Алгебри Лі. HW 2. Корешков.

№1

1. Встановити (залежно від параметрів $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$) якій з дійсних тривимірних алгебр ізоморфна матрична алгебра з базисом:

$$e_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вказівка: користуватись переліком неізоморфних тривимірних алгебр з Лекції 3 (остання сторінка).

Обчислю структурні сталі:

$$e_1 \cdot e_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a e_2$$

$$e_2 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c\, e_2$$

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = (a-c)\, e_2$$

$$e_1 \cdot e_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = b\, e_3$$

$$e_3 \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c\, e_3$$

$$[e_1, e_3] = e_1 e_3 - e_3 e_1 = (b-c) e_3$$

$$e_2 \cdot e_3 = e_3 \cdot e_2 = 0 \qquad [e_2, e_3] = 0$$

$$g: [e_1, e_2] = (a-c) e_2 \ ; \ [e_1, e_3] = (b-c) e_3.$$

Покладемо $\alpha = a - c$, $\beta = b - c$.

$$g': [e_1, e_2] = \alpha e_2, \quad [e_1, e_3] = \beta e_3.$$

1) Нехай $\alpha = 0$, $\beta = 0$ $(a = b = c)$.

Тоді g' – абелева алгебра.

1

$$\boxed{g = 3 g_1}$$

2) Нехай $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$. $a \neq c$, $b = c$

$g: [e_1, e_2] = \alpha e_2$

Нехай $x_1 = e_2$, $x_2 = -\frac{1}{\alpha} e_1$, $x_3 = e_3$

$$[x_1, x_2] = [e_2, -\tfrac{1}{\alpha} e_1] = \tfrac{1}{\alpha}[e_1, e_2] = \tfrac{\alpha}{\alpha} e_2 = e_2 = x_1$$

$$[x_1, x_3] = [e_2, e_3] = 0$$

$$[x_2, x_3] = [-\tfrac{1}{\alpha} e_1, e_3] = -\tfrac{1}{\alpha}[e_1, e_3] = 0$$

$g : [x_1, x_2] = x_1$, $\dim g^{(2)} = 3$.

2

$$\boxed{g = g_{2,1} \oplus g_1}$$

3) Нехай $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. $(a = c,\ b \neq c)$

$X_1 = e_3$ $\quad [X_1, X_2] = [e_3, -\frac{1}{\beta}e_1] = \frac{1}{\beta}[e_1, e_3] = \frac{1}{\beta}\beta e_3 =$

$X_2 = -\frac{1}{\beta}e_1$ $\quad = e_3 = X_1$

$X_3 = e_2$ $\quad [X_1, X_3] = [e_3, e_2] = 0$

$[X_2, X_3] = -\frac{1}{\beta}[e_1, e_2] = \alpha e_2 = 0$

$\mathfrak{g}: [X_1, X_2] = X_1$ $\quad \boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{2.1} \oplus \mathfrak{g}_1}$ 3

4) Нехай $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. $(a \neq b,\ b \neq c,\ a \neq c)$

$[e_1, e_2] = \alpha e_2 = (0\ \alpha\ 0)^T$ $\quad \mathfrak{g}' = \langle e_2, e_3 \rangle$

$[e_1, e_3] = \beta e_3 = (0\ 0\ \beta)^T$ $\quad \mathfrak{g} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$

$ad_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ (діагоналізовна)

Нехай

$X_1 = e_2$ $\quad [X_1, X_2] = [e_2, e_3] = 0$

$X_2 = e_3$ $\quad [X_1, X_3] = [e_2, -\frac{1}{\alpha}e_1] = \frac{1}{\alpha}[e_1, e_2] = \frac{\alpha}{\alpha}e_2 = e_2 = X_1$

$X_3 = -\frac{1}{\alpha}e_1$ $\quad [X_2, X_3] = [e_3, -\frac{1}{\alpha}e_1] = \frac{1}{\alpha}[e_1, e_3] = \frac{\beta}{\alpha}e_3 = \frac{\beta}{\alpha}X_2 =$

