Wydział Geodezji i Kartografii
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wstęp do astronomii geodezyjnej

Wybrane Zagadnienia Geodezji Wyższej

Maciej Grzymała
maciej.grzymala@pw.edu.pl
Wydział Geodezji i Kartografii, Politechnika Warszawska
Warszawa, 2023

1 Przypomnienie układów współrzędnych stosowanych w astronomii

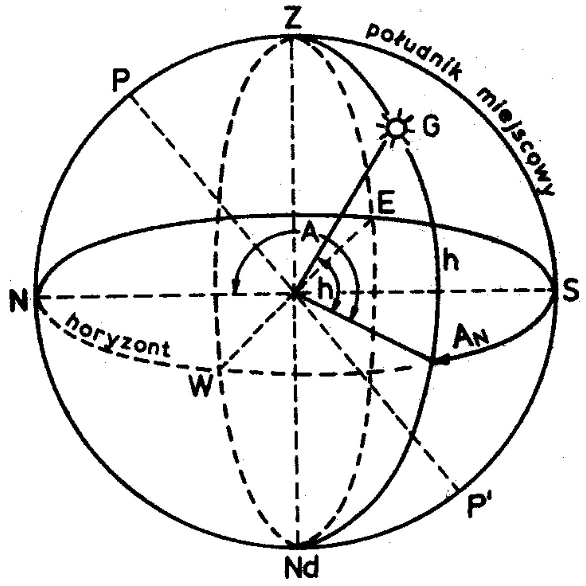
1.1 Układ współrzędnych horyzontalnych

Układ horyzontalny definiowanyy jest przez spoziomowany instrument. Jego oś pionowa wyznacza na przecięciu ze sferą niebieską dwa charakterystyczne punkty: zenit (Z) i nadir (Nd). Oś celowa leży w płaszczyźnie horyzontu obserwatora. W układzie horyzontalnym występują dwie charakterystyczne płaszczyzny, pierwsza nosi nazwę płaszczyzny południka miejscowego (zależy od położenia Z na sferze niebieskiej, a zatem od miejsca obserwacji) i wyznaczają ją trzy punkty: Zenit (Z), Północ Niebieska (PN) i środek Ziemi (O). Drugą charakterystyczną płaszczyzną jest płaszczyzna horyzontu, prostopadła do osi Zenit – Nadir. W układzie tym występują dwie współrzędne wyznaczające jednoznacznie położenie gwiazdy na sferze niebieskiej. Są to:

- azymut (Az): kąt dwuścienny zawarty pomiędzy półpłaszczyznami północnego ramienia południka miejscowego i wertykału rozpatrywanego punktu sfery niebieskiej (liczony zgodnie z ruchem wskazówek zegara). Azymut mierzymy również katem płaskim w płaszczyźnie horyzontu, zawartym pomiędzy półpłaszczyznami północnego ramienia południka miejscowego i wertykału danej punktu sfery niebieskiej;
- wysokość (h): liczona jako kąt między płaszczyzną horyzontu a kierunkiem do rozpatrywanego punktu na sferze niebieskiej. Inną stosowaną zamiennie z wysokością współrzędną może być odległość zenitalna z określona jako odległość kątowa promienia gwiazdy od Zenitu

$$z = 90^\circ - h. \tag{1}$$

Linie stałych azymutów (koła wielkie przechodzące przez Zenit i Nadir) noszą nazwę wertykałów; koła małe równoległe do horyzontu nazywane są almukantaratami. Na płaszczyźnie horyzontu wyróżnia się cztery charakterystyczne punkty. Punkt północy i południa (N i S) znajduje się na przecięciu płaszczyzny horyzontu z płaszczyzną południka miejscowego. Punkty wschodu i zachodu (E i W) znajdują się na przecięciu tzw. I wertykału z płaszczyzną horyzontu, czyli na azymutach odpowiednio 90° i 270°. Układ ten, choć bardzo wygodny do zdefiniowania, ma swoją istotną niedogodność: jest on zależny od pozycji obserwatora oraz czasu obserwacji, zatem nie nadaje się do katalogowania gwiazd.



Rysunek 1: Układ współrzędnych horyzontalnych

1.2 Układ współrzędnych równikowych równonocnych (ekwinokcjalnych)

Podstawowymi płaszczyznami w tym układzie są płaszczyzna równika niebieskiego oraz płaszczyzna południka miejscowego. Układ ten jest podobnie skonstruowany jak ziemski układ współrzędnych φ, λ. Współrzędnymi, opisującymi położenie punktu w tym układzie, są:

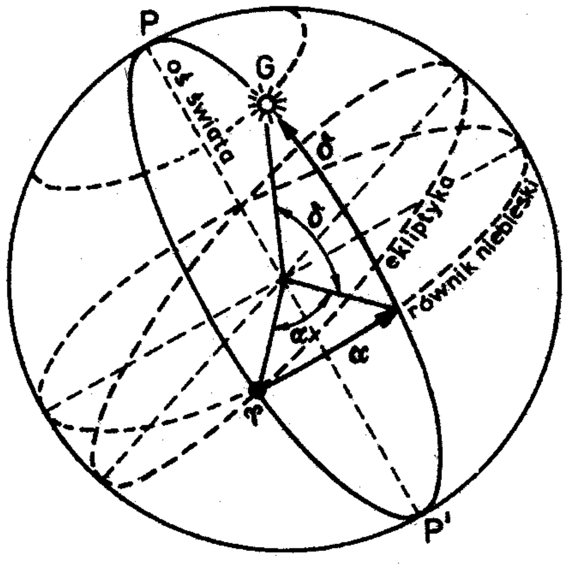
- deklinacja (δ): kąt zawarty pomiędzy płaszczyzną równika niebieskiego a kierunkiem do danej gwiazdy, mierzony w płaszczyźnie jej południka niebieskiego. Deklinację liczymy od 0° do 90° na półkuli północnej i ujemnie na półkuli południowej;
- rektascenzja (α): kąt dwuścienny zawarty pomiędzy płaszczyznami południka punktu Barana i południka danej gwiazdy. Rektascenzję liczymy dodatnio w kierunku: zachód–południe–wschód (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). Punkt Barana (♈), zwany inaczej punktem równonocy wiosennej, to punkt, w którym Słońce przechodzi z półkuli południowej na północną (punkt przecięcia się ekliptyki z równikiem). Rektascenzja często wyrażana jest w mierze godzinnej (h, m, s).

Punkt równonocy wiosennej uczestniczy razem z całą sferą niebieską w ruchu dobowym sfery niebieskiej. Nie zmienia się zatem jego położenie wśród gwiazd, zatem i nie zmienia się wartość rektanscensji (oraz deklinacji).

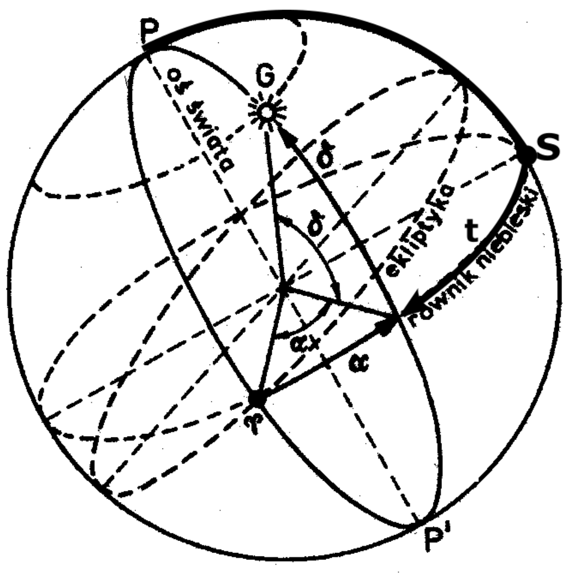
1.3 Układ współrzędnych równikowych godzinnych

Podstawowymi płaszczyznami w tym układzie są płaszczyzna równika niebieskiego oraz płaszczyzna południka miejscowego. Jedną ze współrzędnych jest, definiowana identycznie jak w poprzednim układzie, deklinacja (δ). Drugą współrzędną jest kąt godzinny t, zawarty między płaszczyzną południka miejscowego a południkiem danej gwiazdy. Kąt godzinny mierzy się po równiku począwszy od południowej części południka miejscowego $\mathrm{P_N}$ZS w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, od 0h do 24h. Zmiana tego kąta o 24h odpowiada jednemu obrotowi Ziemi dokoła własnej osi i stanowi jednostkę czasu zwaną dobą gwiazdową. Za pomocą kąta godzinnego definiowany jest również czas gwiazdowy miejscowy oznaczany jako S (od *sidereal time*). Wyraża się go prostym wzorem:

$$S = \alpha_* + t_* \tag{2}$$



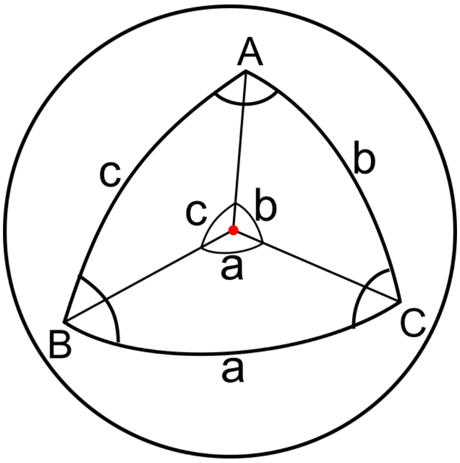
Rysunek 2: Układ współrzędnych równikowych równonocnych (ekwinokcjalnych)



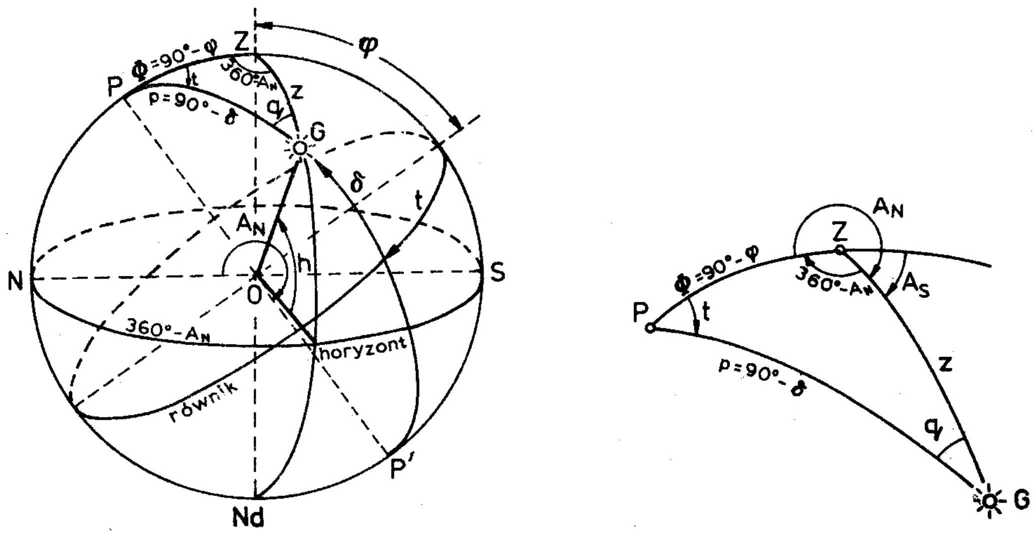
Rysunek 3: Układ współrzędnych równikowych godzinnych

2 Trójkąt sferyczny

Trójkątem sferycznym ABC nazywamy figurę utworzoną na sferze przez łuki trzech kół wielkich łączących parami 3 punkty sfery, będące trzema wierzchołkami trójkąta. Bokiem trójkąta sferycznego nazywamy bądź łuk koła wielkiego łączącego dwa wierzchołki trójkąta, bądź kąt środkowy, na którym oparty jest rozważany łuk koła wielkiego. Boki wyrażone są najczęściej w mierze stopniowej lub czasowej i oznaczone są **małymi literami a, b, c**. Kątem trójkąta sferycznego nazywamy kąt płaski pomiędzy stycznymi do boków trójkąta w punkcie stanowiącym jego wierzchołek, bądź kąt dwuścienny zawarty pomiędzy płaszczyznami kół wielkich tworzących boki trójkąta. Kąty w trójkącie sferycznym oznaczamy **wielkimi literami A, B, C** (zob. Rys. 4) Rozwiązanie szczególnego przypadku trójkąta sferycznego, z wierzchołkami w biegunie, zenicie oraz w miejscu położenia interesującego nas ciała niebieskiego, zwanego **trójkątem paralaktycznym**, pozwala na transformacje pomiędzy wyżej wymienionymi układami współrzędnych.



