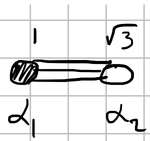
Корешков. Алгебри Лі. Модульна КР №2.

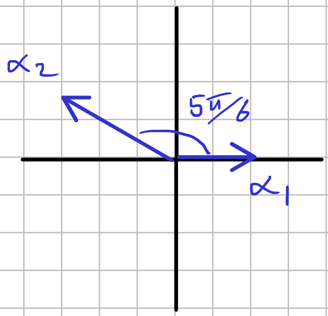
№1 1. Побудувати у явному вигляді прості корені та матрицю Картана $\mathfrak{C}$ для кореневої системи G_2. (2б.)

G_2:



$|\alpha_1| = 1$ $\qquad$ $|\alpha_2| = \sqrt{3}$

$\angle(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{5\pi}{6}$ $\qquad$ $\cos\angle(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\alpha_1 = (1 \quad 0)_e$$

$$\alpha_2 = \sqrt{3}\begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} \\ \sin\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_e$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2$$

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = 2\frac{(\alpha_1 \alpha_2)}{(\alpha_2 \alpha_2)} = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = -1$$

$$\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 2\frac{(\alpha_2 \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = -3$$

$$\langle \alpha_2 \alpha_2 \rangle = 2$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Матриця Картана.

№2 2. Побудувати ваговий базис $\{\omega_1, \omega_2\}$, а також двоїсті базиси $\{\check{\alpha}_1, \check{\alpha}_2\}$, і $\{\check{\omega}_1, \check{\omega}_2\}$. (3б.)

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= (1 \quad 0)_e \\ \alpha_2 &= \left(-\tfrac{3}{2} \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \check{\alpha}_1 &= \frac{2\alpha_1}{(\alpha_1, \alpha_1)} = 2\alpha_1 = (2 \quad 0)_e \\ \check{\alpha}_2 &= \frac{2\alpha_2}{(\alpha_2 \alpha_2)} = \frac{2\alpha_2}{3} = \left(-1 \quad \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_e \end{aligned}}$$

$(\omega_i, \check{\alpha}_j) = \delta_{ij}$ $\qquad$ Нехай $\omega_1 = (a\, b)_e$, $\omega_2 = (c\, d)_e$

$$(\omega_1, \check{\alpha}_1) = 2a = 1 \Rightarrow a = \tfrac{1}{2}$$

$$(\omega_1, \check{\alpha}_2) = -\overset{1/2}{\cancel{a}} + \frac{\sqrt{3}}{3}b = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}b = \tfrac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(\omega_2, \check{\alpha}_1) = 2c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(\omega_2, \check{\alpha}_2) = -\overset{0}{\cancel{c}} + \frac{\sqrt{3}}{3}d = 1 \Rightarrow d = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \\ \omega_2 &= (0 \quad \sqrt{3})_e \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \check{\omega}_1 &= (1 \quad \sqrt{3})_e \\ \check{\omega}_2 &= \left(0 \quad \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)_e \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} C^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \omega_1 &= (2 \quad 1)_\alpha \\ \omega_2 &= (3 \quad 2)_\alpha \end{aligned}}$$

$$\check{\omega}_1 = \frac{2\omega_1}{(\alpha_1 \alpha_1)} = (1 \quad \sqrt{3})$$

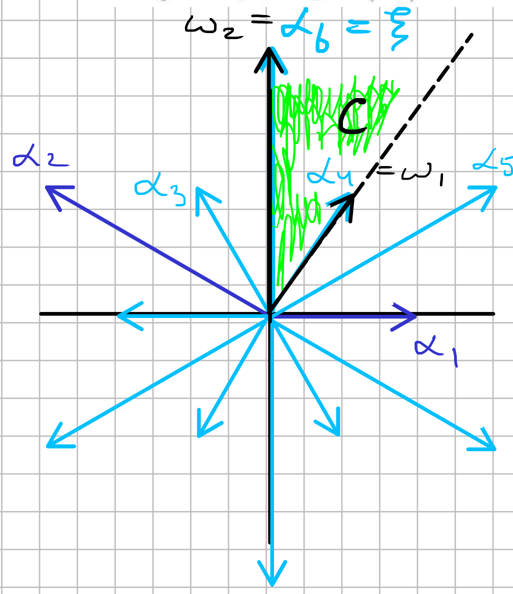
$$\check{\omega}_2 = \frac{2\omega_2}{(\alpha_2 \alpha_2)} = \left(0 \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$(\check{\omega}_1, \alpha_1) = 1$

$(\check{\omega}_2 \ \alpha_2) = 1$ $\qquad$ (перевірка)

N3

3. Зобразити фундаментальну область кореневої системи G_2 за умови, що її старший корінь $\xi = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$ і . (2б.)



