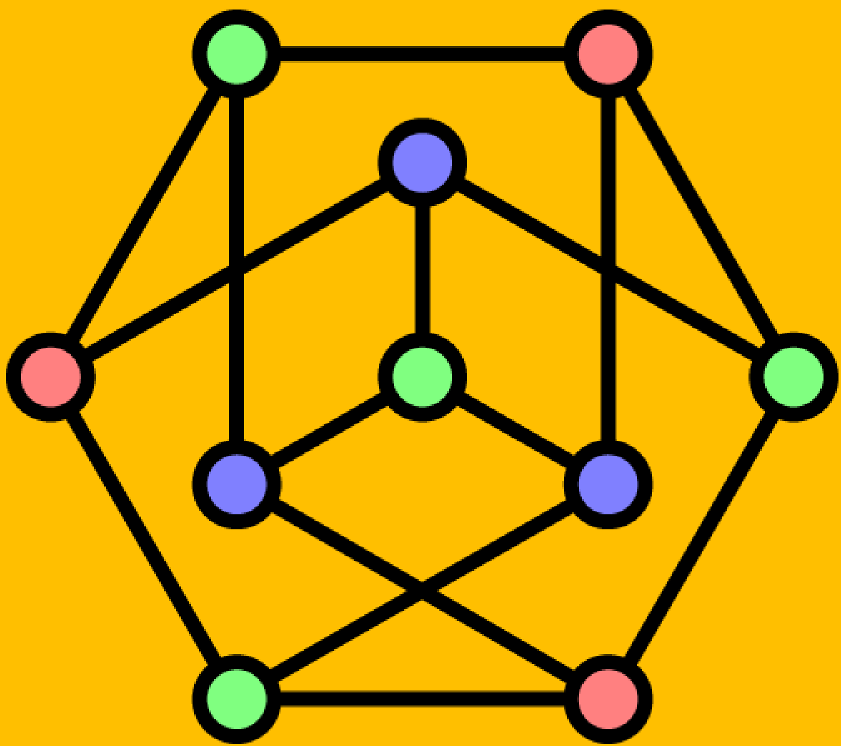
TEORETIČNE OSNOVE RAČUNALNIŠTVA

DISKRETNE STRUKTURE ZA RAČUNALNIČARJE



UP FAMNIT

Pomlad 2021 – Verzija 0.1

CIP – Katapožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

123.4(567)(8.901.2)

TEORETIČNE osnove računalništva [Elektronski vir] : Diskretne strukture za računalničarje / avtorji M. Krnc; [urednik] M. Krnc. - Verzija. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. M. Krnc, 2020.

Način dostopa (URL):
https://github.com/mkrnc/TOR1-zapiski-s-predavanj

ISBN 978-961-XXX-XXX-X (pdf)
123456789

PREDGOVOR

Pred tabo so nekatere zbrane vaje za utrjecanje pri predmetu TOR1, ki se predava študentom prvega letnika na FAMNIT, Univerza na Primorskem. Predmet pokriva osnove iz različnih področij teoretičnega računalništva in je usmerjen potrebam računalničarjev.

Dokument je zamišljen kot dopolnjevanje predavanj, in se ga ne sme jemati kot samostojno gradivo za pripravo na izpit. Morebitna vprašanja in najdene napake, lepo prosim, sporočite na matjaz.krnc@upr.si, oz. ustvarite t.i. "issue" na našem javnem repozitoriju.

https://github.com/mkrnc/TOR1-vaje---TCS1-exercises.git.

Teoretične osnove računalništva
Diskretne strukture za računalničarje

Avtor: Matjaž Krnc

Samozaložba in oblikovanje: Matjaž Krnc

ISBN: 978-961-XXX-XXX-X

Ljubljana, Pomlad 2021

KAZALO

1 MATEMATIČNA LOGIKA

(REŠITEV)

Vaja 1.1. *Dani sta izjavi*

A: Zunaj je mrzlo.

B: Zunaj dežuje.

V naravnem jeziku napiši naslednje sestavljene izjave:

1. $\neg A$
2. $A \wedge B$
3. $A \vee B$
4. $B \vee \neg A$

(REŠITEV)

Vaja 1.2. *Naj bo A: "Janez bere Finance.", B: "Janez bere Delo.", in C: "Janez bere Večer.". Prepiši v simbolne izjave:*

1. *Janez bere Finance ali Delo, a ne Večera.*
2. *Janez bere Finance in Delo ali pa ne bere Financ in Dela.*
3. *Ni res, da Janez bere Finance, ne pa Večera.*
4. *Ni res, da Janez bere Večer ali Delo, ne pa Financ.*

(REŠITEV)

Vaja 1.3. *Poišči pravilnostne tabele za primere v prejšnji nalogi.*

(REŠITEV)

Vaja 1.4. *Za tri različne premice p, q in r v prostoru velja $(p \parallel r) \wedge (p \cap q = A) \wedge (q \cap r = B)$. Kaj lahko sklepaš?*

(REŠITEV)

Vaja 1.5. *Vitezi in oprode (vitez vedno govori resnico, oproda vedno lažejo):*

1. *Artur: Ni res, da je Cene oproda. Bine: Cene je vitez ali pa sem jaz vitez. Cene: Bine je oproda. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?*

2. *Artur: Cene je oproda ali je Bine oproda. Bine: Cene je vitez in Artur je vitez. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?*

(REŠITEV)

Vaja 1.6. *Z osnovnima povezavama $\neg$ in $\wedge$ izrazi naslednje sestavljene izjave:*

1. $A \vee B$

2. $A \rightarrow B$

3. $A \iff B$

(REŠITEV)

Vaja 1.7. *Prepričaj se, da veljajo naslednje logične ekvivalence:*

1. $A \wedge (B \vee C) \iff \neg(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$

2. $\neg A \wedge (A \rightarrow B) \iff A \rightarrow (\neg A \wedge B)$

3. $A \vee B \vee C \iff \neg(A \vee B) \rightarrow C$

4. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

(REŠITEV)

Vaja 1.8. *(Naloga o vitezih in oprodah) A, B, C, D, E*

- *A: "D je oproda in C je oproda."*
- *B: "Če sta A in D oprodi, potem je C oproda."*
- *C: "Če je B oproda, potem je A vitez."*

- *D: "Če je E oproda, potem sta C in B oprodi."*

(rešitev)

Vaja 1.9. *(Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?*
Mislim, torej sem. Mislim, torej sklepam. Sklep: Sem, torej sklepam.

(rešitev)

Vaja 1.10. *(Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?*
Dojenčki se obnašajo nelogično. Kdor je sposoben ukrotiti krokodila, je spoštovanja vreden. Kdor se obnaša nelogično, ni spoštovanja vreden. Sklep: Dojenčki niso sposobni ukrotiti krokodila.

(rešitev)

Vaja 1.11. *Pri podanih spodnjih dejstvih, preveri pravilnost sklepa:*

- *Barona je umoril eden izmed njegovega osebja: kuharica, strežnik ali šofer.*
- *Če je morilka kuharica, je zastrupila hrano.*
- *Če je morilec šofer, mu je postavil bombo v avto.*
- *Hrana ni bila zastrupljena in strežnik ni morilec.*

Sklep: *Morilec je šofer.*

(rešitev)

Vaja 1.12. *Find the canonical disjunctive normal form (DNF) and the canonical conjuctive normal form (CNF) for the following propositions:*

(i) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

(ii) $\neg(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow B)$

(rešitev)

Vaja 1.13. *For the following compound proposition find a truth table, determine DNF, CNF and draw the corresponding circuit.*

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

(REŠITEV)

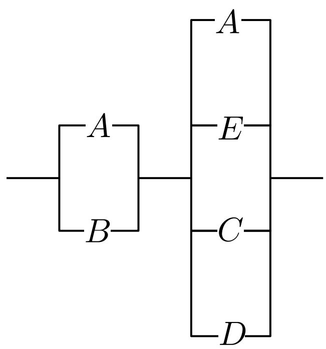
Vaja 1.14. *Find a compound proposition $\mathcal{I}$ such that*

$$(A \Rightarrow (\mathcal{I} \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (A \wedge B) \vee \mathcal{I}$$

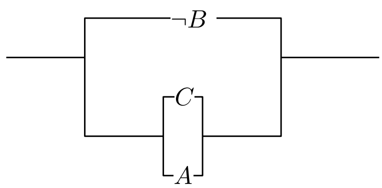
is tautology.

(REŠITEV)

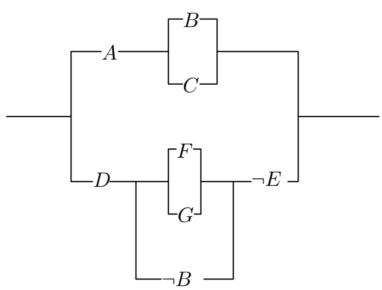
Vaja 1.15. *Za naslednja preklopna vezja najdi ustrezne logične izjave. (i)*



(ii)



(iii)



(REŠITEV)

Vaja 1.16. *Poenostavi:*
$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C).$$

1.1 DOKAZOVANJE

(REŠITEV)

Vaja 1.17. *Pokaži pravilnost spodnjih implikacij:*

(i) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

(ii) $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$

(iii) $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$

(iv) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(v) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$

(REŠITEV)

Vaja 1.18. *Preveri, če so spodnje izjave pravilne, ter utemelji z dokazom oz. s protiprimerom.*

(i) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge A \Rightarrow B \wedge C$

(ii) $\neg(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (D \Rightarrow C) \Rightarrow D$

(iii) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (D \wedge E \Rightarrow F) \wedge (C \Rightarrow E) \Rightarrow F$

(REŠITEV)

Vaja 1.19. *Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je n sodo število, potem je $n^2 + 3n$ sodo. Ali je obrat pravilen?*

(REŠITEV)

Vaja 1.20. *Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je realno število x nenegtivno, potem je vsota števila x in njegove obratne vrednosti večja ali enaka 2.*

(REŠITEV)

Vaja 1.21. *S protislovjem pokaži, da je praštevil neskončno.*

(REŠITEV)

Vaja 1.22. *Poišči napako v naslednjem dokazu.*

> ***Trditev:*** 1 *je največje naravno število.*
>
> ***Dokaz*** *(s protislovjem): Predpostavimo nasprotno. Naj bo $n > 1$ največje naravno število. Ker je n pozitivno, lahko neenakost $n > 1$ pomnožimo z n. Torej $n > 1 \Leftrightarrow n^2 > n$. Dobili smo, da je n^2 večje od n, kar je v protislovju s predpostavko, da je n največje naravno število. Torej je bila predpostavka napačna in je 1 največje naravno število.*

(REŠITEV)

Vaja 1.23. *Naj bosta x in y realni števili, da velja $x < 2y$. Z indirektnim dokazom pokaži: Če je $7xy \leq 3x^2 + 2y^2$, potem je $3x \leq y$.*

(REŠITEV)

Vaja 1.24. *Dokaži naslednjo ekvivalenco v dveh delih: Naj bosta m in n celi števili. Tedaj sta števili m in n različnih parnosti natanko tedaj, ko je število $m^2 - n^2$ liho.*

(REŠITEV)

Vaja 1.25. *Z uporabo če in samo če dokaza pokaži: $ac \mid bc \Leftrightarrow a \mid b$.*

(REŠITEV)

Vaja 1.26. *Ali je naslednji sklep pravilen?*

(i) *Če je danes sreda bom imel vaje. Danes je sreda.* ***Sklep:*** *Imel bom vaje.*

(ii) *Če se učim, bom opravil izpit. Nisem se učil.* ***Sklep:*** *Ne bom opravil izpita.*

(REŠITEV)

Vaja 1.27. *Ali je naslednji premislek pravilen?*

(i) *Študent se je z mestni avtobusom odpravil na izpit. Rekel si je: Če bo na naslednjem semaforju zelena luč, bom naredil izpit. No, ko je avtobus pripeljal na naslednji semafor, na semaforju ni svetila zelena luč, študent pa si je dejal: Presneto, spet bom padel.*

(ii) *Inženir, ki obvlada teorijo, vedno načrta dobro vezje. Dobro vezje je ekonomično. Torej, inženir, ki načrta neekonomično vezje, ne obvlada teorije.*

(REŠITEV)

Vaja 1.28. *Predpostavi realna števila kot univerzalno množico (tj. vesolje). Določi, katere izmed spodnjih trditev so pravilne:*

(i) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.

(ii) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$.

(iii) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$.

(iv) $(\forall x)[x > 0 \Rightarrow (\exists y)(y < 0 \wedge xy > 0)]$.

1.2 DOKAZ Z INDUKCIJO

(REŠITEV)

Vaja 1.29. *Dokazujte vsako s pomočjo indukcije:*

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(c) $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(f) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

(g) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$

(h) $n! > 2^n$ *za* $n \geq 4$.

(i) $2^{n+1} > n^2$ *za vse pozitivne cele števike.*

(REŠITEV)

Vaja 1.30. *Ta naloga se nanaša na Fibonaccijevo zaporedje:*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

Zaporedje je definirano rekurzivno z $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, *nato* $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ *za vsak* $n > 2$. *Kot prej, dokažite vsako od naslednjih s pomočjo indukcije. Morda bi bilo koristno raziskati več primerov, preden začnete.*

(a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$

(b) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

(c) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$

2 TEORIJA MNOŽIC

Ključni pojmi:

- Relacija pripadnosti. Enakost množic.
- Presek in unija družine množic. Distributivnost. Razlika dveh množic, komplement.
- Podmnožica, relacija inkluzije. Prava podmnožica. Prazna množica.
- Russellova antinomija.
- De Morganova zakona, princip dualnosti.
- Potenčna množica. Kartezični produkt.

(REŠITEV)

Vaja 2.1. *Naj bo*
$A = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$,
$B = \{x \in \mathbb{Z}; |x-2| < 4\}$, *in*
$C = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 4x = 0\}$.

(i) Zapiši elemente vseh treh množic.

(ii) Najdi $A \cup C, B \cap C, B \setminus C, (A \setminus B) \setminus C$ in $A \setminus (B \setminus C)$.

(REŠITEV)

Vaja 2.2. *Naj bodo A, B, C in D množice, in naj bo S univerzalna množica. Poenostavi:*

$$\overline{(\overline{(A \cup B)} \cap \overline{(\overline{A} \cup C)})} \setminus \overline{D}.$$

(REŠITEV)

Vaja 2.3. *Dokaži:*

$$(A \cup C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$$

(REŠITEV)

Vaja 2.4. *Dokaži, da velja* $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

(REŠITEV)

Vaja 2.5. *(Predzadnja lastnost pri preseku) Prove that* $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Rešitev. *V dveh delih.*

(REŠITEV)

Vaja 2.6. *(Predzadnja lastnost pri kartezičnemu produktu) Dokaži:* $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(REŠITEV)

Vaja 2.7. *(Predzadnja lastnost pri razliki) Prove that* $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$. Rešitev.

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus B &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in \emptyset. \end{aligned}$$

(REŠITEV)

Vaja 2.8. *Determine the following sets:*

(i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset \quad [\{\emptyset, \{\emptyset\}\}]$

(ii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$

(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$

(iv) $\{1, 2, 3, \{1\}, \{5\}\} \setminus \{2, \{3\}, 5\}$

(REŠITEV)

Vaja 2.9. *Naj bodo* A, B *in* C *poljubne množice. Katere od spodnjih trditev so pravilne?*

1. *Če velja* $A \in B$ *in* $B \in C$, *potem* $A \in C$.
2. *Če velja* $A \subseteq B$ *in* $B \in C$, *potem* $A \in C$.

3. *Če velja* $A \cap B \subseteq \overline{C}$ *in* $A \cup C \subseteq B$, *potem* $A \cap C = \emptyset$.

4. *Če velja* $A \neq B$ *in* $B \neq C$, *potem* $A \neq C$.

5. *Če velja* $A \subseteq \overline{(B \cup C)}$ *in* $B \subseteq \overline{(A \cup C)}$, *potem* $B = \emptyset$.

(REŠITEV)

Vaja 2.10 (Enakost množic)**.** *Katere naslednjih množic so med seboj enake?*

$$\{r, s, t\}, \{t, r, s, t\}, \{s, s, r, r, t\}, \{t, s, r\}$$

(REŠITEV)

Vaja 2.11. *Ali obstajajo take množice* A, B, C, *da velja* $B \neq C$ *in* $A \cap B = A \cap C$?

(REŠITEV)

Vaja 2.12. *Dana je množica* A. *Poišči vse množice* B, *za katere velja* $A \backslash B = B \backslash A$.

(REŠITEV)

Vaja 2.13. *Drži ali ne drži?*
Za poljubne množice A, B *in* C *velja:*

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C).$$

(REŠITEV)

Vaja 2.14. *Naj bodo* A, B *in* C *Množice. Pokaži:*

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

2. $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$.

3 RELACIJE

Ključni pojmi:

- Binarne relacije: $R = \{(x, y); xRy\} \subseteq S \times S$.
- Unija, presek, razlika relacij.
- Domena binarne relacije, zaloga vrednosti binarne relacije.
- Inverzna relacija. Kompozitum relacij.
- Refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, intranzitivnost, sovisnost, stroga sovisnost.
- Ekvivalenčna relacija. Faktorska množica S/R.

(REŠITEV)

Vaja 3.1. *Naj velja* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. *Ali je* $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (2, 4), (5, 1)\}$ *binarna relacija?*
2. *Za relacijo* R *najdi ustrezno domeno* $\mathcal{D}R$, *in zalogo vrednosti* $\mathcal{Z}R$.
3. *Določi inverzno relacijo* R^{-1} *in* $\mathcal{D}R^{-1}$ *in* $\mathcal{Z}R^{-1}$.

(REŠITEV)

Vaja 3.2. *Naj bosta* $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (1, 5)\}$ *in* $T = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 5)\}$ *binarni relaciji v vesolju* $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. *Določi kompozituma* $R \circ T$ *in* $T \circ R$.
2. *Ali velja* $R \circ T = T \circ R$?

(REŠITEV)

Vaja 3.3. *Naj velja* $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. *Določi*

$$R = \{(x,y) \mid x - y \textit{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x,y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

(REŠITEV)

Vaja 3.4. *V vesolju* $S = \mathbb{R}$ *definiramo relacijo* R:

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R *refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?*

(REŠITEV)

Vaja 3.5. *Naj velja* $S = \{1,2,3,4\}$. *Imamo spodnje relacije:*

(i) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(1,3),(4,4)\}$,

(ii) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$,

(iii) $R_3 = \{(1,3),(2,1)\}$,

(iv) $R_4 = \emptyset$,

(v) $R_5 = S \times S$.

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

(REŠITEV)

Vaja 3.6. *Naj bosta* R *in* S *simetrični relaciji. Pokaži:* $R \circ S$ *simetrična* $\Leftrightarrow$ $R \circ S = S \circ R$.

(REŠITEV)

Vaja 3.7. *V množico* $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ *vpeljemo relaciji* $R = \{(a,c),(a,d),(d,e),(e,a)\}$ *in* $S = \{(a,c),(a,f),(d,c),(f,d)\}$.

(a) *Ali je relacija* $(R \circ R) \cap S$ *irefleksivna?*
(b) *Ali je relacija* $S \circ R$ *sovisna?*
(c) *Ali je relacija* $S \cup (S \circ S)$ *tranzitivna?*
(d) *Ali je relacija* $S^{-1} \cup R$ *simetrična?*

(REŠITEV)

Vaja 3.8. *Dokaži, da je relacija R tranzitivna natanko takrat ko velje $R \circ R \subseteq R$.*

(REŠITEV)

Vaja 3.9. *Naj bo $R \subset S \times S$ relacija. Dokaži, da velja*

$$R \circ R^{-1} = I \iff R \text{ je refleksivna in antisimetrična.}$$

(REŠITEV)

Vaja 3.10. *Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

1. *Ali je $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (2, 4), (5, 1)\}$ binarna relacija?*
2. *Za relacijo R najdi ustrezno domeno $\mathcal{D}R$, in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}R$.*
3. *Določi inverzno relacijo R^{-1} in $\mathcal{D}R^{-1}$ in $\mathcal{Z}R^{-1}$.*

(REŠITEV)

Vaja 3.11. *Naj bosta $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (1, 5)\}$ in $T = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 5)\}$ binarni relaciji v vesolju $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.*

1. *Določi kompozituma $R \circ T$ in $T \circ R$.*
2. *Ali velja $R \circ T = T \circ R$?*

(REŠITEV)

Vaja 3.12. *Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Določi*

$$R = \{(x, y) \mid x - y \text{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x, y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

(REŠITEV)

Vaja 3.13. *V vesolju $S = \mathbb{R}$ definiramo relacijo R:*

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?

(REŠITEV)

Vaja 3.14. *Naj velja* $S = \{1, 2, 3, 4\}$. *Imamo spodnje relacije:*

(i) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,3), (1,3), (4,4)\}$,

(ii) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$,

(iii) $R_3 = \{(1,3), (2,1)\}$,

(iv) $R_4 = \emptyset$,

(v) $R_5 = S \times S$.

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

(REŠITEV)

Vaja 3.15. *Naj bosta* R *in* S *simetrični relaciji. Pokaži:* $R \circ S$ *simetrična* $\Leftrightarrow$ $R \circ S = S \circ R$.

3.1 EKVIVALENČNE RELACIJE

3.2 EKVIVALENCE

(REŠITEV)

Vaja 3.16. *Naj bo* $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0)$ *in definirajmo relacijo* R *na naslednji način*

$$(a, b) R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Pokažite, da je R *ekvivalenčna relacija, in določite ustrezne ekvivalenčne razrede.*

(REŠITEV)

Vaja 3.17. *Naj bo* $S = \mathbb{R}^2$ *in definirajmo relacijo* R *na naslednji način*

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Pokažite, da je R *ekvivalenčna relacija, in določite ekvivalenčni razred* $R[(7, 1)]$.

(REŠITEV)

Vaja 3.18. *Naj bo* $S = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 10\}$ *in* $R = \{(m, n) \in S \times S \mid 3|m - n\}$. *Ali je* R *ekvivalenčna relacija? Če je, določite ustrezne ekvivalenčne razrede in faktorsko množico.*

(REŠITEV)

Vaja 3.19. *Za vsako relacijo* R *na množici* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *določite, ali je* R *ekvivalenčna relacija. Če je, identificirajte ekvivalenčne razrede.*

1. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
2. $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$
3. $R_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$

(REŠITEV)

Vaja 3.20. *Naj bo* S *množica vseh ljudi, in definirajmo relacijo* R *na* S *tako, da velja* $(a, b) \in R$*, če imata* a *in* b *isti mesec rojstva. Dokažite, da je* R *ekvivalenčna relacija, in določite ekvivalenčne razrede.*

(REŠITEV)

Vaja 3.21. *Obravnavajmo množico* $X = \mathbb{Z}$ *(cela števila) in naj bo* R *relacija, definirana z* aRb*, če je* $a - b$ *deljivo s 5. Pokažite, da je* R *ekvivalenčna relacija, in določite ekvivalenčne razrede.*

(REŠITEV)

Vaja 3.22. *Definirajte relacijo* R *na množici vseh trikotnikov v ravnini tako, da velja* $\triangle ABC \, R \, \triangle DEF$*, če so trikotniki podobni. Dokažite, da je* R *ekvivalenčna relacija, in določite ekvivalenčne razrede.*

(REŠITEV)

Vaja 3.23. *Naj bo* X *množica in* $P(X)$ *potenčna množica množice* X *(množica vseh podmnožic množice* X*). Definirajte relacijo* R *na* $P(X)$ *tako, da velja* ARB*, če je* $|A \Delta B|$ *sodo, kjer je* Δ *simetrična razlika. Dokažite, da je* R *ekvivalenčna relacija.*

(REŠITEV)

Vaja 3.24. *Za $a, b \in \mathbb{R}$ definirajte $a \sim b$ kot $ab = 0$. Dokažite ali ovržite vsako od naslednjih trditev:*

1. *Relacija $\sim$ je refleksivna.*
2. *Relacija $\sim$ je simetrična.*
3. *Relacija $\sim$ je tranzitivna.*

(REŠITEV)

Vaja 3.25. *Za $a, b \in \mathbb{R}$ definirajte $a \sim b$ kot $ab \neq 0$. Dokažite ali ovržite vsako od naslednjih trditev:*

1. *Relacija $\sim$ je refleksivna.*
2. *Relacija $\sim$ je simetrična.*
3. *Relacija $\sim$ je tranzitivna.*

(REŠITEV)

Vaja 3.26. *Za $a, b \in \mathbb{R}$ definirajte $a \sim b$ kot $|a - b| < 5$. Dokažite ali ovržite vsako od naslednjih trditev:*

1. *Relacija $\sim$ je refleksivna.*
2. *Relacija $\sim$ je simetrična.*
3. *Relacija $\sim$ je tranzitivna.*

(REŠITEV)

Vaja 3.27. *Definirajte funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z $f(x) = x^2 + 1$. Za $a, b \in \mathbb{R}$ definirajte $a \sim b$ kot $f(a) = f(b)$.*
(a) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}$.
(b) Naštejte vse elemente v množici $\{x \in \mathbb{R} \mid x \sim 3\}$.

(REŠITEV)

Vaja 3.28. *Za točki $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ definirajte $(a, b) \sim (c, d)$ kot $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.*
(a) Dokažite, da je $\sim$ ekvivalenčna relacija na $\mathbb{R}^2$.
(b) Naštejte vse elemente v množici $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \sim (0, 0)\}$.
(c) Naštejte pet različnih elementov v množici $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \sim (1, 0)\}$.

[(REŠITEV)]

Vaja 3.29. *Spomnimo se, da za $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \equiv b \pmod 8$ pomeni, da je $a - b$ deljivo z 8.*

(a) Poiščite vsa cela števila x, za katera velja $0 \leq x < 8$ in $2x \equiv 6 \pmod 8$.

(b) Uporabite Evklidov algoritem za dokaz, da za vsako celo število m obstaja celo število r, za katero velja $m \equiv r \pmod 8$ in $0 \leq r < 8$.

(c) Uporabite Evklidov algoritem za iskanje celih števil r_1 in r_2, za katera velja $0 \leq r_1 < 8$, $0 \leq r_2 < 8$, $1038 \equiv r_1 \pmod 8$ in $-1038 \equiv r_2 \pmod 8$.

[(REŠITEV)]

Vaja 3.30. *Za katera pozitivna cela števila $n > 1$ velja:*

(a) $30 \equiv 6 \pmod n$

(b) $30 \equiv 7 \pmod n$

[(REŠITEV)]

Vaja 3.31. *Naj bosta m in n pozitivni celi števili, tako da m deli n. Dokažite, da za vsa cela števila a in b, če velja $a \equiv b \pmod n$, potem velja $a \equiv b \pmod m$.*

[(REŠITEV)]

Vaja 3.32. *(a) Dokažite ali ovržite: Za vsa pozitivna cela števila n in za vsa cela števila a in b, če velja $a \equiv b \pmod n$, potem velja $a^2 \equiv b^2 \pmod n$.*

(b) Dokažite ali ovržite: Za vsa pozitivna cela števila n in za vsa cela števila a in b, če velja $a^2 \equiv b^2 \pmod n$, potem velja $a \equiv b \pmod n$.

[(REŠITEV)]

Vaja 3.33. *Naj bo $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in definirajmo relacijo R na naslednji način:*

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija, in poišči ustrezne ekvivalenčne razrede.

1. **Zgled: Ulomki.**

   V množici ulomkov

$$a/b\,,$$

kjer sta a in b poljubni celi števili in je $b \neq 0$, je definicija enakosti dveh ulomkov

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$$

očitno ekvivalenčna relacija. Vsak ekvivalenčni razred glede na to relacijo druži vse med seboj enake ulomke in predstavlja tedaj ustrezno *racionalno število*. Prirejena faktorska množica je *množica racionalnih števil*.

2. **Kongruence.**

   V množici *celih števil* je relacija *kongruence po modulu m*, kjer je $m > 0$ poljubno pozitivno celo število,

   $$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow m \text{ deli } a - b\,,$$

   ekvivalenčna relacija.

   Ekvivalenčni razredi so v tem primeru *razredi ostankov* po modulu m. V vsakem ekvivalenčnem razredu so vsa tista števila, ki dajo pri deljenju z m isti ostanek.

   Očitno je takih razredov natanko m. Te razrede imenujemo *cela števila po modulu m*. Faktorska množica je množica celih števil po modulu m.

3. **Zgled: Vzporednost premic.**

   V množici *vseh premic* je relacija "vzporeden" ekvivalenčna relacija. V vsakem ekvivalenčnem razredu so torej vse premice, ki so med seboj vzporedne, in predstavljajo potemtakem določeno *smer*. Faktorska množica je tukaj *množica vseh smeri*.

4. Let $S = \{m \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq n \leq 10\}$ in $R = \{(m,n) \in S \times S \,|\, 3|m-n\}$. Is R an equivalence relation? If yes, determine the corresponding equivalence classes and the factor set.

5. Let $S = \mathbb{R}^2$ and define the relation R as follows

   $$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

   Show that R is an equivalence relation and find the equivalenece class $R[(7,1)]$.

3.3 FUNKCIJE

Ključni pojmi:

- funkcija = enolična binarna relacija:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z)\,.$$

- Surjektivnost. Injektivnost. Slika podmnožice U pri preslikavi f.
- Inverzna relacija funkcije. Praslike.
- Kompozitum funkcij.
- Zožitve in razširitve.
- Kanonična dekompozicija funkcije.

(REŠITEV)

Vaja 3.34. *Naj bo $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x,y,z\}$, $C = \{a,b\}$.*
Dani sta funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(1,x),(2,y),(3,y),(4,x)\}$$

$$g = \{(x,a),(y,b),(z,b)\}$$

(a) Ali je f injektivna?
(b) Ali je f surjektivna?
(c) Ali je g injektivna?
(d) Ali je g surjektivna?
(e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?
(f) Zapiši množici $f^{-1}(\{x,z\})$ in $g(\{x,z\})$.
(g) Zapiši kanonično dekompozicijo funkcije f.

Rešitev:
(a) Ne, saj je $f(1) = f(4)$.
(b) Ne, saj $z \notin \mathcal{Z}f$.
(c) Ne, saj je $g(y) = g(z)$.
(d) Da.
(e) $g \circ f = \{(1,a),(2,b),(3,b),(4,a)\}$. Da, $g \circ f$ je surjektivna.
(f) $f^{-1}(\{x,z\}) = \{1,4\}$, $g(\{x,z\}) = \{a,b\}$.

1. Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, b\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, y), (4, x)\}$$

$$g = \{(x, a), (y, b), (z, b)\}$$

   (a) Ali je f injektivna?

   (b) Ali je f surjektivna?

   (c) Ali je g injektivna?

   (d) Ali je g surjektivna?

   (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

2. Naj bo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$$

$$g = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$$

   (a) Ali je f injektivna?

   (b) Ali je f surjektivna?

   (c) Ali je g injektivna?

   (d) Ali je g surjektivna?

   (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

3. Naj bo $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{a, b, c\}$. Imamo funkciji $f : A \to B$ in $g : B \to C$.

$$f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$$

$$g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

(a) Ali je f injektivna?

(b) Ali je f surjektivna?

(c) Ali je g injektivna?

(d) Ali je g surjektivna?

(e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

4. Pokaži da je $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x = y^3\}$ funkcija oblike $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.

5. Ali je $g = \{(x,y) \in [-5,5] \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 25\}$ funkcija oblike $g : [-5,5] \mapsto \mathbb{R}$.

6. Pokaži da spodnje relacije niso funkcije z domeno $\mathbb{R}$:

   (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 = y^2\}$,

   (ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = \cos(y)\}$,

   (iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = \sqrt{x}\}$.

7. Katere od spodnjih funkcij so injektivne ali surjektivne:

   (i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^2$,

   (ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}; f(x) = \lfloor x \rfloor$,

   (iii) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+; f(x) = \sqrt{x}$,

   (iv) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}; f(x) = |x|$.

8. Podane imamo naslednje funkcije

   (i) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(n) = \begin{cases} 2n, & n \text{ sodo} \\ 3n - 1, & n \text{ liho}, \end{cases}$

   (ii) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(x) = (x^2, x^3)$.

   Najdi

   (a) slike $f(\{1,2,3\})$ ter $f(\mathbb{N})$.

   (b) praslike (oz. inverze) $f^{-1}(\{1,2,3,4\})$ ter $f^{-1}(\{(1,-1),(4,8)\})$ (tam kjer so definirane).

9. Naj bosta $f \colon X \to Y$ ter $g \colon X \to Z$ dve bijektivni funkciji. Ali je funkcija $h \colon X \to Y \times Z$ definirana z

$$h(x) = (f(x), g(x)),$$

(i) injektivna, (ii) surjektivna?

10. Naj bodo A, B in C poljubne množice, in naj bosta $g \colon A \to B$ ter $f \colon B \to C$ funkciji. Pokaži:
    (i) če sta f, g injektivni, potem je tudi $f \circ g$ injektivna,
    (ii) če sta f, g are surjektivni, potem je tudi $f \circ g$ surjektivna.

3.4 TEORIJA GRAFOV

(rešitev)

Vaja 3.35. ***Stopnje in lema o rokovanju***
Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *in množico povezav*

$$E(G) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

1. *Izračunaj stopnjo* $deg(v)$ *za vsako vozlišče* $v \in V(G)$.
2. *Določi* $\Delta(G)$ *(maksimalna stopnja) in* $\delta(G)$ *(minimalna stopnja).*
3. *Preveri osnovno lastnost vsote stopenj (Lema o rokovanju).*

(rešitev)

Vaja 3.36. ***Operacije na grafih: Odstranjevanje***
Obravnavajmo cikel C_4 *z vozlišči označenimi z* $1, 2, 3, 4$ *in povezavami* $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1$

1. *Naj bo* $G' = C_4 - v$*, kjer je* $v = 1$*. Identificiraj dobljeni graf.*
2. *Naj bo* $G'' = C_4 - e$*, kjer je* $e = \{1, 2\}$*. Ali je* G'' *povezan?*

(rešitev)

Vaja 3.37. ***Posebni grafi***
Obravnavajmo polni graf K_5.

1. *Poišči velikost (število povezav) grafa K_5.*

2. *Določi klično število $\omega(K_5)$ in neodvisnostno število $\alpha(K_5)$.*

(rešitev)

Vaja 3.38. ***Podgrafi proti induciranim podgrafom***
Zapiski predavanj razlikujejo med podgrafi (odstranitev vozlišč/povezav) in induciranimi podgrafi (le odstranitev vozlišč).

1. *Naj bo $G = C_5$ (Cikel: $1-2-3-4-5-1$). Ali G vsebuje P_3 (Pot: $a-b-c$) kot **inducirani** podgraf?*

2. *Naj bo $G = K_4$. Ali je C_4 (Cikel 4) podgraf grafa K_4? Ali je **induciran** podgraf?*

(rešitev)

Vaja 3.39. ***Izomorfizem in invariante***
Naj bo $G = C_6$ (cikel dolžine 6) in $H = 2K_3$ (dva disjunktna trikotnika).

1. *Izračunaj število vozlišč in stopnje za oba grafa, G in H.*

2. *Določi ožino $g(G)$ in $g(H)$.*

3. *Ali sta G in H izomorfna?*

(rešitev)

Vaja 3.40. ***Avtomorfizmi***
Avtomorfizem je izomorfizem iz grafa nase. Obravnavajmo graf poti P_3 z vozlišči $V = \{1,2,3\}$ in povezavami $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$.

1. *Poišči stopnjo vsakega vozlišča.*

2. *Naštej vse avtomorfizme $\phi : V \to V$.*

(rešitev)

Vaja 3.41. ***Ožina in drevesa***
Ožina $g(G)$ je velikost najkrajšega cikla, ki ga G vsebuje kot podgraf.

1. *Konstruiraj graf z $\Delta(G) = 2$ in $g(G) = 4$.*

2. *Kakšna je ožina drevesa (povezan graf brez ciklov)?*

(REŠITEV)

Vaja 3.42. ***Načelo golobnjaka v grafih***
Naj bo G enostaven graf z n vozlišči ($n \geq 2$). Dokaži, da morata obstajati vsaj dve vozlišči $u, v \in V(G)$, tako da je $deg(u) = deg(v)$.
(Namig: Premisli o možnih vrednostih, ki jih lahko zavzame stopnja vozlišča. Ali lahko graf vsebuje hkrati vozlišče stopnje 0 in vozlišče stopnje $n-1$?)

(REŠITEV)

Vaja 3.43. ***Strukturni dokaz obstoja (Argument najdaljše poti)***
Naj bo G končen graf, kjer ima vsako vozlišče stopnjo vsaj 2 (tj. $\delta(G) \geq 2$). Dokaži, da mora G vsebovati cikel.
(Namig: Obravnavaj najdaljšo pot $P = v_1 - v_2 - ... - v_k$ v grafu. Poglej sosede končnega vozlišča v_k.)

(REŠITEV)

Vaja 3.44. ***Ekstremalna teorija grafov: Grafi brez trikotnikov***
Graf imenujemo "brez trikotnikov"(triangle-free), če ne vsebuje K_3 (polnega grafa velikosti 3) kot podgraf. Ekvivalentno, $\omega(G) < 3$.

1. *Nariši graf s 5 vozlišči, ki je brez trikotnikov, a ima kar se da veliko povezav. Koliko povezav ima?*

2. *Dokaži, da je graf G na n vozliščih brez trikotnikov, če je dvodelen (bipartite).*

(REŠITEV)

Vaja 3.45. ***Grupe avtomorfizmov ciklov proti potem***
Naj bo C_4 graf cikla s 4 vozlišči in P_4 graf poti s 4 vozlišči.

1. *Določi število avtomorfizmov za P_4.*

2. *Določi število avtomorfizmov za C_4.*

3. *Razloži, zakaj se simetrija (število avtomorfizmov) poveča, ko dodamo povezavo grafu P_4, da ga spremenimo v C_4.*

(REŠITEV)

Vaja 3.46. *Naj bo $G = (V, E)$ graf iz slike. potem ga nariši, ter določi*

1. *Nariši graf.*
2. *Določi največjo in najmanjšo stopnjo, tj. $\Delta(G)$, $\delta(G)$.*
3. *Določi velikost največje klike, tj. $\omega(G)$.*
4. *Določi ožino grafa, tj. $g(G)$.*
5. *Določi velikost največje neodvisne množice, tj. $\alpha(G)$.*
6. *Določi minimalno število barv, potrebnih za barvanje grafa, tj. $\chi(G)$.*

(rešitev)

Vaja 3.47. *Naj velja $n \geq 3$. Spomnimo definicijo ciklov in polnih grafov*

$$C_n = \{[n], E_1\}$$

$$K_n = \{[n], E_2\}$$

ter definirajmo

$$G_n = \{[n], E_2 \setminus E_1\}$$

- *Nariši $H, G_4, G_5, G_6, C_5, C_6, \overline{C_i}$*
- *Za vse zgornje grafe določi $\Delta(G_i), \delta(G_i), \alpha(G_i), \omega(G_i), \chi(G_i), g(G_i)$*
- *Dokaži $(\forall i \geq 3)(G_i \simeq \overline{C_i})$*

(rešitev)

Vaja 3.48. *Naj bo $G = ([n], E)$ graf.*

- *Dokaži: $\chi(G) \geq \omega(G)$*
- *Dokaži: $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$*

3.5 STRUKTURE UREJENOSTI

Ključni pojmi:

- Tranzitivnost, navidezna urejenost, šibka urejenost, delna urejenost, linearna urejenost, stroga delna urejenost, stroga linearna urejenost.
- Dobra urejenost. Mreža. Polna mreža.
- Hassejev diagram.
- R-prvi element. R-minimalni element. Neposredni naslednik. Zadnji element.
- R-spodnja meja, R-zgornja meja, R-navzdol omejena množica, R-navzgor omejena množica, R-omejena množica, R-infimum (največja spodnja meja), R-supremum (najmanjša zgornja meja).

(REŠITEV)

Vaja 3.49. *Naj bo $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ potenčna množica množice $A = \{1,2\}$. Definirajmo relacijo $R \subseteq P(A) \times P(A)$ tako, da velja $(X,Y) \in R$ če in samo če $X \subseteq Y$. Dokaži, da je R delna urejenost.*

(REŠITEV)

Vaja 3.50. ***Navidezna urejenost*** *je relacija, ki je* ***refleksivna*** *in* ***tranzitivna****.* ***Delna urejenost*** *je relacija, ki je* ***refleksivna****,* ***antisimetrična*** *in* ***tranzitivna****.*

Na podlagi definicij:

1. *Pokaži, da je vsaka delna urejenost tudi predurejenost.*
2. *Podaj primer navidezne urejenosti, ki NI delna urejenost.*

(REŠITEV)

Vaja 3.51. *Diagram nakazuje, da je* ***stroga delna urejenost*** *določena le z lastnostjo* ***tranzitivnosti*** *in dodatno lastnostjo.*

1. *Katera je standardna dodatna lastnost, ki definira strogo delno urejenost? (Namig: To je lastnost, ki zagotavlja, da (a,a) nikoli ni v relaciji.)*

2. *Pokaži, da je relacija R stroga delna urejenost če in samo če je **tranzitivna** in **irefleksivna**.*

(REŠITEV)

Vaja 3.52. ***Linearna urejenost*** *(ali **polna urejenost**) je delna urejenost, ki je tudi **polna** (totalna). **Stroga linearna urejenost** (ali **stroga polna urejenost**) je stroga delna urejenost, ki je tudi **polna** na vseh različnih parih (t.j. za $a \neq b$ mora veljati $(a, b) \in R$ ali $(b, a) \in R$).*

Pokaži, da za katero koli množico A obstaja bijektivna korespondenca med množico linearnih ureditev na A in množico strogih linearnih ureditev na A.

(REŠITEV)

Vaja 3.53. *Izberi diagram iz Appendix B.1 in označi $S = \{1, 2, \ldots\}$. Naj bodo $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = S$ in $D = \emptyset$.*

1. *Za množice A, B, C in D izpolni naslednjo tabelo:*

	R-spodnje meje	R-zgornje meje	R-infimum	R-supremum
A				
B				
C				
D				

2. *Ugotovi, ali je delno urejena množica mreža. Če ni, določi ustrezno množico, ki ne premore infimuma ali supremuma.*

(REŠITEV)

Vaja 3.54. *Izberi diagram iz Appendix B.2 z $S = \{a, b, \ldots\}$ in nastavi $A = \{a, c\}$, $B = \{b, d, e\}$, $C = S$ in $D = \emptyset$.*

1. *Za množice A, B, C in D izpolni naslednjo tabelo:*

	R-spodnje meje	R-zgornje meje	R-infimum	R-supremum
A				
B				
C				
D				

2. *Ugotovi, ali je delno urejena množica mreža. Če ni, določi ustrezno množico, ki ne premore infimuma ali supremuma.*

(REŠITEV)

Vaja 3.55. *Naj bo* $S = \{(x, y) \; : \; x, y \in \mathbb{R} \text{ in } y \leq 0\}$ *in naj bo* R *relacija na* S*, definirana z*

$$(x_1, y_1) \, R \, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 \leq y_2.$$

(i) *Pokaži, da je* R *delna urejenost na* S*.*

(ii) *Poišči vse* R*-minimalne elemente.*

(REŠITEV)

Vaja 3.56. *Naj bo* $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1\}$ *in naj bo* $R = \{(a, b) \mid a < b\}$ *relacija na* S*. Ali* R *dobro uredi* S*?*

(REŠITEV)

Vaja 3.57. *Naj bo* $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *in naj bo* R *relacija na* S*, definirana z*

$$m \, R \, n \Leftrightarrow \; p < u \text{ ali } (p = u \text{ in } q < v),$$

kjer sta $m = 2^p(2q + 1)$ *in* $n = 2^u(2v + 1)$*, pri čemer sta* p *in* u *največja možna eksponenta.*

(i) *Pokaži, da* R *dobro uredi* S*.*

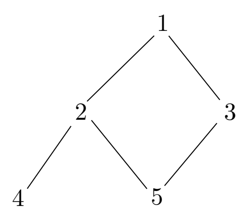
(ii) *Uredi množico* $\{1, 2 \ldots, 10\}$ *glede na* R*.*

(iii) *Naj bo* $C = \{50, 51, 52, \ldots\}$*. Poišči* R*-minimalni element množice* C*.*

(iv) *Poišči neposrednega naslednika števila* 96*.*

(REŠITEV)

Vaja 3.58. *Množica* $S = \{1, \ldots, 5\}$ *je strogo delno urejena z naslednjo relacijo* R*:*



(a) *Zapišite vse urejene pare, ki tvorijo relacijo R.*
(b) *Poiščite vse minimalne in maksimalne elemente.*
(c) *Ali ima množica S prvi element? Ali ima množica S zadnji element?*

(rešitev)

Vaja 3.59. *Naj bo* $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}$ *in* $y \leq 0\}$ *in naj bo R relacija na množici S, definirana kot*

$$(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 \leq y_2.$$

(i) *Dokažite, da je R delna urejenost na S.*

(ii) *Najdite vse R-minimalne elemente.*

3.5.1 Principi maksimalnosti in dobra urejenost

(rešitev)

Vaja 3.60. *Naj bo* $R \subseteq S \times S$ *diagram iz razdelka B.2 oz. B.1 stroga delna urejenost.*

1. *Določi maksimalne in minimalne elemente (glede na S).*
2. *Določi prvi, ter zadnji element od R (glede na S).*
3. *Ali je R dobra urejenost?*

(rešitev)

Vaja 3.61. *Ali je relacija iz Vaje 3.58 dobro urejena?*

(rešitev)

Vaja 3.62. *Naj bo* $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots, 1\}$, *in naj bo* $R = \{(a, b) \mid a < b\}$ *relacija na S. Ali R dobro ureja S?*

(rešitev)

Vaja 3.63. *Naj bo* $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *in naj bo R relacija na S, definirana kot*

$$m\, R\, n \Leftrightarrow\ p < u \text{ ali } (p = u \text{ in } q < v),$$

kjer je $m = 2^p(2q + 1)$ *in* $n = 2^u(2v + 1)$, *pri čemer sta p in u maksimalno možna eksponenta.*

(i) *Dokažite, da R dobro ureja S.*

(ii) *Uredite množico $\{1, 2 \ldots, 10\}$ glede na R.*

(iii) *Naj bo $C = \{50, 51, 52, \ldots\}$. Najdite R-minimalni element množice C.*

(iv) *Najdite neposrednega naslednika števila 96.*

4 KONČNE IN NESKONČNE MNOŽICE

4.1 PREGLED NAJPOMEMBNEJŠIH POJMOV IN NEKAJ NALOG

Ključni pojmi:

- Relacija ekvipolence: $A \sim B$.
- Relacija $>$ na množicah ("ima večjo moč kot").
- Schröder-Bernsteinov izrek: Množici A in B sta ekvipolentni, če je vsaka od njiju ekvipolentna neki podmnožici druge.
- Zakon trihotomije.
- Definicije končnih in neskončnih množic. (S pomočjo $\mathbb{N}$; Peirce-Dedekind; Tarski.)
- Množica $\mathbb{N}$, Peanovi aksiomi.
- Števno neskončne množice.
- Interval $(0,1]$ ni števno neskončna množica; Cantorjev dokaz.
- $(0,1] \sim [0,1) \sim [0,1] \sim (0,1) \sim (-1,1) \sim \mathbb{R}$.
- Kontinuum. $\mathbb{R} > \mathbb{N}$.
- Cantorjev izrek. Domneva kontinuuma.

(REŠITEV)

Vaja 4.1. *Pokažite, da ima množica vseh funkcij $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ večjo moč kot $\mathbb{R}$.*

Rešitev: Pokazali smo, da je potenčna množica poljubne množice X ekvipolentna množici $\mathcal{C}(X)$ vseh funkcij $f : X \to \{0,1\}$. Po Cantorjevem izreku je torej

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}) > \mathbb{R}\,.$$

Torej ima že množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ večjo moč od kontinuuma! $\square$

4.2 ZGLEDI ŠTEVNO NESKONČNIH MNOŽIC

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je števno neskončna (saj je $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$).

Tudi *množica racionalnih števil* $\mathbb{Q}$ je števno neskončna!

Očitno je dovolj pokazati, da je množica pozitivnih racionalnih števil $\mathbb{Q}_+$ števno neskončna, saj je $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ in je $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$.

Množico $\mathbb{Q}_+$ pa lahko zapišemo kot števno unijo števno neskončnih množic:

$$\mathbb{Q}_+ = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

kjer je:

$A_1 = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\}$,
$A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\}$,
$A_3 = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \ldots\}, \ldots$

Algebraično število: tako kompleksno število x, ki je rešitev kake enačbe oblike

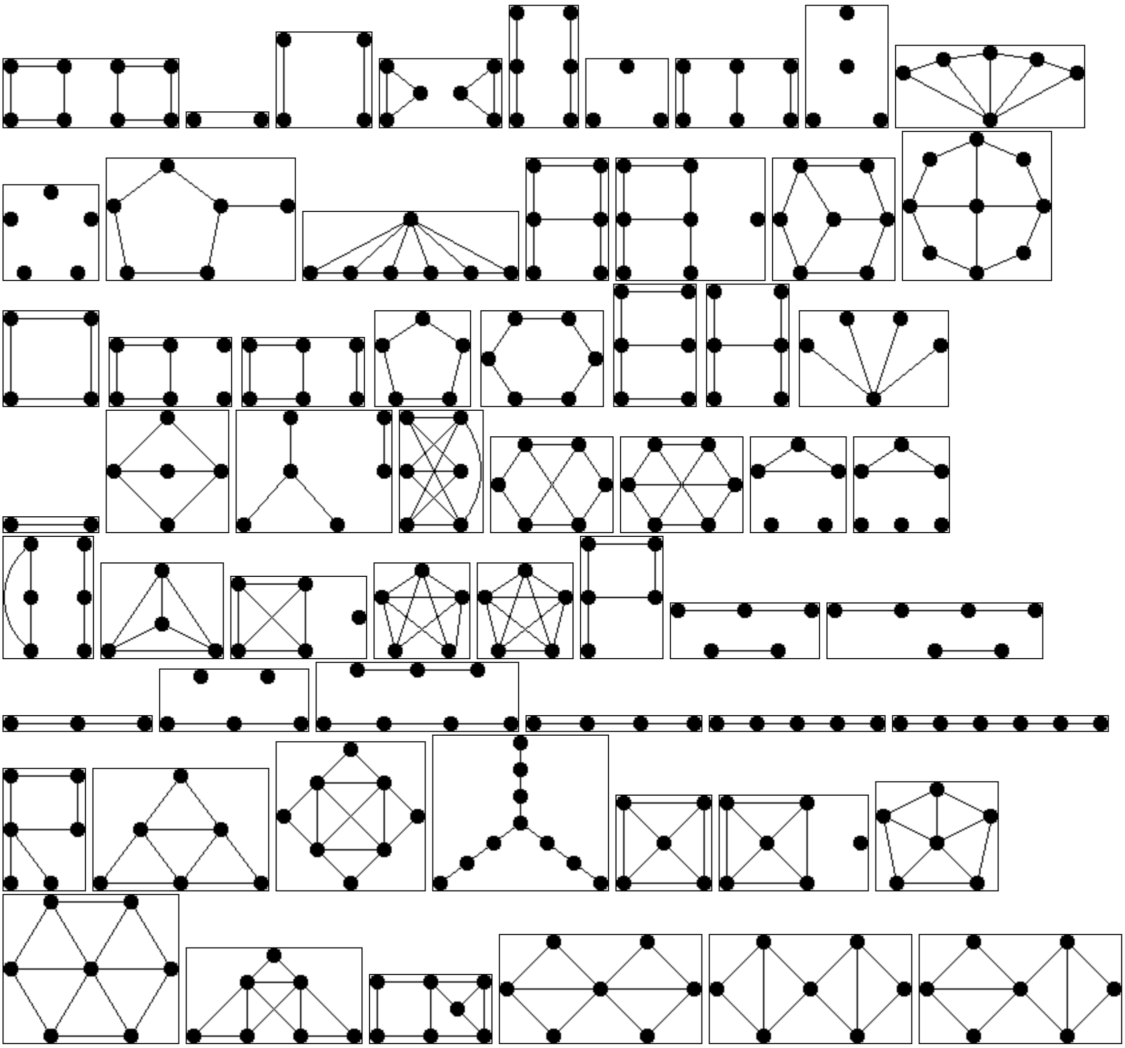
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,,$$

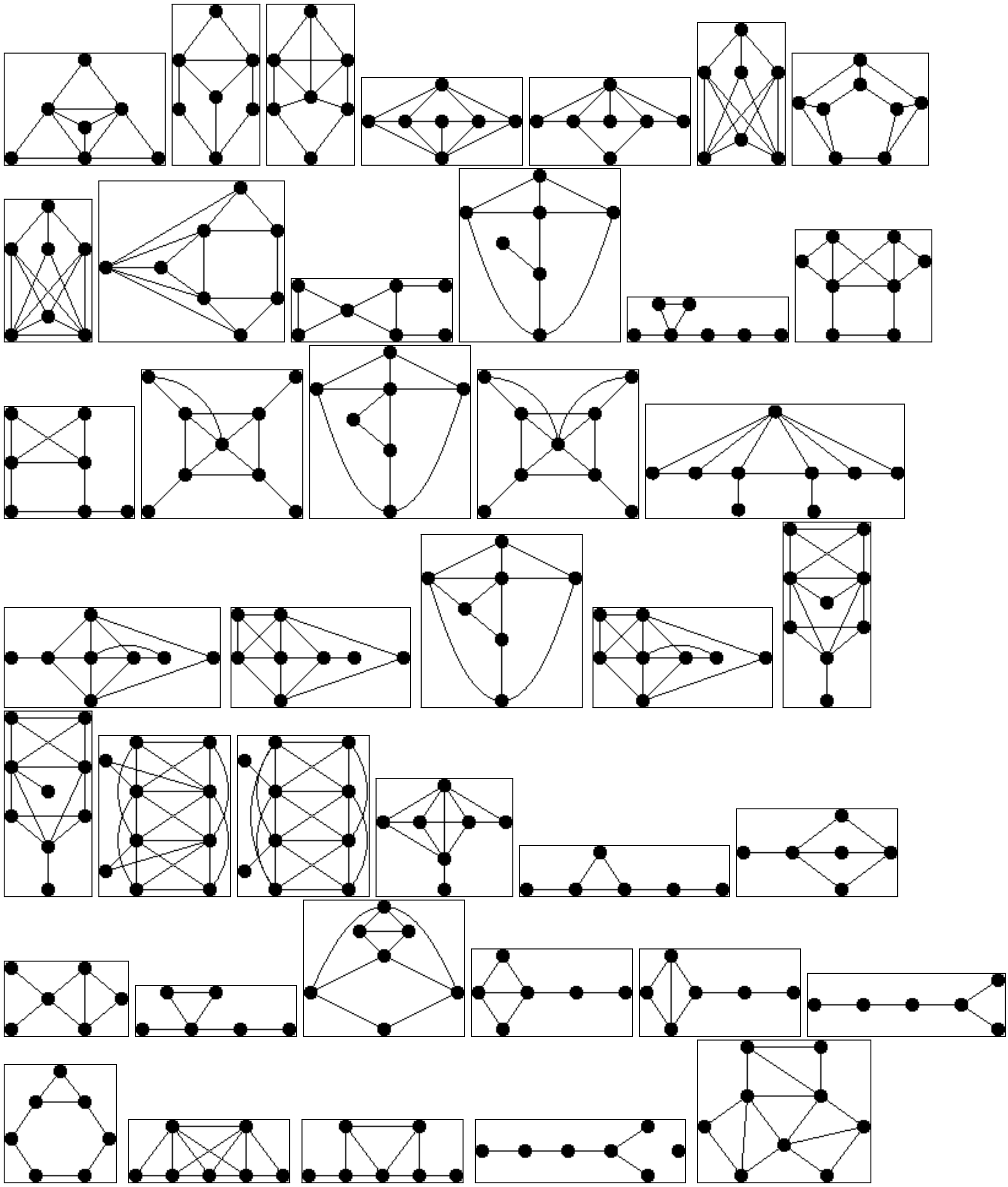
kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a_n \neq 0$ in $a_i \in \mathbb{Z}$ za vse i. Tudi množica algebraičnih števil je števno neskončna. Zapišemo jo namreč lahko kot (števno neskončno) unijo končnih množic:

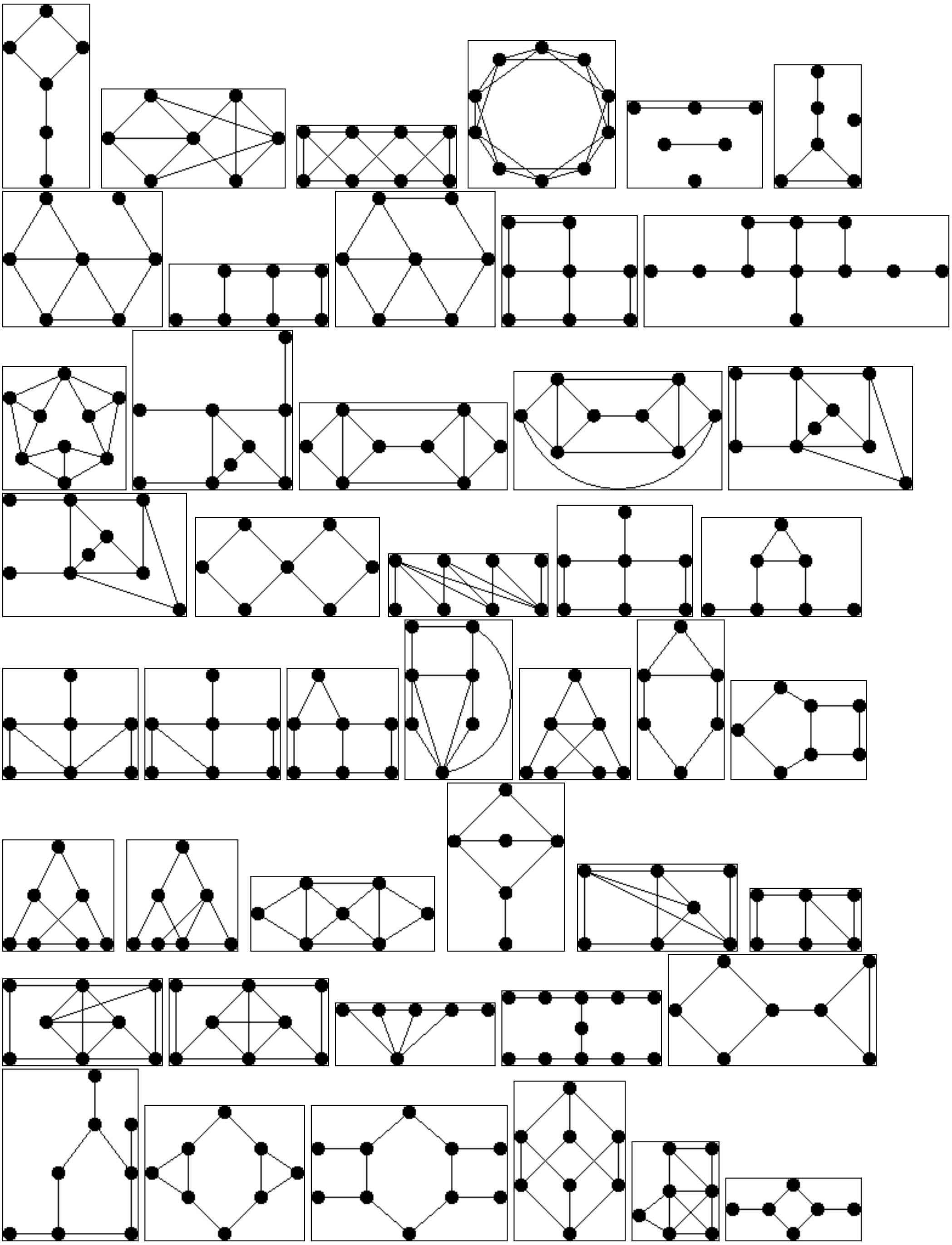
$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots\,,$$

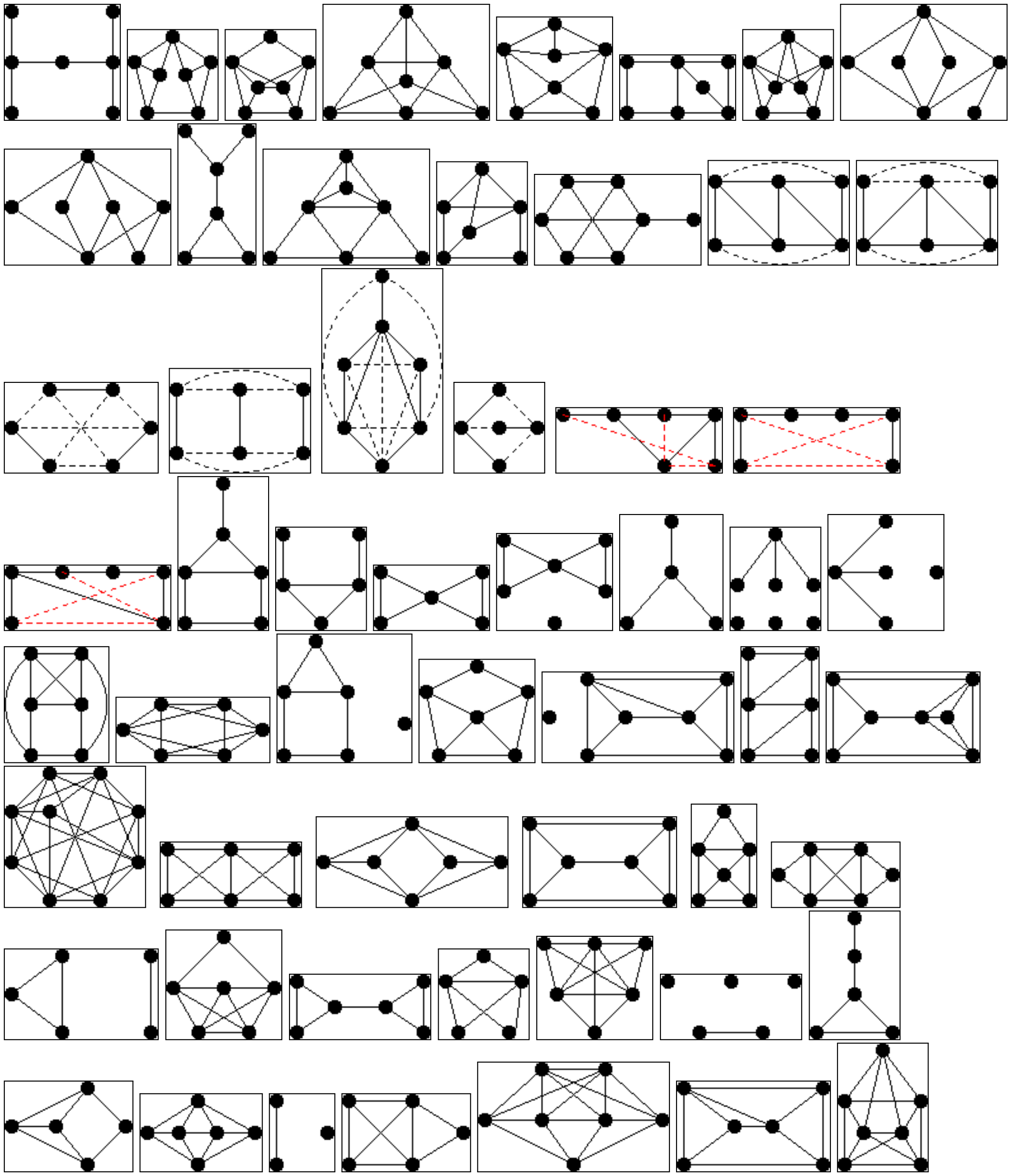
kjer je A_k množica vseh kompleksnih števil, ki so rešitve kakšne enačbe zgornje oblike, pri čemer za njene koeficiente velja $n + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \leq k$. Vsaka množica A_k je končna, saj vsebuje le ničle kvečjemu $(2k+1)^{k+1}$ polinomov stopnje $\leq k$ s koeficienti iz množice $\{-k, -(k-1), \ldots, k-1, k\}$, vsak od takih polinomov pa ima $\leq k$ ničel.

