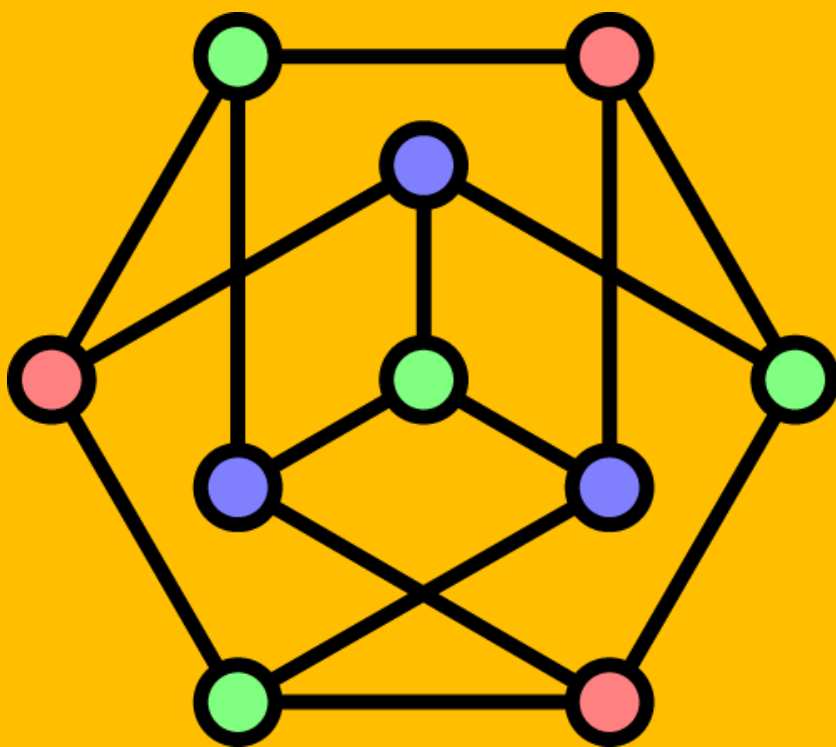


TEORETIČNE OSNOVE RAČUNALNIŠTVA

DISKRETNE STRUKTURE ZA RAČUNALNIČARJE



CIP – Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

123.4(567)(8.901.2)

TEORETIČNE osnove računalništva [Elektronski vir] : Diskretne strukture za računalničarje / avtorji M. Krnc; [urednik] M. Krnc. - Verzija. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal. M. Krnc, 2020.

Način dostopa (URL):

<https://github.com/mkrnc/TOR1-zapiski-s-predavanj>

ISBN 978-961-XXX-XXX-X (pdf)
123456789

PREDGOVOR

Pred tabo so nekatere zbrane vaje za utrjevanje pri predmetu TOR1, ki se predava študentom prvega letnika na FAMNIT, Univerza na Primorskem. Predmet pokriva osnove iz različnih področij teoretičnega računalništva in je usmerjen potrebam računalničarjev.

Dokument je zamišljen kot dopolnjevanje predavanj, in se ga ne sme jemati kot samostojno gradivo za pripravo na izpit. Morebitna vprašanja in najdene napake, lepo prosim, sporočite na matjaz.krnc@upr.si, oz. ustvarite t.i. "issue" na našem javnem repozitoriju.

<https://github.com/mkrnc/TOR1-vaje---TCS1-exercises.git>.

Teoretične osnove računalništva
Diskretne strukture za računalničarje

Avtor: Matjaž Krnc

Samozaložba in oblikovanje: Matjaž Krnc

ISBN: 978-961-XXX-XXX-X
Ljubljana, Pomlad 2021

KAZALO

1	Matematična logika	7
1.1	Dokaz z indukcijo	18
2	Teorija množic	21
3	Relacije	25
3.1	Funkcije	27
3.2	Strukture urejenosti	29
3.3	Ekvivalenčne relacije	32
3.4	Grafi	33
4	Končne in neskončne množice	35
4.1	Pregled najpomembnejših pojmov in nekaj nalog	35
4.2	Zgledi števno neskončnih množic	36

Naloga 1. Dani sta izjavi A : "Žunaj je mrzlo." in B : "Žunaj dežuje.". V naravnem jeziku napiši naslednje sestavljene izjave:

- a) $\neg A$
- b) $A \wedge B$
- c) $A \vee B$
- d) $B \vee \neg A$

Naloga 2. Naj bo A : "Janez bere Finance.", B : "Janez bere Delo.", in C : "Janez bere Večer.". Prepiši v simbolne izjave:

- a) Janez bere Finance ali Delo, a ne Večera.

$$(A \vee B) \wedge \neg C$$

- b) Janez bere Finance in Delo ali pa ne bere Financ in Dela.

$$(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$$

- c) Ni res, da Janez bere Finance, ne pa Večera.

$$\neg(A \wedge \neg C)$$

- d) Ni res, da Janez bere Večer ali Delo, ne pa Financ.

$$\neg((B \vee C) \wedge \neg A)$$

Naloga 3. Poišči pravilnostne tabele za primere v prejšnji nalogi.

Naloga 4. Za tri različne premice p , q in r v prostoru velja $(p \parallel r) \wedge (p \cap q = A) \wedge (q \cap r = B)$. Kaj lahko sklepaš? Rešitev: Nariši skico. Premica q leži v ravnini, in jo določata p in r .

