Zadania z Wielowymiarowej analizy statystycznej
Lista 8

1. U $N = 47$ zdrowych dorosłych mężczyzn zaobserwowano następujące współczynniki korelacji pomiędzy X_1- czasem reakcji na bodziec słuchowy, X_2- audiometrycznie wyznaczoną utratą słuchu, X_3- rozumieniem w WAIS oraz X_4- symbolami cyfr w WAIS :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,60 & -0,36 & -0,53 \\ & 1 & -0,46 & -0,37 \\ & & 1 & 0,37 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Wyznaczyć współczynnik korelacji cząstkowej pomiędzy czasem reakcji a utratą słuchu przy ustalonych wartościach podtestów WAIS. Na poziomie istotności $0,05$ zweryfikować hipotezę, że ten współczynnik jest równy zeru.

   (b) Wyznaczyć współczynnik korelacji wielokrotnej czasu reakcji względem pozostałych zmiennych. Zweryfikować hipotezę o niezależności pierwszej zmiennej od trzech pozostałych.

2. Rozważmy próbę o liczności $N = 5$ z dwuwymiarowego rozkładu normalnego $N_2(\mu, \Sigma)$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & \tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix},$$

   gdzie τ jest znanym parametrem. Załóżmy, że $\bar{x}^{\mathsf{T}} = (1, 0)$. Dla jakich wartości parametru τ hipotezę $H_0 : \mu^{\mathsf{T}} = (0, 0)$ należy odrzucić na korzyść alternatywy $H_1 : \mu^{\mathsf{T}} \neq (0, 0)$ na poziomie istotności $\alpha = 0,05$?

3. Rozważmy próbę liczebności $N = 10$ z rozkładu normalnego $N_3(\mu, \Sigma)$, dla której

$$\bar{x} = (1, 0, 2)^{\mathsf{T}}, \quad \mathbb{S} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zweryfikować hipotezę $H_0 : \mu_1 = (\mu_2 + \mu_3)/2$ przeciwko alternatywie $H_1 : \mu_1 \neq (\mu_2 + \mu_3)/2$, gdzie $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^{\mathsf{T}}$, na poziomie istotności $\alpha = 0,05$.
   (b) Znaleźć jednoczesne przedziały ufności dla μ_1, μ_2, μ_3 na poziomie ufności $0,95$.

4. Rozważmy próbę liczebności $N = 6$ z rozkładu normalnego $N_2(\mu, \Sigma)$ ze znaną macierzą

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   oraz $\bar{x}^{\mathsf{T}} = (1, 1/2)$. Na poziomie istotności $\alpha = 0,05$ zweryfikować następujące hipotezy:
   (a) $H_0 : \mu = (2, 2/3)^{\mathsf{T}}$ przeciwko $H_1 : \mu \neq (2, 2/3)^{\mathsf{T}}$,
   (b) $H_0 : \mu_1 + \mu_2 = 7/2$ przeciwko $H_1 : \mu_1 + \mu_2 \neq 7/2$,
   (c) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 1/2$ przeciwko $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 1/2$,
   (d) $H_0 : \mu_1 = 2$ przeciwko $H_1 : \mu_1 \neq 2$.

5. Przyjmując, że macierz kowariancji Σ w zadaniu 4 nie jest znana, natomiast próbkowa macierz kowariancji jest równa

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   zweryfikować hipotezy (a)-(d) w zadaniu 4, przy $N = 6$, $\bar{x}^{\mathsf{T}} = (1, 1/2)$ oraz $\alpha = 0,05$.

6. W pewnej istytucji prowadzącej dom dla chłopców opóźnionych w rozwoju poproszono troje wychowawców o dokonanie oceny ich podopiecznych pod względem zachowań i pod względem emocjonalnym. Wyniki oceny 64 chłopców na siedmiopunktowej skali emocjonalnej podane są poniżej: średnie dla wychowawców A, B, C są równe: $\bar{x}_A = 3,05$, $\bar{x}_B = 3,31$, $\bar{x}_c = 2,92$, a macierz kowariancji jest równa

$$\mathbb{S} = \begin{pmatrix} 1,28 & 1,05 & 0,75 \\ & 1,35 & 0,93 \\ & & 1,12 \end{pmatrix}.$$

Zweryfikować na poziomie istotności 0,05 hipotezę o braku różnic pomiędzy wartościami oczekiwanymi ocen wychowawców. W przypadku odrzucenia tej hipotezy skonstruować 95% jednoczesne przedziały ufności dla zbadania, którzy wychowawcy różnią się w swoich ocenach. Wszystkie wnioski dotyczą tylko trójki wychowawców A, B, C.

7. Wydaje się, że pewne lekarstwo może powodować zmiany poziomu trzech składników biochemicznych mózgu. Dwadzieścia cztery myszy tego samego gatunku podzielono losowo na dwie równoliczne grupy. Myszom drugiej grupy podawano sukcesywnie badane lekarstwo. Myszy w obu grupach miały stworzone te same warunki bytowania i tę samą dietę. Niemniej jednak, w trakcie eksperymentu dwie myszy grupy kontrolnej zdechły z przyczyn naturalnych. Analiza mózgu zabitych po eksperymencie myszy dała następujące wyniki w mikrogramach na gram mózgu:

Grupa I

A	B	C
1,21	0,61	0,70
0,92	0,43	0,71
0,80	0,35	0,71
0,85	0,48	0,68
0,98	0,42	0,71
1,15	0,52	0,72
1,10	0,50	0,75
1,02	0,53	0,70
1,18	0,45	0,70
1,09	0,40	0,69

Grupa II

A	B	C
1,40	0,50	0,71
1,17	0,39	0,69
1,23	0,44	0,70
1,19	0,37	0,72
1,38	0,42	0,71
1,17	0,45	0,70
1,31	0,41	0,70
1,30	0,47	0,67
1,22	0,29	0,68
1,00	0,30	0,70
1,12	0,27	0,72
1,09	0,35	0,73

Tutaj Grupa I jest grupą kontrolną, a Grupa II grupą doświadczalną. Zweryfikować hipotezę o braku różnic pomiędzy wektorami wartości oczekiwanych obserwacji w obu grupach przy założeniu, że obserwacje pochodzą z trójwymiarowych rozkładów normalnych o takiej samej nieznanej macierzy kowariancji. Jeżeli hipoteza zerowa zostanie odrzucona, to zastosować odpowiednią procedurę porównań wielokrotnych do zbadania, między którymi składnikami są istotne różnice. Poziom istotności $\alpha = 0,05$.