$\gamma = \beta/\alpha$ $\quad = \gamma X_2$

Тоді $\mathfrak{g}$: $[X_1, X_3] = X_1$, $[X_2, X_3] = \gamma X_2$

$(\alpha = a - c,\ \beta = b - c)$

4.1) для $|\gamma| = 1$ маємо $|\alpha| = |\beta|$, $|b - c| = |a - c|$

Якщо $\gamma = 1$, то все ок. Якщо $\gamma = -1$, то $X_3 := +\frac{1}{\alpha}e_1$.

Тоді $\boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{3.3}}$ 4

5. $\mathfrak{g}_{3.3}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = e_2$.

4.2) для $|\gamma| < 1$ маємо $|\beta/\alpha| < 1$, $|\beta| < |\alpha|$, $|b - c| < |a - c|$

$\boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\gamma}_{3.4}}$ 5

6. $\mathfrak{g}^a_{3.4}$: $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_2, e_3] = ae_2$, $-1 \leq a < 1$, $a \neq 0$.

4.3) для $|\gamma| > 1$ маємо $|\beta/\alpha| > 1$, $|\beta| > |\alpha|$, $|b - c| > |a - c|$

Нехай $\delta = \frac{1}{\gamma} = \alpha/\beta$, $|\delta| < 1$. $\quad \boxed{\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\delta}_{3.4}}$ 6

$X_1 = e_3$ $\quad [X_1, X_2] = [e_2, e_3] = 0$

$X_2 = e_2$ $\quad [X_1, X_3] = \frac{1}{\beta}[e_1, e_3] = \frac{\beta}{\beta}e_3 = e_3 = X_1$

№2

2. Навести приклад розв'язної але не нільпотентної алгебри Лі, яка не є тривимірною.

$\dim g \neq 3.$ $\exists n: \quad g^{(n)} = 0$ та $\forall m: \ g^m \neq 0.$

$$[g, s] := \{[x,y] \mid x \in g, y \in s\}$$
$$g^{(1)} = g' = g^2 = [g,g] = \{[x,y] \mid x,y \in g\}$$
$$g^{(n)} = [g^{(n-1)}, g^{(n-1)}]; \qquad g^n = [g^{n-1}, g].$$

Дослідимо що в $\dim < 3$.

1) $\dim g = 1.$ $\quad g = \langle e_1 \rangle, \quad g = g_1.$

$g^2 = \langle [e_1, e_1] \rangle = 0$ розвязна, нільпотентна.

2) $\dim g = 2.$ $\quad g = \langle e_1, e_2 \rangle.$

2.1) $g = 2g_1.$ $\quad g^2 = 0.$ розвязна, нільпотентна.

2.2) $\dim g' = 1.$ $\quad g = g_{2.1}.$ $\quad [e_1, e_2] = e_1.$

$g^2 = \langle e_1 \rangle.$ $\quad g^3 = \langle [e_1, e_2] \rangle = \langle e_1 \rangle = g^m \quad \forall m \geq 1.$

Не нільпотентна.

$g'' = \langle [e_1, e_1] \rangle = 0$ розвязна.

Спробуємо побудувати $\dim g = 4$.

$g = g_{2.1} \oplus g_{2.1}.$ $\qquad g = \langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle.$

$[e_1, e_2] = e_1$
$[e_3, e_4] = e_3.$

$$g^2 = \langle [e_1, e_2], [e_3, e_4] \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle$$
$$g^3 = \langle [e_1, e_2], [e_3, e_4] \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle$$
$$g^m = \langle e_1, e_3 \rangle \quad \forall m > 1.$$

Не нільпотентна.

$$g' = g^2 = \langle e_1, e_3 \rangle$$
$$g'' = \langle [e_1, e_3], [e_1, e_1], [e_3, e_3] \rangle = 0$$

розвязна.