$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \left(-\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \qquad (\deg = 2)$

$\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = \left(\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \qquad (\deg = 3)$

$\alpha_5 = \alpha_2 - \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle \alpha_1 = \alpha_2 - (-3)\alpha_1 =$

$= 3\alpha_1 + \alpha_2 = \left(\tfrac{3}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \qquad (\deg = 4)$

$\alpha_6 = \alpha_2 + \alpha_5 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = (0 \;\; \sqrt{3})_e$

$(\deg = 5)$

$(\alpha_2, \alpha_4) = \left(-\tfrac{3}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} = \underline{\underline{0}}$

$(\alpha_3 \;\; \alpha_5) = (r_{\alpha_1}\alpha_4, \; r_{\alpha_1}\alpha_2) = (\alpha_4, \alpha_2) = \underline{0}$

$G_2^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

Дійсно, старшим коренем буде

$\xi = \alpha_6 = (3 \;\; 2)_\alpha$

Фундаментальна камера Вейля C: $\forall x \in \mathbb{R}^2 \; \forall \alpha \in B: (x, \alpha) > 0$

Наші площини віддзеркалення розташовані вздовж самих коренів

Шукаємо фундаментальну область F

$F = \text{Symplex}\left(0, \frac{\check{\omega}_1}{k_1}, \frac{\check{\omega}_2}{k_2}\right)$ $\qquad \boxed{\check{\omega}_1 = 2\omega_1, \quad \check{\omega}_2 = \tfrac{2}{3}\omega_2}$

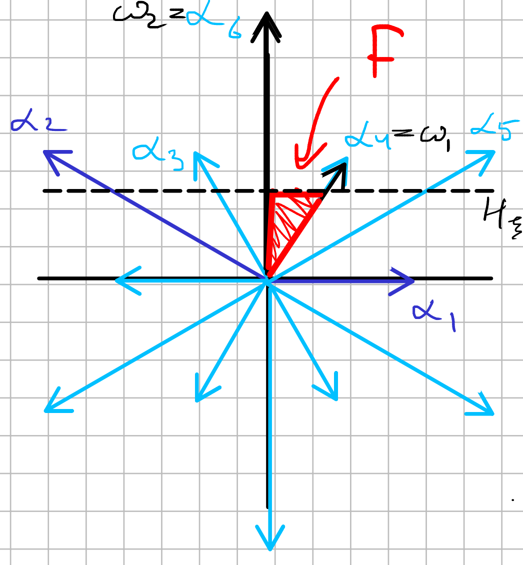
де $\xi = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$. $\qquad \boxed{k_1 = 3. \quad k_2 = 2.}$

$F = \text{Symplex}\left(0, \tfrac{1}{3} \cdot 2\omega_1, \tfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \tfrac{\cancel{2}}{3}\omega_2\right) = \text{Symplex}(0, A, B)$, де

$A = \tfrac{2}{3}\omega_1 = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e = \left(\tfrac{1}{3} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_e$

$B = \tfrac{1}{3}\omega_2 = \tfrac{1}{3}(0 \;\; \sqrt{3})_e = \left(0 \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_e$

Лінія $AB \parallel OX$



$H_{\xi,1}$ $\quad S_0 = r_\xi + \frac{2\xi}{(\xi, \xi)} =$ $\qquad \check{\xi} = \tfrac{2}{3}\xi = \left(0 \;\; \tfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$= x - \langle x, \xi \rangle \xi + \check{\xi} =$

$= x - ((x, \xi) - 1)\check{\xi} =$

$= S_{\xi,1}$ − афінне віддзеркалення що доповнює $W(G_2)$ до W_{aff}.

