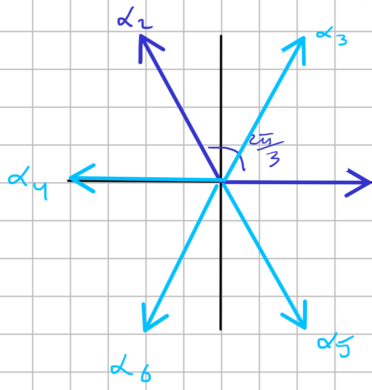
Кореньков Алгебри Лі. Д/З 4.

1

1. Зобразити фундаментальну область для к.с. A_2.

A_2. o—o $|\alpha_1| = |\alpha_2|$ $\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2\pi}{3}$.

dim $A_2 = 2$.



α_1, α_2 — прості корені

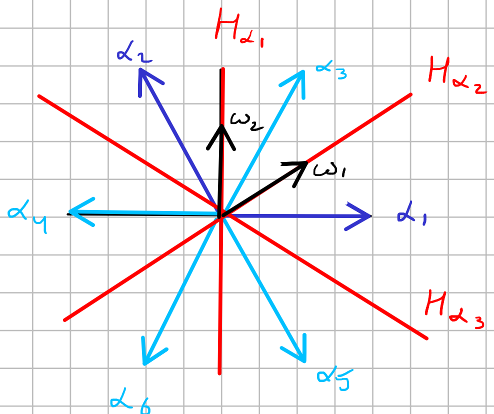
$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ deg $\alpha_3 = 2$ α_3 — старший

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in A_2^+$ — додатні корені

$\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in A_2^-$ — від'ємні корені.

$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$

$\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = 1$ $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$



r_i — reflection along α_i

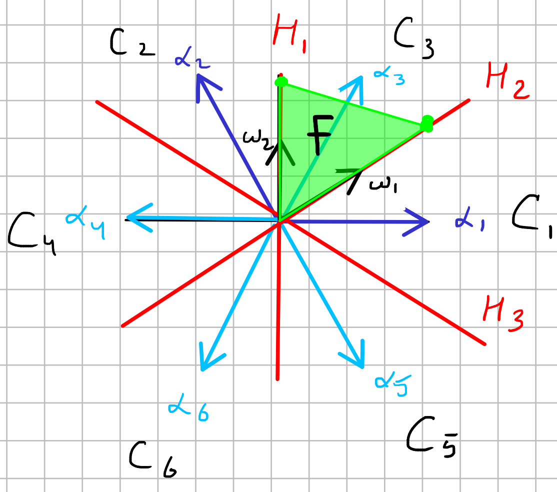
r_i: відзеркалює відносно H_{α_i}

$$\begin{cases} \alpha_1 = (0, 1)_e \\ \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \end{cases}$$ — базис A_2

$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)_e = \left(\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\right)_\alpha \\ \omega_2 = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)_e = \left(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\right)_\alpha \end{cases}$$ — фундам. ваги.

Старший корінь $\xi = \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$

- Камери Вейля — компоненти зв'язності $\mathbb{R}^n \setminus (\cup_i H_i)$
- Фундаментальна камера Вейля — така камера Вейля C для якої $\forall x \in C \subset \mathbb{R}^2: \forall \alpha \in B: (x, \alpha) > 0$.
- Фундаментальна область $F = \text{Symplex}\left(0, \frac{\check{\omega}_1}{m_1}, \dots, \frac{\check{\omega}_n}{m_n}\right)$



Для $x \in C_2, C_4, C_6$ $(x, \alpha_1) < 0$

Для $x \in C_1, C_5, C_6$ $(x, \alpha_2) < 0$

Отже, фундам. камера Вейля — C_3

Аналогічно, старший корінь $\xi = \alpha_3 \in C_3$.

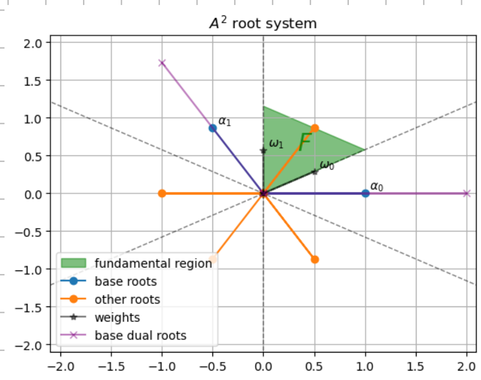
$\check{\omega}_1 = \frac{2}{(\alpha_1, \alpha_1)} \omega_1 = 2\omega_1$

$\check{\omega}_2 = \frac{2}{(\alpha_2, \alpha_2)} \omega_2 = 2\omega_2$

$\xi = 1 \cdot \alpha_1 + 1 \cdot \alpha_2$.