Тобто, $g = 2g_{2.1}$ – розвязна та не нільпотентна $\dim g = 4.$

Відповідь: 1) $g_{2.1}$, $\dim g_{2.1} = 2$

2) $2g_{2.1}$, $\dim 2g_{2.1} = 4.$

(N3) 3. Знайти узагальнену контракцію Іньоню-Вігнера, яка зводить алгебру $so(3)$ до тривимірної алгебри Гейзенберга.

$$so(3): \quad \overset{\mathrm{I}}{[e_1, e_2] = e_3}, \quad \overset{\mathrm{II}}{[e_2, e_3] = e_1}, \quad \overset{\mathrm{III}}{[e_3, e_1] = e_2}.$$

$$h = g_{3.1}: \quad [x_1, x_2] = x_3.$$

Контракція GIW: $$U_\varepsilon = \hat{W}\begin{pmatrix} \varepsilon^{\alpha_1} & & \\ & \varepsilon^{\alpha_2} & \\ & & \ddots \ \varepsilon^{\alpha_n} \end{pmatrix}\check{W}$$

де $\hat{W}, \check{W}$ не залежать від ε, невироджені.

$$\mu_\varepsilon(x, y) = U_\varepsilon^{-1}\mu(U_\varepsilon x, U_\varepsilon y), \quad \varepsilon \to 0$$

Бачимо, що треба позбутися співвідношень II та III.

Нехай $x_1 = \varepsilon^\alpha e_1$, $x_2 = \varepsilon^\beta e_2$, $x_3 = \varepsilon^\gamma e_3$.

$$[x_1, x_2] = \varepsilon^{\alpha+\beta}[e_1, e_2] = \varepsilon^{\alpha+\beta} e_3 = \varepsilon^{\alpha+\beta-\gamma} x_3 \to x_3$$
$$[x_1, x_3] = \varepsilon^{\alpha+\gamma}[e_1, e_3] = -\varepsilon^{\alpha+\gamma} e_2 = -\varepsilon^{\alpha+\gamma-\beta} x_2 \to 0$$
$$[x_2, x_3] = \varepsilon^{\beta+\gamma}[e_2, e_3] = \varepsilon^{\beta+\gamma} e_1 = \varepsilon^{\beta+\gamma-\alpha} x_1 \to 0$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma = 0 \\ \alpha-\beta+\gamma > 0 \\ -\alpha+\beta+\gamma > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha+\beta = \gamma \\ \alpha-\beta+\alpha+\beta = 2\alpha > 0 \\ -\alpha+\beta+\alpha+\beta = 2\beta > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

$$[x_1, x_2] = \varepsilon^0 x_3 \to x_3$$
$$[x_1, x_3] = -\varepsilon^2 x_2 \to 0$$
$$[x_2, x_3] = \varepsilon^2 x_1 \to 0$$

Отже, $U_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & \varepsilon & \\ & & \varepsilon^2 \end{pmatrix}$ задає контракцію $so(3)$ до $g_{3.1}$

(N4) 4. Знайти комутаційні співвідношення та встановити тип алгебри Лі реалізованої диференціальними операторами:

$b_1 = -\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2$, $b_2 = -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2$, $b_3 = \partial_1$.

$$b_1 = -\sin x \tan y\, \partial_x - \cos x\, \partial_y$$
$$b_2 = -\cos x \tan y\, \partial_x + \sin x\, \partial_y$$
$$b_3 = \partial_x$$

$g = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. $\qquad \mu(x, y) = x \circ y - y \circ x$

В другому pdf наведені результати обчислень.

Виходить, що відповідна алгебра Лі — $so(3)$.

g: $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$.

Алгебри Лі. ДЗ 2.

