kwantowa*, rozdz. 2.7, PWN, Warszawa 1977
- [13] *ibidem*, rozdz. 2.8
- [14] *ibidem*, rozdz. 4.14
- [15] *ibidem*, rozdz. 4.16
- [16] L. I. Schiff, *Mechanika kwantowa*, rozdz. 6.24, PWN, Warszawa 1977
- [17] L. I. Schiff, *Mechanika kwantowa*, rozdz. 10.40, PWN, Warszawa 1977
- [18] *ibidem*, rozdz. 11.44
- [19] *ibidem*, rozdz. 11.45
- [20] *ibidem*, rozdz. 11.46
- [21] *ibidem*, rozdz. 12.47
- [22] *ibidem*, rozdz. 12.48
- [23] R. L. Liboff, *Wstęp do mechaniki kwantowej*, rozdz. 2.4, PWN, Warszaw 1987
- [24] R. L. Liboff, *Wstęp do mechaniki kwantowej*, rozdz. 2.6, PWN, Warszaw 1987
- [25] R. L. Liboff, *Wstęp do mechaniki kwantowej*, rozdz. 2.6, PWN, Warszaw 1987
- [26] *ibidem*, rozdz. 3.1

- [27] *ibidem*, rozdz. 3.2
- [28] *ibidem*, rozdz. 3.3
- [29] *ibidem*, rozdz. 3.4
- [30] *ibidem*, rozdz. 7.1
- [31] *ibidem*, rozdz. 8.1
- [32] T. Stacewicz, A. Witowski, J. Ginter, *Wstęp do optyki i fizyki ciała stałego*, rozdz. XV, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2002
- [33] *ibidem*, rozdz. XVII
- [34] T. Matulewicz, E. Skrzypczak, *Fizyka subatomowa w zadaniach*, PWN, Warszawa 2005
- [35] J. Ginter, *Wstęp do fizyki atomu, cząsteczki i ciała stałego*, 9.9, PWN, Warszawa 1979
- [36] A. S. Dawydow, *Teoria jądra atomowego*, rozdz. V.28, PWN, Warszawa 1962
- [37] A. S. Dawydow, *Teoria jądra atomowego*, rozdz. V.29, PWN, Warszawa 1962
- [38] *ibidem*, rozdz. VI.37 i VI.38
- [39] D. H. Perkins, *Wstęp do fizyki wysokich energii*, rozdz. 1.2, PWN, Warszawa 2005
- [40] *ibidem*, *Glosariusz*.
- [41] *Encyklopedia fizyki*, tom 1, PWN, Warszawa 1972
- [42] *ibidem*, tom 3
- [43] Wykład z mechaniki kwantowej prowadzony przez prof. Głazka w roku akademickim 2012/13.
- [44] Wykład ze wstępu do optyki prowadzony przez dra Fitę w roku akademickim 2013/14 wraz z ćwiczeniami prowadzonymi przez dr Piętkę.