$S_{\xi,1}$ діє як віддзеркалення відносно афінної гіперплощини H_ξ зсунутої на $\frac{1}{2}\xi$.

$$H_{\xi,1} = H_\xi + \frac{1}{2}\xi = H_\xi + \frac{1}{3}\xi = \{(x\ \ \tfrac{\sqrt{3}}{3}) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

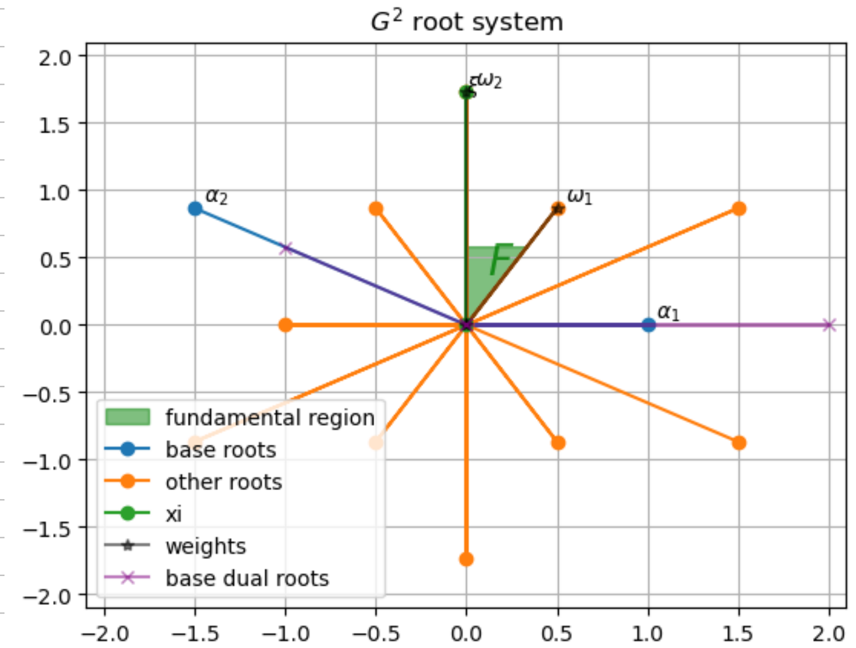
Межа симплексу F як раз буде по $H_{\xi,1}$, тобто фундаментальна область визначена правильно.

(Додаткове джерело: https://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/talks/AffineWeylGroups.pdf)

Ще раз,

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \mathrm{Symplex}\left(0, \tfrac{2}{3}\omega_1, \tfrac{1}{3}\omega_2\right) = \\ &= \mathrm{Symplex}\left(0, \left(\tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_e, \left(0\ \ \tfrac{\sqrt{3}}{3}\right)_e\right) \end{aligned}}$$

Рисуночок в Python щоб перевірити себе:



№4 4. Знайти дії віддзеркалень r_{α_1} і r_{α_1} на фундаментальні ваги. (3 б.)

r_{α_2} ?

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= (1 \;\; 0)_e \\ \alpha_2 &= \left(-\tfrac{3}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\tfrac{1}{2} \;\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)_e = (2 \;\; 1)_\alpha \\ \omega_2 &= (0 \;\; \sqrt{3})_e = (3 \;\; 2)_\alpha \end{aligned}}$$

Обчислимо матриці операторів віддзеркалення $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}$ в ω-базисі.

Спочатку запишемо α_i в ω-базисі

$$\alpha_1 = 2\omega_1 - \omega_2$$
$$\alpha_2 = -3\omega_1 + 2\omega_2$$

- $r_{\alpha_1}(a, b)_\omega = (a \;\; b)_\omega - \langle (a \;\; b)_\omega, \alpha_1 \rangle \alpha_1 =$
$$= (a \;\; b)_\omega - \big(a \overset{1}{\cancel{\langle \omega_1, \alpha_1 \rangle}} + b \overset{0}{\cancel{\langle \omega_2, \alpha_1 \rangle}}\big)\alpha_1 =$$
$$= (a \;\; b)_\omega - a\alpha_1 =$$
$$= (a \;\; b)_\omega - 2a\omega_1 + a\omega_2 = \begin{pmatrix} -a \\ a+b \end{pmatrix}_\omega$$