Михайло Корешков, 2024

4. Знайти комутаційні співвідношення та встановити тип алгебри Лі реалізованої диференціальними операторами:

$$b_1 = -\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2,\ b_2 = -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2,\ b_3 = \partial_1.$$

Вибачте, я не готовий рахувати таку кількість диференціалів вручну

In [2]:
```
import sympy as sym
from sympy import symbols, Function, Derivative as D, sin, cos, tan, diff, Matrix
import numpy as np
from sympy import init_printing, latex
from IPython.display import display, Math
```

In [4]:
```
f = symbols('f', cls=Function)
x,y = symbols('x y')
f = f(x,y)
```

In [5]:
```
b1 = -sin(x)*tan(y)*D(f,x) - cos(x)*D(f,y)
b2 = -cos(x)*tan(y)*D(f,x) +sin(x)*D(f,y)
b3 = D(f,x)
b = [b1,b2,b3]

for n,i in enumerate(b): display(Math(f"b_{n+1} = " + latex(i)))
```

$$b_1 = -\sin(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$b_2 = \sin(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - \cos(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

$$b_3 = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$$

In [6]:
```
def mu(x,y):
    return x.subs(f,y) - y.subs(f,x)
```

In [7]:
```
c = Matrix.zeros(3,3)
for n,i in enumerate(b):
    for m,j in enumerate(b[n:],start=n):
        c[n,m] = mu(i,j)
        c[m,n] = c[n,m]
        display(Math(f"\left[b_{n+1}, b_{m+1}\\right] = {latex(c[n,m])}"))
```

$$[b_1, b_1] = 0$$

$$[b_1, b_2] = -\sin(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - \cos(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right) - \sin(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\sin(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) + \cos(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right) - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - \cos(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)$$

$$[b_1, b_3] = -\sin(x)\tan(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) - \cos(x)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(-\sin(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) - \cos(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right)$$

$$[b_2, b_2] = 0$$

$$[b_2, b_3] = \sin(x)\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y) - \cos(x)\tan(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x)\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - \cos(x)\tan(y)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\right)$$

$$[b_3, b_3] = 0$$

In [12]:
```
simple_c = Matrix.zeros(3,3)
for n,i in enumerate(b):
    for m,j in enumerate(b[n:],start=n):
        simple_c[n,m] = c[n,m].doit().simplify()
        display(Math(f"\left[b_{n+1}, b_{m+1}\\right] = {latex(simple_c[n,m])}"))
```

$[b_1, b_1] = 0$

$[b_1, b_2] = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$[b_1, b_3] = -\sin(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \cos(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$

$[b_2, b_2] = 0$

$[b_2, b_3] = -\sin(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - \cos(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$

$[b_3, b_3] = 0$

In [80]:

```
def test_literal_equality(x,y,lhs='',rhs=''):
    if lhs: lhs = lhs + " = "
    if rhs: rhs = " = " + rhs
    is_equal = (x==y)
    sign = ' = ' if is_equal else ' \\neq '
    sign = ' \quad' + sign + '\quad '
    color = 'green' if is_equal else 'red'
    text = "\\color{" + color + "}{" + lhs + latex(x) + sign + latex(y) + rhs +"}"
    display(Math(text))
    return is_equal
```

In [81]:

```
test_literal_equality(simple_c[0,1], b3, '\\left[ b_1, b_2 \\right]', 'b_3')
test_literal_equality(simple_c[0,2], -b2, '\\left[ b_1, b_3 \\right]', '-b_2')
test_literal_equality(simple_c[1,2], b1, '\\left[ b_2, b_3 \\right]', 'b_1')
```

$[b_1, b_2] = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = b_3$

$[b_1, b_3] = -\sin(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \cos(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \quad = \quad -\sin(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) + \cos(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -b_2$

$[b_2, b_3] = -\sin(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - \cos(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \quad = \quad -\sin(x) \tan(y) \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - \cos(x) \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = b_1$

Out[81]: True

Отже,

$$[b_1, b_2] = b_3$$

$$[b_2, b_3] = b_1$$

$$[b_3, b_1] = b_2$$

Тобто маємо алгебру $so(3)$

In [ ]: