Клас складності $\mathcal{NP}$

Андрій Фесенко

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга
- δ не є функцією, а є відношенням

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга
- δ не є функцією, а є відношенням
- з однієї конфігурації може безпосередньо виводитися декілька конфігурацій

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга
- δ не є функцією, а є відношенням
- з однієї конфігурації може безпосередньо виводитися декілька конфігурацій
- недетермінованість $\neq$ ймовірносне

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta \colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга
- δ не є функцією, а є відношенням
- з однієї конфігурації може безпосередньо виводитися декілька конфігурацій
- недетермінованість $\neq$ ймовірносне
- недетермінованість є виключно абстрактним поняттям

c машини Тюрінга

choice machines або c-machines (Алан Тюрінг, 1936р.)
$(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
$\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
або $\delta \subseteq (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \times Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$

- (інтерактивна) недетермінована машина Тюрінга
- δ не є функцією, а є відношенням
- з однієї конфігурації може безпосередньо виводитися декілька конфігурацій
- недетермінованість $\neq$ ймовірносне
- недетермінованість є виключно абстрактним поняттям
- недетермінованість $=$ розгалуження копії?

Граф конфігурацій (обчислень)

Обчислення детермінованої машини Тюрінга

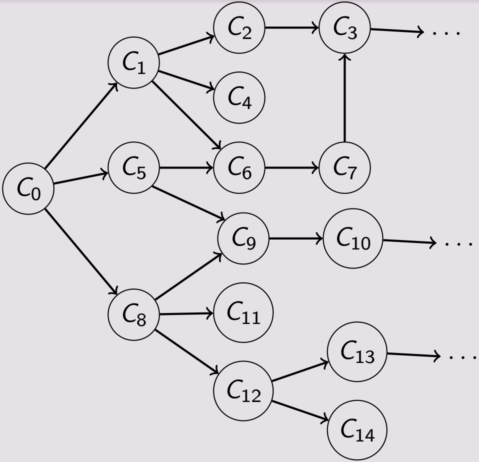
$C_0 \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow \cdots$ ланцюг (шлях) $C_{M,x}$

Граф конфігурацій (обчислень)

Обчислення детермінованої машини Тюрінга

$C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to \cdots$ ланцюг (шлях) $C_{M,x}$

Обчислення інтерактивної недетермінованої машини Тюрінга



граф конфігурацій $C_{M,x}$

Степінь недетермінованості

Означення

Степенем недетермінованості машини Тюрінга $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\delta \colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$, називають натуральне число, яке визначається як

$$\max_{q \in Q \setminus Q_F, (x_1, \ldots, x_k) \in \Gamma^k} |\delta(q, (x_1, \ldots, x_k))|.$$

Степінь недетермінованості

Означення

Степенем недетермінованості машини Тюрінга $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\delta \colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k}$, називають натуральне число, яке визначається як

$$\max_{q \in Q \setminus Q_F, (x_1, \ldots, x_k) \in \Gamma^k} |\delta(q, (x_1, \ldots, x_k))|.$$

Твердження

Для довільної недетермінованої машини Тюрінга M існують константа $c \in \mathbb{N}$ та машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка є еквівалентною машині Тюрінга M і степінь недетермінованості якої дорівнює 2, і для довільного вхідного слова максимальна довжина повного шляху обчислень машини Тюрінга $\tilde{M}$ не більше ніж у c разів є більшою за максимальну довжину повного шляху обчислень машини Тюрінга M з цим самим вхідним словом.

Степінь недетермінованості

Доведення.

- $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де
  $\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
- її степінь недетермінованості є обмеженим зверху значенням $3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}$, яке повністю визначається описом машини Тюрінга M
- $\left|\tilde{Q}\right| = |Q| \log\left(3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}\right)$

$\square$

Степінь недетермінованості

Доведення.

- $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\delta \colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
- її степінь недетермінованості є обмеженим зверху значенням $3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}$, яке повністю визначається описом машини Тюрінга M
- $\left|\tilde{Q}\right| = |Q| \log\left(3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}\right)$

□

Наслідок. $t_{\tilde{M}} \in \mathcal{O}(t_M)$

Степінь недетермінованості

Доведення.

