Обчислюваність

Андрій Фесенко

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, $\ldots$)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя ($\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)}$)

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, $\ldots$)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя ($\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)}$)
- **арифметизація** довільної теорії

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя ($\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)}$)
- **арифметизація** довільної теорії
- часткова функція $f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, є **(алгоритмічно) обчислюваною** тйттк існує МТ M: $M(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ (*теза Тюрінга*)

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя ($\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)}$)
- **арифметизація** довільної теорії
- часткова функція $f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, є **(алгоритмічно) обчислюваною** тйттк існує МТ M: $M(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ (*теза Тюрінга*)
- множина (алгоритмічно) обчислюваних функцій збігається з множиною частково-рекурсивних функцій (*теза Черча*)

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя ($\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)}$)
- **арифметизація** довільної теорії
- часткова функція $f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, є **(алгоритмічно) обчислюваною** тйттк існує МТ M: $M(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ (*теза Тюрінга*)
- множина (алгоритмічно) обчислюваних функцій збігається з множиною частково-рекурсивних функцій (*теза Черча*)
- нумерація машин Тюрінга $M_0, M_1, \ldots$

Нумерація Геделя

- $\mathcal{D}$ — предметна область (об'єкти, правильно побудовані формули, ...)
- $\nu : \mathcal{D} \to \mathcal{N}$ — кодування унікальним натуральним числом
- існує безліч нумерацій Геделя $(\nu(x_1, \ldots, x_n) = 2^{\nu(x_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\nu(x_n)})$
- **арифметизація** довільної теорії
- часткова функція $f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, є **(алгоритмічно) обчислюваною** тйттк існує МТ M: $M(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(x_1, \ldots, x_n)$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ (*теза Тюрінга*)
- множина (алгоритмічно) обчислюваних функцій збігається з множиною частково-рекурсивних функцій (*теза Черча*)
- нумерація машин Тюрінга $M_0, M_1, \ldots$
- нумерація всіх (алгоритмічно) обчислюваних функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$

Обчислювана функція

Приклад

Чи є обчислюваною функція

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо через 10 років буде колонія на Місяці} \\ 0, & \text{якщо через 10 років не буде колонії на Місяці} \end{cases} ?$$

Обчислювана функція

Приклад

Чи є обчислюваною функція

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо через 10 років буде колонія на Місяці} \\ 0, & \text{якщо через 10 років не буде колонії на Місяці} \end{cases}?$$

А функція

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо точно через 5 млрд років Сонце погасне} \\ 0, & \text{якщо через 5 млрд років Сонце не погасне} \end{cases}?$$

Теорема про необчислювану функцію

Теорема

Існує необчислювана всюди визначена функція.

Теорема про необчислювану функцію

Теорема

Існує необчислювана всюди визначена функція.

Доведення.

- $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots$ — всі обчислювані функції (арності 1)

$\square$

Теорема про необчислювану функцію

Теорема

Існує необчислювана всюди визначена функція.

Доведення.

- $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots$ — всі обчислювані функції (арності 1)
- $f(n) = \begin{cases} \varphi_n^1(n) + 1, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) \neq \perp \\ 0, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) = \perp (\nexists \varphi_n^1) \end{cases}, \ n \in \mathbb{N}$

$\square$

Теорема про необчислювану функцію

Теорема

Існує необчислювана всюди визначена функція.

Доведення.

- $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots$ — всі обчислювані функції (арності 1)
- $f(n) = \begin{cases} \varphi_n^1(n) + 1, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) \neq \bot \\ 0, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) = \bot (\nexists \varphi_n^1) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}\ f \not\simeq \varphi_k^1 \colon f(k) \not\simeq \varphi_k^1(k)$

$\square$

Теорема про необчислювану функцію

Теорема

Існує необчислювана всюди визначена функція.

Доведення.

- $\varphi_0^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1, \ldots$ — всі обчислювані функції (арності 1)
- $f(n) = \begin{cases} \varphi_n^1(n) + 1, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) \neq \bot \\ 0, & \text{якщо } \varphi_n^1(n) = \bot (\nexists \varphi_n^1) \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\forall k \in \mathbb{N}\ f \not\simeq \varphi_k^1$: $f(k) \not\simeq \varphi_k^1(k)$
- **метод діагоналізації** (Кантора)

$\square$

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій.

