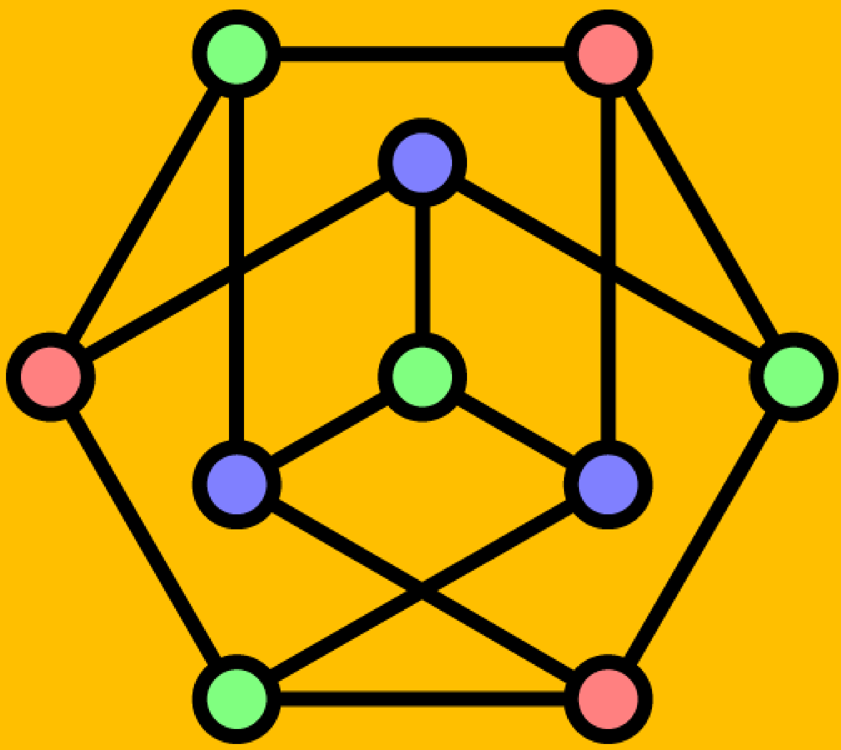
TEORETIČNE OSNOVE RAČUNALNIŠTVA

DISKRETNE STRUKTURE ZA RAČUNALNIČARJE



UP FAMNIT

Pomlad 2021 – Verzija 0.1

CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

123.4(567)(8.901.2)

TEORETIČNE osnove računalništva [Elektronski vir] : Diskretne strukture za računalničarje / avtorji M. Krnc; [urednik] M. Krnc. - Verzija. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. M. Krnc, 2020.

Način dostopa (URL):
https://github.com/mkrnc/TOR1-zapiski-s-predavanj

ISBN 978-961-XXX-XXX-X (pdf)
123456789

PREDGOVOR

Pred tabo so nekatere zbrane vaje za utrjecanje pri predmetu TOR1, ki se predava študentom prvega letnika na FAMNIT, Univerza na Primorskem. Predmet pokriva osnove iz različnih področij teoretičnega računalništva in je usmerjen potrebam računalničarjev.

Dokument je zamišljen kot dopolnjevanje predavanj, in se ga ne sme jemati kot samostojno gradivo za pripravo na izpit. Morebitna vprašanja in najdene napake, lepo prosim, sporočite na `matjaz.krnc@upr.si`, oz. ustvarite t.i. "issue" na našem javnem repozitoriju.

`https://github.com/mkrnc/TOR1-vaje---TCS1-exercises.git`.

Teoretične osnove računalništva
Diskretne strukture za računalničarje

Avtor:	Matjaž Krnc
Samozaložba in oblikovanje:	Matjaž Krnc
ISBN:	978-961-XXX-XXX-X

Ljubljana, Pomlad 2021

KAZALO

1 MATEMATIČNA LOGIKA

Vaja 1.1. *Dani sta izjavi*

A: Zunaj je mrzlo.

B: Zunaj dežuje.

V naravnem jeziku napiši naslednje sestavljene izjave:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $B \vee \neg A$

Vaja 1.2. *Naj bo A: "Janez bere Finance.", B: "Janez bere Delo.", in C: "Janez bere Večer.". Prepiši v simbolne izjave:*

1. *Janez bere Finance ali Delo, a ne Večera.*
2. *Janez bere Finance in Delo ali pa ne bere Financ in Dela.*
3. *Ni res, da Janez bere Finance, ne pa Večera.*
4. *Ni res, da Janez bere Večer ali Delo, ne pa Financ.*

Vaja 1.3. *Poišči pravilnostne tabele za primere v prejšnji nalogi.*

Vaja 1.4. *Za tri različne premice p, q in r v prostoru velja $(p \parallel r) \wedge (p \cap q = A) \wedge (q \cap r = B)$. Kaj lahko sklepaš?*

Vaja 1.5. *Vitezi in oprode (vitez vedno govori resnico, oproda vedno lažejo):*

1. *Artur: Ni res, da je Cene oproda. Bine: Cene je vitez ali pa sem jaz vitez. Cene: Bine je oproda. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?*

2. *Artur: Cene je oproda ali je Bine oproda. Bine: Cene je vitez in Artur je vitez. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?*

Vaja 1.6. *Z osnovnima povezavama* $\neg$ *in* $\wedge$ *izrazi naslednje sestavljene izjave:*

1. $A \vee B$
2. $A \rightarrow B$
3. $A \iff B$

Vaja 1.7. *Prepričaj se, da veljajo naslednje logične ekvivalence:*

1. $A \wedge (B \vee C) \iff \neg(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$
2. $\neg A \wedge (A \rightarrow B) \iff A \rightarrow (\neg A \wedge B)$
3. $A \vee B \vee C \iff \neg(A \vee B) \rightarrow C$
4. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Vaja 1.8. *(Naloga o vitezih in oprodah) A, B, C, D, E*

- *A: "D je oproda in C je oproda."*
- *B: "Če sta A in D oprodi, potem je C oproda."*
- *C: "Če je B oproda, potem je A vitez."*
- *D: "Če je E oproda, potem sta C in B oprodi."*

Vaja 1.9. *(Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?*
Mislim, torej sem. Mislim, torej sklepam. Sklep: Sem, torej sklepam.

Vaja 1.10. *(Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?*
Dojenčki se obnašajo nelogično. Kdor je sposoben ukrotiti krokodila, je spoštovanja vreden. Kdor se obnaša nelogično, ni spoštovanja vreden. Sklep: Dojenčki niso sposobni ukrotiti krokodila.

Vaja 1.11. *Pri podanih spodnjih dejstvih, preveri pravilnost sklepa:*

- *Barona je umoril eden izmed njegovega osebja: kuharica, strežnik ali šofer.*
- *Če je morilka kuharica, je zastrupila hrano.*

- *Če je morilec šofer, mu je postavil bombo v avto.*
- *Hrana ni bila zastrupljena in strežnik ni morilec.*

Sklep: *Morilec je šofer.*

Vaja 1.12. *Find the canonical disjunctive normal form (DNF) and the canonical conjuctive normal form (CNF) for the following propositions:*

(i) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

(ii) $\neg(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow B)$

Vaja 1.13. *For the following compound proposition find a truth table, determine DNF, CNF and draw the corresponding circuit.*

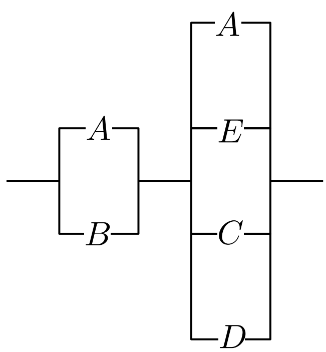
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

Vaja 1.14. *Find a compound proposition $\mathcal{I}$ such that*

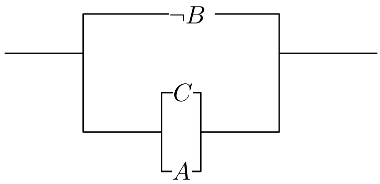
$$(A \Rightarrow (\mathcal{I} \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (A \wedge B) \vee \mathcal{I}$$

is tautology.

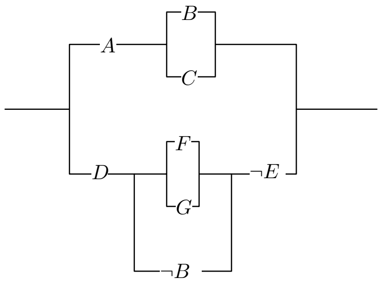
Vaja 1.15. *Za naslednja preklopna vezja najdi ustrezne logične izjave. (i)*



(ii)



(iii)



Vaja 1.16. *Poenostavi:*

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C).$$

1.1 DOKAZOVANJE

Vaja 1.17. *Pokaži pravilnost spodnjih implikacij:*

(i) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

(ii) $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$

(iii) $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$

(iv) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(v) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$

Vaja 1.18. *Preveri, če so spodnje izjave pravilne, ter utemelji z dokazom oz. s protiprimerom.*

(i) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge A \Rightarrow B \wedge C$

(ii) $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (D \Rightarrow C) \Rightarrow D$

(iii) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (D \wedge E \Rightarrow F) \wedge (C \Rightarrow E) \Rightarrow F$

Vaja 1.19. *Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je n sodo število, potem je $n^2 + 3n$ sodo. Ali je obrat pravilen?*

Vaja 1.20. *Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je realno število x nenegtivno, potem je vsota števila x in njegove obratne vrednosti večja ali enaka 2.*

Vaja 1.21. *S protislovjem pokaži, da je praštevil neskončno.*

Vaja 1.22. *Poišči napako v naslednjem dokazu.*

> ***Trditev:*** *1 je največje naravno število.*
>
> ***Dokaz*** *(s protislovjem): Predpostavimo nasprotno. Naj bo $n > 1$ največje naravno število. Ker je n pozitivno, lahko neenakost $n > 1$ pomnožimo z n. Torej $n > 1 \Leftrightarrow n^2 > n$. Dobili smo, da je n^2 večje od n, kar je v protislovju s predpostavko, da je n največje naravno število. Torej je bila predpostavka napačna in je 1 največje naravno število.*