Naloga 5. Vitezi in oprode (vitez vedno govori resnico, oproda vedno lažejo):

- a) Artur: Ni res, da je Cene oproda. Bine: Cene je vitez ali pa sem jaz vitez. Cene: Bine je oproda. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?
- b) Artur: Cene je oproda ali je Bine oproda. Bine: Cene je vitez in Artur je vitez. Kdo od njih je vitez in kdo oproda?

Naloga 6. Z osnovnima povezavama \neg in \wedge izrazi naslednje sestavljene izjave:

- a) $A \vee B$
- b) $A \rightarrow B$
- c) $A \iff B$

Naloga 7. Prepričaj se, da veljajo naslednje logične ekvivalence:

- a) $A \wedge (B \vee C) \iff \neg(A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)$
- b) $\neg A \wedge (A \rightarrow B) \iff A \rightarrow (\neg A \wedge B)$
- c) $A \vee B \vee C \iff \neg(A \vee B) \rightarrow C$
- d) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \iff (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Naloga 8. (Naloga o vitezih in oprodah) A, B, C, D, E

- A: "D je oproda in C je oproda."
- B: "Če sta A in D oprodi, potem je C oproda."
- C: "Če je B oproda, potem je A vitez."
- D: "Če je E oproda, potem sta C in B oprodi."

Rešitev:

Naj bo A izjava: "A je vitez", itd. Iščemo tisto edino določilo d , za katerega je izjava

$$A_1 \wedge B_1 \wedge C_1 \wedge D_1$$

pravilna, kjer je:

$$A_1 : A \iff (\neg D \wedge \neg C)$$

$$B_1 : B \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg D \Rightarrow \neg C)$$

$$C_1 : C \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$$

$$D_1 : D \Leftrightarrow (\neg E \Rightarrow \neg C \wedge \neg B)$$

Ker bi pravilnostna tabela vsebovala 32 vrstic, rešimo nalogo raje z analizo primerov.

1. primer: $A(d) = 1$. Zaradi A_1 je potem $D(d) = 0$ in $C(d) = 0$.

V izjavo C_1 vstavimo $A(d) = 1$ in $C(d) = 0$, dobimo: $\neg(\neg B \Rightarrow 1)$,

$$\neg(B \vee 1),$$

$\neg 1$, to pa je nepravilna izjava.

Torej 1. primer ni mogoč.

2. primer: $A(d) = 0$.

Zaradi A_1 je bodisi $C(d) = 1$ ali pa $D(d) = 1$.

2.1.: $C(d) = 1$.

Zaradi C_1 je $\neg B \Rightarrow 0$, torej je $\neg B = 0$ in posledično $B(d) = 1$.

V izjavo B_1 vstavimo $A(d) = 0$, $B(d) = 1$, $C(d) = 1$, dobimo:

$$1 \wedge \neg D \Rightarrow 0$$

$$\neg D \Rightarrow 0$$

Sledi $\neg D = 0$ oz. $D(d) = 1$.

Vstavimo v izjavo D_1 znane vrednosti:

$$(\neg E \Rightarrow 0 \wedge 0)$$

Sledi $E(d) = 1$.

2.2.: $C(d) = 0$ in $D(d) = 1$.

Iz izjave B_1 dobimo $B(d) = 1$.

Izjava C_1 pa je sedaj nepravilna: $0 \Leftrightarrow (0 \Rightarrow 1)$. □

Torej so B , C , D in E vitezi, A pa je oproda.

Naloga 9. (Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?

Mislim, torej sem. Mislim, torej sklepam. Sklep: Sem, torej sklepam.

Rešitev:

A_1 : Mislim.

A_2 : Sem.

A_3 : Sklepam.

Zanima nas pravilnost implikacije

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_1 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_2 \Rightarrow A_3)$$

Pri določilu $A_1(d) = 0$, $A_2(d) = 1$, $A_3(d) = 0$ je ta implikacija nepravilna! (Ne mislim, sem, ne sklepam.) Torej je sklepanje napačno.

Naloga 10. (Sklepanje) Ali je naslednje sklepanje pravilno?

Dojenčki se obnašajo nelogično. Kdor je sposoben ukrotiti krokodila, je spoštovanja vreden. Kdor se obnaša nelogično, ni spoštovanja vreden. Sklep: Dojenčki niso sposobni ukrotiti krokodila.

Rešitev:

A_1 : Sem dojenček.

A_2 : Obnašam se nelogično.

A_3 : Sposoben sem ukrotiti krokodila.

A_4 : Vreden sem spoštovanja.

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_3 \Rightarrow A_4) \wedge (A_2 \Rightarrow \neg A_4) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow \neg A_3)$$

Pa recimo, da je sklep napačen. Tedaj obstaja določilo d , da velja

$$(1) (A_1(d) \Rightarrow \neg A_3(d)) = 0$$

$$(2) (A_1(d) \Rightarrow A_2(d)) = 1$$

$$(3) (A_3(d) \Rightarrow A_4(d)) = 1$$

$$(4) (A_2(d) \Rightarrow \neg A_4(d)) = 1$$

Torej je, zaradi (1), $A_1(d) = 1$ in $A_3(d) = 1$. Zaradi (2) je $A_2(d) = 1$. Zaradi (4) je $A_4(d) = 0$. To pa je protislovje s (3).

Torej je sklepanje pravilno. \square

Naloga 11. The following two propositions are given: A : "Andrej speaks French." and B : "Andrej speaks Danish." Write the following compound propositions in natural language:

- (a) $A \vee B$
- (b) $A \wedge B$
- (c) $A \wedge \neg B$
- (d) $\neg A \vee \neg B$
- (e) $\neg \neg A$
- (f) $\neg(\neg A \wedge \neg B)$

Naloga 12. The following two propositions are given: A : "Janez is rich." and B : "Janez is happy."

Write the following propositions symbolically:

- (a) If Janez is rich, then he is unhappy.
- (b) Janez is neither happy nor rich.
- (c) Janez is happy only if he is poor.
- (d) Janez is poor if and only if he is unhappy.

Naloga 13. Solve the following exercises about knights and servants:

- Arthur: "It is not true that Bine is a servant." Bine: "We are not both of the same kind."
- Arthur: "It is not true that Cene is servant." Bine: "Cene is a knight or I am a knight." Cene: "Bine is a servant."

Naloga 14. A similar exercise: Now Arthur and Bine say the following:

- Arthur: "Me and Bine are not of the same kind."
- Bine: "Exactly one of us is a knight."

Naloga 15. Given the propositions:

A : "It's cold outside"

B : "It's raining"

express the following propositions in natural language:

- a) $\neg A$
- b) $A \wedge B$
- c) $A \vee B$
- d) $B \vee \neg A$

Naloga 16. Given the propositions:

A : "John reads The New York Times."

B : "John reads The Wall Street Journal."

C : "John reads The Daily Mail."

Transcribe the following statements into symbolic propositions:

- a) John reads The New York Times, but not The Wall Street Journal.
- b) Either John reads both The New York Times and The Wall Street Journal, or he does not read The New York Times and The Wall Street Journal.
- c) It is not true that John reads The New York Times, and does not read The Daily Mail.
- d) It is not true that John reads The Daily Mail or The Wall Street Journal, and not The New York Times.

Naloga 17. Find the truth tables for the symbolic propositions from (2).

- a) For three lines p, q, r we may construct also geometric propositions. Suppose that the following is true:

$$(p \parallel q) \wedge (p \cap q \neq \emptyset) \wedge (q \cap r \neq \emptyset).$$

What can you say about the lines p, q, r ?

Naloga 18. Knights and servants! For both cases below (separately) determine the roles.

a) Arthur: It's not true that Chloe is a servant.

Bob: Chloe is a knight, or I am a knight.

Chloe: Bob is a servant.

b) Arthur: Chloe or Bob are servants.

Bob: Cene and Arthur are knights.

Naloga 19. Express the propositions below with connectives \wedge and \neg only!

a) $A \vee B$

b) $A \Rightarrow B$

c) $A \Leftrightarrow B$

Naloga 20. Find the canonical disjunctive normal form (DNF) and the canonical conjunctive normal form (CNF) for the following propositions:

(i) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

(ii) $\neg(A \vee B) \wedge (A \Rightarrow B)$

Rešitev. (i) Napiši pravilnostno tabelo. DNO: vzemi vrstice z enicami (poveži jih med sabo s konjunkcijo) in jih poveži med sabo z disjunkcijo $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$. KNO: vzemi vrstice z ničlami (vzemi nasprotno vrednosti in jih poveži med sabo z disjunkcijo) in jih poveži med sabo s konjunkcijo $(A \vee B)$. (ii) Podobno.

Naloga 21. For the following compound proposition find a truth table, determine DNF, CNF and draw the corresponding circuit.

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)).$$

Naloga 22. Find a compound proposition \mathcal{I} such that

$$(A \Rightarrow (\mathcal{I} \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (A \wedge B) \vee \mathcal{I}$$

is tautology.

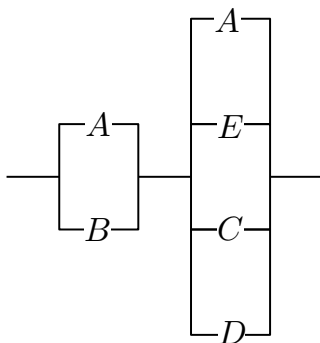
Rešitev. Napiši pravilnostno tabelo za osnovni izjave A, B skupaj s (sestavljeno) izjavo \mathcal{I} . Iz nje razberi, da je pravilnostna tabela za \mathcal{I} enaka

Torej je $\mathcal{I} \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ v KNO.

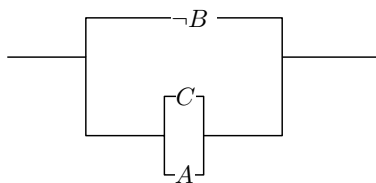
A	B	\mathcal{I}
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Naloga 23. For the following circuits find the corresponding compound propositions

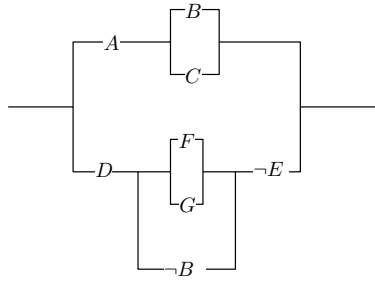
(i)



(ii)



(iii)



Naloga 24. Simplify the following logical equivalence

$$(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C).$$

Rešitev.

$$\begin{aligned}
 (A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow C) &\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (\neg B \vee C) \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee B \vee \neg B \vee C \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee (B \vee \neg B) \vee C \\
 &\Leftrightarrow \neg A \vee 1 \vee C \\
 &\Leftrightarrow 1.
 \end{aligned}$$

Naloga 25. Show that the following propositions are logical implications (a tautology where the main connective is implication).

- (i) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- (ii) $\neg B \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg A$
- (iii) $\neg A \wedge (A \vee B) \Rightarrow B$
- (iv) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- (v) $A \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow B$

Rešitev. (i) Recimo $A \wedge (A \Rightarrow B)$ pravilna, B pa nepravilna. Potem je A pravilna in $A \Rightarrow B$ pravilna. Sledi B pravilna. Protislovje.

Naloga 26. Are the following propositions logical implications?

- (i) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge A \Rightarrow B \wedge C$

$$(ii) \neg(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (D \Rightarrow C) \Rightarrow D$$

$$(iii) (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \wedge (D \wedge E \Rightarrow F) \wedge (C \Rightarrow E) \Rightarrow F$$

Naloga 27. Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je n sodo število, potem je $n^2 + 3n$ sodo. Ali je obrat pravilen?

Naloga 28. Z direktnim dokazom implikacije pokaži: Če je realno število x nenegativno, potem je vsota števila x in njegove obratne vrednosti večja ali enaka 2.

Rešitev. Pokažimo $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Ker $x \geq 0$, pomnožimo neenakost z x in dobimo $x^2 + 1 \geq 2x$ oziroma $(x - 1)^2 \geq 0$. Slednje je očitno vedno res.

Naloga 29. S protislovjem pokaži, da je praštevil neskončno.

Rešitev. Recimo, da jih je končno mnogo p_1, p_2, \dots, p_n . Potem $p = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ ni deljivo z nobenim praštevilom p_i in $p_i \neq p$ za vsak i . Po definiciji je torej p praštevilo, ki ni enako nobenemu prejšnjemu. Protislovje.

Naloga 30. Poišči napako v naslednjem dokazu.

Trditev: 1 je največje naravno število.

Dokaz (s protislovjem): Predpostavimo nasprotno. Naj bo $n > 1$ največje naravno število. Ker je n pozitivno, lahko neenakost $n > 1$ pomnožimo z n . Torej $n > 1 \Leftrightarrow n^2 > n$. Dobili smo, da je n^2 večje od n , kar je v protislovju s predpostavko, da je n največje naravno število. Torej je bila predpostavka napačna in je 1 največje naravno število.

Rešitev. Nasprotna trditev je: obstaja naravno število, ki je večje od 1.

Naloga 31. Naj bosta x in y realni števili, da velja $x < 2y$. Z indirektnim dokazom pokaži: Če je $7xy \leq 3x^2 + 2y^2$, potem je $3x \leq y$.

Rešitev. Naj bo $x < 2y$, to je, $2y - x > 0$. Pokazali bomo: če je $3x > y$, potem je $7xy > 3x^2 + 2y^2$. Predpostavimo torej, da je $3x - y > 0$. Potem je $(2y - x)(3x - y) = 7xy - 3x^2 - 2y^2 > 0$, to je, $7xy > 3x^2 + 2y^2$.

Naloga 32. Dokaži naslednjo ekvivalenco v dveh delih: Naj bosta m in n celi števili. Tedaj sta števili m in n različnih parnosti natanko tedaj, ko je število $m^2 - n^2$ liho.

Rešitev. (\Rightarrow) Predpostavimo, da sta različnih parnosti. Pišimo $m = 2k$ in $n = 2l + 1$, vstavimo v izraz $m^2 - n^2$ in rezultat sledi. (\Leftarrow) Pokažemo indirektno in sicer: Če sta m in n iste parnosti, potem je $m^2 - n^2$ sodo. Obravnavaj oba primera.

Naloga 33. Z uporabo če in samo če dokaza pokaži: $ac \mid bc \Leftrightarrow a \mid b$.

Naloga 34. Ali je naslednji sklep pravilen?

- (i) Če je danes sredo bom imel vaje. Danes je sredo. Sklep: Imel bom vaje.

Rešitev. $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$. Res je.

- (ii) Če se učim, bom opravil izpit. Nisem se učil. Sklep: Ne bom opravil izpita.

Rešitev. $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.

Naloga 35. Ali je naslednji premislek pravilen?

- (i) Študent se je z mestni avtobusom odpravil na izpit. Rekel si je: Če bo na naslednjem semaforju zelena luč, bom naredil izpit. No, ko je avtobus pripeljal na naslednji semafor, na semaforju ni svetila zelena luč, študent pa si je dejal: Presneto, spet bom padel.

Rešitev. $((A \Rightarrow B) \wedge \neg A) \Rightarrow \neg B$. Ni nujno res.

- (ii) Inženir, ki obvlada teorijo, vedno načrta dobro vezje. Dobro vezje je ekonomično. Torej, inženir, ki načrta neekonomično vezje, ne obvlada teorije.

Rešitev. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg A)$. Res je.

Naloga 36. Which of the following propositions are correct where the language of the conversation are real numbers?

- (i) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$.
(ii) $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$.

- (iii) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -1)$.
- (iv) $(\forall x)[x > 0 \Rightarrow (\exists y)(y < 0 \wedge xy > 0)]$.

Naloga 37. Let \mathbb{Z} be a universal set and let P denote the set of all prime numbers, and S the set of all even integers. Write the following propositions in terms of set theory:

- (i) There exists an even prime number. $[P \cap S \neq \emptyset]$
- (ii) 0 is an integer, but it is not natural number. $[0 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}]$
- (iii) Every natural number is an integer. $[\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}]$
- (iv) Not every integer is a natural number. $[\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}]$
- (v) Every prime number except 2 is odd. $[P \setminus \{2\} \subseteq \bar{S}]$
- (vi) 2 is an even prime number. $[2 \in S \cap P]$

1.1 DOKAZ Z INDUKCIJO

1. Dokazujte vsako s pomočjo indukcije:

- (a) $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- (b) $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- (c) $\sum_{i=1}^n 2^{i-1} = 2^n - 1$
- (d) $\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- (e) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (f) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$
- (g) $\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2$
- (h) $n! > 2^n$ za $n \geq 4$.
- (i) $2^{n+1} > n^2$ za vse pozitivne cele števike.

2. Ta naloga se nanaša na Fibonaccijevo zaporedje:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Zaporedje je definirano rekurzivno z $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, nato $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ za vsak $n > 2$. Kot prej, dokažite vsako od naslednjih s pomočjo indukcije. Morda bi bilo koristno raziskati več primerov, preden začnete.

(a) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$

(b) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

(c) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$

2 | TEORIJA MNOŽIC

Ključni pojmi:

- Relacija pripadnosti. Enakost množic.
- Presek in unija družine množic. Distributivnost. Razlika dveh množic, komplement.
- Podmnožica, relacija inkluzije. Prava podmnožica. Prazna množica.
- Russellova antinomija.
- De Morganova zakona, princip dualnosti.
- Potenčna množica. Kartezični produkt.

1. Let $A = \{x \in \mathbb{N}; x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}; |x - 2| < 4\}$ and $C = \{x \in \mathbb{R}; x^3 - 4x = 0\}$.

(i) Write down the elements for all three sets.

(ii) Find $A \cup C$, $B \cap C$, $B \setminus C$, $(A \setminus B) \setminus C$ and $A \setminus (B \setminus C)$.

2. Let A, B, C and D be subsets of some universal set U . Simplify the following expression

$$\overline{((A \cup B) \cap (\overline{A \cup C})) \setminus \overline{D}}.$$

3. Show that $(A \cup C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Rešitev.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup C) \cap (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \vee x \in C) \wedge (x \notin C)) \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in C \wedge x \notin C)) \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin C \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C. \end{aligned}$$

4. (Zadnja lastnost pri uniji) Prove that $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$.

Rešitev. Direktno.

5. (Predzadnja lastnost pri preseku) Prove that $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Rešitev. V dveh delih.

6. (Predzadnja lastnost pri kartezičnem produktu) Prove that $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in A \times (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \cap C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge x \in A \wedge y \in C \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \\
 &\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C).
 \end{aligned}$$

7. (Predzadnja lastnost pri razliki) Prove that $(A \cap B) \setminus B = \emptyset$. *Rešitev.*

$$\begin{aligned}
 x \in (A \cap B) \setminus B &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge x \notin B \\
 &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin B \\
 &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin B) \\
 &\Leftrightarrow x \in \emptyset.
 \end{aligned}$$

8. Determine the following sets:

(i) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset \quad [\{\emptyset, \{\emptyset\}\}]$

(ii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\emptyset\}$

(iii) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\}\emptyset\}$

(iv) $\{1, 2, 3, \{1\}, \{5\}\} \setminus \{2, \{3\}, 5\}$

9. Which of the following propositions are correct for arbitrary sets A, B and C :

a) If $A \in B$ and $B \in C$, then $A \in C$.

b) If $A \subseteq B$ and $B \in C$, then $A \in C$.

- c) If $A \cap B \subseteq \overline{C}$ and $A \cup C \subseteq B$, then $A \cap C = \emptyset$.
- d) If $A \neq B$ and $B \neq C$, then $A \neq C$.
- e) If $A \subseteq \overline{(B \cup C)}$ and $B \subseteq \overline{(A \cup C)}$, then $B = \emptyset$.

Rešitev.

- a) Napačna. Vzemi $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$, $B = \{\{\emptyset\}\}$.
- b) Napačna. Vzemi isti primer kot v (a).
- c) Pravilna. Dokaz s protislovjem. Recimo, da trditev ni pravilna. Naj bo $A \cap B \subseteq \overline{C}$, $A \cup C \subseteq B$ in naj obstaja $x \in A \cap C$. Torej je $x \in A$ in $x \in C$. Ker je po drugi predpostavki $A \cup C \subseteq B$, je $x \in B$. Sledi $x \in A \cap B$. Ker je po prvi predpostavki $A \cap B \subseteq \overline{C}$, je $x \in \overline{C}$. Protislovje, saj $x \in C$.
- d) Napačna. Vzemi $A = C \neq B$.
- e) Napačna. Vzemi tri paroma disjunktne neprazne množice.

Naloga (Enakost množic). *Katere naslednjih množic so med seboj enake?*

$$\{r, s, t\}, \{t, r, s, t\}, \{s, s, r, r, t\}, \{t, s, r\}$$

Odgovor: Vse.

Naloga. *Ali obstajajo take množice A, B, C , da velja $B \neq C$ in $A \cap B = A \cap C$?*

Odgovor: Da: lahko vzamemo npr. $A = \emptyset$ in poljubni različni množici $B \neq C$ (potem bo namreč $A \cap B = A \cap C = \emptyset$).

Ali pa: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$.

Naloga. *Dana je množica A . Poišči vse množice B , za katere velja $A \setminus B = B \setminus A$.*

Rešitev:

1. način:

Očitno je $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Ob upoštevanju predpostavke $A \setminus B = B \setminus A$ zveza $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ postane $A \setminus B = \emptyset$ in $B \setminus A = \emptyset$, kar pomeni $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$. Torej je $B = A$. □

2. način:

$$A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \setminus B) = (B \cap A) \cup (B \setminus A) \Rightarrow A = B. \quad \square$$

Naloga. *Drži ali ne drži?*

Za poljubne množice A , B in C velja:

$$A \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C).$$

Ne drži. Že zato, ker množica na levi strani ni nujno kartezični produkt dveh množic.

Zgled: $A = \{1\}, B = C = \emptyset$.

3

RELACIJE

Ključni pojmi:

- Binarne relacije: $R = \{(x, y); xRy\} \subseteq S \times S$.
 - Unija, presek, razlika relacij.
 - Domena binarne relacije, zaloga vrednosti binarne relacije.
 - Inverzna relacija. Kompozitum relacij.
 - Refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, asimetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost, intranzitivnost, sovisnost, stroga sovisnost.
 - Ekvivalenčna relacija. Faktorska množica S/R .
-

1. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 - a) Ali je $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (2, 4), (5, 1)\}$ binarna relacija?
 - b) Za relacijo R najdi ustrezno domeno $\mathcal{D}R$, in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}R$.
 - c) Določi inverzno relacijo R^{-1} in $\mathcal{D}R^{-1}$ in $\mathcal{Z}R^{-1}$.
2. Naj bosta $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (1, 5)\}$ in $T = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 5)\}$ binarni relaciji v vesolju $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
 - a) Določi kompozituma $R \circ T$ in $T \circ R$.
 - b) Ali velja $R \circ T = T \circ R$?
3. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Določi

$$R = \{(x, y) \mid x - y \text{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x, y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

4. V vesolju $S = \mathbb{R}$ definiramo relacijo R :

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?

5. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Imamo spodnje relacije:

(i) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\},$

(ii) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\},$

(iii) $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\},$

(iv) $R_4 = \emptyset,$

(v) $R_5 = S \times S.$

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

6. Naj bosta R in S simetrični relaciji. Pokaži: $R \circ S$ simetrična $\Leftrightarrow R \circ S = S \circ R$.

Naloga. V množico $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ vpeljemo relaciji $R = \{(a, c), (a, d), (d, e), (e, a)\}$ in $S = \{(a, c), (a, f), (d, c), (f, d)\}$.

(a) Ali je relacija $(R \circ R) \cap S$ irefleksivna?

(b) Ali je relacija $S \circ R$ sovisna?

(c) Ali je relacija $S \cup (S \circ S)$ tranzitivna?

(d) Ali je relacija $S^{-1} \cup R$ simetrična?

Rešitev:

(a) $R \circ R = \{(a, e), (d, a), (e, c), (e, d)\}.$

Sledi $(R \circ R) \cap S = \emptyset$. To pa je irefleksivna relacija.

(b) $S \circ R = \{(a, c), (e, c), (e, f)\}$

Ta relacija ni sovisna, saj $(a, b) \notin S \circ R$ $(b, a) \notin S \circ R$.

(c) $S \circ S = \{(a, d), (f, c)\}.$

$S \cup (S \circ S) = \{(a, c), (a, d), (a, f), (d, c), (f, d), (f, c)\}.$

Ta relacija je tranzitivna, saj velja $x(S \cup (S \circ S))y \wedge y(S \cup (S \circ S))z \Rightarrow x(S \cup (S \circ S))z$.

(d) $S^{-1} = \{(c, a), (f, a), (c, d), (d, f)\}.$

$S^{-1} \cup R = \{(c, a), (f, a), (c, d), (d, f), (a, c), (a, d), (d, e), (e, a)\}.$

Relacija ni simetrična, saj je $(f, a) \in S^{-1} \cup R$ in $(a, f) \notin S^{-1} \cup R$. □

3.1 FUNKCIJE

Ključni pojmi:

- funkcija = enolična binarna relacija:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z).$$

- Surjektivnost. Injektivnost. Slika podmnožice U pri preslikavi f .
- Inverzna relacija funkcije. Praslike.
- Kompozitum funkcij.
- Zožitve in razširitve.
- Kanonična dekompozicija funkcije.

Naloga. Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, b\}$.
Dani sta funkciji $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$.

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, y), (4, x)\}$$

$$g = \{(x, a), (y, b), (z, b)\}$$

- (a) Ali je f injektivna?
- (b) Ali je f surjektivna?
- (c) Ali je g injektivna?
- (d) Ali je g surjektivna?
- (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?
- (f) Zapiši množici $f^{-1}(\{x, z\})$ in $g(\{x, z\})$.
- (g) Zapiši kanonično dekompozicijo funkcije f .

Rešitev:

- (a) Ne, saj je $f(1) = f(4)$.
- (b) Ne, saj $z \notin \mathcal{Z}f$.
- (c) Ne, saj je $g(y) = g(z)$.
- (d) Da.
- (e) $g \circ f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, a)\}$. Da, $g \circ f$ je surjektivna.
- (f) $f^{-1}(\{x, z\}) = \{1, 4\}$, $g(\{x, z\}) = \{a, b\}$.

1. Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{a, b\}$. Imamo funkciji $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$.

$$f = \{(1, x), (2, y), (3, y), (4, x)\}$$

$$g = \{(x, a), (y, b), (z, b)\}$$

- (a) Ali je f injektivna?
 - (b) Ali je f surjektivna?
 - (c) Ali je g injektivna?
 - (d) Ali je g surjektivna?
 - (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?
2. Naj bo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x, y\}$. Imamo funkciji $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$.

$$f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$$

$$g = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$$

- (a) Ali je f injektivna?
 - (b) Ali je f surjektivna?
 - (c) Ali je g injektivna?
 - (d) Ali je g surjektivna?
 - (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?
3. Naj bo $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{a, b, c\}$. Imamo funkciji $f : A \rightarrow B$ in $g : B \rightarrow C$.

$$f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$$

$$g = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$$

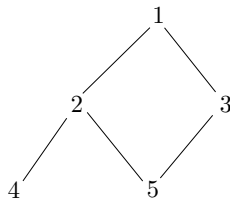
- (a) Ali je f injektivna?
- (b) Ali je f surjektivna?
- (c) Ali je g injektivna?
- (d) Ali je g surjektivna?
- (e) Ali je $g \circ f$ surjektivna?