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій.

Доведення.

- $f(x, y)$ — обчислювана $\Rightarrow \exists$ МТ M: $M(x, y) \simeq f(x, y)$

$\square$

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій.

Доведення.

- $f(x, y)$ — обчислювана $\Rightarrow \exists$ МТ M: $M(x, y) \simeq f(x, y)$
- $\forall a \in \mathbb{N} \;\; \exists$ МТ M_a: $M_a(y) \simeq f(a, y)$

$\square$

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій.

Доведення.

- $f(x, y)$ — обчислювана $\Rightarrow \exists$ МТ M: $M(x, y) \simeq f(x, y)$
- $\forall a \in \mathbb{N} \;\; \exists$ МТ M_a: $M_a(y) \simeq f(a, y)$
- композиція машин Тюрінга — дописати аргумент a на вхідну (додаткову) стрічку та запустити МТ M

$\square$

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ унарних обчислюваних функцій.

Доведення.

- $f(x, y)$ — обчислювана $\Rightarrow \exists$ МТ M: $M(x, y) \simeq f(x, y)$
- $\forall a \in \mathbb{N} \;\; \exists$ МТ M_a: $M_a(y) \simeq f(a, y)$
- композиція машин Тюрінга — дописати аргумент a на вхідну (додаткову) стрічку та запустити МТ M
- номер машини M_a є значенням $k(a)$

$\square$

Теорема про параметризацію

Теорема про параметризацію

Для довільної обчислюваної функції $f(x, y)$ існує така всюди визначена обчислювана функція $k(x)$, що $f(x, y) = \varphi_{k(x)}(y)$ для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій.

Доведення.

- $f(x, y)$ — обчислювана $\Rightarrow \exists$ МТ M: $M(x, y) \simeq f(x, y)$
- $\forall a \in \mathbb{N} \;\; \exists$ МТ M_a: $M_a(y) \simeq f(a, y)$
- композиція машин Тюрінга — дописати аргумент a на вхідну (додаткову) стрічку та запустити МТ M
- номер машини M_a є значенням $k(a)$

$\square$

Наслідок

Номер функції $k(x)$ залежить тільки від параметру x.

Теорема

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ обчислюваних функцій існує така примітивно рекурсивна функція $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ арності 2, що для довільного номера Геделя $p \in \mathbb{N}$ деякої часткової функції арності 2 виконується рівність Кліні $\varphi_{s(p,x)}(y) \simeq \varphi_p(x, y)$ для всіх натуральних чисел $x, y \in \mathbb{N}$.

s_n^m теорема Кліні (s-m-n теорема)

Теорема

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ обчислюваних функцій існує така примітивно рекурсивна функція $s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ арності 2, що для довільного номера Геделя $p \in \mathbb{N}$ деякої часткової функції арності 2 виконується рівність Кліні $\varphi_{s(p,x)}(y) \simeq \varphi_p(x, y)$ для всіх натуральних чисел $x, y \in \mathbb{N}$.

s_n^m теорема Кліні (s-m-n теорема, теорема про параметризацію)

Для довільних натуральних чисел $m, n > 0$ та довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ обчислюваних функцій існує така примітивно рекурсивна функція $s_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$ арності $m+1$, що для довільного номера Геделя $p \in \mathbb{N}$ деякої часткової функції арності $m+n$ виконується рівність Кліні
$\varphi_{s_n^m(p,x_1,\ldots,x_m)}(y_1, \ldots, y_n) \simeq \varphi_p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$
для всіх натуральних чисел $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{N}$.