Vaja 1.23. *Naj bosta x in y realni števili, da velja $x < 2y$. Z indirektnim dokazom pokaži: Če je $7xy \leq 3x^2 + 2y^2$, potem je $3x \leq y$.*

Vaja 1.24. *Dokaži naslednjo ekvivalenco v dveh delih: Naj bosta m in n celi števili. Tedaj sta števili m in n različnih parnosti natanko tedaj, ko je število $m^2 - n^2$ liho.*

Vaja 1.25. *Z uporabo če in samo če dokaza pokaži: $ac \mid bc \Leftrightarrow a \mid b$.*

Vaja 1.26. *Ali je naslednji sklep pravilen?*

(i) *Če je danes sreda bom imel vaje. Danes je sreda.* ***Sklep:*** *Imel bom vaje.*

(ii) *Če se učim, bom opravil izpit. Nisem se učil.* ***Sklep:*** *Ne bom opravil izpita.*

Vaja 1.27. *Ali je naslednji premislek pravilen?*

(i) *Študent se je z mestni avtobusom odpravil na izpit. Rekel si je: Če bo na naslednjem semaforju zelena luč, bom naredil izpit. No, ko je avtobus pripeljal na naslednji semafor, na semaforju ni svetila zelena luč, študent pa si je dejal: Presneto, spet bom padel.*

(ii) *Inženir, ki obvlada teorijo, vedno načrta dobro vezje. Dobro vezje je ekonomično. Torej, inženir, ki načrta neekonomično vezje, ne obvlada teorije.*

Vaja 1.28. *Predpostavi realna števila kot univerzalno množico (tj. vesolje). Določi, katere izmed spodnjih trditev so pravilne:*

(i) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.

(ii) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$.

(iii) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$.

(iv) $(\forall x)[x > 0 \Rightarrow (\exists y)(y < 0 \land xy > 0)]$.

1.2 DOKAZ Z INDUKCIJO

Vaja 1.29. *Dokazujte vsako s pomočjo indukcije:*

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

(g) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$

(h) $n! > 2^n$ *za* $n \geq 4$.

(i) $2^{n+1} > n^2$ *za vse pozitivne cele števike.*

Vaja 1.30. *Ta naloga se nanaša na Fibonaccijevo zaporedje:*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Zaporedje je definirano rekurzivno z $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, *nato* $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ *za vsak* $n > 2$. *Kot prej, dokažite vsako od naslednjih s pomočjo indukcije. Morda bi bilo koristno raziskati več primerov, preden začnete.*

(a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$

(b) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

(c) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$

2 TEORIJA MNOŽIC

Ključni pojmi:

- Relacija pripadnosti. Enakost množic.
- Presek in unija družine množic. Distributivnost. Razlika dveh množic, komplement.
- Podmnožica, relacija inkluzije. Prava podmnožica. Prazna množica.
- Russellova antinomija.
- De Morganova zakona, princip dualnosti.
- Potenčna množica. Kartezični produkt.

Vaja 2.1. *Naj bo*
$A = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z}; |x - 2| < 4\}$, *in*
$C = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 4x = 0\}$.

(i) Zapiši elemente vseh treh množic.

(ii) Najdi $A \cup C, B \cap C, B \setminus C, (A \setminus B) \setminus C$ *in* $A \setminus (B \setminus C)$.

Vaja 2.2. *Naj bodo* A, B, C *in* D *množice, in naj bo* S *univerzalna množica. Poenostavi:*

$$\overline{(\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(\overline{A} \cup C)})} \setminus \overline{D}.$$

Vaja 2.3. *Dokaži:*

$$(A \cup C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

Vaja 2.4. *Dokaži, da velja* $A \subseteq C \land B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

Vaja 2.5. *(Predzadnja lastnost pri preseku) Prove that* $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
Rešitev. *V dveh delih.*

Vaja 2.6. *(Predzadnja lastnost pri kartezičnemu produktu) Dokaži:* $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Vaja 2.7. *(Predzadnja lastnost pri razliki) Prove that* $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$. Rešitev.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus B &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

Vaja 2.8. *Determine the following sets:*

(i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset \quad [\{\emptyset, \{\emptyset\}\}]$

(ii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$

(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\}\emptyset\}\}$

(iv) $\{1, 2, 3, \{1\}, \{5\}\} \setminus \{2, \{3\}, 5\}$

Vaja 2.9. *Naj bodo* A, B *in* C *poljubne množice. Katere od spodnjih trditev so pravilne?*

1. *Če velja* $A \in B$ *in* $B \in C$, *potem* $A \in C$.
2. *Če velja* $A \subseteq B$ *in* $B \in C$, *potem* $A \in C$.
3. *Če velja* $A \cap B \subseteq \overline{C}$ *in* $A \cup C \subseteq B$, *potem* $A \cap C = \emptyset$.
4. *Če velja* $A \neq B$ *in* $B \neq C$, *potem* $A \neq C$.
5. *Če velja* $A \subseteq \overline{(B \cup C)}$ *in* $B \subseteq \overline{(A \cup C)}$, *potem* $B = \emptyset$.

Vaja 2.10 (Enakost množic). *Katere naslednjih množic so med seboj enake?*

$$\{r, s, t\}, \{t, r, s, t\}, \{s, s, r, r, t\}, \{t, s, r\}$$

Vaja 2.11. *Ali obstajajo take množice* A, B, C, *da velja* $B \neq C$ *in* $A \cap B = A \cap C$?

Vaja 2.12. *Dana je množica* A. *Poišči vse množice* B, *za katere velja* $A \setminus B = B \setminus A$.

Vaja 2.13. *Drži ali ne drži?*
Za poljubne množice A, B in C velja:

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C) .$$

Vaja 2.14. *Naj bodo A, B in C Množice. Pokaži:*

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.
2. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

3 RELACIJE

Ključni pojmi:

- Binarne relacije: $R = \{(x,y); xRy\} \subseteq S \times S$.
- Unija, presek, razlika relacij.
- Domena binarne relacije, zaloga vrednosti binarne relacije.
- Inverzna relacija. Kompozitum relacij.
- Refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, intranzitivnost, sovisnost, stroga sovisnost.
- Ekvivalenčna relacija. Faktorska množica S/R.

Vaja 3.1. *Naj velja* $S = \{1,2,3,4,5\}$.

1. *Ali je* $R = \{(1,2),(2,3),(3,5),(2,4),(5,1)\}$ *binarna relacija?*
2. *Za relacijo* R *najdi ustrezno domeno* $\mathcal{D}R$, *in zalogo vrednosti* $\mathcal{Z}R$.
3. *Določi inverzno relacijo* R^{-1} *in* $\mathcal{D}R^{-1}$ *in* $\mathcal{Z}R^{-1}$.

Vaja 3.2. *Naj bosta* $R = \{(1,1),(2,1),(3,3),(1,5)\}$ *in* $T = \{(1,4),(2,1),(2,2),(2,5)\}$ *binarni relaciji v vesolju* $S = \{1,2,3,4,5\}$.

1. *Določi kompozituma* $R \circ T$ *in* $T \circ R$.
2. *Ali velja* $R \circ T = T \circ R$?

Vaja 3.3. *Naj velja* $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. *Določi*

$$R = \{(x,y) \mid x - y \textit{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x,y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

Vaja 3.4. *V vesolju $S = \mathbb{R}$ definiramo relacijo R:*

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?

Vaja 3.5. *Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Imamo spodnje relacije:*

(i) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$,

(ii) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,

(iii) $R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$,

(iv) $R_4 = \emptyset$,

(v) $R_5 = S \times S$.

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

Vaja 3.6. *Naj bosta R in S simetrični relaciji. Pokaži: $R \circ S$ simetrična $\Leftrightarrow$ $R \circ S = S \circ R$.*

Vaja 3.7. *V množico $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ vpeljemo relaciji $R = \{(a, c), (a, d), (d, e), (e, a)\}$ in $S = \{(a, c), (a, f), (d, c), (f, d)\}$.*
(a) Ali je relacija $(R \circ R) \cap S$ irefleksivna?
(b) Ali je relacija $S \circ R$ sovisna?
(c) Ali je relacija $S \cup (S \circ S)$ tranzitivna?
(d) Ali je relacija $S^{-1} \cup R$ simetrična?

Vaja 3.8. *Dokaži, da je relacija R tranzitivna natanko takrat ko velje $R \circ R \subseteq R$.*

Vaja 3.9. *Naj bo $R \subset S \times S$ relacija. Dokaži, da velja*

$$R \circ R^{-1} = I \iff R \text{ je refleksivna in antisimetrična.}$$

Vaja 3.10. *Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

1. *Ali je $R = \{(1,2), (2,3), (3,5), (2,4), (5,1)\}$ binarna relacija?*

2. *Za relacijo R najdi ustrezno domeno $\mathcal{D}R$, in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}R$.*

3. *Določi inverzno relacijo R^{-1} in $\mathcal{D}R^{-1}$ in $\mathcal{Z}R^{-1}$.*

Vaja 3.11. *Naj bosta $R = \{(1,1),(2,1),(3,3),(1,5)\}$ in $T = \{(1,4),(2,1),(2,2),(2,5)\}$ binarni relaciji v vesolju $S = \{1,2,3,4,5\}$.*

1. *Določi kompozituma $R \circ T$ in $T \circ R$.*

2. *Ali velja $R \circ T = T \circ R$?*

Vaja 3.12. *Naj velja $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Določi*

$$R = \{(x,y) \mid x - y \text{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x,y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

Vaja 3.13. *V vesolju $S = \mathbb{R}$ definiramo relacijo R:*

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?

Vaja 3.14. *Naj velja $S = \{1,2,3,4\}$. Imamo spodnje relacije:*

(i) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$,

(ii) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,

(iii) $R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$,

(iv) $R_4 = \emptyset$,

(v) $R_5 = S \times S$.

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

Vaja 3.15. *Naj bosta R in S simetrični relaciji. Pokaži: $R \circ S$ simetrična $\Leftrightarrow$ $R \circ S = S \circ R$.*

3.1 EKVIVALENČNE RELACIJE

Vaja 3.16. *Naj bo $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in definirajmo relacijo R na naslednji način:*

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija, in poišči ustrezne ekvivalenčne razrede.

1. **Zgled: Ulomki.**

   V množici ulomkov

   $$a/b\,,$$

   kjer sta a in b poljubni celi števili in je $b \neq 0$, je definicija enakosti dveh ulomkov

   $$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$$

   očitno ekvivalenčna relacija. Vsak ekvivalenčni razred glede na to relacijo druži vse med seboj enake ulomke in predstavlja tedaj ustrezno *racionalno število*. Prirejena faktorska množica je *množica racionalnih števil*.

2. **Kongruence.**

   V množici *celih števil* je relacija *kongruence po modulu m*, kjer je $m > 0$ poljubno pozitivno celo število,

   $$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \text{ deli } a - b\,,$$

   ekvivalenčna relacija.

   Ekvivalenčni razredi so v tem primeru *razredi ostankov* po modulu m. V vsakem ekvivalenčnem razredu so vsa tista števila, ki dajo pri deljenju z m isti ostanek.

   Očitno je takih razredov natanko m. Te razrede imenujemo *cela števila po modulu m*. Faktorska množica je množica celih števil po modulu m.

3. **Zgled: Vzporednost premic.**

   V množici *vseh premic* je relacija "vzporeden" ekvivalenčna relacija. V vsakem ekvivalenčnem razredu so torej vse premice, ki so med seboj vzporedne, in predstavljajo potemtakem določeno *smer*. Faktorska množica je tukaj *množica vseh smeri*.

4. Let $S = \{m \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 10\}$ in $R = \{(m,n) \in S \times S \,|\, 3|m-n\}$. Is R an equivalence relation? If yes, determine the corresponding equivalence classes and the factor set.

5. Let $S = \mathbb{R}^2$ and define the relation R as follows

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Show that R is an equivalence relation and find the equivalenece class $R[(7,1)]$.

3.2 FUNKCIJE

Ključni pojmi:

- funkcija = enolična binarna relacija:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)\,.$$

- Surjektivnost. Injektivnost. Slika podmnožice U pri preslikavi f.
- Inverzna relacija funkcije. Praslike.
- Kompozitum funkcij.
- Zožitve in razširitve.
- Kanonična dekompozicija funkcije.

Vaja 3.17. *Naj bo $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x,y,z\}$, $C = \{a,b\}$.*
Dani sta funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(1,x),(2,y),(3,y),(4,x)\}$$

$$g = \{(x,a),(y,b),(z,b)\}$$

(a) Ali je f injektivna?
(b) Ali je f surjektivna?
(c) Ali je g injektivna?

(d) Ali je g surjektivna?
(e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?
(f) Zapiši množici $f^{-1}(\{x, z\})$ in $g(\{x, z\})$.
(g) Zapiši kanonično dekompozicijo funkcije f.

Rešitev:
(a) Ne, saj je $f(1) = f(4)$.
(b) Ne, saj $z \notin \mathcal{Z}f$.
(c) Ne, saj je $g(y) = g(z)$.
(d) Da.
(e) $g \circ f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, a)\}$. Da, $g \circ f$ je surjektivna.
(f) $f^{-1}(\{x, z\}) = \{1, 4\}$, $g(\{x, z\}) = \{a, b\}$.

1. Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, b\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, y), (4, x)\}$$

$$g = \{(x, a), (y, b), (z, b)\}$$

   (a) Ali je f injektivna?

   (b) Ali je f surjektivna?

   (c) Ali je g injektivna?

   (d) Ali je g surjektivna?

   (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

2. Naj bo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$$

$$g = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$$

   (a) Ali je f injektivna?

(b) Ali je f surjektivna?

(c) Ali je g injektivna?

(d) Ali je g surjektivna?

(e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

3. Naj bo $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{a, b, c\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$$

$$g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

(a) Ali je f injektivna?

(b) Ali je f surjektivna?

(c) Ali je g injektivna?

(d) Ali je g surjektivna?

(e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

4. Pokaži da je $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x = y^3\}$ funkcija oblike $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

5. Ali je $g = \{(x, y) \in [-5, 5] \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 25\}$ funkcija oblike $g : [-5, 5] \mapsto \mathbb{R}$.

6. Pokaži da spodnje relacije niso funkcije z domeno $\mathbb{R}$:
   (i) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$,
   (ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \cos(y)\}$,
   (iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = \sqrt{x}\}$.

7. Katere od spodnjih funkcij so injektivne ali surjektivne:
   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$,
   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; f(x) = \lfloor x \rfloor$,
   (iii) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+; f(x) = \sqrt{x}$,
   (iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}; f(x) = |x|$.

8. Podane imamo naslednje funkcije

   (i) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ sodo} \\ 3n-1, & n \text{ liho,} \end{cases}$

   (ii) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (x^2, x^3)$.

   Najdi

   (a) slike $f(\{1,2,3\})$ ter $f(\mathbb{N})$.

   (b) praslike (oz. inverze) $f^{-1}(\{1,2,3,4\})$ ter $f^{-1}(\{(1,-1),(4,8)\})$ (tam kjer so definirane).

9. Naj bosta $f\colon X \to Y$ ter $g\colon X \to Z$ dve bijektivni funkciji. Ali je funkcija $h\colon X \to Y \times Z$ definirana z

$$h(x) = (f(x), g(x)),$$

   (i) injektivna, (ii) surjektivna?

10. Naj bodo A, B in C poljubne množice, in naj bosta $g\colon A \to B$ ter $f\colon B \to C$ funkciji. Pokaži:

    (i) če sta f, g injektivni, potem je tudi $f \circ g$ injektivna,

    (ii) če sta f, g are surjektivni, potem je tudi $f \circ g$ surjektivna.

3.3 TEORIJA GRAFOV

Vaja 3.18. *Naj bo $G = (V, E)$ graf iz slike. potem ga nariši, ter določi*

1. *Nariši graf.*
2. *Določi največjo in najmanjšo stopnjo, tj. $\Delta(G)$, $\delta(G)$.*
3. *Določi velikost največje klike, tj. $\omega(G)$.*
4. *Določi ožino grafa, tj. $g(G)$.*
5. *Določi velikost največje neodvisne množice, tj. $\alpha(G)$.*
6. *Določi minimalno število barv, potrebnih za barvanje grafa, tj. $\chi(G)$.*

1. Naj velja $n \geq 3$. Spomnimo definicijo ciklov in polnih grafov

$$C_n = \{[n], E_1\}$$

$$K_n = \{[n], E_2\}$$

ter definirajmo

$$G_n = \{[n], E_2 \setminus E_1\}$$

   - Nariši $H, G_4, G_5, G_6, C_5, C_6, \overline{C_i}$
   - Za vse zgornje grafe določi $\Delta(G_i), \delta(G_i), \alpha(G_i), \omega(G_i), \chi(G_i), g(G_i)$
   - Dokaži $(\forall i \geq 3)(G_i \simeq \overline{C_i})$

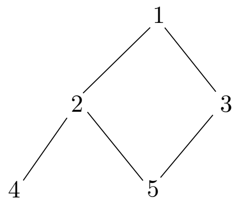
2. Naj bo $G = ([n], E)$ graf.
   - Dokaži: $\chi(G) \geq \omega(G)$
   - Dokaži: $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

3.4 STRUKTURE UREJENOSTI

Ključni pojmi:

- Tranzitivnost, navidezna urejenost, šibka urejenost, delna urejenost, linearna urejenost, stroga delna urejenost, stroga linearna urejenost.
- Dobra urejenost. Mreža. Polna mreža.
- Hassejev diagram.
- R-prvi element. R-minimalni element. Neposredni naslednik. Zadnji element.
- R-spodnja meja, R-zgornja meja, R-navzdol omejena množica, R-navzgor omejena množica, R-omejena množica, R-infimum (največja spodnja meja), R-supremum (najmanjša zgornja meja).

Vaja 3.19. *Množica $S = \{1, \dots, 5\}$ je strogo delno urejena z naslednjo relacijo R:*



(a) Zapišite vse urejene pare, ki tvorijo relacijo R.
(b) Poiščite vse minimalne in maksimalne elemente.
(c) Ali ima množica S prvi element? Ali ima množica S zadnji element?

Vaja 3.20. *Naj bo* $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ in } y \leq 0\}$ *in naj bo R relacija na množici S, definirana kot*

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 \leq y_2.$$

(i) Dokažite, da je R delna urejenost na S.

(ii) Najdite vse R-minimalne elemente.