3.2 STRUKTURE UREJENOSTI

Ključni pojmi:

- Tranzitivnost, navidezna urejenost, šibka urejenost, delna urejenost, linearna urejenost, stroga delna urejenost, stroga linearna urejenost.
- Dobra urejenost. Mreža. Polna mreža.
- Hassejev diagram.
- R -prvi element. R -minimalni element. Neposredni naslednik. Zadnji element.
- R -spodnja meja, R -zgornja meja, R -navzdol omejena množica, R -navzgor omejena množica, R -omejena množica, R -infimum (največja spodnja meja), R -supremum (najmanjša zgornja meja).

Naloga. Množica $S = \{1, \dots, 5\}$ je strogo delno urejena z naslednjo relacijo R :



- (a) Zapišite vse urejene pare, ki tvorijo relacijo R .
- (b) Poiščite vse minimalne in maksimalne elemente.
- (c) Ali ima množica S prvi element? Ali ima množica S zadnji element?
- (d) Ali je množica S dobro urejena?

Rešitev:

(a) $R = \{(5, 2), (5, 1), (4, 2), (4, 1), (5, 3), (4, 1), (2, 1), (3, 1)\}$.

(b) Noben element ni pod elementoma 4 in 5, torej sta 4 in 5 minimalna elementa. Maksimalen element pa je samo eden: 1.

(c) Množica S nima prvega elementa. Elementa 4 in 5 sta sicer minimalna, vendar nobeden od njiju ni pod drugim. Množica S pa ima zadnji element: to je element 1, saj so vsi drugi elementi pod njim.

(d) Ne, saj ni sovisna: Elementa 2 in 3 nista primerljiva: $(2, 3) \notin R$, $(3, 2) \notin R$. \square

Opomba: Naj relacija R strogo delno ureja množico S . Tedaj je $x \in S$ minimalni element natanko tedaj, ko $x \notin \mathcal{Z}R$.

($\mathcal{Z}R$ = zaloga vrednosti relacije R = množica vseh drugih koordinat).

$x \in S$ pa je maksimalen element natanko tedaj, ko $x \notin \mathcal{D}R$.

($\mathcal{D}R$ = domena relacije R = množica vseh prvih koordinat).

1. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Ali je $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (2, 4), (5, 1)\}$ binarna relacija?

b) Za relacijo R najdi ustrezno domeno $\mathcal{D}R$, in zalogo vrednosti $\mathcal{Z}R$.

c) Določi inverzno relacijo R^{-1} in $\mathcal{D}R^{-1}$ in $\mathcal{Z}R^{-1}$.

2. Naj bosta $R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (1, 5)\}$ in $T = \{(1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 5)\}$ binarni relaciji v vesolju $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

a) Določi kompozituma $R \circ T$ in $T \circ R$.

b) Ali velja $R \circ T = T \circ R$?

3. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Določi

$$R = \{(x, y) \mid x - y \text{ je deljivo z } 3\} \quad \text{in} \quad T = \{(x, y) \mid x - y \geq 3\}.$$

Določi $R, T, R \circ R$.

4. V vesolju $S = \mathbb{R}$ definiramo relacijo R :

$$(\forall x)(\forall y)(xRy \Leftrightarrow y \geq x + 3).$$

Je R refleksivna, simetrična, tranzitivna, ali sovisna?

5. Naj velja $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Imamo spodnje relacije:

(i) $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\},$

(ii) $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\},$

(iii) $R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\},$

(iv) $R_4 = \emptyset,$

(v) $R_5 = S \times S.$

Za katere od naštetih relacij velja, da so: refleksivne, simetrične, antisimetrične, tranzitivne?

6. Naj bosta R in S simetrični relaciji. Pokaži: $R \circ S$ simetrična $\Leftrightarrow R \circ S = S \circ R$.

7. Naj bo $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R} \text{ in } y \leq 0\}$ in naj bo R relacija na množici S , definirana kot

$$(x_1, y_1) R (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ in } y_1 \leq y_2.$$

(i) Dokažite, da je R delna urejenost na S .

(ii) Najdite vse R -minimalne elemente.

8. Naj bo $S = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots, 1\}$, in naj bo $R := <$ relacija na S . Ali R dobro ureja S ?

9. Naj bo $S = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ in naj bo R relacija na S , definirana kot

$$m R n \Leftrightarrow p < u \text{ ali } (p = u \text{ in } q < v),$$

kjer je $m = 2^p(2q + 1)$ in $n = 2^u(2v + 1)$, pri čemer sta p in u maksimalno možna eksponenta.

(i) Dokažite, da R dobro ureja S .

(ii) Uredite množico $\{1, 2, \dots, 10\}$ glede na R .

(iii) Naj bo $C = \{50, 51, 52, \dots\}$. Najdite R -minimalni element množice C .

(iv) Najdite neposrednega naslednika števila 96.

3.3 EKVIVALENČNE RELACIJE

1. Zgled: Ulomki.

V množici ulomkov

$$a/b,$$

kjer sta a in b poljubni celi števili in je $b \neq 0$, je definicija enakosti dveh ulomkov

$$a/b = c/d \Leftrightarrow ad = bc$$

očitno ekvivalenčna relacija. Vsak ekvivalenčni razred glede na to relacijo družijo vse med seboj enake ulomke in predstavlja tedaj ustrezno *racionalno število*. Prirejena faktorska množica je *množica racionalnih števil*.