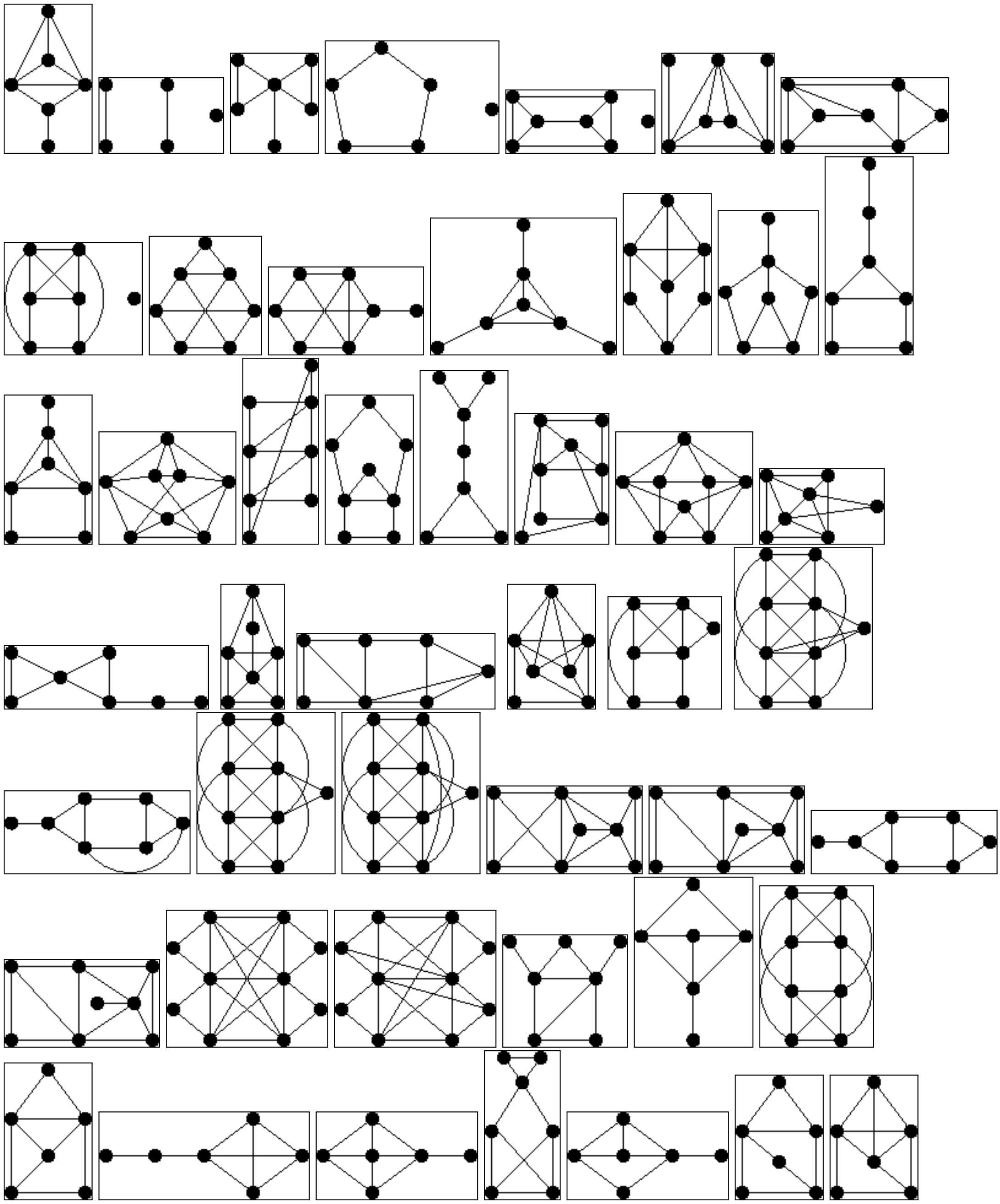
A SEZNAM GRAFOV

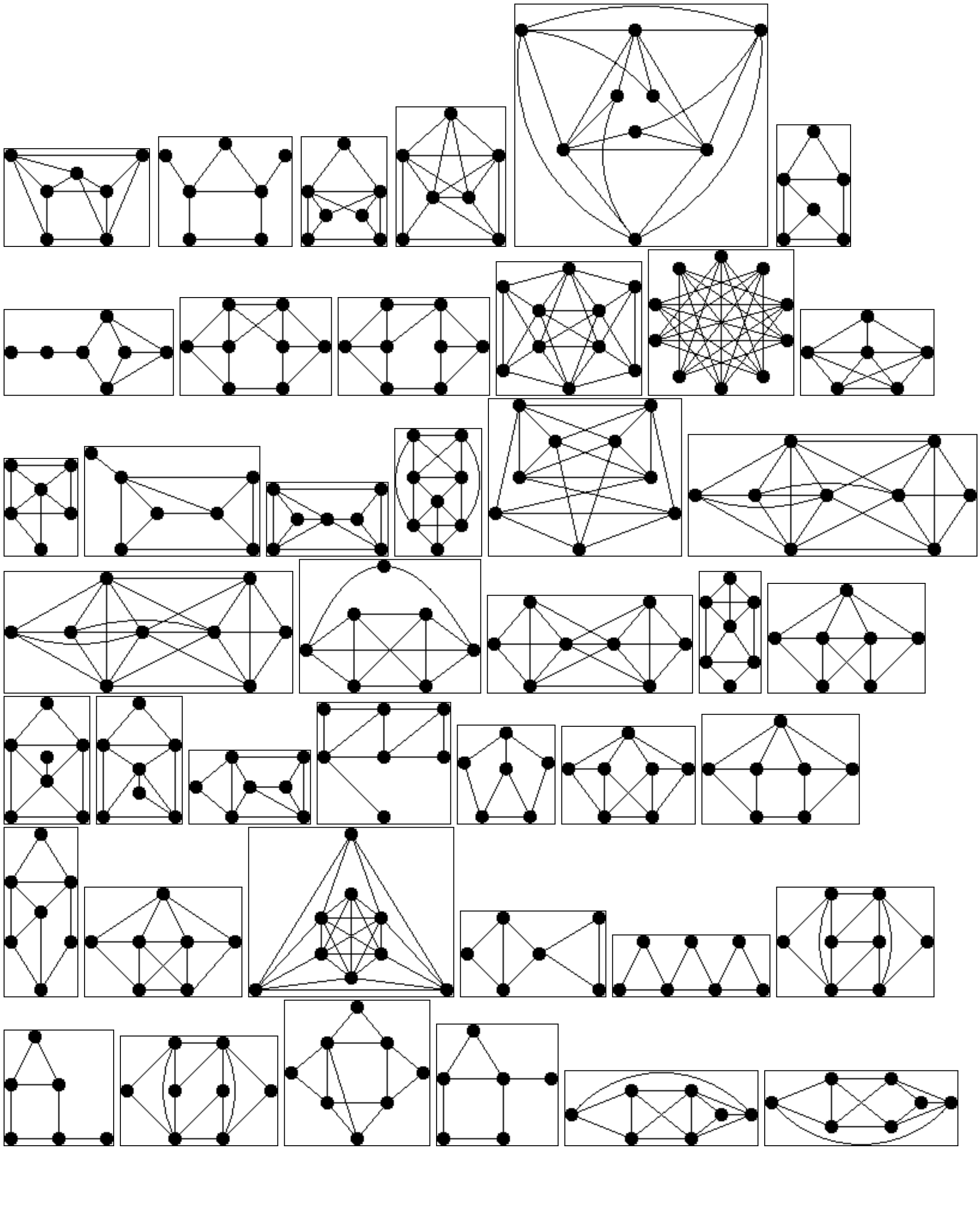


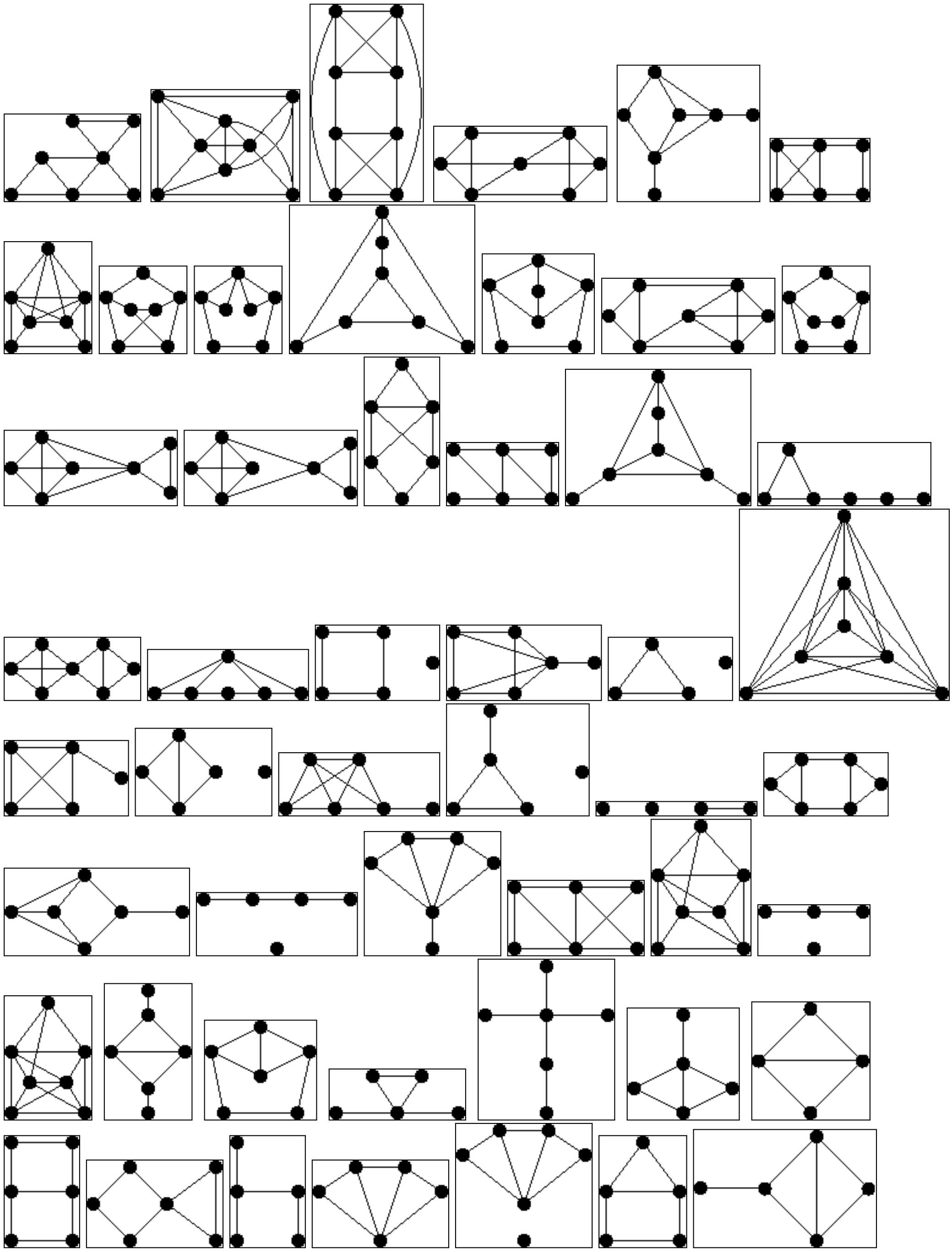


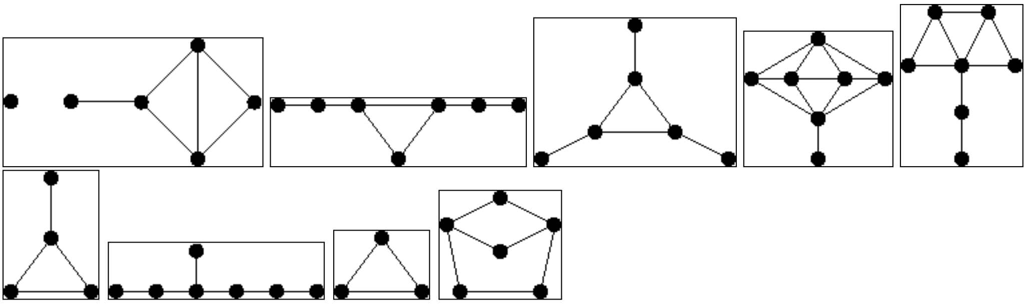






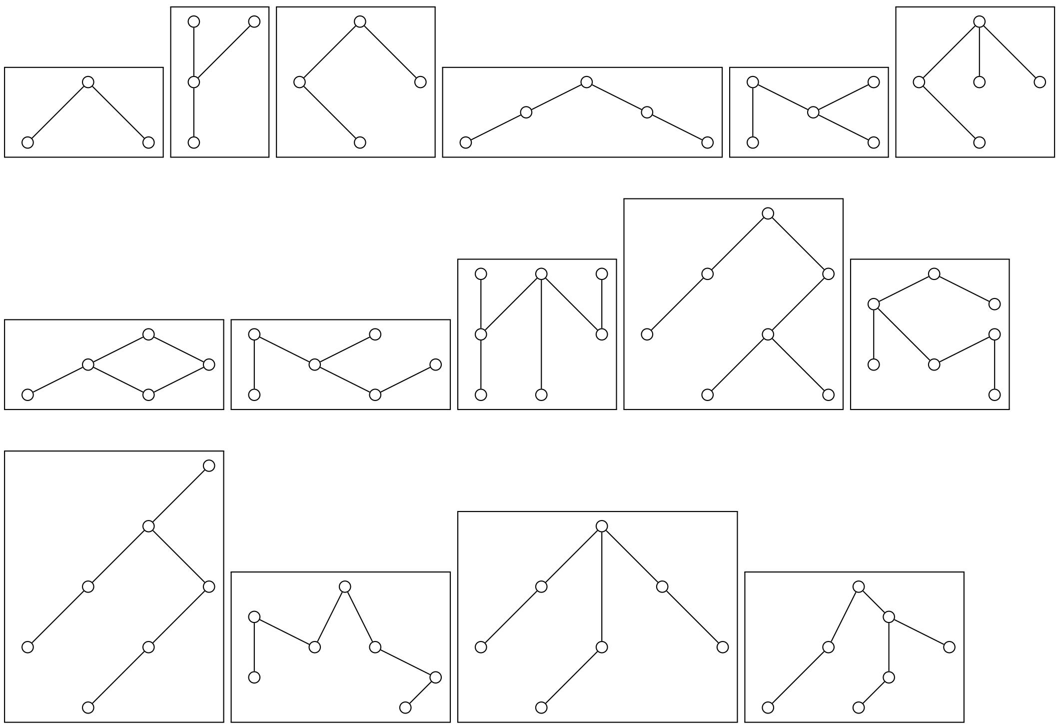






B SEZNAM HASSEJEVIH DIAGRAMOV

B.1 NEOZNAČENI DIAGRAMI



B.2 OZNAČENI DIAGRAMI

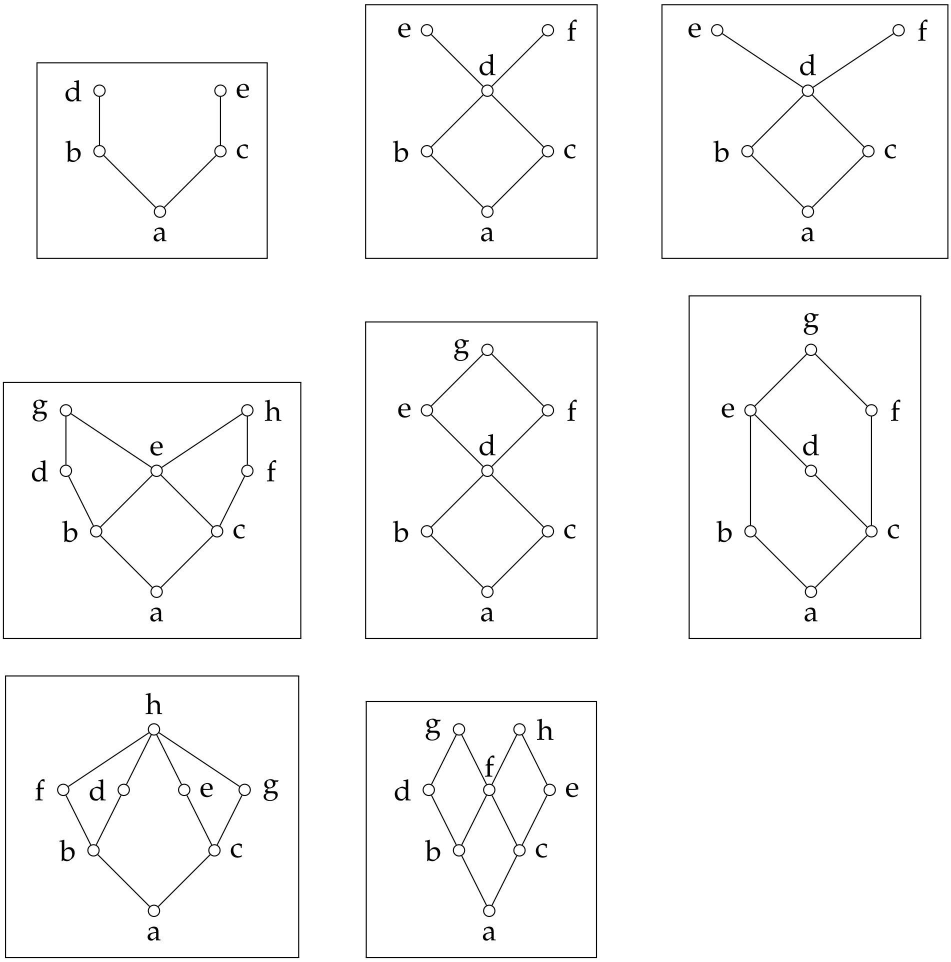


Tabela 1: Seznam Hassejevih diagramov.