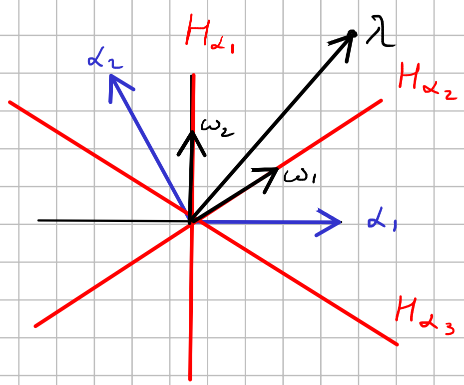
$m_1 = m_2 = 1$.

$F = \text{Sym}(0, 2\omega_1, 2\omega_2)$



№2

2. Знайти орбіту точки $\lambda = 2\omega_1 + \omega_2$.



$$\begin{cases} \alpha_1 = (0,\ 1)_e \\ \alpha_2 = \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \end{cases}$$

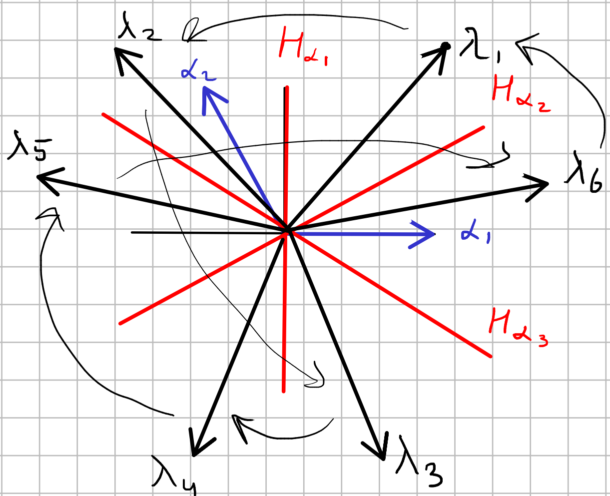
$$\begin{cases} \omega_1 = \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{6}\right)_e = \left(\frac{2}{3}\ \ \frac{1}{3}\right)_\alpha \\ \omega_2 = \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)_e = \left(\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\right)_\alpha \end{cases}$$

$$\lambda = 2\omega_1 + \omega_2 = 2\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_\alpha + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}_\alpha$$

- $$r_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha - \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \alpha_1 \right\rangle \alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha - \Big(a \underbrace{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle}_{2} + b \underbrace{\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}_{-1}\Big)\alpha_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha + (b-2a)\alpha_1 =$$
$$= \begin{pmatrix} b-a \\ b \end{pmatrix}_\alpha$$

- $$r_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha - \Big(a \underbrace{\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle}_{-1} + b \underbrace{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle}_{2}\Big)\alpha_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\alpha + (a-2b)\alpha_2 =$$
$$= \begin{pmatrix} a \\ a-b \end{pmatrix}_\alpha$$

- $\lambda_1 = \lambda = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_2 = r_1 \lambda = \begin{pmatrix} 4/3 - 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_3 = r_2 r_1 \lambda = r_2 \lambda_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 - 4/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_4 = r_1 r_2 r_1 \lambda = r_1 \lambda_3 = \begin{pmatrix} -5/3 + 1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_5 = r_2 r_1 r_2 r_1 \lambda = r_2 \lambda_4 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ -4/3 + 5/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_6 = r_1 r_2 r_1 r_2 r_1 \lambda = r_1 \lambda_5 = \begin{pmatrix} 1/3 + 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}_\alpha$
- $\lambda_7 = r_2 \lambda_6 = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 5/3 - 1/3 \end{pmatrix}_\alpha = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}_\alpha = \lambda$

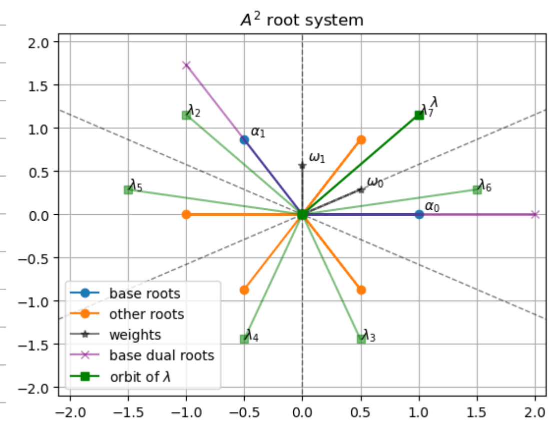


Тобто $Orb(\lambda) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$|Orb(\lambda)| = 6$$

Рисуночок з Python:



№ 3 3. Виписати в явному вигляді орбіт-функції $C_\lambda(x)$ і $S_\lambda(x)$.

