Vojne bitke i zaseda

Mirko Kordić, Anja Čolić, Vuk Stefanović

Maj 2023

Profesor Dr. Zorica Dražić

Sadržaj

1 Kontinualni model vojne bitke

Suprotstavljene su dve vojne strane, A i B. Brojnost prve i druge vojske kroz vreme označićemo kao A(t) i B(t), a početne veličine tih vojski kao A0 i B0. Potrebno je pronaći vezu izmedju A(t), B(t), A0 i B0 koja odredjuje ishod bitke, odnosno uslov pod kojim bitka može završiti nerešeno ili jedna od strana pobedi. Ukoliko označimo koeficijent proporcionalnosti (zavisi od tehničke opremljenosti, morala i sl.) druge vojske sa "a" i koeficijent proporcionalnosti prve vojske sa "b"$(a, b \in R,\ a, b > 0)$, dobijamo sledeći sistem:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) \tag{1}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -bA(t) \tag{2}$$

gde je $t \in R$, $t \geq 0$ proteklo vreme.

Podelimo ove dve jednačine:

$$\frac{\frac{dA(t)}{dt}}{\frac{dB(t)}{dt}} = \frac{aB(t)}{bA(t)}$$

$$\frac{dA(t)}{dB(t)} = \frac{aB(t)}{bA(t)}$$

Prebacimo sve $A(t)$ na jednu, a $B(t)$ na drugu stranu:

$$bA(t)dA(t) = aB(t)dB(t)$$

Integralimo obe strane jednačine:

$$b\int A(t)dA(t) = a\int B(t)dB(t)$$

$$b\frac{A^2(t)}{2} = a\frac{B^2(t)}{2} + c$$

$$b\frac{A^2(t)}{2} - a\frac{B^2(t)}{2} = c$$

Ubacimo početne uslove u poslednju jednakost:

$$b\frac{A0^2}{2} - a\frac{B0^2}{2} = c$$

Vratimo dobijeno c:

$$b\frac{A^2(t)}{2} - a\frac{B^2(t)}{2} = b\frac{A0^2}{2} - a\frac{B0^2}{2}$$

Sredjivanjem dobijamo jednakost:

$$b(A^2(t) - A0^2) = a(B^2(t) - B0^2) \tag{3}$$

Ova jednačina poznata je kao "Lachester's Square Law". Frederick Lanchester je do ovog otkrića došao 1916.godine za vreme Prvog Svetskog rata i korišćena je u svrhe vojnih planova.

Ako su nam poznati početni uslovi, iz ove jednačine mozemo dobiti neke zaključke o ishodu bitke. Pretpostavimo da je $B(t) = 0$:

$$b(A^2(t) - A0^2) = aB0^2$$

$$A^2(t) = \frac{bA0^2 - aB0^2}{b}$$

$$A(t) = \sqrt{\frac{bA0^2 - aB0^2}{b}}$$

Dakle, ako je $bA0^2 > aB0^2$ onda je $A(t) \in R$, A je uvek pozitivno, pa vojska A ne može da izgubi i ona pobeuje. U slučaju da $bA0^2 < aB0^2$ važi suprotno, $A(t) \notin R$, sama pretpostavka nije dobra i znači da je B vojska pobedila. I na kraju, ako je $bA0^2 = aB0^2$ ishod je nerešen.

Želimo sada da odredimo funkcije broja vojnika od vremena A(t) i B(t): Izrazimo $B(t)$ na osnovu (1), (2), i (3):

$$B(t) = \sqrt{B0^2 + \frac{bA^2(t) - A0^2}{a}}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) = -a\sqrt{B0^2 + \frac{bA^2(t) - A0^2}{a}}$$

$$= -a\sqrt{\frac{b}{a}(\frac{a}{b}B0^2 + A^2(t) - A0^2}$$

$$= -\sqrt{ab} * \sqrt{A^2(t) + \frac{a}{b}B0^2 - A0^2}$$

, $\frac{a}{b}B0^2 - A0^2$ menjamo sa konstantom k

$$= -\sqrt{ab} * \sqrt{A^2(t) + k}$$

$$\frac{dA(t)}{\sqrt{A^2(t) + k}} = -\sqrt{ab}dt$$

Integralimo obe strane:

$$\int_{A0}^{A(t)} \frac{dA(t)}{\sqrt{A^2(t)+k}} = -\sqrt{ab}\int_0^t dt$$

$$ln(\frac{\sqrt{A^2(t)}+A(t)}{\sqrt{\frac{a}{b}B0^2}+A0}) = -\sqrt{ab}t$$

$$\frac{\sqrt{A^2(t)+k}+A(t)}{\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0} = e^{(-\sqrt{ab}t)}$$

$$\sqrt{A^2(t)+k}+A(t) = e^{(-\sqrt{ab}t)}(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)$$

$$\sqrt{A^2(t)+k} = e^{(-\sqrt{ab}t)}(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)-A(t)$$