Універсальна функція

Означення

Для довільної множини часткових функцій $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_n$, арності n, $n \in \mathbb{N}_0$, функцію $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ арності $n+1$ називають **універсальною функцією** множини функцій $\mathcal{H}$, якщо вона задовольняє дві вимоги:

1. для довільного числа $c \in \mathbb{N}_0$ функція $f(c, \cdot)$ арності n належить множині функцій $\mathcal{H}$
2. для довільної функції h з множини функцій $\mathcal{H}$ існує таке число $c \in \mathbb{N}_0$, що $h(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(c, x_1, \ldots, x_n)$ для довільних значень $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

Універсальна функція

Означення

Для довільної множини часткових функцій $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}_n$, арності n, $n \in \mathbb{N}_0$, функцію $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ арності $n+1$ називають **універсальною функцією** множини функцій $\mathcal{H}$, якщо вона задовольняє дві вимоги:

1. для довільного числа $c \in \mathbb{N}_0$ функція $f(c, \cdot)$ арності n належить множині функцій $\mathcal{H}$
2. для довільної функції h з множини функцій $\mathcal{H}$ існує таке число $c \in \mathbb{N}_0$, що $h(x_1, \ldots, x_n) \simeq f(c, x_1, \ldots, x_n)$ для довільних значень $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

Алгоритм, який обчислює універсальну функцію є **універсальним**.

Універсальна функція

Теорема (про нумерацію)

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ існує універсальна функція множини всіх часткових обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ арності n.

Універсальна функція

Теорема (про нумерацію)

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ існує універсальна функція множини всіх часткових обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай $f(y, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Універсальна функція

Теорема (про нумерацію)

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ існує універсальна функція множини всіх часткових обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай $f(y, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- за значенням $y \in \mathbb{N}_0$ знаходимо алгоритм обчислення функції φ_y і обчислюємо значення $\varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ за допомогою цього алгоритму

$\square$

Універсальна функція

Теорема (про нумерацію)

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ існує універсальна функція множини всіх часткових обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай $f(y, x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- за значенням $y \in \mathbb{N}_0$ знаходимо алгоритм обчислення функції φ_y і обчислюємо значення $\varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ за допомогою цього алгоритму
- $\Rightarrow$ функція f є обчислюваною

$\square$

Універсальна функція

Теорема

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ не існує універсальної функції множини всіх всюди визначених обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n^{tot} \subseteq \mathcal{F}_n^{tot} \subset \mathcal{F}_n$ арності n.

Універсальна функція

Теорема

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ не існує універсальної функції множини всіх всюди визначених обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n^{tot} \subseteq \mathcal{F}_n^{tot} \subset \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай існує універсальна функція f множини функцій $\mathcal{H}_n^{tot}$: $f(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

Універсальна функція

Теорема

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ не існує універсальної функції множини всіх всюди визначених обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n^{tot} \subseteq \mathcal{F}_n^{tot} \subset \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай існує універсальна функція f множини функцій $\mathcal{H}_n^{tot}$: $f(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- нехай $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1$ для довільних чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

Універсальна функція

Теорема

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ не існує універсальної функції множини всіх всюди визначених обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n^{tot} \subseteq \mathcal{F}_n^{tot} \subset \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай існує універсальна функція f множини функцій $\mathcal{H}_n^{tot}$: $f(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- нехай $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1$ для довільних чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- $\Rightarrow h \in \mathcal{H}_n^{tot} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 \ f(c, x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Універсальна функція

Теорема

Для довільного числа $n \in \mathbb{N}_0$ не існує універсальної функції множини всіх всюди визначених обчислюваних функцій $\mathcal{H}_n^{tot} \subseteq \mathcal{F}_n^{tot} \subset \mathcal{F}_n$ арності n.

Доведення.

- нехай існує універсальна функція f множини функцій $\mathcal{H}_n^{tot}$: $f(y, x_1, \ldots, x_n) = \varphi_y(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $y, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- нехай $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) + 1$ для довільних чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- $\Rightarrow h \in \mathcal{H}_n^{tot} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{N}_0 \ f(c, x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n)$ для довільних чисел $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$
- з одного боку $h(c, \ldots, c) = f(c, \ldots, c)$, але $h(c, \ldots, c) = f(c, \ldots, c) + 1$ за означенням функції $h \Rightarrow$ суперечність

$\square$

Універсальна функція

- кожна універсальна функція множини унарних обчислюваних функцій визначає нумерацію $f(x, y) = \varphi_x(y)$