C REŠITVE

Rešitev za vajo 1.2 (nazaj na vajo): Rešitve, po vrsti, so:

1. $(A \vee B) \wedge \neg C$
2. $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$
3. $\neg(A \wedge \neg C)$
4. $\neg((B \vee C) \wedge \neg A)$

Rešitev za vajo 1.4 (nazaj na vajo): Nariši skico. Premica q leži v ravnini, in jo določata p in r.

Rešitev za vajo 1.8 (nazaj na vajo): Naj bo A izjava: "A je vitez", itd. Iščemo tisto edino določilo d, za katerega je izjava

$$A_1 \wedge B_1 \wedge C_1 \wedge D_1$$

pravilna, kjer je:
$A_1 : A \Leftrightarrow (\neg D \wedge \neg C)$
$B_1 : B \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg D \Rightarrow \neg C)$
$C_1 : C \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
$D_1 : D \Leftrightarrow (\neg E \Rightarrow \neg C \wedge \neg B)$

Ker bi pravilnostna tabela vsebovala 32 vrstic, rešimo nalogo raje z analizo primerov.

1. primer: $A(d) = 1$. Zaradi A_1 je potem $D(d) = 0$ in $C(d) = 0$.
V izjavo C_1 vstavimo $A(d) = 1$ in $C(d) = 0$, dobimo: $\neg(\neg B \Rightarrow 1)$,
$\neg(B \vee 1)$,
$\neg 1$, to pa je nepravilna izjava.

Torej 1. primer ni mogoč.
2. primer: $A(d) = 0$.
Zaradi A_1 je bodisi $C(d) = 1$ ali pa $D(d) = 1$.
2.1.: $C(d) = 1$.
Zaradi C_1 je $\neg B \Rightarrow 0$, torej je $\neg B = 0$ in posledično $B(d) = 1$.
V izjavo B_1 vstavimo $A(d) = 0$, $B(d) = 1$, $C(d) = 1$, dobimo:
$1 \wedge \neg D \Rightarrow 0$
$\neg D \Rightarrow 0$
Sledi $\neg D = 0$ oz. $D(d) = 1$.
Vstavimo v izjavo D_1 znane vrednosti:
$(\neg E \Rightarrow 0 \wedge 0)$
Sledi $E(d) = 1$.

2.2.: $C(d) = 0$ **in** $D(d) = 1$.
Iz izjave B_1 dobimo $B(d) = 1$.
Izjava C_1 pa je sedaj nepravilna: $0 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1)$. □
Torej so B, C, D in E vitezi, A pa je oproda.

Rešitev za vajo 1.9 (nazaj na vajo): Označimo:
A_1: Mislim.
A_2: Sem.
A_3: Sklepam.
Zanima nas pravilnost implikacije

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_1 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$$

Pri določilu $A_1(d) = 0$, $A_2(d) = 1$, $A_3(d) = 0$ je ta implikacija nepravilna! (Ne mislim, sem, ne sklepam.) Torej je sklepanje napačno.

Rešitev za vajo 1.10 (nazaj na vajo): Označimo izjave:
A_1: Sem dojenček.
A_2: Obnašam se nelogično.
A_3: Sposoben sem ukrotiti krokodila.
A_4: Vreden sem spoštovanja.
$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_3 \Rightarrow A_4) \wedge (A_2 \Rightarrow \neg A_4) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow \neg A_3)$
Pa recimo, da je sklep napačen. Tedaj obstaja določilo d, da velja

(1) $(A_1(d) \Rightarrow \neg A_3(d)) = 0$

(2) $(A_1(d) \Rightarrow A_2(d)) = 1$

(3) $(A_3(d) \Rightarrow A_4(d)) = 1$

(4) $(A_2(d) \Rightarrow \neg A_4(d)) = 1$

Torej je, zaradi (1), $A_1(d) = 1$ in $A_3(d) = 1$. Zaradi (2) je $A_2(d) = 1$. Zaradi (4) je $A_4(d) = 0$. To pa je protislovje s (3).

Torej je sklepanje pravilno. □

Rešitev za vajo 1.11 (nazaj na vajo): Označimo izjave:
K: Morilka je kuharica.
S: Morilec je strežnik.
Š: Morilec je šofer.
H: Kuharica je zastrupila hrano.
B: Šofer je postavil bombo v avto.

Ali je naslednja implikacija tavtologija?
$(K \vee S \vee \text{Š}) \wedge (K \Rightarrow H) \wedge (\text{Š} \Rightarrow B) \wedge (\neg H \wedge \neg S) \Rightarrow \text{Š}$
Dokazujemo direktno:

1. $(K \vee S \vee \text{Š})$ (Predpostavka)
2. $(K \Rightarrow H)$ (Predpostavka)
3. $(\text{Š} \Rightarrow B)$ (Predpostavka)
4. $(\neg H \wedge \neg S)$ (Predpostavka)
5. $\neg H$ (4)
6. $\neg S$ (4)
7. $\neg K$ (2,5)
8. Š (1,6,7)

Rešitev za vajo 1.12 (nazaj na vajo):

(i) Napiši pravilnostno tabelo. DNO: vzemi vrstice z enicami (poveži jih med sabo s konjunkcijo) in jih poveži med sabo z disjunkcijo $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. KNO: vzemi vrstice z ničlami (vzemi nasprotne vrednosti in jih poveži med sabo z disjunkcijo) in jih poveži med sabo s konjunkcijo $(A \vee B)$.

(ii) Podobno.

Rešitev za vajo 1.14 (nazaj na vajo): Napiši pravilnostno tabelo za osnovni izjave A, B skupaj s (sestavljeno) izjavo $\mathcal{I}$. Iz nje razberi, da je pravilnostna tabela za $\mathcal{I}$ enaka

A	B	$\mathcal{I}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Torej je $\mathcal{I} \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ v KNO.

Rešitev za vajo 1.16 (nazaj na vajo):

$$\begin{aligned}
(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee B \vee \neg B \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee (B \vee \neg B) \vee C \\
&\Leftrightarrow \neg A \vee 1 \vee C \\
&\Leftrightarrow 1.
\end{aligned}$$

Rešitev za vajo 1.20 (nazaj na vajo): Pokažimo $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Ker $x \geq 0$, pomnožimo neenakost z x in dobimo $x^2 + 1 \geq 2x$ oziroma $(x-1)^2 \geq 0$. Slednje je očitno vedno res.

Rešitev za vajo 1.21 (nazaj na vajo): Recimo, da jih je končno mnogo $p_1, p_2, \dots, p_n$. Potem $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ni deljivo z nobenim praštevilom p_i in $p_i \neq p$ za vsak i. Po definiciji je torej p praštevilo, ki ni enako nobenemu prejšnjemu. Protislovje.

Rešitev za vajo 1.22 (nazaj na vajo): Nasporotna trdtev je: obstaja naravno število, ki je večje od 1.

Rešitev za vajo 1.23 (nazaj na vajo): Naj bo $x < 2y$, to je, $2y - x > 0$. Pokazali bomo: če je $3x > y$, potem je $7xy > 3x^2 + 2y^2$. Predpostavimo torej, da je $3x - y > 0$. Potem je $(2y - x)(3x - y) = 7xy - 3x^2 - 2y^2 > 0$, to je, $7xy > 3x^2 + 2y^2$.

Rešitev za vajo 1.24 (nazaj na vajo):

($\Rightarrow$) Predpostavimo, da sta različnih parnosti. Pišimo $m = 2k$ in $n = 2l + 1$, vstavimo v izraz $m^2 - n^2$ in rezultat sledi.

($\Leftarrow$) Pokažemo indirektno in sicer: Če sta m in n iste parnosti, potem je $m^2 - n^2$ sodo. Obravnavaj oba primera.

Rešitev za vajo 1.26 (nazaj na vajo):

(i) $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$. Res je.

(ii) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.

Rešitev za vajo 1.27 (nazaj na vajo):

- $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.
- $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg A)$. Res je.

Rešitev za vaje 2.3 (nazaj na vajo):

$$\begin{aligned}
x \in (A \cup C) \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin C)) \wedge x \notin B \\
&\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin C)) \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\
&\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C.
\end{aligned}$$

Rešitev za vajo 2.4 (nazaj na vajo): Direktno.

Rešitev za vajo 2.6 (nazaj na vajo):

$$\begin{aligned}
(x,y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C).
\end{aligned}$$

Rešitev za vajo 2.9 (nazaj na vajo):

1. Napačna. Vzemi $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$.
2. Napačna. Vzemi isti primer kot v (a).
3. Pravilna. Dokaz s protislovjem. Recimo, da trditev ni pravilna. Naj bo $A \cap B \subseteq \overline{C}$, $A \cup C \subseteq B$ in naj obstaja $x \in A \cap C$. Torej je $x \in A$ in $x \in C$. Ker je po drugi predpostavki $A \cup C \subseteq B$, je $x \in B$. Sledi $x \in A \cap B$. Ker je po prvi predpostavki $A \cap B \subseteq \overline{C}$, je $x \in \overline{C}$. Protislovje, saj $x \in C$.
4. Napačna. Vzemi $A = C \neq B$.

5. Napačna. Vzemi tri paroma disjunktne neprazne množice.

Rešitev za vajo 2 (nazaj na vajo): Vse.

Rešitev za vajo 2 (nazaj na vajo): Da: lahko vzamemo npr. $A = \emptyset$ in poljubni različni množici $B \neq C$ (potem bo namreč $A \cap B = A \cap C = \emptyset$).

Ali pa: $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{2,4\}$.

Rešitev za vajo 2 (nazaj na vajo): **1. način**:

Očitno je $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$. Ob upoštevanju predpostavke $A \backslash B = B \backslash A$ zveza $(A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset$ postane $A \backslash B = \emptyset$ in $B \backslash A = \emptyset$, kar pomeni $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Torej je $B = A$. □

2. način:

$A \backslash B = B \backslash A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \backslash B) = (B \cap A) \cup (B \backslash A) \Rightarrow A = B.$ □

Rešitev za vajo 2 (nazaj na vajo): Ne drži. Že zato, ker množica na levi strani ni nujno kartezični produkt dveh množic.

Zgled: $A = \{1\}, B = C = \emptyset$.

Rešitev za vajo 2.14 (nazaj na vajo):

1. Pokažimo najprej implikacijo v desno. Naj bo $A \subseteq B$. Pokažimo, da tedaj velja $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Po predpostavki velja

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B). \tag{1}$$

Recimo, da obstaja $x \in A \cap \overline{B}$. Potem

$$\begin{aligned} x \in A \cap \overline{B} &\Rightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \\ &\Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in B \wedge x \notin B \quad \text{(zaradi (1))}, \end{aligned}$$

protislovje. Torej velja $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Še obratna inkluzija. Naj bo $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Pokažimo, da velja $A \subseteq B$. Vzemimo poljuben $x \in A$. Potem $x \notin \overline{B}$, saj je $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Torej $x \in B$. Ker je bil x poljuben, sledi $A \subseteq B$.

2.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x\,; x \in A \wedge x \notin B\} \\ &= \{x\,; x \notin \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\} \\ &= \{x\,; x \in \overline{B} \wedge x \notin \overline{A}\} \\ &= \overline{B} \setminus \overline{A}. \end{aligned}$$

Rešitev za vajo 3.6 (nazaj na vajo): $(\Rightarrow)$ $x(R \circ S)y \Rightarrow y(R \circ S)x \Rightarrow (\exists z)((y,z) \in S \wedge (z,x) \in R) \Rightarrow (z,y) \in S \wedge (x,z) \in R \Leftrightarrow (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S \Rightarrow x(S \circ R)x$. Podobno $x(S \circ R) \Rightarrow x(R \circ S)y$.

$(\Leftarrow)$ $x(R \circ S)y \Leftrightarrow x(S \circ R)y \Leftrightarrow (\exists z)((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S) \Rightarrow (\exists z)((z,x) \in R \wedge (y,z) \in S) \Rightarrow (y,x) \in R \circ S$.

Rešitev za vajo 3.7 (nazaj na vajo):

(a) $R \circ R = \{(a,e),(d,a),(e,c),(e,d)\}$.

Sledi $(R \circ R) \cap S = \emptyset$. To pa je irefleksivna relacija.

(b) $S \circ R = \{(a,c),(e,c),(e,f)\}$

Ta relacija ni sovisna, saj $(a,b) \notin S \circ R$ $(b,a) \notin S \circ R$.

(c) $S \circ S = \{(a,d),(f,c)\}$.

$S \cup (S \circ S) = \{(a,c),(a,d),(a,f),(d,c),(f,d),(f,c)\}$.

Ta relacija je tranzitivna, saj velja $x(S \cup (S \circ S))y \wedge y(S \cup (S \circ S))z \Rightarrow x(S \cup (S \circ S))y$.

(d) $S^{-1} = \{(c,a),(f,a),(c,d),(d,f)\}$.

$S^{-1} \cup R = \{(c,a),(f,a),(c,d),(d,f),(a,c),(a,d),(d,e),(e,a)\}$.

Relacija ni simetrična, saj je $(f,a) \in S^{-1} \cup R$ in $(a,f) \notin S^{-1} \cup R$.