Kvadriramo i skratimo šta možemo:

$$2e^{(-\sqrt{ab}t)}(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)A(t) = e^{(-2\sqrt{ab}t)}(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)^2-k$$

Vratimo smenu koju smo uveli za k:

$$A(t) = \frac{1}{2}(e^{(-\sqrt{ab}t)}(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)-\frac{(\sqrt{\frac{a}{b}}B0-A0)(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)e^{(\sqrt{ab}t)}}{(\sqrt{\frac{a}{b}}B0+A0)})$$

Skratimo i dobijamo:

$$A(t) = \frac{1}{2}((A0-\sqrt{\frac{a}{b}}B0)e^{\sqrt{ab}\cdot t}+(A0+\sqrt{\frac{a}{b}}B0)e^{-\sqrt{ab}\cdot t}) \tag{4}$$

Ako drugačije zapišemo ovaj model, dobijamo:

$$A(t) = \frac{A0(e^{\sqrt{ab}\cdot t}+e^{-\sqrt{ab}\cdot t})}{2}-\frac{\sqrt{\frac{a}{b}}B0(e^{\sqrt{ab}\cdot t}-e^{-\sqrt{ab}\cdot t})}{2}$$

Primetimo hiperbolički sinus i kosinus:

$$A(t) = A0\cosh\sqrt{ab}t - B0\sqrt{\frac{a}{b}}\sinh\sqrt{ab}t$$

Analogno, dolazimo i do $B(t)$:

$$B(t) = \frac{1}{2}((B0-\sqrt{\frac{b}{a}}A0)e^{\sqrt{ab}\cdot t}+(B0+\sqrt{\frac{b}{a}}A0)e^{-\sqrt{ab}\cdot t}) \tag{5}$$

$$B(t) = B0\cosh\sqrt{ab}t - A0\sqrt{\frac{b}{a}}\sinh\sqrt{ab}t$$

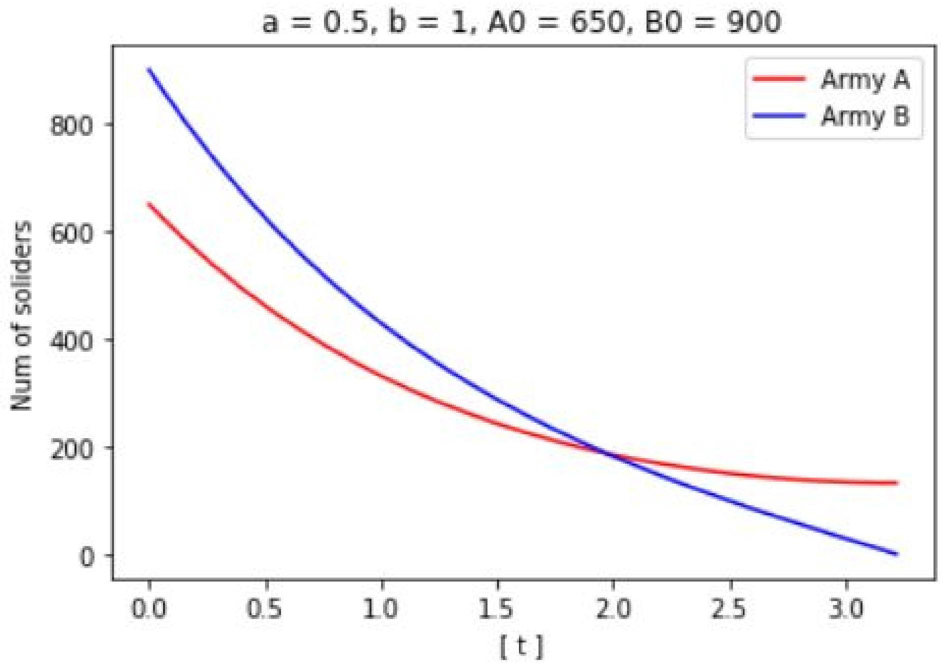
Posmatramo formule (4) i (5):