2. Kongruence.

V množici celih števil je relacija *kongruence po modulu m* , kjer je $m > 0$ poljubno pozitivno celo število,

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \text{ deli } a - b,$$

ekvivalenčna relacija.

Ekvivalenčni razredi so v tem primeru *razredi ostankov* po modulu m . V vsakem ekvivalenčnem razredu so vsa tista števila, ki dajo pri deljenju z m isti ostanek.

Očitno je takih razredov natanko m . Te razrede imenujemo *cela števila po modulu m* . Faktorska množica je množica celih števil po modulu m .

3. Zgled: Vzporednost premic.

V množici *vseh premic* je relacija "vzporeden" ekvivalenčna relacija. V vsakem ekvivalenčnem razredu so torej vse premice, ki so med seboj vzporedne, in predstavljajo potemtakem določeno *smer*. Faktorska množica je tukaj *množica vseh smeri*.

4. Let $S = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq 10\}$ in $R = \{(m, n) \in S \times S \mid 3 \mid m - n\}$. Is R an equivalence relation? If yes, determine the corresponding equivalence classes and the factor set.

5. Let $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ and define the relation R as follows

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Show that R is an equivalence relation and find the corresponding equivalence classes.

6. Let $S = \mathbb{R}^2$ and define the relation R as follows

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Show that R is an equivalence relation and find the equivalence class $R[(7, 1)]$.

3.4 GRAFI

1. Naj velja $n \geq 3$. Spomnimo definicijo ciklov in polnih grafov

$$C_n = \{[n], E_1\}$$

$$K_n = \{[n], E_2\}$$

ter definirajmo

$$G_n = \{[n], E_2 \setminus E_1\}$$

- Nariši $H, G_4, G_5, G_6, C_5, C_6, \overline{C_i}$
 - Za vse zgornje grafe določi $\Delta(G_i), \delta(G_i), \alpha(G_i), \omega(G_i), \chi(G_i), g(G_i)$
 - Dokaži $(\forall i \geq 3)(G_i \simeq \overline{C_i})$
2. Naj bo $G = ([n], E)$ graf.
- Dokaži: $\chi(G) \geq \omega(G)$
 - Dokaži: $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$

4

KONČNE IN NESKONČNE MNOŽICE

4.1 PREGLED NAJPOMEMBNEJŠIH POJMOV IN NEKAJ NALOG

Ključni pojmi:

- Relacija ekvipolence: $A \sim B$.
- Relacija $>$ na množicah ("ima večjo moč kot").
- Schröder-Bernsteinov izrek: Množici A in B sta ekvipolentni, če je vsaka od njiju ekvipolentna neki podmnožici druge.
- Zakon trihotomije.
- Definicije končnih in neskončnih množic. (S pomočjo \mathbb{N} ; Peirce-Dedekind; Tarski.)
- Množica \mathbb{N} , Peanovi aksiomi.
- Števno neskončne množice.
- Interval $(0, 1]$ ni števno neskončna množica; Cantorjev dokaz.
- $(0, 1] \sim [0, 1) \sim [0, 1] \sim (0, 1) \sim (-1, 1) \sim \mathbb{R}$.
- Kontinuum. $\mathbb{R} > \mathbb{N}$.
- Cantorjev izrek. Domneva kontinuuma.

Naloga. Pokažite, da ima množica vseh funkcij $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ večjo moč kot \mathbb{R} .

Rešitev: Pokazali smo, da je potenčna množica poljubne množice X ekvipolentna množici $\mathcal{C}(X)$ vseh funkcij $f : X \rightarrow \{0, 1\}$. Po Cantorjevem izreku je torej

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{R}) > \mathbb{R}.$$

Torej ima že množica vseh funkcij $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ večjo moč od kontinuuma! \square

4.2 ZGLEDI ŠTEVNO NESKONČNIH MNOŽIC

Množica celih števil \mathbb{Z} je števno neskončna (saj je $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$).

Tudi množica racionalnih števil \mathbb{Q} je števno neskončna!

Očitno je dovolj pokazati, da je množica pozitivnih racionalnih števil \mathbb{Q}_+ števno neskončna, saj je $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$ in je $\mathbb{Q}_- \sim \mathbb{Q}_+$.

Množico \mathbb{Q}_+ pa lahko zapišemo kot števno unijo števno neskončnih množic:

$$\mathbb{Q}_+ = A_1 \cup A_2 \cup \dots$$

kjer je:

$$A_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots \right\},$$

$$A_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \dots \right\}, \dots$$

Algebraično število: tako kompleksno število x , ki je rešitev kake enačbe oblike

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $a_n \neq 0$ in $a_i \in \mathbb{Z}$ za vse i . Tudi množica algebraičnih števil je števno neskončna. Zapišemo jo namreč lahko kot (števno neskončno) unijo končnih množic:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots,$$

kjer je A_k množica vseh kompleksnih števil, ki so rešitve kakšne enačbe zgornje oblike, pri čemer za njene koeficiente velja $n + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| \leq k$. Vsaka množica A_k je končna, saj vsebuje le ničle kvečjemu $(2k+1)^{k+1}$ polinomov stopnje $\leq k$ s koeficienti iz množice $\{-k, -(k-1), \dots, k-1, k\}$, vsak od takih polinomov pa ima $\leq k$ ničel.