Універсальна функція

- кожна універсальна функція множини унарних обчислюваних функцій визначає нумерацію $f(x, y) = \varphi_x(y)$
- бінарну функцію U називають **головною універсальною функцією** (**головною нумерацією**), якщо для будь-якої бінарної обчислюваної функції h існує всюди визначена обчислювана унарна функція g така, що $h(x, y) = U(g(x), y)$ для всіх чисел $x, y \in \mathbb{N}_0$

Універсальна функція

- кожна універсальна функція множини унарних обчислюваних функцій визначає нумерацію $f(x, y) = \varphi_x(y)$
- бінарну функцію U називають **головною універсальною функцією** (**головною нумерацією**), якщо для будь-якої бінарної обчислюваної функції h існує всюди визначена обчислювана унарна функція g така, що $h(x, y) = U(g(x), y)$ для всіх чисел $x, y \in \mathbb{N}_0$
- $\Rightarrow$ існує головна універсальна функція множини всіх унарних обчислюваних функцій

Універсальна функція

- кожна універсальна функція множини унарних обчислюваних функцій визначає нумерацію $f(x, y) = \varphi_x(y)$
- бінарну функцію U називають **головною універсальною функцією** (**головною нумерацією**), якщо для будь-якої бінарної обчислюваної функції h існує всюди визначена обчислювана унарна функція g така, що $h(x, y) = U(g(x), y)$ для всіх чисел $x, y \in \mathbb{N}_0$
- $\Rightarrow$ існує головна універсальна функція множини всіх унарних обчислюваних функцій
- $\Rightarrow U_1(x, y) = U_2(c_1(x), y)$ і $U_2(x, y) = U_1(c_2(x), y)$ (**теорема про ізоморфізм головних нумерацій**)

Універсальна функція

- кожна універсальна функція множини унарних обчислюваних функцій визначає нумерацію $f(x, y) = \varphi_x(y)$
- бінарну функцію U називають **головною універсальною функцією** (**головною нумерацією**), якщо для будь-якої бінарної обчислюваної функції h існує всюди визначена обчислювана унарна функція g така, що $h(x, y) = U(g(x), y)$ для всіх чисел $x, y \in \mathbb{N}_0$
- $\Rightarrow$ існує головна універсальна функція множини всіх унарних обчислюваних функцій
- $\Rightarrow$ $U_1(x, y) = U_2(c_1(x), y)$ і $U_2(x, y) = U_1(c_2(x), y)$ (**теорема про ізоморфізм головних нумерацій**)
- операції над обчислюваними функціями $\Leftrightarrow$ операції над їх індексами

Теорема про нерухому точку

Теорема про нерухому точку (Роджерс, 1957р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної всюди визначеної унарної обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.

Теорема про нерухому точку

Теорема про нерухому точку (Роджерс, 1957р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної всюди визначеної унарної обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.

Доведення.

- розглянемо функцію $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y)$,
  $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \psi(f(\varphi_x(x)), y) \simeq g(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Теорема про нерухому точку

Теорема про нерухому точку (Роджерс, 1957р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної всюди визначеної унарної обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.

Доведення.

- розглянемо функцію $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y)$,
  $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \psi(f(\varphi_x(x)), y) \simeq g(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- з s_n^m теореми Кліні випливає, що існує така всюди визначена унарна функція h, що $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \varphi_{h(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$

□

Теорема про нерухому точку

Теорема про нерухому точку (Роджерс, 1957р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної всюди визначеної унарної обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.

Доведення.

- розглянемо функцію $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y)$,
  $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \psi(f(\varphi_x(x)), y) \simeq g(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- з s_n^m теореми Кліні випливає, що існує така всюди визначена унарна функція h, що $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \varphi_{h(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- нехай $h \simeq \varphi_m \Rightarrow \varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \varphi_{\varphi_m(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Теорема про нерухому точку

Теорема про нерухому точку (Роджерс, 1957р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної всюди визначеної унарної обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n \simeq \varphi_{f(n)}$.

Доведення.