Rysunek 4: Boki i kąty trójkąta paralaktycznego



Rysunek 5: Związki w trójkącie paralaktycznym

3 Podstawowe związki w trójkącie sferycznym

Wzór cosinusowy:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \tag{3}$$

Wzór sinusowo – cosinusowy:

$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos A &= \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C \end{aligned} \tag{4}$$

Wzór sinusowy:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{5}$$

3.1 Przydatne przekształcenia w trójkącie paralaktycznym

Spróbujemy wyrazić związek pomiędzy układem współrzędnych horyzontalnych a układem współrzędnych równikowych godzinnych, aby móc obliczyć wartości h oraz Az.

Najpierw skorzystamy z równania 3 :

$$\cos(90 - h) = \cos(90^\circ - \varphi)\cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi)\sin(90^\circ - \delta)\cos t, \tag{6}$$

które po przekształceniach daje nam wzór na wartość h:

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos t. \tag{7}$$

Z równania 4 na wzór sinusowo – cosinusowy mamy:

$$\sin(90 - h)\cos(360^\circ - Az) = \cos(90^\circ - \delta)\sin(90^\circ - \varphi) - \sin(90^\circ - \delta)\cos(90^\circ - \varphi)\cos t, \tag{8}$$

co po uporządkowaniu daje nam

$$\cos h\cos Az = \sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos t. \tag{9}$$

Z równania (9) można wyznaczyć szukaną wartość azymutu. Trzeba jednak wtedy pamiętać, że wartość azymutu mieści się pomiędzy 0° a 360°, a funkcja cosinus nie jest w tym przedziale różnowartościowa. Należy wówczas skorzystać z warunku, że jeśli t mniejsze od 180° to aby otrzymać szukany azymut, musimy odjąć obliczoną wartość od 360°. Aby tego uniknąć, możemy zapisać wzór na azymut, wykorzystując dodatkowo wzór sinusowy 5:

$$\frac{\sin(90^\circ - \delta)}{\sin(360^\circ - Az)} = \frac{\sin z}{\sin t} \tag{10}$$

a po uporządkowaniu:

$$\cos h\sin Az = -\cos\delta\sin t \tag{11}$$

Dzieląc stronami równanie 11 przez równanie 9 otrzymujemy wzór na obliczenie Az, który jednoznacznie rozwiązać możemy, korzystając z obecnej w językach programowania, dwuargumentowej funkcji 'arcus tangens 2':

$$\operatorname{tg} Az = \frac{-\cos\delta\sin t}{\cos\varphi\sin\delta - \sin\varphi\cos\delta\cos t} \tag{12}$$

4 Zadanie 1. Transformacja współrzędnych gwiazdy z układu równikowego do horyzontalnego

Treść zadania

Wyznaczyć położenie danej gwiazdy, w układzie współrzędnych lokalnych (horyzontalnych), dla dwóch miejsc na powierzchni Ziemi. Obliczenia mają zostać wykonane dla całej doby, 1 lipca 2023, w godzinnych interwałach. Położenie gwiazdy należy zwizualizować na wykresach, np. wykresie typu skyplot, wykres 3D sfery niebieskiej, wykres liniowy zależności wysokości (i/lub azymutu) od czasu, lub wykres "panorama".

4.1 Dane do zadania

Danymi do zadania są współrzędne gwiazdy (tab. 1), w układzie równikowym ekwinokcjalnym, na epokę 2023.5 (czyli 1 lipca 2023). Obliczenia należy wykonać, poczynając od danego czasu urzędowego dla Polski (UTC+2).

Zadanie proszę wykonać dla całej doby 1 lipca 2023, dla dwóch położeń obserwatora:

- okolice Warszawy: $\varphi = 52°$; $\lambda = 21°$
- równik, dla tej samej długości geograficznej: $\varphi = 0°$; $\lambda = 21°$

Podane gwiazdy są to jedne z najbardziej charakterystycznych gwiazd, widocznych na półkuli północnej (kilka najjaśniejszych gwiazd na niebie oraz gwiazdy wchodzące w skład gwiazdozbiorów Wielkiego Wozu oraz Kasjopei):

Tabela 1: Dane do zadania

nr	Nr gwiazdy z RA FK5	α			δ		
		h	m	s	$\circ$	m	s
1	699	18	37	44.096	38	48	24.290
2	48	1	27	22.471	60	21	23.520
3	295	7	46	45.037	27	58	2.980
4	168	4	37	16.316	16	33	16.570
5	497	13	24	52.075	54	48	11.500
6	17	0	38	17.664	54	1	33.360
7	21	0	41	51.378	56	39	37.440
8	416	11	3	14.669	56	15	21.180
9	257	6	46	10.978	-16	44	59.530
10	417	11	5	9.530	61	37	24.440
11	483	12	55	3.395	55	49	57.620
12	224	5	56	26.696	7	24	34.170
13	32	0	58	8.795	60	50	36.350
14	291	7	40	31.848	5	9	47.150
15	899	23	55	34.219	57	37	48.710
16	2	0	10	26.825	59	16	45.480
17	526	14	16	44.039	19	3	39.490
18	509	13	48	27.861	49	11	48.040
19	63	1	56	6.746	63	47	4.470
20	447	11	55	3.388	53	33	50.550
21	456	12	16	34.755	56	54	7.800
22	193	5	18	25.758	46	1	9.640
23	194	5	15	40.103	-8	10	34.330

4.2 Kolejność wykonywania zadania

1. Uwzględnienie strefy czasowej Warszawy i obliczenie czasu UTC (w naszym przypadku, ignorujemy różnicę pomiędzy czasem UTC i UT1, nie uwzględniamy odpowiedniej poprawki, dlatego obliczony przez nas czas UTC będzie równy czasowi UT1) – strefę czasową dla Polski (UTC+2) można uwzględnić na samym początku obliczeń: wówczas wyniki otrzymamy dla całej doby 1 lipca, od godziny 0 do 24 w czasie UTC+2; lub możemy uwzględnić strefę czasową na samym końcu obliczeń, podczas etykietowania wartości na wykresach: wówczas otrzymamy wyniki dla doby 1 lipca, ale czasu UTC, czyli od 2^{00} (UTC+2) dnia 1 lipca do 2^{00} (UTC+2) 2 lipca. Oba rozwiązania będą poprawne,

2. Obliczamy lokalny czas gwiazdowy (LST). Możemy to zrobić na dwa sposoby:

   2.1. obliczamy czas średni gwiazdowy Greenwich, na epokę 0 UT1 (GMST0), na podstawie daty juliańskiej danej epoki na godzinę 0 (kod do obliczeń daty juliańskiej znajduje się w materiałach),
   2.2. konkretną epokę obliczamy poprzez dodanie do GMST0 interesującej nas godziny, pomnożonej przez wartość 1.002737909 350795 (zamiana jednostek z godzin słonecznych, na gwiazdowe)
   2.3. obliczamy LST uwzględniając długość geograficzna miejsca obserwacji.

   lub

   2.1. obliczamy czas średni gwiazdowy Greenwich (GMST), na dowolną epokę danego dnia, na podstawie daty juliańskiej obliczonej dla konkretnej godziny,
   2.2. obliczamy LST uwzględniając długość geograficzna miejsca obserwacji;

3. Obliczenie kąta godzinnego, znając lokalny czas gwiazdowy oraz rektascenzję gwiazdy (równanie 2);

4. Rozwiązanie trójkąta sferycznego i obliczenie wysokości oraz azymutu gwiazdy (wykonanie transformacji współrzędnych równikowych do współrzędnych horyzontalnych)

5. Wykonanie odpowiednich wizualizacji.

4.3 Ocena ćwiczenia

Na ocenę ćwiczenia wpływ mają:

- jakość sprawozdania, w którym opisane powinny zostać kolejne kroki wykonywanego ćwiczenia,
- jakość i różnorodność wykonanych wizualizacji,
- wnioski wyciągnięte na podstawie wykonanych rysunków. Komentarz: czy dana gwiazda wschodzi i zachodzi, przechodzi przez I wertykał, czy elonguje,
- na wyższą ocenę, dobrym pomysłem jest wykonanie podobnych obliczeń np. dla Słońca, którego współrzędne równikowe, dla odpowiedniej daty, odczytać można w Roczniku Astronomicznym (str. 13-20),
- dla ambitnych, wizualizację można wykonać np. dla wszystkich gwiazd Wielkiego Wozu lub Kasjopei na jednym wykresie (pokazując ruch dobowy całego gwiazdozbioru). Dla Wielkiego Wozu są to gwiazdy o identyfikatorach FK5: 416, 417, 447, 456, 483, 497, 509; dla Kasjopei: 2, 17, 21, 32, 48, 63, 899.

UWAGA! Na pierwszej stronie ćwiczenia proszę podać swój numer oraz dane do wykonania zadania.

5 Przydatne funkcje oraz fragmenty kodu

5.1 Data juliańska

Liczba dni juliańskich (*Julian Day)*, zwana później JD jest ciągłym zliczaniem dni i ich części od początku roku -4712. Zgodnie z tradycją, JD rozpoczyna się w południe średniego czasu Greenwich, czyli o godzinie 12^h czasu uniwersalnego UT. Zastosowanie JD w obliczeniach astronomicznych pozwala na kilka rzeczy:

1. uniknięcie problemu przy zmianie kalendarza z juliańskiego na gregoriański – przejście z 4 października 1582 na 15 października 1582,

2. możliwość dokładnego obliczania odstępu w czasie od wydarzeń, które miały miejsce dawno w przeszłości, na przykład od zaćmienia Słońca 28 sierpnia -1203 roku,

3. zachowanie podzielności przez 4 przy obliczaniu lat przestępnych, ponieważ w mierze astronomicznej dla lat przed rokiem 1, wystąpił rok 0 oraz rok -1.

Poniżej zaprezentowano algorytm napisany w oprogramowaniu `Python` służący do obliczenia JD (Uwaga! Jest to uproszczona wersja algorytmu, pozwalajaca na wykonanie odpowiednich przeliczeń tylko w przedziale od 1 Marca 1900 do 28 lutego 2100!).

Kod 1: *Data Juliańska*

```python
def julday(y,m,d,h):
    '''
    Simplified Julian Date generator, valid only between
    1 March 1900 to 28 February 2100
    '''
    if m <= 2:
        y = y - 1
        m = m + 12

    jd = np.floor(365.25*(y+4716))+np.floor(30.6001*(m+1))+d+h/24-1537.5
    return jd
```

5.2 Obliczenie GMST

Kod 2: *GMST*

```python
def GMST(jd):
    '''
    calculation of Greenwich Mean Sidereal Time - GMST in hours
    ----------
    jd : TYPE
    julian date
    '''
    T = (jd - 2451545) / 36525
    Tu = jd - 2451545
    GMST = 280.46061837 + 360.98564736629*(jd - 2451545.0) + 0.000387933*T**2-T
        **3/38710000
    GMST = (g%360) / 15     #GMST in hours
    return g
```

5.3 Wykres 3D oraz parametryzacja kuli:

Kod 3: *plot 3D*

```
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure(figsize = (10,10))
ax = fig.add_subplot(projection = '3d')
# promień Ziemi
r = 1
# siatka współrzędnych
u, v = np.mgrid[0:(2 * np.pi+0.1):0.1, 0:np.pi:0.1]
x = np.cos(u) * np.sin(v)
y = np.sin(u) * np.sin(v)
z = np.cos(v)
z[z<0] = 0      # bez tego, narysowalibyśmy całą kulę, a chcemy tylko półkulę
ax.plot_surface(x,y,z, alpha = 0.1)


# narysowanie punktu na sferze
gx = r * np.sin(Az) * np.cos(h)
gy = r * np.cos(Az) * np.cos(h)
gz = r * np.sin(h)
ax.plot3D(gx,gy,gz)
```

5.4 Wykres 'skyplot'

Kod 4: *Skyplot*

```
fig = plt.figure(figsize = (8,8))
ax = fig.add_subplot(polar = True)
ax.set_theta_zero_location('N') # ustawienie kierunku północy na górze wykresu
ax.set_theta_direction(-1)

ax.set_yticks(range(0, 90+10, 10))                   # Define the yticks

yLabel = ['90', '', '', '60', '', '', '30', '', '', '']
ax.set_yticklabels(yLabel)
ax.set_rlim(0,90)

# narysowanie punktu na wykresie
ax.scatter(Az, 90-np.rad2deg(h))
```

Przydatnym rozwiązaniem, umożliwiającym wykonanie prostej wizualizacji, jest ustawienie interwału rysowania kolejnych punktów, dzięki funkcji: plt.pause(1), gdzie '1' jest wartością opóźnienia rysowania kolejnych elementów, podaną w sekundach.