U funkcijama $A(t)$ i $B(t)$ desni sabirak teži ka 0 za $t \to \infty$, tako da znak funkcija zavisi samo od prvog sabirka. Posmatrajmo funkciju $A(t)$: $A(t) > 0$ ako važi da je $A0 - \sqrt{\frac{a}{b}B0}$, kvadriramo:

$$A0^2 > \frac{a}{b}B0^2$$

$$bA0^2 > aB0^2$$

Ovaj uslov smo dobili i prethodnim načinom (vojska A pobedjuje). Ako bi važio obrnut uslov $bA0^2 > aB0^2$ $(A(t) \notin R)$ vojska B bi odnela pobedu (lako je pokazati da u tom slučaju važi da je $B(t)$ uvek pozitivno). I konačno, za $bA0^2 = aB0^2$, obe funkcije teže 0, pa će se bitka završiti nerešeno.



Na prikazanom dijagramu se može videti ishod bitke u zavisnosti od vrednosti početnih parametara a, b, A0, B0. Vidimo da iako vojska A ima na početku manji broj vojnika, na kraju pobedjuje jer ima duplo veći koeficijent.

2 Modifikovani model u slučaju zasede

Pretpostavimo da je vojska B upala u zasedu i da je skocentrisana na malom prostoru. U ovakvom slučaju, efikasnost paljbe vojske A je proporcionalna gustini vojske B. Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da gustina predstavlja samo broj vojnika vosjke B na malom prostoru.

Definišemo model:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB(t) \tag{6}$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = -bA(t)B(t) \tag{7}$$

Podelimo (6) i (7):

$$\frac{dA(t)}{dB(t)} = \frac{a}{bA(t)}$$

Prebacimo $A(t)$ na levu stranu i integralimo:

$$A(t)dA(t) = \frac{a}{b}dB(t)$$

$$\frac{A^2(t)}{2} = \frac{a}{b}B(t) + c$$

Iz početnih uslova odredimo c:

$$c = \frac{A0^2}{2} - \frac{a}{b}B0$$

Zatim zamenimo u prethodnu jednakost:

$$\frac{1}{2}A^2(t) - \frac{1}{2}A0^2 = \frac{a}{b}(B(t) - B0)$$

$$b(A^2(t) - A0^2) = 2a(B(t) - B0) \tag{8}$$

Ako pretpostavimo da je vojska B poražena($B(t) = 0$), slično kao i u modelu bez zasede dobijamo uslove na osnovu kojih možemo da predvidimo ishod bitke:

$$bA^2(t) = bA0^2 - 2aB0$$

Množimo sa $\frac{1}{b}$:

$$A^2(t) = A0^2 - \frac{2a}{b}B0$$

$$A(t) = \sqrt{A0^2 - \frac{2a}{b}B0}$$

$A(t) \in R$ samo ako važi $A0^2 > \frac{2a}{b}B0$, odnosno $bA0^2 > 2aB0$ što je uslov da je strana A pobedila. Ako ovaj uslov ne važi, pretpostavka nije tačna, odnosno pobedila je vosjka B. I tada važi uslov $bA0^2 < 2aB0$. Konačno, ako važi $bA0^2 = 2aB0$ bitka je nerešena.

Izrazimo iz (8) $B(t)$:

$$B(t) = B0 + \frac{b}{2a}(A^2(t) - A0^2)$$

Zamenimo $B(t)$ u jednakost u (6):

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB0 - \frac{b}{2}(A^2(t) - A0^2)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = -aB0 - \frac{b}{2}A^2(t) + \frac{b}{2}A0^2$$

Uvodimo smenu $k = \frac{b}{2}A0^2 - aB0$:

$$\frac{dA(t)}{dt} = k - \frac{b}{2}A^2(t)$$

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{b}{2}(\frac{2k}{b} - A^2(t))$$

Uvodimo smenu $f = \frac{2k}{b} = A0^2 - \frac{2a}{b}B0$:

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{b}{2}(f - A^2(t))$$

$$-\frac{dA(t)}{A^2(t) - f} = \frac{b}{2}dt$$

Integralimo:

$$-\frac{1}{2\sqrt{f}}\ln(\frac{A(t) - \sqrt{f}}{A(t) + \sqrt{f}}) = \frac{b}{2}t + c$$

$$-\ln(\frac{A(t) - \sqrt{f}}{A(t) + \sqrt{f}}) = bt\sqrt{f} + 2c\sqrt{f}$$

$$\frac{A(t) + \sqrt{f}}{A(t) - \sqrt{f}} = e^{(bt\sqrt{f} + 2c\sqrt{f})}$$

$$A(t) + \sqrt{f} = A(t)e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})} - \sqrt{f} * e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})}$$