- $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
- її степінь недетермінованості є обмеженим зверху значенням $3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}$, яке повністю визначається описом машини Тюрінга M
- $\left|\tilde{Q}\right| = |Q| \log\left(3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}\right)$

□

Наслідок. $t_{\tilde{M}} \in \mathcal{O}(t_M)$

Наслідок. Без втрати загальності — степінь недетермінованості ≤ 2

Степінь недетермінованості

Доведення.

- $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\delta\colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to 2^{Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L,S,R\}^k}$
- її степінь недетермінованості є обмеженим зверху значенням $3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}$, яке повністю визначається описом машини Тюрінга M
- $\left|\tilde{Q}\right| = |Q| \log\left(3^k \cdot |Q| \cdot |\Gamma|^{k-1}\right)$

$\square$

Наслідок. $t_{\tilde{M}} \in \mathcal{O}(t_M)$

Наслідок. Без втрати загальності — степінь недетермінованості ≤ 2

У детермінованої машини Тюрінга степінь недетермінованості $= 1$.

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга (далі інтерактивна НДМТ або ІНДМТ) M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який задається кортежем (k, Γ, Σ, $\#$, Q, Q_F, q_0, δ_0, δ_1), де

- k — кількість стрічок;
- Γ — алфавіт ІНДМТ M або алфавіт стрічки;
- $\# \in \Gamma$ — порожній символ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{ \# \}$ — вхідний алфавіт, ;
- Q — множина внутрішніх станів;
- $Q_F \subset Q$ — множина кінцевих внутрішніх станів;
- $q_0 \in Q$ — початковий внутрішній стан;
- $\delta_0, \delta_1 \colon (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — функції переходів.

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення (задачі розпізнавання)

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга (далі інтерактивна НДМТ або ІНДМТ) M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який задається кортежем $(k$, Γ, Σ, $\#$, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, δ_0, $\delta_1)$, де

- k — кількість стрічок;
- Γ — алфавіт ІНДМТ M або алфавіт стрічки;
- $\# \in \Gamma$ — порожній символ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{ \# \}$ — вхідний алфавіт, $\Sigma = \{ 0, 1 \}$;
- Q — множина внутрішніх станів;
- $q_0 \in Q$ — початковий внутрішній стан;
- $q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$ — кінцеві внутрішні стани;
- $\delta_0, \delta_1 \colon (Q \setminus \{ q_{acc}, q_{rej} \}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — функції переходів.

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

ІНДМТ $(k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta_0, \delta_1)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0, 1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо хоч один шлях обчислень закінчується у стані q_{acc}

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

ІНДМТ $(k, \Gamma, \{0,1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta_0, \delta_1)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо хоч один шлях обчислень закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо жоден з шляхів обчислень не закінчується у стані q_{acc}

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

ІНДМТ $(k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta_0, \delta_1)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0, 1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо хоч один шлях обчислень закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0, 1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо жоден з шляхів обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0, 1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

ІНДМТ $(k,\ \Gamma,\ \{\,0,1\,\},\ \#,\ Q,\ q_0,\ q_{acc},\ q_{rej},\ \delta_0,\ \delta_1)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо хоч один шлях обчислень закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо жоден з шляхів обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{\,0,1\,\}^*\ M(x) = L_1(x)$
- **вирішує мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{\,0,1\,\}^*\ M(x) = L_1(x)$ і всі обчислювальні шляхи є скінченними

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Означення

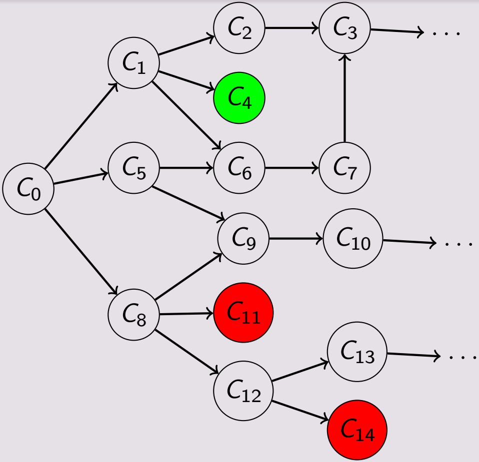
ІНДМТ $(k, \Gamma, \{0,1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta_0, \delta_1)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо хоч один шлях обчислень закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо жоден з шляхів обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$
- **вирішує мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$ і всі обчислювальні шляхи є скінченними
- **час роботи з вхідним словом** ІНДМТ визначається максимальної довжиною з усіх можливих шляхів обчислень

Можлива ситуація, наприклад, що $M(x) = 1$, але $T(M, x) = \infty$.
Більше не використовуємо позначення $M(x) = \perp$.

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

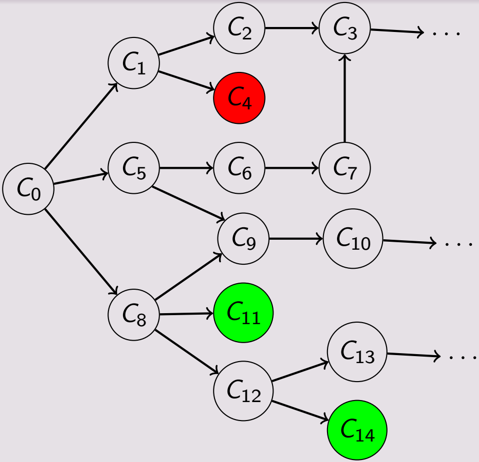
Приклад графу конфігурацій $C_{M,x}$



ІНДМТ M приймає x

Інтерактивна недетермінована машина Тюрінга

Приклад графу конфігурацій $C_{\tilde{M},x}$



ІНДМТ $\tilde{M}$ приймає x

Відповіді "так" і "ні" не є симетричними

Альтернативне означення недетермінованої машини

Автономна недетермінована машина Тюрінга (далі автономна НДМТ або АНДМТ) M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який задається кортежем $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$, де

- k — кількість стрічок;
- Γ — алфавіт АНДМТ M або алфавіт стрічки;
- $\# \in \Gamma$ — порожній символ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — вхідний алфавіт, $\Sigma = \{0, 1\}$;
- Q — множина внутрішніх станів;
- $q_0 \in Q$ — початковий внутрішній стан;
- $q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$ — завершальні внутрішні стани;
- $\delta\colon (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — функція переходів.

Альтернативне означення недетермінованої машини

Автономна недетермінована машина Тюрінга (далі автономна НДМТ або АНДМТ) M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який задається кортежем $(k,\ \Gamma,\ \Sigma,\ \#,\ Q,\ q_0,\ q_{acc},\ q_{rej},\ \delta)$, де

- k — кількість стрічок;
- Γ — алфавіт АНДМТ M або алфавіт стрічки;
- $\# \in \Gamma$ — порожній символ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\,\#\,\}$ — вхідний алфавіт, $\Sigma = \{0, 1\}$;
- Q — множина внутрішніх станів;
- $q_0 \in Q$ — початковий внутрішній стан;
- $q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$ — завершальні внутрішні стани;
- $\delta\colon (Q \setminus \{\, q_{acc}, q_{rej}\,\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{\, L, S, R\,\}^k$ — функція переходів.

детермінована машина Тюрінга?

Альтернативне означення недетермінованої машини

Автономна недетермінована машина Тюрінга (далі автономна НДМТ або АНДМТ) M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який задається кортежем $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$, де

- k — кількість стрічок;
- Γ — алфавіт АНДМТ M або алфавіт стрічки;
- $\# \in \Gamma$ — порожній символ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — вхідний алфавіт, $\Sigma = \{0, 1\}$;
- Q — множина внутрішніх станів;
- $q_0 \in Q$ — початковий внутрішній стан;
- $q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$ — завершальні внутрішні стани;
- $\delta\colon (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — функція переходів.

ні, додаткова стрічка, доступна тільки для зчитування — стрічка "підказок" або "сертифікатів"

Автономна недетермінована машина Тюрінга

Означення

АНДМТ $(k, \Gamma, \{0,1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо існує хоч одна підказка, з якою обчислення закінчується у стані q_{acc}

Автономна недетермінована машина Тюрінга

Означення

АНДМТ $(k,\ \Gamma,\ \{\,0,1\,\},\ \#,\ Q,\ q_0,\ q_{acc},\ q_{rej},\ \delta)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо існує хоч одна підказка, з якою обчислення закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо з жодною підказкою шлях обчислень не закінчується у стані q_{acc}

Автономна недетермінована машина Тюрінга

Означення

АНДМТ $(k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо існує хоч одна підказка, з якою обчислення закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо з жодною підказкою шлях обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$

Автономна недетермінована машина Тюрінга

Означення

АНДМТ $(k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо існує хоч одна підказка, з якою обчислення закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо з жодною підказкою шлях обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$
- **вирішує мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$ і з кожною підказкою обчислювальний шлях є скінченним

Автономна недетермінована машина Тюрінга

Означення

АНДМТ $(k, \Gamma, \{0,1\}, \#, Q, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta)$

- **приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 1)$, якщо існує хоч одна підказка, з якою обчислення закінчується у стані q_{acc}
- **не приймає вхідне слово** $x \in \{0,1\}^*$ $(M(x) = 0)$, якщо з жодною підказкою шлях обчислень не закінчується у стані q_{acc}
- **розпізнає мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$
- **вирішує мову** $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ тйттк $\forall x \in \{0,1\}^*$ $M(x) = L_1(x)$ і з кожною підказкою обчислювальний шлях є скінченним
- **час роботи з вхідним словом** АНДМТ визначається максимальної довжиною шляху обчислень

Перебрати всі підказки неможливо — обмеження на довжину підказки

Еквівалентність недетермінованих машин Тюрінга

Твердження

Для довільної інтерактивної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$, існує автономна недетермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$, використовуючи підказки довжиною $T(n)$.

Еквівалентність недетермінованих машин Тюрінга

Твердження

Для довільної інтерактивної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$, існує автономна недетермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$, використовуючи підказки довжиною $T(n)$.

Твердження

Для довільної автономної недетермінованої машини Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$ використовуючи підказки довжиною $f(n)$, існує інтерактивна недетермінована машина Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ за час $T(n)$.

Еквівалентність недетермінованих машин Тюрінга

Твердження

Для довільної інтерактивної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$, існує автономна недетермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$, використовуючи підказки довжиною $T(n)$.

Твердження

Для довільної автономної недетермінованої машини Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$ використовуючи підказки довжиною $f(n)$, існує інтерактивна недетермінована машина Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$.

Наслідок. Далі просто недетермінована машина Тюрінга, використовуючи кожного разу більш зручну модель

Клас складності *NTIME*

Означення *NTIME*

Для довільної конструктивної за часом функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ мова $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ належить класу складності $NTIME(f)$, якщо існує недетермінована машина Тюрінга M, яка **вирішує мову** L_1 за час $\mathcal{O}(f(n))$.

Клас складності $NTIME$

Означення $NTIME$

Для довільної конструктивної за часом функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ мова $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ належить класу складності $NTIME(f)$, якщо існує недетермінована машина Тюрінга M, яка **вирішує мову** L_1 за час $\mathcal{O}(f(n))$.

Означення

$NP = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} NTIME(n^k) = NTIME(n^{O(1)})$
$NEXP = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} NTIME(2^{n^k}) = NTIME(2^{n^{O(1)}})$
$NE = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} NTIME(k^n) = NTIME(2^{O(n)})$

Клас складності *NTIME*

Означення *NTIME*

Для довільної конструктивної за часом функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ мова $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ належить класу складності $NTIME(f)$, якщо існує недетермінована машина Тюрінга M, яка **вирішує мову** L_1 за час $\mathcal{O}(f(n))$.

Означення

$NP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(n^k) = NTIME(n^{O(1)})$
$NEXP = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(2^{n^k}) = NTIME(2^{n^{O(1)}})$
$NE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} NTIME(k^n) = NTIME(2^{O(n)})$

$P \subseteq NP$, $E \subseteq NE$ і $EXP \subseteq NEXP$

Зв'язок з класом складності *DTIME*

Твердження

Для довільної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$, існує детермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)2^{T(n)}$ $(4(2^{T(n)} - 1))$.

Зв'язок з класом складності *DTIME*

Твердження

Для довільної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$, існує детермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)2^{T(n)}\ (4(2^{T(n)} - 1))$.

Доведення.

- перебираємо всі $2^{T(n)}$ підказок з моделюванням роботи автономної недетермінованої машини Тюрінга
- можна поліпшити, зробивши більш розумний обхід дерева з поверненням

$\square$

Зв'язок з класом складності *DTIME*

Твердження

Для довільної недетермінованої машини Тюрінга M, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)$, існує детермінована машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка вирішує мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$ за час $T(n)2^{T(n)}(4(2^{T(n)}-1))$.

Доведення.

- перебираємо всі $2^{T(n)}$ підказок з моделюванням роботи автономної недетермінованої машини Тюрінга
- можна поліпшити, зробивши більш розумний обхід дерева з поверненням

$\square$

$P \subseteq NP \subseteq EXP \subseteq NEXP$.

Приклади задач класу складності NP

Задача про гамільтонів шлях (*HAM PATH*)

За заданим графом $G = (V, E)$ з'ясувати чи існує шлях, який містить кожну вершину графа рівно один раз.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним шляхом

Задача про гамільтонів цикл (*HAM CYCLE*)

За заданим графом $G = (V, E)$ з'ясувати чи існує цикл (шлях, початкова і кінцева вершини якого збігаються), який містить кожну вершину графа рівно один раз.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним циклом

Приклади задач класу складності NP

Задача про гамільтонів шлях (*HAM PATH*)

За заданим графом $G = (V, E)$ з'ясувати чи існує шлях, який містить кожну вершину графа рівно один раз.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним шляхом

Задача про гамільтонів цикл (*HAM CYCLE*)

За заданим графом $G = (V, E)$ з'ясувати чи існує цикл (шлях, початкова і кінцева вершини якого збігаються), який містить кожну вершину графа рівно один раз.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним циклом

Задача вершинного покриття (*VERTEX COVER*)

За заданим графом $G = (V, E)$ і натуральним числом $k \in \mathbb{N}$ з'ясувати чи існує підмножина вершин $\tilde{V} \subseteq V$, $|V| \leq k$, що для довільного ребра $(u, v) \in E$ є правильним одне з тверджень $u \in \tilde{V}$ або $v \in \tilde{V}$.

Підказка: підмножина вершин $\tilde{V}$

Приклади задач класу складності NP

Задача комівояжера (TSP)

За заданим графом $G = (V, E)$, вагою його ребер $w\colon E \to \mathbb{N}$ і натуральним числом $k \in \mathbb{N}$ з'ясувати чи існує цикл, який містить кожну вершину графа рівно один раз з вагою не більше k.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним циклом

Приклади задач класу складності *NP*

Задача комівояжера (*TSP*)

За заданим графом $G = (V, E)$, вагою його ребер $w \colon E \to \mathbb{N}$ і натуральним числом $k \in \mathbb{N}$ з'ясувати чи існує цикл, який містить кожну вершину графа рівно один раз з вагою не більше k.
Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним циклом

Задача про розбиття (*SUBSETSUM*)

Задана множина S натуральних чисел $a_1, \ldots, a_n$ і натуральне число k. З'ясувати чи існує підмножина множини S, сума елементів якої дорівнює k.
Підказка: підмножина множини S, сума елементів якої дорівнює k

Приклади задач класу складності *NP*

Задача комівояжера (*TSP*)

За заданим графом $G = (V, E)$, вагою його ребер $w\colon E \to \mathbb{N}$ і натуральним числом $k \in \mathbb{N}$ з'ясувати чи існує цикл, який містить кожну вершину графа рівно один раз з вагою не більше k.

Підказка: впорядкований набір вершин, який є відповідним циклом

Задача про розбиття (*SUBSETSUM*)

Задана множина S натуральних чисел a_1, ..., a_n і натуральне число k. З'ясувати чи існує підмножина множини S, сума елементів якої дорівнює k.

Підказка: підмножина множини S, сума елементів якої дорівнює k

Задача суперечності булевої формули (*SAT*)

З'ясувати чи має модель задана булева формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$.

Підказка: модель булевої формули $\varphi(x_1, \dots, x_n)$