Rešitev za vajo 3.35 (nazaj na vajo):

1. Z uporabo definicije stopnje kot števila sosedov:
   - $deg(1) = 3$ (povezano z 2, 3, 4)
   - $deg(2) = 2$ (povezano z 1, 3)
   - $deg(3) = 3$ (povezano z 1, 2, 4)

- $deg(4) = 3$ (povezano z 1, 3, 5)
- $deg(5) = 1$ (povezano s 4)

2. - $\Delta(G) = \max\{3,2,3,3,1\} = 3$.
   - $\delta(G) = \min\{3,2,3,3,1\} = 1$.

3. Vsota stopenj je $3 + 2 + 3 + 3 + 1 = 12$. Število povezav $|E(G)|$ je 6. Lastnost pravi $\sum deg(v) = 2|E(G)|$. Ker je $12 = 2(6)$, lastnost velja.

Rešitev za vajo 3.36 (nazaj na vajo):

1. Odstranitev vozlišča odstrani vozlišče in vse incidentne povezave. Odstranitev vozlišča 1 odstrani povezavi $\{1,2\}$ in $\{1,4\}$. Preostala vozlišča so $\{2,3,4\}$ s povezavami $\{\{2,3\},\{3,4\}\}$. To je izomorfno grafu poti P_3.

2. Odstranitev povezave odstrani le povezavo, vozlišča pa ohrani nedotaknjena. Odstranitev $\{1,2\}$ pusti vozlišča $\{1,2,3,4\}$ in povezave $\{\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$. To tvori pot $2 - 3 - 4 - 1$ (kar je P_4). Da, graf je še vedno povezan.

Rešitev za vajo 3.37 (nazaj na vajo):

1. Polni graf ima vse možne povezave. Za $n = 5$ je velikost $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

2. - Klično število $\omega(G)$ je velikost največjega polnega podgrafa. Ker je K_5 poln, je $\omega(K_5) = 5$.
   - Neodvisnostno število $\alpha(K_5)$ je velikost največjega praznega induciranega podgrafa. V polnem grafu nobeni dve vozlišči nista nesosednji, zato je $\alpha(K_5) = 1$.

Rešitev za vajo 3.38 (nazaj na vajo):

1. Da. Če izberemo vozlišča $\{1,2,3\}$ iz C_5, so inducirane povezave tiste v C_5, ki povezujejo ta vozlišča: $\{1,2\}$ in $\{2,3\}$. Povezava $\{1,3\}$ v C_5 ne obstaja. Torej je induciran podgraf $1-2-3$, kar je P_3.

2. K_4 vsebuje vse možne povezave med 4 vozlišči.
   - C_4 je podgraf, ker lahko izberemo 4 vozlišča in odstranimo dve "diagonalni"povezavi.
   - C_4 **ni** induciran podgraf. Če induciramo na katerihkoli 4 vozliščih v K_4, moramo ohraniti *vse* povezave med njimi. To nam da K_4, ne C_4.

Rešitev za vajo 3.39 (nazaj na vajo):

1. Oba grafa imata 6 vozlišč. Oba sta 2-regularna (vsako vozlišče ima stopnjo 2).

2. - $g(G) = 6$ (najkrajši cikel v C_6 je dolžine 6).
   - $g(H) = 3$ (najkrajši cikli so trikotniki K_3).

3. Ne, nista izomorfna. Čeprav imata enako število vozlišč in enako zaporedje stopenj, se njuni strukturni parametri razlikujejo. Konkretno, $g(G) \neq g(H)$. Prav tako je G povezan, medtem ko je H nepovezan.

Rešitev za vajo 3.40 (nazaj na vajo):

1. $deg(1) = 1$, $deg(2) = 2$, $deg(3) = 1$.

2. Avtomorfizem mora preslikati vozlišče v drugo vozlišče iste stopnje.
   - Vozlišče 2 (edino s stopnjo 2) se mora preslikati nase: $\phi(2) = 2$.
   - Vozlišči 1 in 3 (stopnja 1) se lahko zamenjata ali ostaneta fiksni.

   Obstajata natanko 2 avtomorfizma:
   - Identiteta: $\{1 \to 1, 2 \to 2, 3 \to 3\}$
   - Zasuk (flip): $\{1 \to 3, 2 \to 2, 3 \to 1\}$

Rešitev za vajo 3.41 (nazaj na vajo):

1. Graf z $\Delta(G) = 2$ je sestavljen iz poti in ciklov. Da bi imel ožino 4, mora vsebovati cikel dolžine 4. Graf C_4 temu zadošča: vsako vozlišče ima stopnjo 2 in dolžina cikla je 4.

2. Po definiciji drevo ne vsebuje ciklov. Zato je množica dolžin ciklov prazna. Odvisno od dogovora je $g(Tree) = \infty$ ali pa je nedefinirana.

Rešitev za vajo 3.4 (nazaj na vajo): Naj bo $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$. Možne vrednosti za stopnjo kateregakoli vozlišča so cela števila v množici $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Vendar pa je nemogoče, da bi enostaven graf vseboval tako vozlišče stopnje 0 (povezano z nikomer) kot vozlišče stopnje $n-1$ (povezano z vsemi ostalimi).

- Če obstaja vozlišče stopnje $n-1$, nobeno vozlišče ne more imeti stopnje 0. Možne vrednosti stopenj so $\{1, 2, ..., n-1\}$.

- Če obstaja vozlišče stopnje 0, nobeno vozlišče ne more imeti stopnje $n-1$. Možne vrednosti stopenj so $\{0, 1, ..., n-2\}$.

V obeh primerih lahko vozlišča zavzamejo vrednosti iz množice velikosti $n-1$. Ker je vozlišč n (golobi) in možnih vrednosti stopenj le $n-1$ (predali), morata po načelu golobnjaka vsaj dve vozlišči imeti enako stopnjo.

Rešitev za vajo 3.4 (nazaj na vajo): Obravnavajmo pot maksimalne dolžine v G, označeno s $P = x_0, x_1, ..., x_k$. Ker je pot maksimalna, x_k ne more biti soseden nobenemu vozlišču izven poti (sicer bi lahko pot podaljšali).

Vendar vemo, da je $deg(x_k) \geq 2$. Zato mora imeti x_k vsaj dva soseda. Ker ti sosedje ne morejo biti izven poti, morajo biti vozlišča, ki so že na poti (npr. x_i, kjer je $0 \leq i < k-1$).

Če je x_k povezan z nekim x_i na poti, povezava (x_k, x_i) skupaj s segmentom poti $x_i, ..., x_k$ tvori cikel. Torej G vsebuje cikel.

Rešitev za vajo 3.4 (nazaj na vajo):

1. Da bi maksimizirali število povezav brez ustvarjanja trikotnika, moramo vozlišča razdeliti v dve množici in povezati vsa vozlišča med množicama, nobenega pa znotraj množic (poln dvodelen graf). Za $n = 5$ razdelimo vozlišča v množici velikosti 2 in 3. Graf $K_{2,3}$ ima $2 \times 3 = 6$ povezav. (Opomba: C_5 ima le 5 povezav).

2. Dvodelen graf razdeli $V(G)$ v dve disjunktni množici A in B, kjer vse povezave potekajo od A do B. Trikotnik zahteva 3 vozlišča povezana v cikel $u - v - w - u$. V dvodelnem grafu se pot dolžine 3 ($u \in A \to v \in B \to w \in A$) konča nazaj v množici A. Da bi se w povezal z u, bi morala obstajati povezava znotraj množice A, kar je prepovedano. Torej ne obstajajo lihi cikli (vključno s trikotniki).

Rešitev za vajo 3.4 (nazaj na vajo):

1. **P_4 $(1 - 2 - 3 - 4)$:** Končni vozlišči 1 in 4 imata stopnjo 1; srednji vozlišči 2 in 3 imata stopnjo 2. Avtomorfizem mora preslikati končna vozlišča v končna vozlišča. Lahko vse fiksiramo (Identiteta) ali obrnemo celotno pot ($1 \leftrightarrow 4, 2 \leftrightarrow 3$). Skupaj: 2 avtomorfizma.

2. **C_4 $(1 - 2 - 3 - 4 - 1)$:** Vsako vozlišče ima stopnjo 2, zato imamo več svobode. Kvadrat lahko zavrtimo ($0°, 90°, 180°, 270°$)—kar da 4 rotacije. Lahko ga tudi zrcalimo (vodoravno, navpično ali diagonalno). Grupa avtomorfizmov je diedrska grupa D_4, ki je velikosti $2n = 2(4) = 8$.

3. Dodajanje povezave $(1, 4)$ grafu P_4 naredi vsa vozlišča nerazločljiva glede na stopnjo (vsa postanejo stopnje 2). Ta strukturna homogenost omogoča, da se katero koli vozlišče preslika v katero koli drugo vozlišče (vozliščna tranzitivnost), kar drastično poveča število simetrij z 2 na 8.

Rešitev za vajo 3.50 (nazaj na vajo):

1. Naj bo R delna urejenost na množici A. Po definiciji je R refleksivna, antisimetrična in tranzitivna. Definicija predurejenosti zahteva le, da je relacija refleksivna in tranzitivna. Ker R zadošča tema dvema lastnostma, je R predurejenost.

2. Naj bo $A = \{a, b\}$ in naj bo $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a)\}$.
   - **Refleksivnost:** $(a, a) \in R$ in $(b, b) \in R$, torej je refleksivna.
   - **Tranzitivnost:** Edina para, ki bi lahko kršila tranzitivnost, sta (a, b) in (b, a), kar implicira $(a, a) \in R$ (izpolnjeno); ter (b, a) in (a, b), kar implicira $(b, b) \in R$ (izpolnjeno). Torej je tranzitivna.
   - **Antisimetričnost:** $(a, b) \in R$ in $(b, a) \in R$, vendar $a \neq b$. Torej R NI antisimetrična.

   Ker je R refleksivna in tranzitivna, je predurejenost. Ker ni antisimetrična, ni delna urejenost.

Rešitev za vajo 3.51 (nazaj na vajo):

1. Standardna dodatna lastnost je **irefleksivnost** (ali protirefleksivnost).
2. Dokaz:

   ($\Rightarrow$) Naj bo R stroga delna urejenost. Po definiciji je stroga delna urejenost irefleksivna in tranzitivna relacija. (Lastnost antisimetričnosti je ob irefleksivnosti in tranzitivnosti odveč: če $(a, b) \in R$ in $(b, a) \in R$, potem zaradi tranzitivnosti sledi $(a, a) \in R$. Toda ker je R irefleksivna, je to nemogoče. Torej ne moremo imeti hkrati (a, b) in (b, a), kar pomeni, da je antisimetričnost izpolnjena "na prazno".)

   ($\Leftarrow$) Naj bo R tranzitivna in irefleksivna relacija. To je standardna definicija stroge delne urejenosti, torej je R stroga delna urejenost.

   (Alternativno: če strogo delno urejenost definiramo kot irefleksivno, antisimetrično in tranzitivno relacijo, moramo le pokazati, da antisimetričnost sledi iz drugih dveh, kot je navedeno zgoraj).

Rešitev za vajo 3.52 (nazaj na vajo): Naj bo R relacija na A.

- **Iz linearne urejenosti R v strogo linearno urejenost R^-:** Definirajmo $R^- = R \setminus \{(a,a) \mid a \in A\}$. Če je R linearna urejenost, je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna in polna. R^- je po konstrukciji očitno irefleksivna. Je tranzitivna, ker je R tranzitivna, odstranitev refleksivnih parov pa ne ustvari novih kršitev tranzitivnosti. R^- je polna za različne elemente: ker je R polna, za $a \neq b$ velja $(a,b) \in R$ ali $(b,a) \in R$. Ker $a \neq b$, to niso refleksivni pari, zato $(a,b) \in R^-$ ali $(b,a) \in R^-$. Torej je R^- stroga linearna urejenost.

- **Iz stroge linearne urejenosti S v linearno urejenost S^+:** Definirajmo $S^+ = S \cup \{(a,a) \mid a \in A\}$. Če je S stroga linearna urejenost, je irefleksivna, tranzitivna in polna za različne elemente. S^+ je po konstrukciji očitno refleksivna. Je tranzitivna: vsaka kršitev tranzitivnosti bi morala vključevati vsaj en nov refleksivni par, recimo $(a,a) \in S^+$ in $(a,b) \in S^+$. To implicira $(a,b) \in S$ in s tem $(a,b) \in S^+$. Podobno za $(b,a) \in S^+$ in $(a,a) \in S^+$. Je antisimetrična: če $(a,b) \in S^+$ in $(b,a) \in S^+$, je to zaradi irefleksivnosti S možno le, če $a = b$. Je polna: za poljubna a, b, če $a = b$, velja $(a,a) \in S^+$. Če $a \neq b$, potem $(a,b) \in S$ ali $(b,a) \in S$, kar pomeni $(a,b) \in S^+$ ali $(b,a) \in S^+$. Torej je S^+ linearna urejenost.

Ker velja $(R^-)^+ = R$ in $(S^+)^- = S$, sta preslikavi inverzni, kar vzpostavi bijektivno korespondenco.

Rešitev za vajo 3.5 (nazaj na vajo):

(a) $R = \{(5,2), (5,1), (4,2), (4,1), (5,3), (4,1), (2,1), (3,1)\}$.

(b) Noben element ni pod elementoma 4 in 5, torej sta 4 in 5 minimalna elementa. Maksimalen element pa je samo eden: 1.

(c) Množica S nima prvega elementa. Elementa 4 in 5 sta sicer minimalna, vendar nobeden od njiju ni pod drugim. Množica S pa ima zadnji element: to je element 1, saj so vsi drugi elementi pod njim.

(d) Ne, saj ni sovisna: Elementa 2 in 3 nista primerljiva: $(2,3) \notin R$, $(3,2) \notin R$. $\square$