$$A(t)(1 - e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})}) = -\sqrt{f}(1 + e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})})$$

$$A(t) = \frac{1 + e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})}}{1 - e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})}} * (-\sqrt{f})$$

$$A(t) = \frac{e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})} - 1 + 2}{e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})} - 1} * \sqrt{f}$$

$$A(t) = \sqrt{f} + \frac{2\sqrt{f}}{e^{(bt\sqrt{f}+2c\sqrt{f})} - 1}$$

$$A(t) = \sqrt{f} + \frac{2\sqrt{f}}{e^{(bt\sqrt{f})}e^{(2c\sqrt{f})} - 1}$$

Izraz $e^{(2c\sqrt{f})}$ je konstanta pa možemo da zapišemo samo c:

$$A(t) = \sqrt{f} + \frac{2\sqrt{f}}{c * e^{(bt\sqrt{f})} - 1}$$

Ostaje nam da odredimo konkretno c na osnovu početnih vrednosti:

$$A0 = \sqrt{f} + \frac{2\sqrt{f}}{c - 1}$$

$$A0(c - 1) = \sqrt{f}(c - 1)$$

$$cA0 - A0 = c\sqrt{f} + \sqrt{f}$$

$$c(A0 - \sqrt{f}) = A0 + \sqrt{f}$$

$$c = \frac{A0 + \sqrt{f}}{A0 - \sqrt{f}}$$

Sada kada smo odredili c znamo kako nam izgleda broj vojnika vojske A u funkciji od vremena. Ostaje nam samo da izračunamo $B(t)$: Iz (6) imamo:

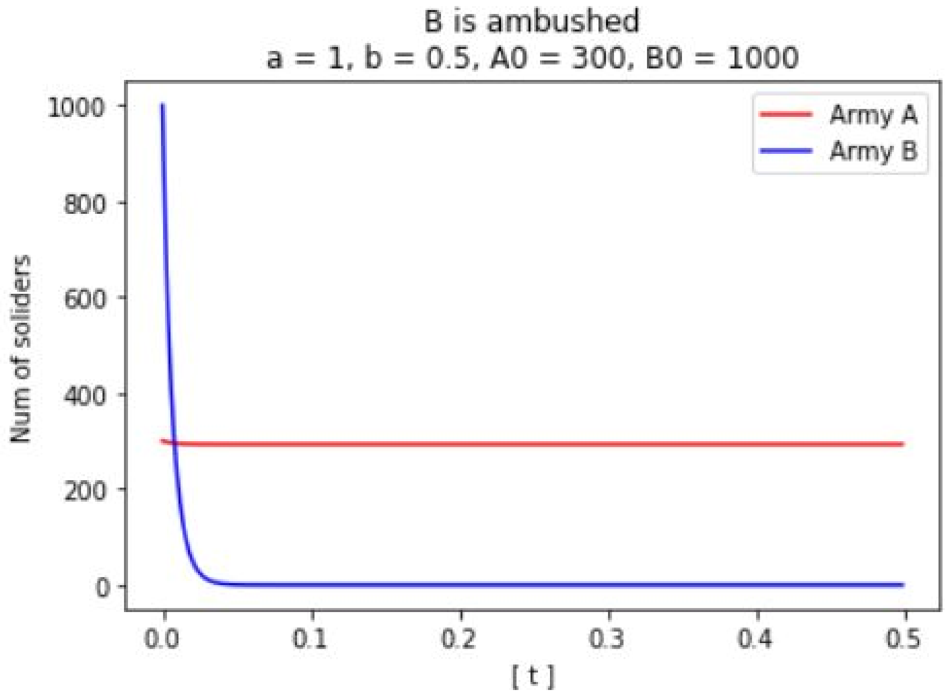
$$B(t) = -\frac{1}{a}A'(t)$$

$$A'(t) = \frac{-2f * c * b * e^{(bt\sqrt{f})}}{(c * e^{(bt\sqrt{f})} - 1)^2}$$

$$B(t) = \frac{1}{a} * \frac{2f * c * b * e^{(bt\sqrt{f})}}{(c * e^{(bt\sqrt{f})} - 1)^2}$$

Ovim poznajemo i broj vojnika vojske B u funkciji vremena.

Primer grafika:



I ako je vojska A manje brojna i duplo manje efikasna, dolazi do pobede u ovom slučaju, što govori o značaju same zasede.

3 Literatura

[1] Milan Dražić, Matematičko modeliranje. Matematički fakultet, Beograd, 2017.

[2] Lachester's Square Law (https://www.mdpi.com/2227-7390/8/5/737)