- розглянемо функцію $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y)$,
  $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \psi(f(\varphi_x(x)), y) \simeq g(x, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- з s_n^m теореми Кліні випливає, що існує така всюди визначена унарна функція h, що $\varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \varphi_{h(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- нехай $h \simeq \varphi_m \Rightarrow \varphi_{f(\varphi_x(x))}(y) \simeq \varphi_{\varphi_m(x)}(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{N}_0$
- нехай $\varphi_m(m) = n$ (всюди визначена) $\Rightarrow \varphi_{f(n)}(y) \simeq \varphi_n(y)$, $\forall y \in \mathbb{N}_0$

$\square$

Теорема про нерухому точку

Друга теорема про рекурсію (Кліні, 1938р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної бінарної часткової обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n(y) \simeq f(n, y)$ для всіх чисел $y \in \mathbb{N}_0$.

Теорема про нерухому точку

Друга теорема про рекурсію (Кліні, 1938р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної бінарної часткової обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n(y) \simeq f(n, y)$ для всіх чисел $y \in \mathbb{N}_0$.

Наслідок

Нехай функція h — $f(x, y) \simeq \varphi_{h(x)}(y)$ (s_n^m теорема).
Нехай число m є нерухомою точкою функції h.
З теореми про нерухому точку Роджерса випливає друга теорема про рекурсію ($n = m$, $\varphi_m(y) \simeq \varphi_{h(m)}(y) \simeq f(m, y)$ для всіх чисел $y \in \mathbb{N}_0$).

Теорема про нерухому точку

Друга теорема про рекурсію (Кліні, 1938р.)

Для довільної нумерації Геделя $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ унарних обчислюваних функцій і довільної бінарної часткової обчислюваної функції f існує таке натуральне число $n \in \mathbb{N}_0$, що $\varphi_n(y) \simeq f(n, y)$ для всіх чисел $y \in \mathbb{N}_0$.

Наслідок

Нехай функція h — $f(x, y) \simeq \varphi_{h(x)}(y)$ (s_n^m теорема).
Нехай число m є нерухомою точкою функції h.
З теореми про нерухому точку Роджерса випливає друга теорема про рекурсію ($n = m$, $\varphi_m(y) \simeq \varphi_{h(m)}(y) \simeq f(m, y)$ для всіх чисел $y \in \mathbb{N}_0$).

Наслідок

Нехай функція f — для довільного алгоритму $\mathcal{A}_x$ алгоритм $\mathcal{A}_{f(x)}$ "друкує опис" алгоритму $\mathcal{A}_x$.
Функція f є обчислюваною $\Rightarrow$ за теоремою про нерухому точку існує алгоритм $\mathcal{A}$, який "друкує власний опис".

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Теорема

Існує необчислювана функція $UC : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Теорема

Існує необчислювана функція $UC : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Доведення.

- нумерація машин Тюрінга за допомогою множини $\{0,1\}^*$, для довільного слова $x \in \{0,1\}^*$ відповідну машину Тюрінга позначають M_x або $M_{\lceil x \rceil}$

□

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Теорема

Існує необчислювана функція $UC : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Доведення.

- нумерація машин Тюрінга за допомогою множини $\{0,1\}^*$, для довільного слова $x \in \{0,1\}^*$ відповідну машину Тюрінга позначають M_x або $M_{\lceil x \rceil}$
- визначимо $UC(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_x(x) = 1 \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}, \forall x \in \{0,1\}^*$

$\square$

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Теорема

Існує необчислювана функція $UC : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Доведення.

- нумерація машин Тюрінга за допомогою множини $\{0,1\}^*$, для довільного слова $x \in \{0,1\}^*$ відповідну машину Тюрінга позначають M_x або $M_{\lceil x \rceil}$
- визначимо $UC(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_x(x) = 1 \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}$, $\forall x \in \{0,1\}^*$
- Нехай $\exists$ МТ $\widetilde{M}$: $\forall x \in \{0,1\}^*$ $\widetilde{M}(x) = UC(x)$
  $\widetilde{M}(\lfloor \widetilde{M} \rfloor) =?$

$\square$

Обчислювані функції

Чи може UTM обчислити довільну функцію $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$?

Теорема

Існує необчислювана функція $UC : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Доведення.