3.4.1 Principi maksimalnosti in dobra urejenost

Vaja 3.21. *Naj bo* $R \subseteq S \times S$ *diagram iz razdelka B.2 oz. B.1 stroga delna urejenost.*

1. *Določi maksimalne in minimalne elemente (glede na S).*
2. *Določi prvi, ter zadnji element od R (glede na S).*
3. *Ali je R dobra urejenost?*

Vaja 3.22. *Ali je relacija iz Vaje 3.19 dobro urejena?*

Vaja 3.23. *Naj bo* $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1\}$, *in naj bo* $R = \{(a, b) \mid a < b\}$ *relacija na S. Ali R dobro ureja S?*

Vaja 3.24. *Naj bo* $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *in naj bo R relacija na S, definirana kot*

$$m\, R\, n \Leftrightarrow p < u \text{ ali } (p = u \text{ in } q < v),$$

kjer je $m = 2^p(2q + 1)$ *in* $n = 2^u(2v + 1)$, *pri čemer sta p in u maksimalno možna eksponenta.*

(i) *Dokažite, da R dobro ureja S.*

(ii) *Uredite množico $\{1, 2 \ldots, 10\}$ glede na R.*

(iii) *Naj bo $C = \{50, 51, 52, \ldots\}$. Najdite R-minimalni element množice C.*

(iv) *Najdite neposrednega naslednika števila 96.*

4 Končne in neskončne množice

4.1 Pregled najpomembnejših pojmov in nekaj nalog

Ključni pojmi:

- Relacija ekvipolence: $A \sim B$.
- Relacija $>$ na množicah ("ima večjo moč kot").
- Schröder-Bernsteinov izrek: Množici A in B sta ekvipolentni, če je vsaka od njiju ekvipolentna neki podmnožici druge.
- Zakon trihotomije.
- Definicije končnih in neskončnih množic. (S pomočjo $\mathbb{N}$; Peirce-Dedekind; Tarski.)
- Množica $\mathbb{N}$, Peanovi aksiomi.
- Števno neskončne množice.
- Interval $(0,1]$ ni števno neskončna množica; Cantorjev dokaz.
- $(0,1] \sim [0,1) \sim [0,1] \sim (0,1) \sim (-1,1) \sim \mathbb{R}$.
- Kontinuum. $\mathbb{R} > \mathbb{N}$.
- Cantorjev izrek. Domneva kontinuuma.

Vaja 4.1. *Pokažite, da ima množica vseh funkcij $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ večjo moč kot $\mathbb{R}$.*

Rešitev: Pokazali smo, da je potenčna množica poljubne množice X ekvipolentna množici $\mathcal{C}(X)$ vseh funkcij $f : X \to \{0,1\}$. Po Cantorjevem izreku je torej

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}) > \mathbb{R}\,.$$

Torej ima že množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ večjo moč od kontinuuma! $\square$

4.2 ZGLEDI ŠTEVNO NESKONČNIH MNOŽIC

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je števno neskončna (saj je $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$).

Tudi *množica racionalnih števil* $\mathbb{Q}$ je števno neskončna!

Očitno je dovolj pokazati, da je množica pozitivnih racionalnih števil $\mathbb{Q}_+$ števno neskončna, saj je $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ in je $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$.

Množico $\mathbb{Q}_+$ pa lahko zapišemo kot števno unijo števno neskončnih množic:

$$\mathbb{Q}_+ = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

kjer je:

$A_1 = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\}$,
$A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\}$,
$A_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots\}, \ldots$

Algebraično število: tako kompleksno število x, ki je rešitev kake enačbe oblike

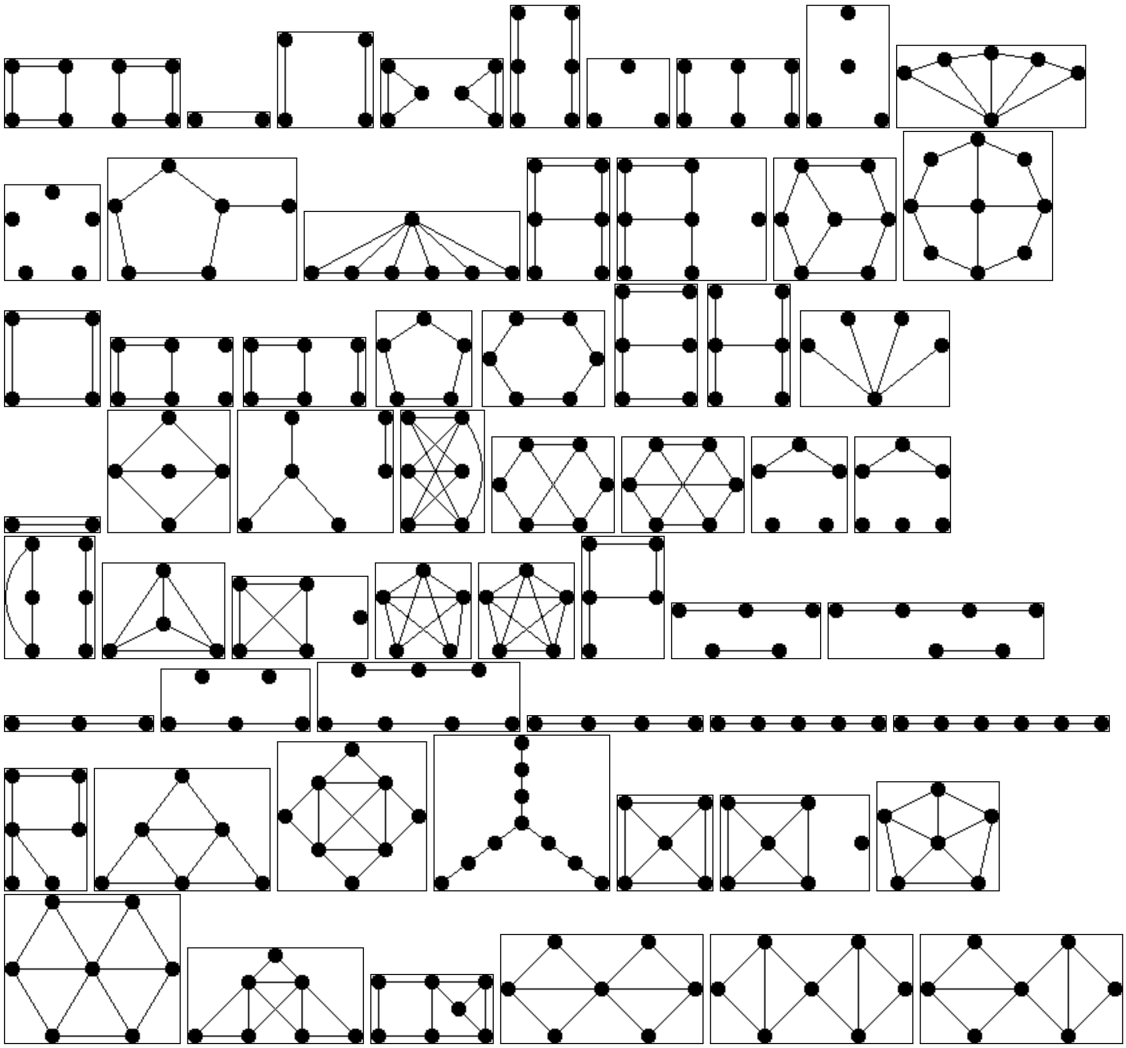
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

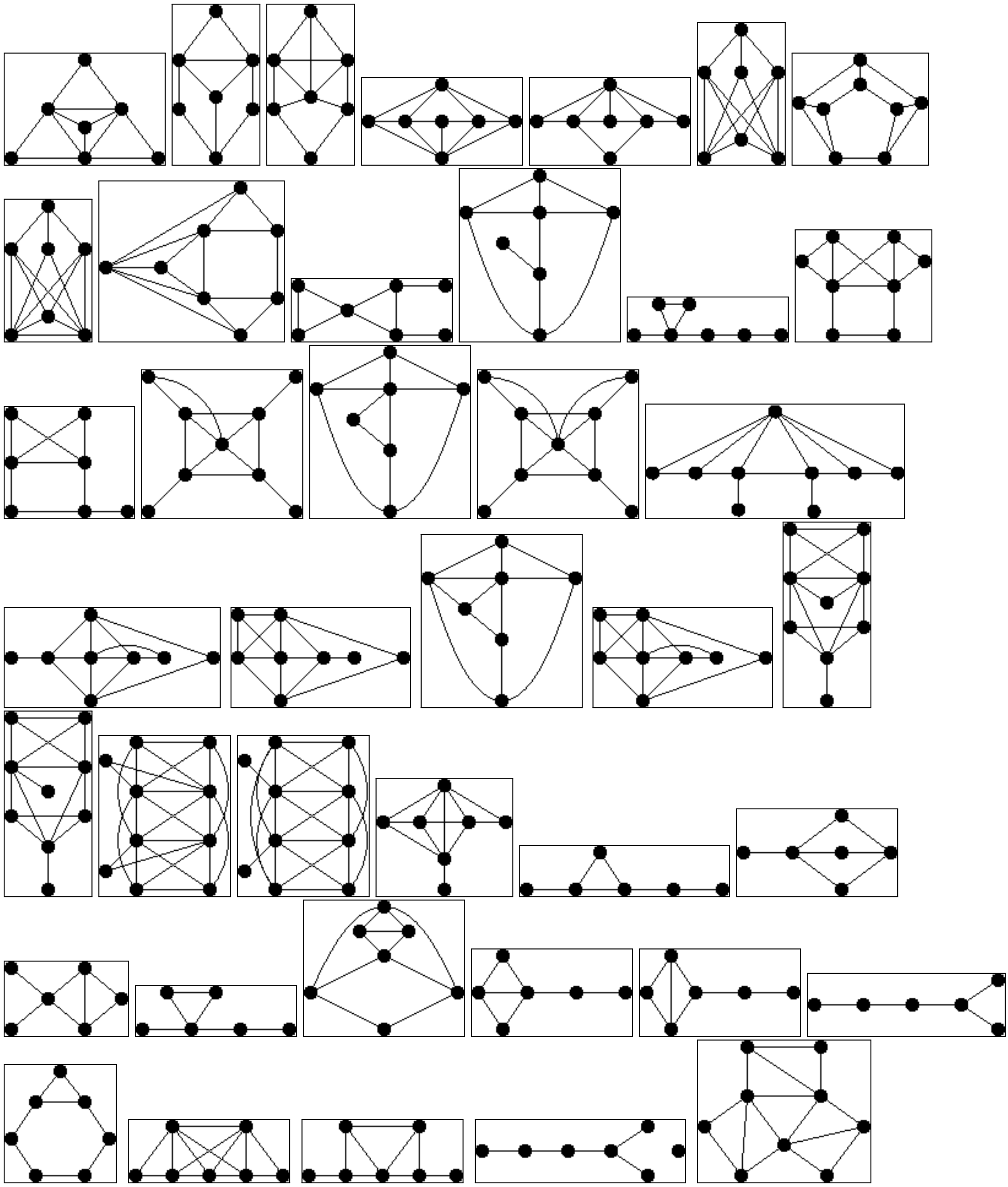
kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a_n \neq 0$ in $a_i \in \mathbb{Z}$ za vse i. Tudi množica algebraičnih števil je števno neskončna. Zapišemo jo namreč lahko kot (števno neskončno) unijo končnih množic:

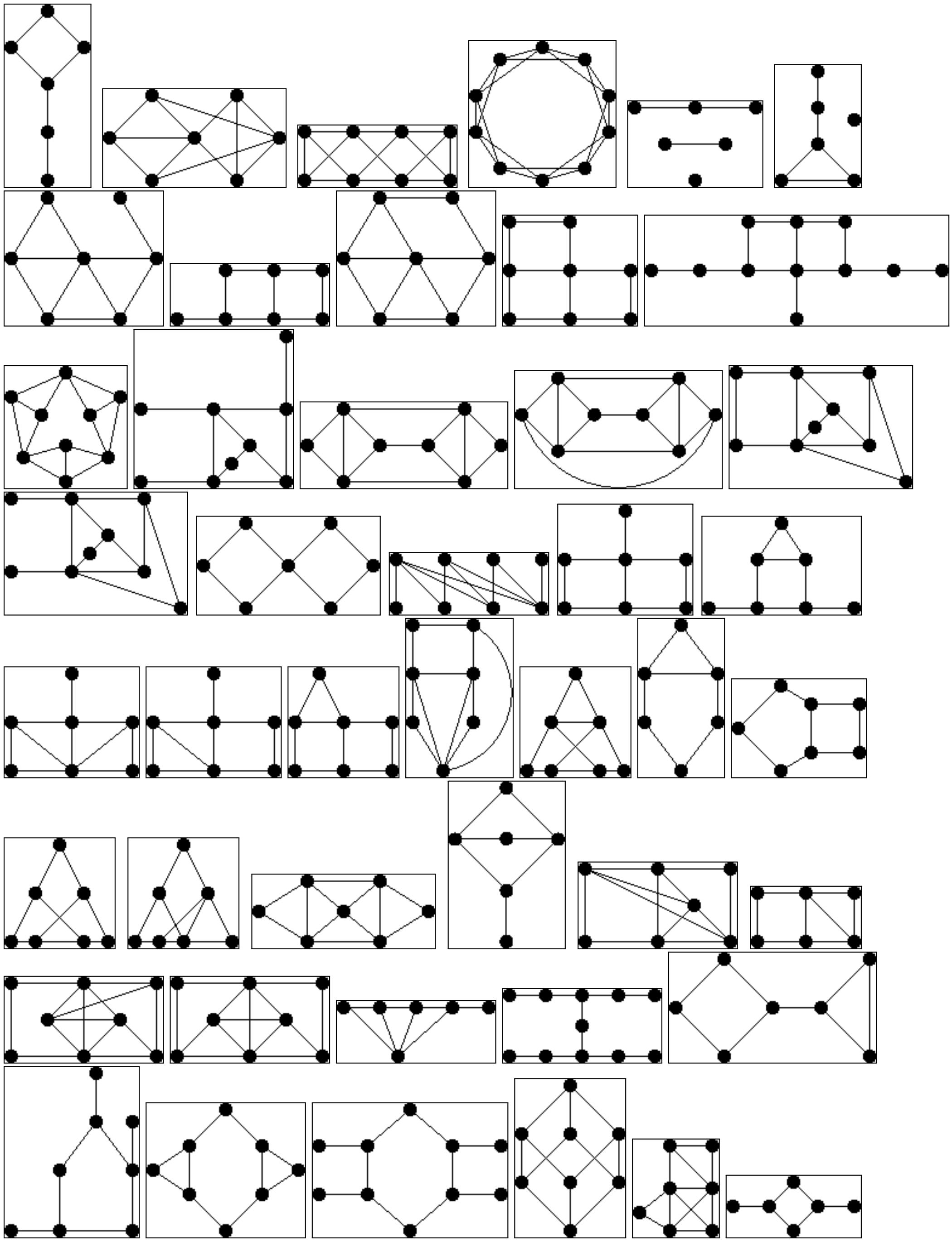
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\,,$$

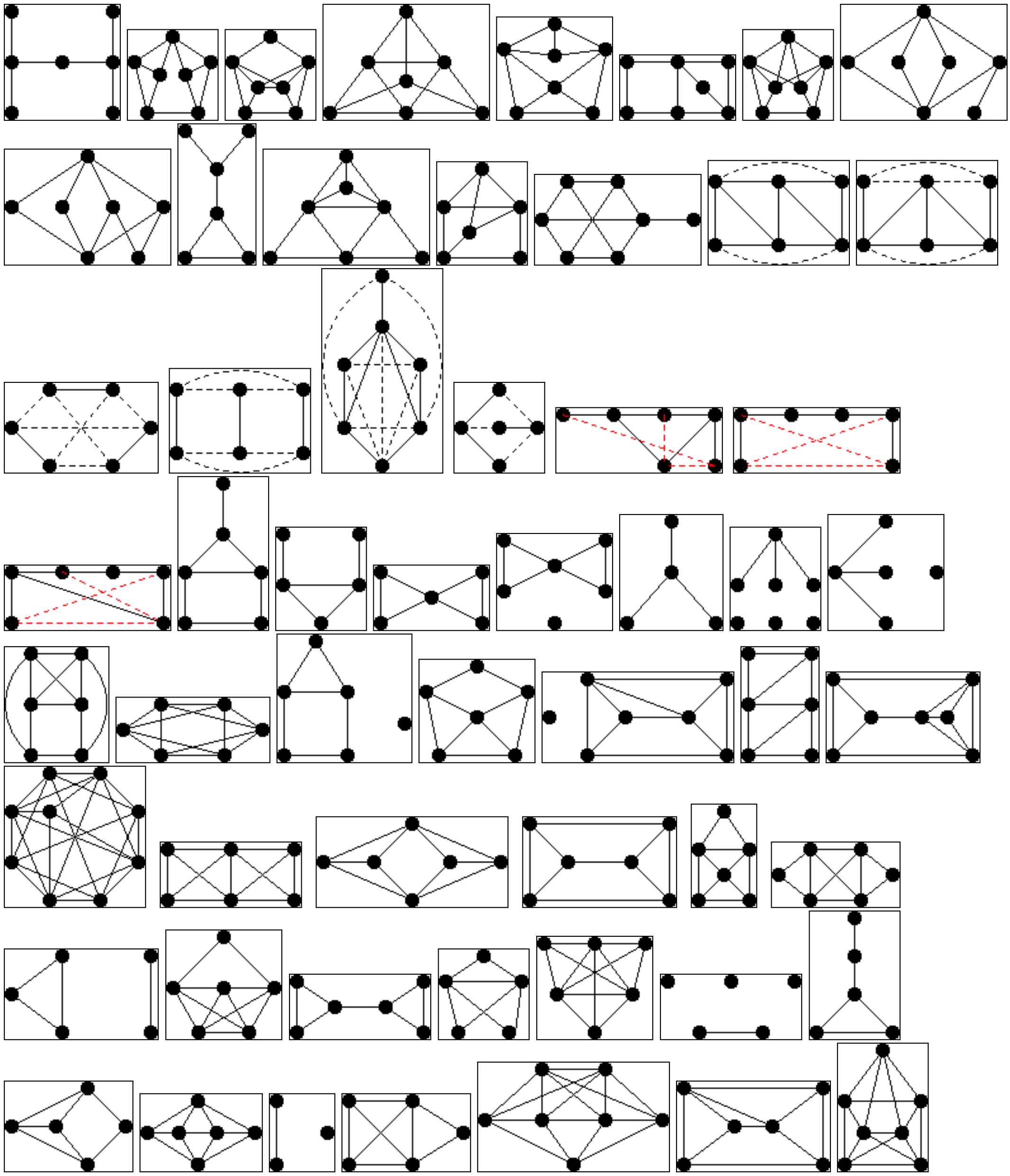
kjer je A_k množica vseh kompleksnih števil, ki so rešitve kakšne enačbe zgornje oblike, pri čemer za njene koeficiente velja $n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \leq k$. Vsaka množica A_k je končna, saj vsebuje le ničle kvečjemu $(2k+1)^{k+1}$ polinomov stopnje $\leq k$ s koeficienti iz množice $\{-k, -(k-1), \ldots, k-1, k\}$, vsak od takih polinomov pa ima $\leq k$ ničel.

