Vojne bitke i zaseda

Mirko Kordić, Anja Čolić, Vuk Stefanović

Maj 2023

Profesor Dr. Zorica Dražić

Sadržaj

1 Kontinualni model vojne bitke

Suprotstavljene su dve vojne strane, A i B. Brojnost prve i druge vojske kroz vreme označičemo kao A(t) i B(t), a početne veličine tih vojski kao A0 i B0. Potrebno je pronaći vezu izmedju A(t), B(t), A0 i B0 koja odredjuje ishod bitke, odnosno uslov pod kojim bitka može završiti nerešeno ili jedna od strana pobedi. Ukoliko označimo koeficijent proporcionalnosti (zavisi od tehničke opremljenosti, morala i sl.) druge vojske sa "a" i koeficijent proporcionalnosti prve vojske sa "b", dobijamo sledeći sistem:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) \tag{1}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -bA(t) \tag{2}$$

gde je $t \in R$, $t \geq 0$ proteklo vreme.

Podelimo ove dve jednačine:

$$\frac{\frac{dA(t)}{dt}}{\frac{dB(t)}{dt}} = \frac{aB(t)}{bA(t)}$$

$$\frac{dA(t)}{dB(t)} = \frac{aB(t)}{bA(t)}$$

Prebacimo sve $A(t)$ na jednu, a $B(t)$ na drugu stranu:

$$bA(t)dA(t) = aB(t)dB(t)$$

Integralimo obe strane jednačine:

$$b\int A(t)dA(t) = a\int B(t)dB(t)$$

$$c1 + b\frac{A^2(t)}{2} = a\frac{B^2(t)}{2} + c2$$

$$b\frac{A^2(t)}{2} - a\frac{B^2(t)}{2} = c2 - c1 = c$$

Ubacimo početne uslove u poslednju jednakost:

$$b\frac{A0^2}{2} - a\frac{B0^2}{2} = c$$

Vratimo dobijeno c:

$$b\frac{A^2(t)}{2} - a\frac{B^2(t)}{2} = b\frac{A0^2}{2} - a\frac{B0^2}{2}$$

Sredjivanjem dobijamo jednakost:

$$b(A^2(t) - A0^2) = a(B^2(t) - B0^2) \tag{3}$$

Ova jednačina poznata je kao "Lachester's Square Law". Frederick Lanchester je do ovog otkrića dosao 1915.godine za vreme Prvog Svetskog rata i korišćena je u svrhe vojnih planova.

Ako su nam poznati početni uslovi, iz ove jednačine mozemo dobiti neke zaključke o ishodu bitke. Pretpostavimo da je $B(t) = 0$:

$$b(A^2(t) - A0^2) = aB0^2$$

$$A^2(t) = \frac{bA0^2 - aB0^2}{b}$$

$$A(t) = \sqrt{\frac{bA0^2 - aB0^2}{b}}$$

Dakle, ako je $bA0^2 > aB0^2$ onda je $A(t) \in R$, A je uvek pozitivno, pa vojska A ne može da izgubi i ona pobeuje. U slučaju da $bA0^2 < aB0^2$ važi suprotno, sama pretpostavka nije dobra i znači da je B vojska pobedila. I na kraju, ako je $bA0^2 = aB0^2$ ishod je nerešen.

Do istog zaključka možemo doći i na sledeći način: Krenimo od iste jednačine zapisane na drugačiji način:

$$bA^2(t) - aB^2(t) = bA0^2 - aB0^2$$

Iz uslova $bA^2(t) > aB0^2$ dobijamo $bA^2(t) - aB^2(t) > 0$, odakle sledi isti zaključak. Izrazimo $B(t)$ na osnovu (1), (2), i (3):

$$B(t) = \sqrt{B0^2 + \frac{bA^2(t) - A0^2}{a}}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) = -a\sqrt{B0^2 + \frac{bA^2(t) - A0^2}{a}}$$

$$= -a\sqrt{\frac{b}{a}(\frac{a}{b}B0^2 + A^2(t) - A0^2}$$

$$= -\sqrt{ab} * \sqrt{A^2(t) + \frac{a}{b}B0^2 - A0^2}$$

, $\frac{a}{b}B0^2 - A0^2$ menjamo sa konstantom k

$$= -\sqrt{ab} * \sqrt{A^2(t) + k}$$

Dalje,

$$\frac{dA(t)}{\sqrt{A^2(t)+k}} = -\sqrt{ab}dt$$

Integralimo obe strane:

$$\int_{A0}^{A(t)} \frac{dA(t)}{\sqrt{A^2(t)+k}} = -\sqrt{ab}\int_0^t dt$$

Rešavanjem integrala dobijamo:

$$A(t) = \frac{1}{2}((A0 - \sqrt{\frac{a}{b}}B0)e^{\sqrt{ab}\cdot t} + (A0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B0)e^{-\sqrt{ab}\cdot t}) \tag{4}$$

Ako drugačije zapišemo ovaj model, dobijamo:

$$A(t) = \frac{A0(e^{\sqrt{ab}\cdot t} + e^{-\sqrt{ab}\cdot t})}{2} - \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}B0(e^{\sqrt{ab}\cdot t} - e^{-\sqrt{ab}\cdot t})}{2}$$

Primetimo hiperbolički sinus i kosinus:

$$A(t) = A0\cosh(\sqrt{ab})t - B0\sqrt{\frac{a}{b}}\sinh(x)\sqrt{ab}t$$

Analogno, dolazimo i do $B(t)$:

$$B(t) = \frac{1}{2}((B0 - \sqrt{\frac{b}{a}}A0)e^{\sqrt{ab}\cdot t} + (B0 + \sqrt{\frac{b}{a}}A0)e^{-\sqrt{ab}\cdot t}) \tag{5}$$

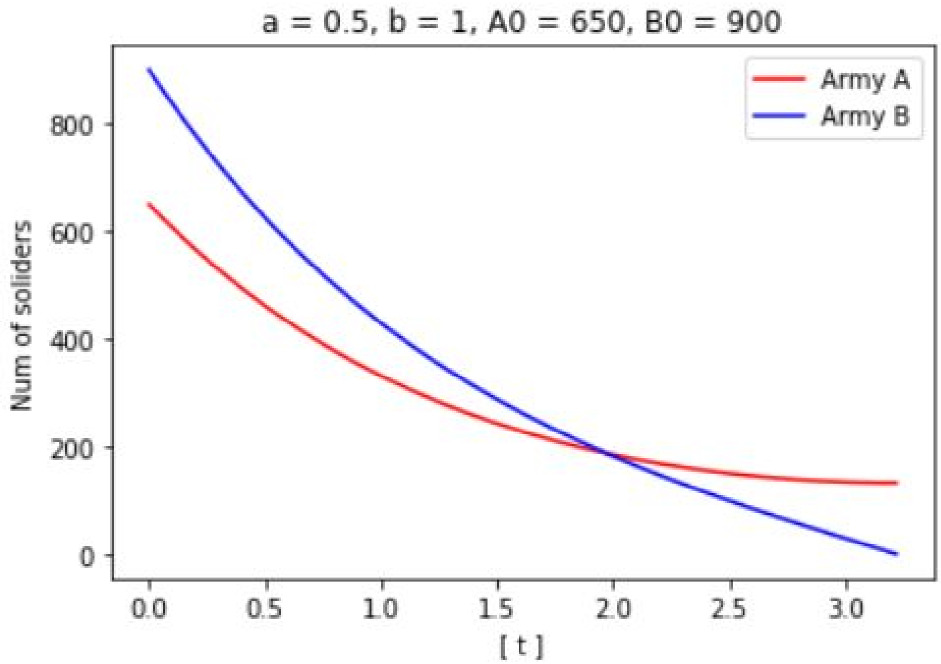
$$B(t) = B0\cosh(\sqrt{ab})t - A0\sqrt{\frac{b}{a}}\sinh(x)\sqrt{ab}t$$

Modifikovanjem formula (4) i (5) dobijamo:

$$A(t) = \frac{\sqrt{ab}A0 - aB0}{2\sqrt{ab}}e^{\sqrt{ab}\cdot t} + \frac{\sqrt{ab}A0 + aB0}{2\sqrt{ab}}e^{-\sqrt{ab}\cdot t}$$

$$B(t) = \frac{\sqrt{ab}B0 - bA0}{2\sqrt{ab}}e^{\sqrt{ab}\cdot t} + \frac{\sqrt{ab}B0 + bA0}{2\sqrt{ab}}e^{-\sqrt{ab}\cdot t}$$

Desni sabirak i u jednom i u drugom slučaju teži 0 kada $t \to \infty$. Kod levih sabiraka samo brojilac nema izvestan znak. Posmatrajmo prvo slučaj $A(t)$. Ako je $A(t) > 0$ onda je $\sqrt{ab}A0 - aB0 > 0$, odnosno $bA0^2 > aB0^2$ (isti uslov smo dobili i rešavnjem na prvi način) pa je $A(t)$ tada uvek pozitivno. Sa druge strane za $B(t)$ vazi $\sqrt{ab}B0 - bA0 < 0$, pa će u nekom trenutku $B0$ postati negativno i zaključujemo da vojska A pobedjuje. Analogno, za $bA0^2 < aB0^2$ vazi suprotno, B vojska pobedjuje. I konačno, za $bA0^2 = aB0^2$, broj vojnika ni na jednoj strani neće težiti 0, pa će se bitka završiti nerešeno.



Na prikazanom dijagramu se može videti ishod bitke u zavisnosti od vrednosti početnih parametara a, b, A0, B0. Vidimo da iako vojska A ima na početku manji broj vojnika, na kraju pobedjuje jer ima duplo veći koeficijent.

2 Modifikovani model u slučaju zasede

Pretpostavimo da je vosjka B upala u zasedu i da je skocentrisana na malom prostoru. U ovakvom slučaju, efikasnost paljbe vojske A je proporcionalna gustini vojske B. Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da gustina predstavlja samo broj vojnika vosjke B na malom prostoru.

Definišemo model:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) \tag{6}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -bA(t)B(t) \tag{7}$$

Možemo iz (6) da izrazimo $B(t)$:

$$B(t) = -\frac{1}{a}\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{1}{a}A'(x) \tag{8}$$

Zatim vratimo u (7):

$$\frac{dB(t)}{dt} = bA(t)\frac{1}{a}A'(t)$$

$$B'(t) = \frac{b}{a}A(t)A'(t)$$

Sada možemo da diferenciramo (6):

$$\frac{d^2A(t)}{dt} = -aB'(t)$$

Menjamo $B'(t)$:

$$A''(t) = -a\frac{b}{a}A(t)A'(t)$$

$$A''(t) = -bA(t)A'(t) \tag{9}$$

Ovaj tip diferencijalne jednačine rešavamo uvodjenjem smene $p(A) = A'$, uz to da važi uslov $p'(A) * p = A''$

Dakle, na osnovu (9) dalje dobijamo:

$$p'p = -bA(t)p$$

Množimo sa $\frac{1}{p}$:

$$p' = -bA(t)$$

$$\frac{dp}{dA(t)} = -bA(t)$$

Razdvajamo promenljive radi lakšeg rešavanja:

$$dp = -bA(t)dA(t)$$

Integralimo obe strane jednačine:

$$\int dp = -b\int AdA$$

$$p = -\frac{b}{2}A^2(t) + c$$

Vratimo smenu:

$$A'(t) = -\frac{b}{2}A^2(t) + c$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\frac{b}{2}A^2(t) + c$$

$$dA(t) = (-\frac{b}{2}A^2(t) + c)dt$$

$$2dA(t) = (-bA^2(t) + 2c)dt$$

$$\frac{dA(t)}{-bA^2(t) + 2c} = \frac{dt}{2}$$

Rešimo integral:

$$-\int \frac{dA(t)}{-bA^2(t) + 2c} = \frac{t}{2} + c2$$

$$-\frac{1}{b}\int \frac{dA(t)}{A^2(t) + \frac{2c}{b}} = \frac{t}{2} + c2$$

$$-\frac{\ln(\frac{A(t)-\sqrt{\frac{2c}{b}}}{A(t)+\sqrt{\frac{2c}{b}}})}{2\sqrt{\frac{2c}{b}}b} = \frac{t}{2} + c2$$

$$-\ln(\frac{A(t) - \sqrt{\frac{2c}{b}}}{A(t) + \sqrt{\frac{2c}{b}}}) = 2\sqrt{\frac{2c}{b}}b\frac{t}{2} + 2c2\sqrt{\frac{2c}{b}}b$$

$$\frac{A(t) - \sqrt{\frac{2c}{b}}}{A(t) + \sqrt{\frac{2c}{b}}} = e^{(t\sqrt{2cb}+2c2\sqrt{2cb})}$$

$$A(t) + \sqrt{\frac{2c}{b}} = A(t)e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})} - \sqrt{\frac{2c}{b}}e^{(t\sqrt{2bc}+2c2\sqrt{2bc})}$$

$$A(t)(1 - e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})}) = -\sqrt{\frac{2c}{b}}(1 + e^{(t\sqrt{2bc}+2c2\sqrt{2bc})})$$

$$A(t) = \frac{1 + e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})}}{1 - e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})}} * -\sqrt{\frac{2c}{b}}$$

$$A(t) = \frac{e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})} - 1 + 2}{e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})} - 1} * \sqrt{\frac{2c}{b}}$$

$$A(t)=\sqrt{\frac{2c}{b}}+\frac{2\sqrt{\frac{2c}{b}}}{e^{(t\sqrt{2cb}+2c2*2\sqrt{2cb})}-1}$$

$$A(t)=\sqrt{\frac{2c}{b}}+\frac{2\sqrt{\frac{2c}{b}}}{e^{(t\sqrt{2cb})}e^{(2c2\sqrt{2cb})}-1}$$

Izraz $e^{(2c2\sqrt{2cb})}$ je konstanta pa možemo da zapišemo samo c2:

$$A(t)=\sqrt{\frac{2c}{b}}+\frac{2\sqrt{\frac{2c}{b}}}{c2e^{(t\sqrt{2cb})}-1}$$

Uvedemo smenu $k=\sqrt{\frac{2c}{b}}$:

$$A(t)=k+\frac{2k}{c2e^{(tkb)}-1}$$

Sada, kada znamo $A(t)$, izračunamo $A'(t)$ i ubacimo u (8). Tako odredjujemo $B(t)$:

$$A'(t)=-\frac{2kc2kbe^{(tkb)}}{(c2e^{(kbt)}-1)^2}$$

$$B=-\frac{1}{a}A'(t)=\frac{2k^2c2kbe^{(tkb)}}{a(c2e^{(kbt)}-1)^2}$$

Sada kada znamo A i B potrebno je odrediti konstante:

$$A(0)=A0$$

$$B(0)=B0$$

$$A(0)=k+\frac{2k}{c2-1}=\frac{k(c2-1)}{c2-1}+\frac{2k}{c2-1}=k\frac{c2+1}{c2-1}$$

Odakle sledi:

$$k=A0\frac{c2-1}{c2+1}$$

Dobijeno k možemo da zamenimo u B ($B0$):

$$B0=\frac{2\frac{(c2-1)^2}{(c2+1)^2}*c2*b}{a(c2-1)^2}*A0^2$$

$$B0=\frac{2*c2*b}{a(c2+1)^2}*A0^2$$

Iz ove jednakosti dalje računamo $c2$:

$$aB0(c2+1)^2=2*c2*b*A0^2$$

Množimo sa $\frac{1}{a}$:

$$B0c2^2 + 2B0c2 + B0 = 2 * c2 * \frac{b}{a} * A0^2$$

$$B0c2^2 + 2c2(B0 - \frac{b}{a}A0^2) + B0 = 0$$

Rešavanjem ove kvadratne jednačine dobijamo c2. Jednačinu nećemo dalje rešavati, ali ćemo je koristiti u kodu.

3 Literatura