- $r_{\alpha_2}(a \;\; b)_\omega = (a \;\; b)_\omega - \langle (a \;\; b)_\omega, \alpha_2 \rangle \alpha_2 =$
$$= (a \;\; b)_\omega - \big(a \overset{0}{\cancel{\langle \omega_1, \alpha_2 \rangle}} + b \overset{1}{\cancel{\langle \omega_2, \alpha_2 \rangle}}\big)\alpha_2 =$$
$$= (a \;\; b)_\omega - b\alpha_2 =$$
$$= (a \;\; b)_\omega + 3b\omega_1 - 2b\omega_2 = \begin{pmatrix} a+3b \\ -b \end{pmatrix}_\omega$$

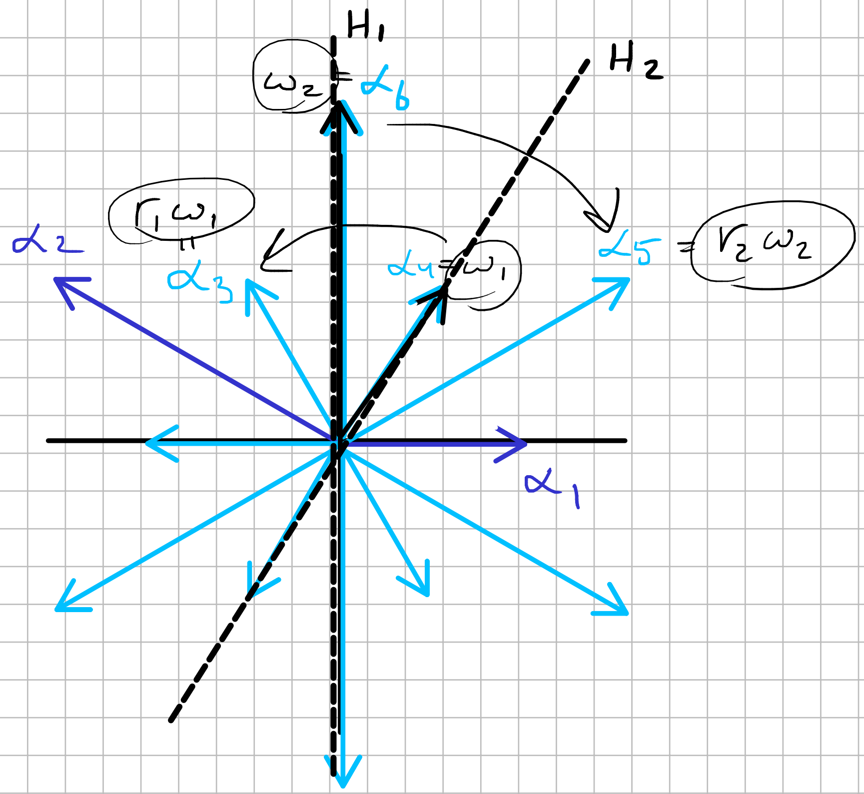
Тобто

$$r_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_\omega \qquad r_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_\omega$$

- $r_{\alpha_1}\omega_1 = (-1 \;\; 1)_\omega = -\omega_1 + \omega_2 = -2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 = \left(-\frac{1}{2} \;\; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_e$
- $r_{\alpha_2}\omega_1 = (1 \;\; 0)_\omega = \omega_1 = \alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2 = \left(\frac{1}{2} \;\; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_e$
- $r_{\alpha_1}\omega_2 = (0 \;\; 1)_\omega = \omega_2 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_6 = (0 \;\; \sqrt{3})_e$

  (ω_1 лежить в H_{α_2}, ω_2 лежить в H_{α_1})

- $r_{\alpha_2}\omega_2 = (3 \;\; -1)_\omega = 3\omega_1 - \omega_2 = 3(2\alpha_1 + \alpha_2) - 3\alpha_1 - 2\alpha_2 =$
$$= 3\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_5$$



H_1
H_2
$\omega_2 = \alpha_6$
$r_1\omega_1$
α_2
α_3
$\alpha_4 = \omega_1$
$\alpha_5 = r_2\omega_2$
α_1