$\underline{\text{def}}$ $$C_\lambda(x) = \sum_{w\in W} e^{2\pi i (w\lambda, x)}$$

$\underline{\text{def}}$ $$S_\lambda(x) = \sum_{w\in W} (-1)^{p(w)} e^{2\pi i (w\lambda, x)}$$

де W – група Вейля, $p(w)$ – кількість множників в $w = r_i \dots$

У мене вище записані ці співвідношення в α-базисі, але тут зручніше буде перепитати все в ω-базисі.

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha_1 &= 2\omega_1 - \omega_2 \\ \alpha_2 &= -\omega_1 + 2\omega_2\end{aligned}} \qquad \lambda = 2\omega_1 + \omega_2$$

$$r_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega - \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \alpha_1\right\rangle \alpha_1 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega - \left(a\cancelto{1}{\langle\omega_1,\alpha_1\rangle} + b\cancelto{0}{\langle\omega_2,\alpha_2\rangle}\right)\alpha_1 =$$

$$= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega - a\cdot(2\omega_1 - \omega_2) = \begin{pmatrix}-a\\a+b\end{pmatrix}_\omega$$

$$r_2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \alpha_2\right\rangle\alpha_2 = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega - \left(a\cancelto{0}{\langle\omega_1,\alpha_2\rangle} + b\cancelto{1}{\langle\omega_2,\alpha_2\rangle}\right)\alpha_2 =$$

$$= \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}_\omega - b\cdot(-\omega_1 + 2\omega_2) = \begin{pmatrix}a+b\\-b\end{pmatrix}_\omega$$

$$r_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}_\omega \qquad r_2 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}_\omega$$

Нехай $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = r_1\lambda_1$, $\lambda_3 = r_2\lambda_2$, $\lambda_4 = r_1\lambda_3$, $\lambda_5 = r_2\lambda_4$, $\lambda_6 = r_1\lambda_5$.

$$Orb(\lambda) = \Big\{ \underset{\lambda_1}{\overset{+}{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_\omega}}, \underset{\lambda_2}{\overset{-}{\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}_\omega}}, \underset{\lambda_3}{\overset{+}{\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}_\omega}}, \underset{\lambda_4}{\overset{-}{\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}_\omega}}, \underset{\lambda_5}{\overset{+}{\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}_\omega}}, \underset{\lambda_6}{\overset{-}{\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}_\omega}} \Big\}$$

Нехай $\boxed{x = x_1\check{\alpha}_1 + x_2\check{\alpha}_2}$ $\qquad ((\check{\alpha}_i, \omega_j) = \delta_{ij})$

- $$(\lambda_1, x) = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}_\omega, \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}_{\check{\alpha}}\right) = 2x_1\cancelto{1}{(\omega_1,\check{\alpha}_1)} + 2x_2\cancelto{0}{(\omega_1,\check{\alpha}_2)} + x_1\cancelto{0}{(\omega_2,\check{\alpha}_1)} + x_2\cancelto{1}{(\omega_2,\check{\alpha}_2)} =$$
$$= 2x_1 + x_2$$

Тобто такий скалярний добуток працює як сума добутків координат.

$$C_\lambda(x) = e^{2\pi i(2x_1+x_2)} + e^{2\pi i(-2x_1+3x_2)} + e^{2\pi i(x_1-3x_2)} + e^{2\pi i(-x_1-2x_2)} + e^{2\pi i(-3x_1+2x_2)} + e^{2\pi i(3x_1-x_2)}$$

За моєю нумерацією орбіти λ, $p(w_i) = i-1$ тобто $(-1)^{p(w_i)} = (-1)^{i-1}$

$$S_\lambda(x) = e^{2\pi i(2x_1+x_2)} - e^{2\pi i(-2x_1+3x_2)} + e^{2\pi i(x_1-3x_2)} - e^{2\pi i(-x_1-2x_2)} + e^{2\pi i(-3x_1+2x_2)} - e^{2\pi i(3x_1-x_2)}$$