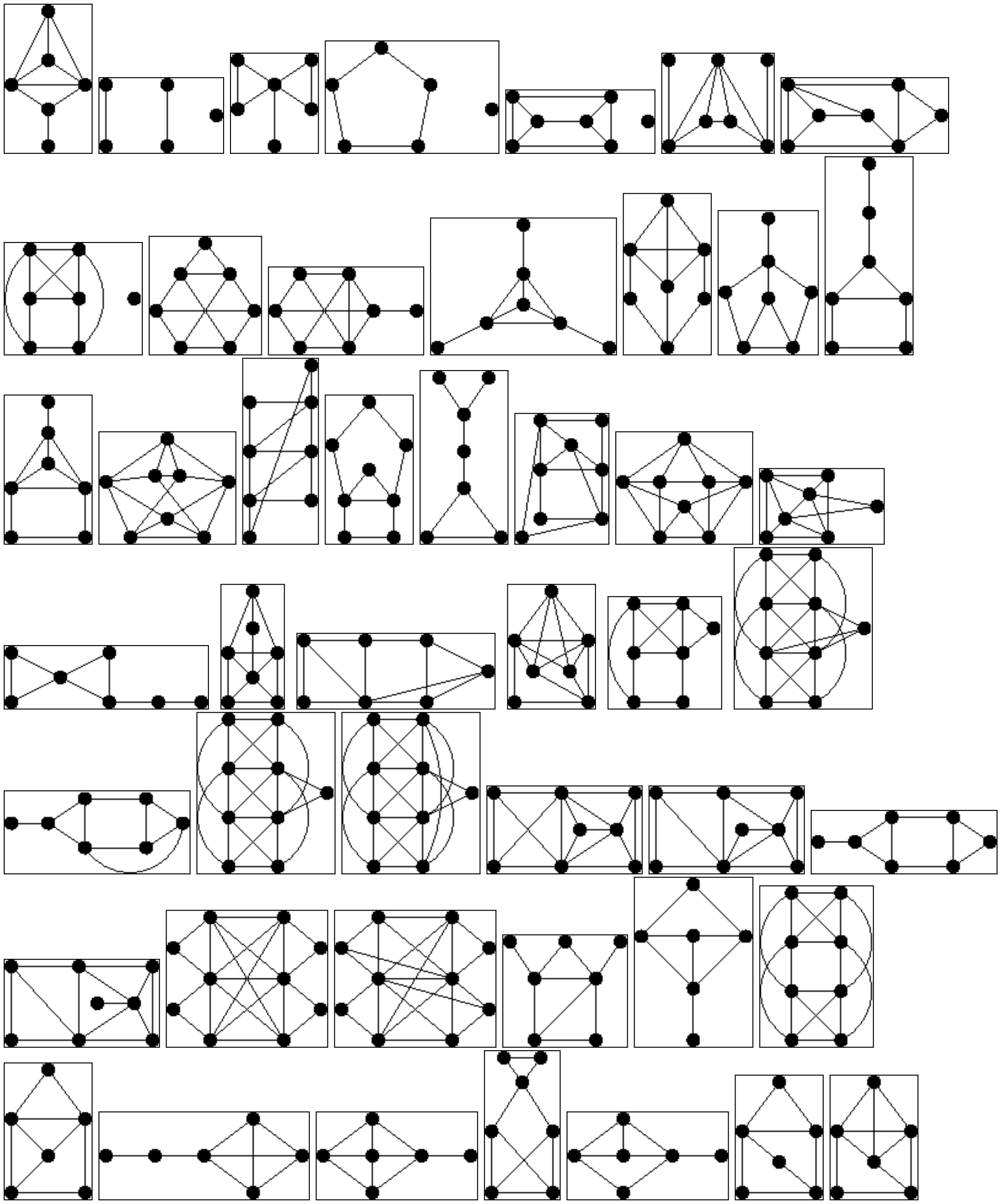
A SEZNAM GRAFOV

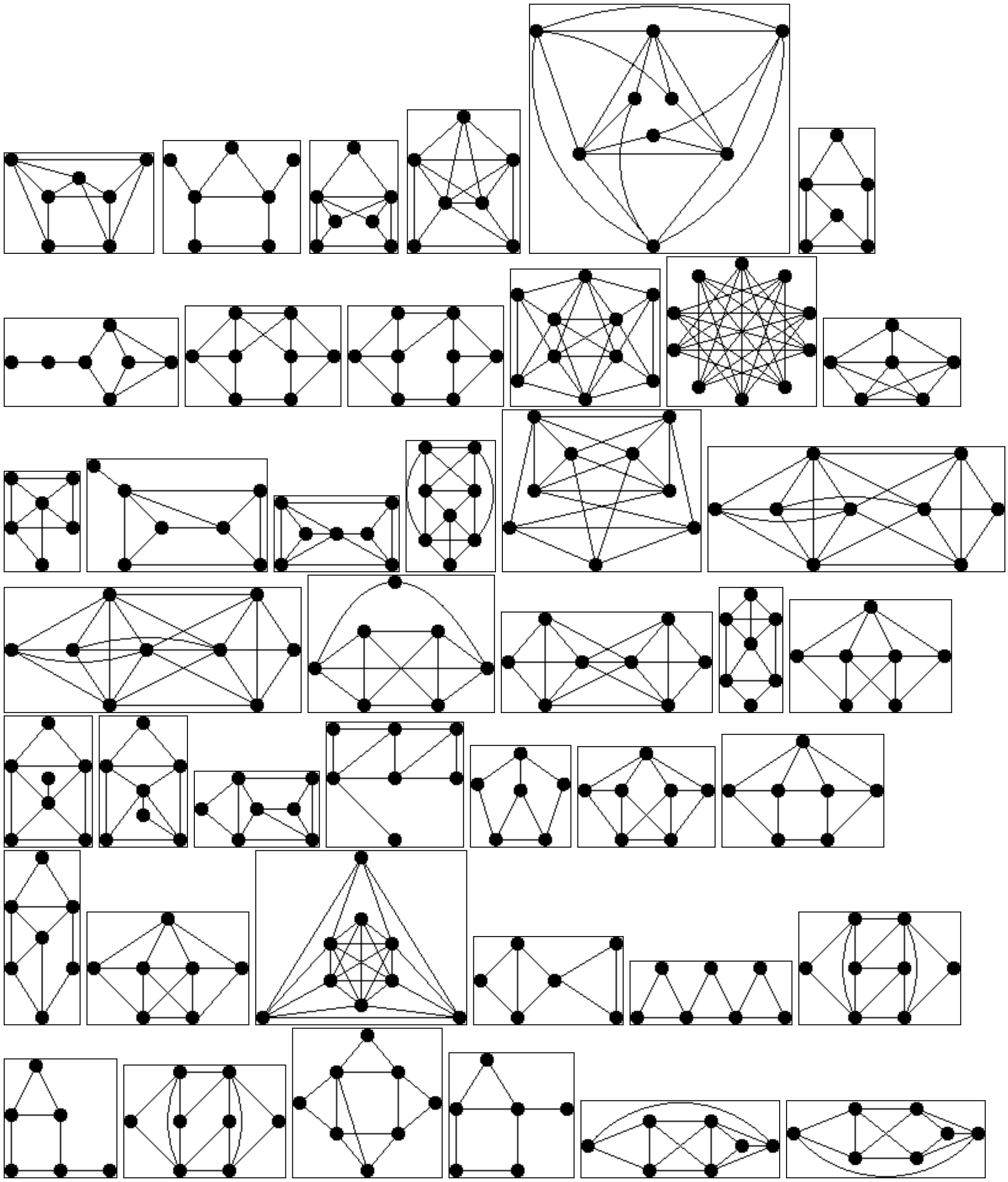


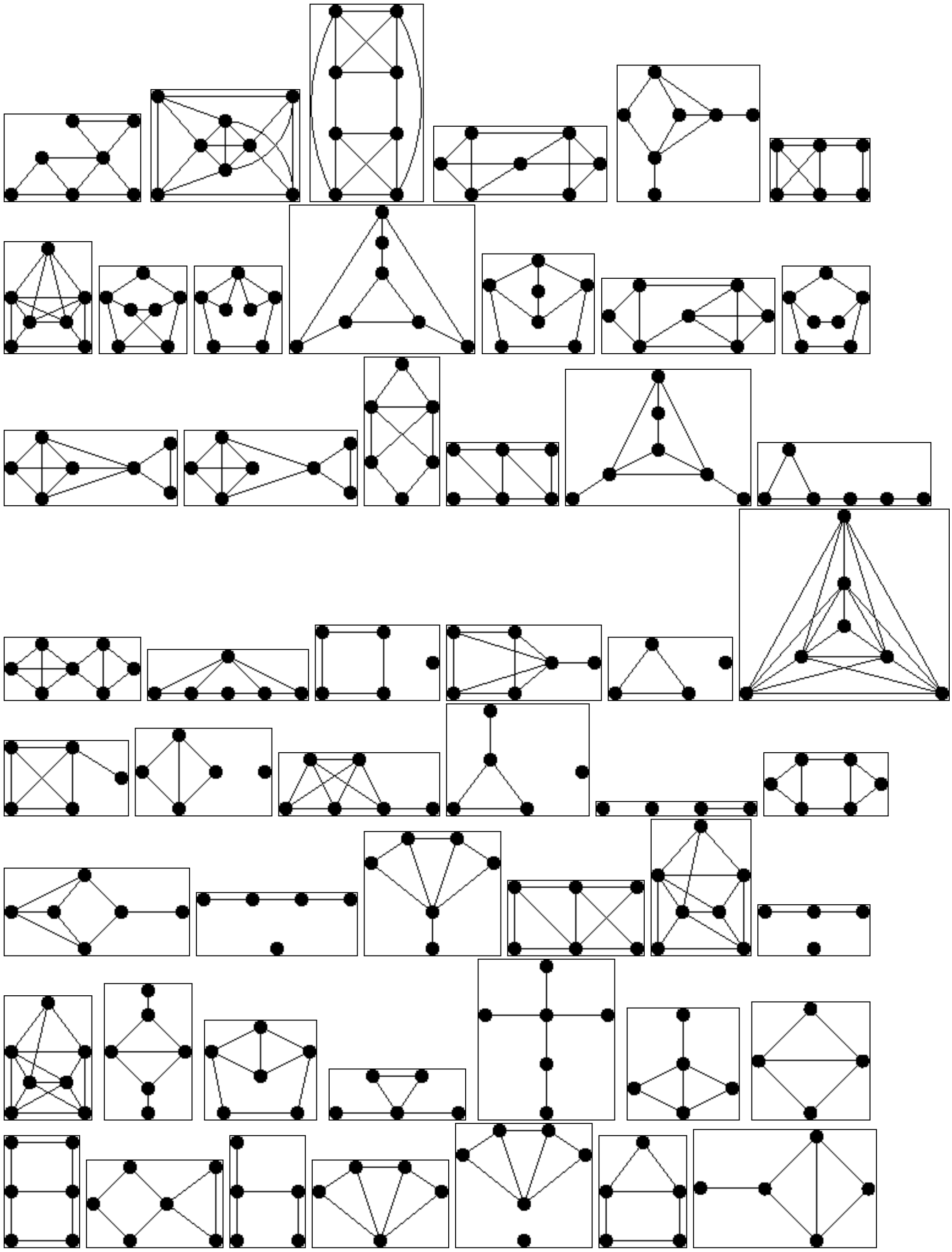


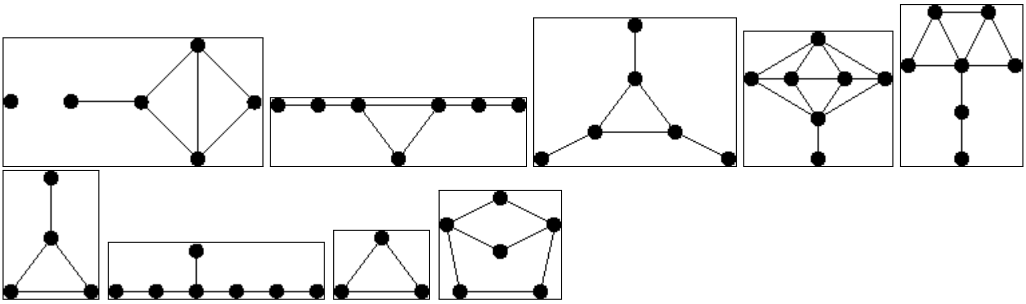






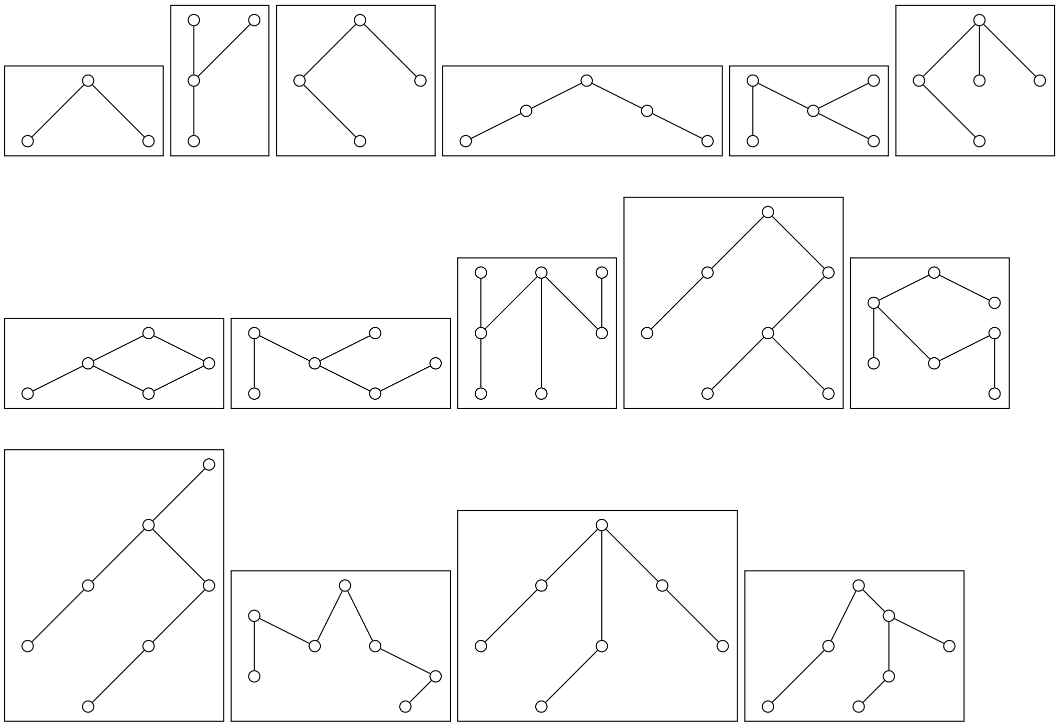






B SEZNAM HASSEJEVIH DIAGRAMOV

B.1 NEOZNAČENI DIAGRAMI



B.2 OZNAČENI DIAGRAMI

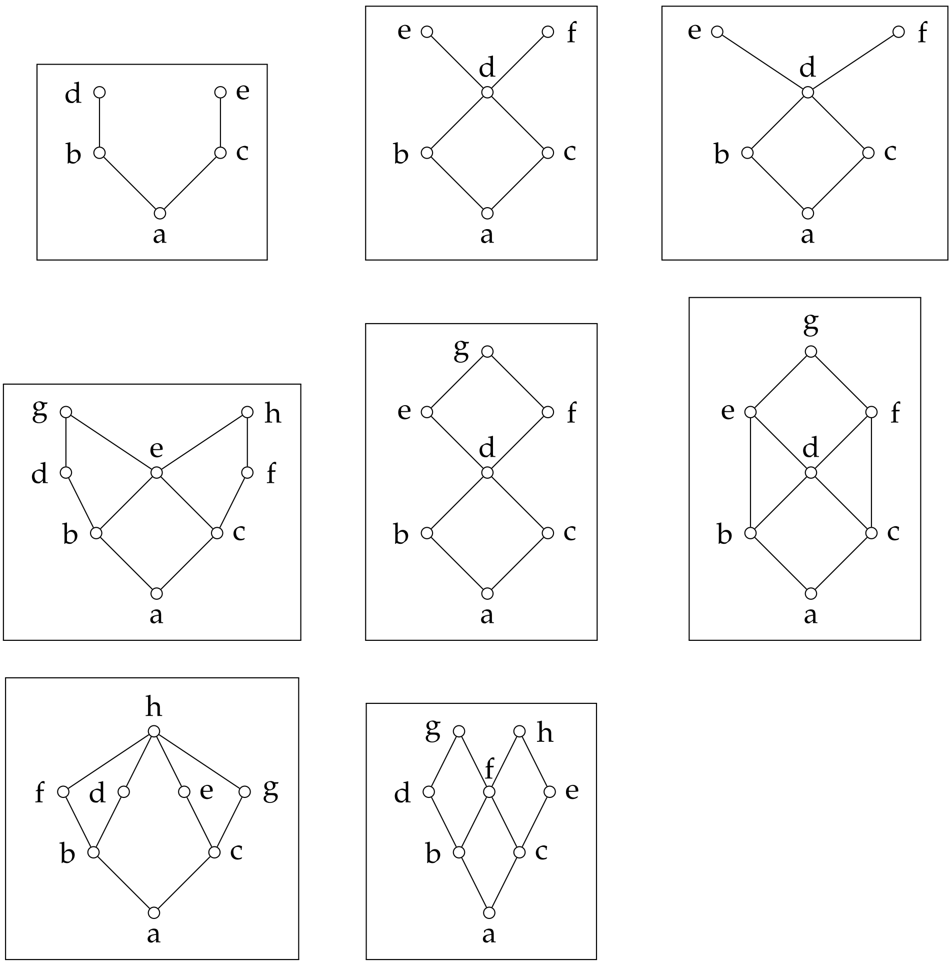


Tabela 1: Seznam Hassejevih diagramov.

C REŠITVE

Rešitev za vajo 1.2: Rešitve, po vrsti, so:

1. $(A \vee B) \wedge \neg C$
2. $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$
3. $\neg(A \wedge \neg C)$
4. $\neg((B \vee C) \wedge \neg A)$

Rešitev za vajo 1.4: Nariši skico. Premica q leži v ravnini, in jo določata p in r.

Rešitev za vajo 1.8: Naj bo A izjava: "A je vitez", itd. Iščemo tisto edino določilo d, za katerega je izjava

$$A_1 \wedge B_1 \wedge C_1 \wedge D_1$$

pravilna, kjer je:
$A_1 : A \Leftrightarrow (\neg D \wedge \neg C)$
$B_1 : B \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg D \Rightarrow \neg C)$
$C_1 : C \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
$D_1 : D \Leftrightarrow (\neg E \Rightarrow \neg C \wedge \neg B)$

Ker bi pravilnostna tabela vsebovala 32 vrstic, rešimo nalogo raje z analizo primerov.

1. primer: $A(d) = 1$. Zaradi A_1 je potem $D(d) = 0$ in $C(d) = 0$.
V izjavo C_1 vstavimo $A(d) = 1$ in $C(d) = 0$, dobimo: $\neg(\neg B \Rightarrow 1)$,
$\neg(B \vee 1)$,
$\neg 1$, to pa je nepravilna izjava.

Torej 1. primer ni mogoč.
2. primer: $A(d) = 0$**.**
Zaradi A_1 je bodisi $C(d) = 1$ ali pa $D(d) = 1$.
2.1.: $C(d) = 1$.
Zaradi C_1 je $\neg B \Rightarrow 0$, torej je $\neg B = 0$ in posledično $B(d) = 1$.
V izjavo B_1 vstavimo $A(d) = 0$, $B(d) = 1$, $C(d) = 1$, dobimo:
$1 \wedge \neg D \Rightarrow 0$
$\neg D \Rightarrow 0$
Sledi $\neg D = 0$ oz. $D(d) = 1$.
Vstavimo v izjavo D_1 znane vrednosti:
$(\neg E \Rightarrow 0 \wedge 0)$
Sledi $E(d) = 1$.

2.2.: $C(d) = 0$ **in** $D(d) = 1$.
Iz izjave B_1 dobimo $B(d) = 1$.
Izjava C_1 pa je sedaj nepravilna: $0 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1)$. $\square$
Torej so B, C, D in E vitezi, A pa je oproda.

Rešitev za vajo 1.9: Označimo:
A_1: Mislim.
A_2: Sem.
A_3: Sklepam.
Zanima nas pravilnost implikacije

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_1 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$$

Pri določilu $A_1(d) = 0$, $A_2(d) = 1$, $A_3(d) = 0$ je ta implikacija nepravilna! (Ne mislim, sem, ne sklepam.) Torej je sklepanje napačno.

Rešitev za vajo 1.10: Označimo izjave:
A_1: Sem dojenček.
A_2: Obnašam se nelogično.
A_3: Sposoben sem ukrotiti krokodila.
A_4: Vreden sem spoštovanja.
$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_3 \Rightarrow A_4) \wedge (A_2 \Rightarrow \neg A_4) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow \neg A_3)$
Pa recimo, da je sklep napačen. Tedaj obstaja določilo d, da velja

(1) $(A_1(d) \Rightarrow \neg A_3(d)) = 0$

(2) $(A_1(d) \Rightarrow A_2(d)) = 1$

(3) $(A_3(d) \Rightarrow A_4(d)) = 1$

(4) $(A_2(d) \Rightarrow \neg A_4(d)) = 1$

Torej je, zaradi (1), $A_1(d) = 1$ in $A_3(d) = 1$. Zaradi (2) je $A_2(d) = 1$. Zaradi (4) je $A_4(d) = 0$. To pa je protislovje s (3).

Torej je sklepanje pravilno. $\square$

Rešitev za vajo 1.11: Označimo izjave:

K: Morilka je kuharica.
S: Morilec je strežnik.
Š: Morilec je šofer.
H: Kuharica je zastrupila hrano.
B: Šofer je postavil bombo v avto.

Ali je naslednja implikacija tavtologija?
$(K \vee S \vee \text{Š}) \wedge (K \Rightarrow H) \wedge (\text{Š} \Rightarrow B) \wedge (\neg H \wedge \neg S) \Rightarrow \text{Š}$
Dokazujemo direktno:

1. $(K \vee S \vee \text{Š})$ (Predpostavka)
2. $(K \Rightarrow H)$ (Predpostavka)
3. $(\text{Š} \Rightarrow B)$ (Predpostavka)
4. $(\neg H \wedge \neg S)$ (Predpostavka)
5. $\neg H$ (4)
6. $\neg S$ (4)
7. $\neg K$ (2,5)
8. Š (1,6,7)

Rešitev za vajo 1.12:

(i) Napiši pravilnostno tabelo. DNO: vzemi vrstice z enicami (poveži jih med sabo s konjunkcijo) in jih poveži med sabo z disjunkcijo $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. KNO: vzemi vrstice z ničlami (vzemi nasprotne vrednosti in jih poveži med sabo z disjunkcijo) in jih poveži med sabo s konjunkcijo $(A \vee B)$.

(ii) Podobno.

Rešitev za vajo 1.14: Napiši pravilnostno tabelo za osnovni izjave A, B skupaj s (sestavljeno) izjavo $\mathcal{I}$. Iz nje razberi, da je pravilnostna tabela za $\mathcal{I}$ enaka

A	B	$\mathcal{I}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Torej je $\mathcal{I} \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ v KNO.

Rešitev za vajo 1.16:

$$\begin{aligned}
(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \vee \neg B \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee (B \vee \neg B) \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee 1 \vee C \\
&\Leftrightarrow 1.
\end{aligned}$$

Rešitev za vajo 1.20: Pokažimo $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Ker $x \geq 0$, pomnožimo neenakost z x in dobimo $x^2 + 1 \geq 2x$ oziroma $(x-1)^2 \geq 0$. Sledinje je očitno vedno res.

Rešitev za vajo 1.21: Recimo, da jih je končno mnogo $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Potem $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ni deljivo z nobenim praštevilom p_i in $p_i \neq p$ za vsak i. Po definiciji je torej p praštevilo, ki ni enako nobenemu prejšnjemu. Protislovje.

Rešitev za vajo 1.22: Nasporotna trdtev je: obstaja naravno število, ki je večje od 1.

Rešitev za vajo 1.23: Naj bo $x < 2y$, to je, $2y - x > 0$. Pokazali bomo: če je $3x > y$, potem je $7xy > 3x^2 + 2y^2$. Predpostavimo torej, da je $3x - y > 0$. Potem je $(2y - x)(3x - y) = 7xy - 3x^2 - 2y^2 > 0$, to je, $7xy > 3x^2 + 2y^2$.

Rešitev za vajo 1.24:

($\Rightarrow$) Predpostavimo, da sta različnih parnosti. Pišimo $m = 2k$ in $n = 2l + 1$, vstavimo v izraz $m^2 - n^2$ in rezultat sledi.

($\Leftarrow$) Pokažemo indirektno in sicer: Če sta m in n iste parnosti, potem je $m^2 - n^2$ sodo. Obravnavaj oba primera.

Rešitev za vajo 1.26:

(i) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$. Res je.

(ii) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.

Rešitev za vajo 1.27:

- $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg A)$. Res je.

Rešitev za vajo 2.3:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup C) \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin C)) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin C)) \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C. \end{aligned}$$

Rešitev za vajo 2.4: Direktno.

Rešitev za vajo 2.6:

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \in C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C). \end{aligned}$$

Rešitev za vajo 2.9:

1. Napačna. Vzemi $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$.
2. Napačna. Vzemi isti primer kot v (a).
3. Pravilna. Dokaz s protislovjem. Recimo, da trditev ni pravilna. Naj bo $A \cap B \subseteq \overline{C}$, $A \cup C \subseteq B$ in naj obstaja $x \in A \cap C$. Torej je $x \in A$ in $x \in C$. Ker je po drugi predpostavki $A \cup C \subseteq B$, je $x \in B$. Sledi $x \in A \cap B$. Ker je po prvi predpostavki $A \cap B \subseteq \overline{C}$, je $x \in \overline{C}$. Protislovje, saj $x \in C$.
4. Napačna. Vzemi $A = C \neq B$.

5. Napačna. Vzemi tri paroma disjunktne neprazne množice.

Rešitev za vajo 2: Vse.

Rešitev za vajo 2: Da: lahko vzamemo npr. $A = \emptyset$ in poljubni različni množici $B \neq C$ (potem bo namreč $A \cap B = A \cap C = \emptyset$).

Ali pa: $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{2,4\}$.

Rešitev za vajo 2: **1. način**:

Očitno je $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$. Ob upoštevanju predpostavke $A \backslash B = B \backslash A$ zveza $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$ postane $A \backslash B = \emptyset$ in $B \backslash A = \emptyset$, kar pomeni $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Torej je $B = A$. □

2. način:

$A \backslash B = B \backslash A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \backslash B) = (B \cap A) \cup (B \backslash A) \Rightarrow A = B.$ □

Rešitev za vajo 2: Ne drži. Že zato, ker množica na levi strani ni nujno kartezični produkt dveh množic.

Zgled: $A = \{1\}, B = C = \emptyset$.

Rešitev za vajo 2.14:

1. Pokažimo najprej inplikacijo v desno. Naj bo $A \subseteq B$. Pokažimo, da tedaj velja $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Po predpostavki velja

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B). \tag{1}$$

Recimo, da obstaja $x \in A \cap \overline{B}$. Potem

$$\begin{aligned} x \in A \cap \overline{B} &\Rightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B \quad \text{(zaradi (1))}, \end{aligned}$$

protislovje. Torej velja $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Še obratna inkluzija. Naj bo $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Pokažimo, da velja $A \subseteq B$. Vzemimo poljuben $x \in A$. Potem $x \notin \overline{B}$, saj je $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Torej $x \in B$. Ker je bil x poljuben, sledi $A \subseteq B$.

2.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x\,;\, x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x\,;\, x \notin \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\} \\ &= \{x\,;x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A}\} \\ &= \overline{B} \setminus \overline{A}. \end{aligned}$$

Rešitev za vajo 3.6: ($\Rightarrow$) $x(R \circ S)y \Rightarrow y(R \circ S)x \Rightarrow (\exists z)((y,z) \in S \wedge (z,x) \in R) \Rightarrow (z,y) \in S \wedge (x,z) \in R \Leftrightarrow (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S \Rightarrow x(S \circ R)x$. Podobno $x(S \circ R) \Rightarrow x(R \circ S)y$.

($\Leftarrow$) $x(R \circ S)y \Leftrightarrow x(S \circ R)y \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S) \Rightarrow (\exists z)((z,x) \in R \wedge (y,z) \in S) \Rightarrow (y,x) \in R \circ S$.

Rešitev za vajo 3.7:

(a) $R \circ R = \{(a,e),(d,a),(e,c),(e,d)\}$.
Sledi $(R \circ R) \cap S = \emptyset$. To pa je irefleksivna relacija.
(b) $S \circ R = \{(a,c),(e,c),(e,f)\}$
Ta relacija ni sovisna, saj $(a,b) \notin S \circ R$ $(b,a) \notin S \circ R$.
(c) $S \circ S = \{(a,d),(f,c)\}$.
$S \cup (S \circ S) = \{(a,c),(a,d),(a,f),(d,c),(f,d),(f,c)\}$.
Ta relacija je tranzitivna, saj velja $x(S \cup (S \circ S))y \wedge y(S \cup (S \circ S))z \Rightarrow x(S \cup (S \circ S))y$.
(d) $S^{-1} = \{(c,a),(f,a),(c,d),(d,f)\}$.
$S^{-1} \cup R = \{(c,a),(f,a),(c,d),(d,f),(a,c),(a,d),(d,e),(e,a)\}$.
Relacija ni simetrična, saj je $(f,a) \in S^{-1} \cup R$ in $(a,f) \notin S^{-1} \cup R$.

Rešitev za vajo 3.4:

(a) $R = \{(5,2),(5,1),(4,2),(4,1),(5,3),(4,1),(2,1),(3,1)\}$.

(b) Noben element ni pod elementoma 4 in 5, torej sta 4 in 5 minimalna elementa. Maksimalen element pa je samo eden: 1.

(c) Množica S nima prvega elementa. Elementa 4 in 5 sta sicer minimalna, vendar nobeden od njiju ni pod drugim. Množica S pa ima zadnji element: to je element 1, saj so vsi drugi elementi pod njim.

(d) Ne, saj ni sovisna: Elementa 2 in 3 nista primerljiva: $(2,3) \notin R$, $(3,2) \notin R$. □