- нумерація машин Тюрінга за допомогою множини $\{0,1\}^*$, для довільного слова $x \in \{0,1\}^*$ відповідну машину Тюрінга позначають M_x або $M_{\lceil x \rceil}$
- визначимо $UC(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } M_x(x) = 1 \\ 1, & \text{інакше} \end{cases}, \forall x \in \{0,1\}^*$
- Нехай $\exists$ МТ $\widetilde{M}$: $\forall x \in \{0,1\}^*$ $\widetilde{M}(x) = UC(x)$
  $\widetilde{M}(\lfloor \widetilde{M} \rfloor) = ?$
- якщо $\widetilde{M}(\lfloor \widetilde{M} \rfloor) = 1$, то $UC(\lfloor \widetilde{M} \rfloor) = 0$, і навпаки

$\square$

Модифікація МТ для задач розпізнавання

Задача розпізнавання $\Leftrightarrow$ всюди визначена функція $\{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Модифікація МТ для задач розпізнавання

Задача розпізнавання $\Leftrightarrow$ всюди визначена функція $\{0,1\}^* \to \{0,1\}$

Означення (багатострічкова машина Тюрінга)

- $k \in \mathbb{N}^+$ — кількість стрічок;
- Γ — непорожня скінченна множина, яку називають **алфавітом машини Тюрінга** M або **алфавітом стрічки**;
- $\# \in \Gamma$ — **порожній символ**;
- $\{0,1\}$ — **вхідний алфавіт**;
- Q — непорожня скінченна **множина внутрішніх станів**;
- $q_0 \in Q$ — **початковий (внутрішній) стан**;
- $q_{acc} \in Q$ — **кінцевий стан, що приймає вхідне слово**;
- $q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$ — **кінцевий стан, що відхиляє вхідне слово**;
- $\delta : (Q \setminus \{q_{acc}, q_{rej}\}) \times \Gamma^k \nrightarrow Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — (часткова) **функція переходів**.

Модифікація МТ для задач розпізнавання

Зауваження

$q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$, інших завершальних конфігурацій немає
($\Sigma = \{0, 1\}$, $q_{acc} \equiv q_{accept} \equiv q_y \equiv q_{yes}$, $q_{rej} \equiv q_{reject} \equiv q_n \equiv q_{no}$)

Модифікація МТ для задач розпізнавання

Зауваження

$q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$, інших завершальних конфігурацій немає
$(\ \Sigma = \{0,1\}$, $q_{acc} \equiv q_{accept} \equiv q_y \equiv q_{yes}$, $q_{rej} \equiv q_{reject} \equiv q_n \equiv q_{no})$

Означення

Завершальну конфігурацію машини Тюрінга називають **позитивною** (**негативною**), якщо її стан є кінцевим станом, що приймає (відхиляє) вхідне слово.

Модифікація МТ для задач розпізнавання

Зауваження

$q_{acc}, q_{rej} \in Q$, $q_{acc} \neq q_{rej}$, інших завершальних конфігурацій немає ($\Sigma = \{0, 1\}$, $q_{acc} \equiv q_{accept} \equiv q_y \equiv q_{yes}$, $q_{rej} \equiv q_{reject} \equiv q_n \equiv q_{no}$)

Означення

Завершальну конфігурацію машини Тюрінга називають **позитивною** (**негативною**), якщо її стан є кінцевим станом, що приймає (відхиляє) вхідне слово.

Означення

машина Тюрінга M вхідне слово x

- **приймає**, якщо $M(x) = 1$ (q_{acc}, позитивна конфігурація)
- **відхиляє**, якщо $M(x) = 0$ (q_{rej}, негативна конфігурація)
- **не приймає**, якщо $M(x) = 0$ або $M(x) = \perp$
- **не відхиляє**, якщо $M(x) = 1$ або $M(x) = \perp$

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

Означення

машина Тюрінга M **розпізнає** (recognize) мову $L \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L$, то $M(x) = 0$ (q_{rej}) або $M(x) = \perp$

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

Означення

машина Тюрінга M **розпізнає** (recognize) мову $L \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L$, то $M(x) = 0$ (q_{rej}) або $M(x) = \perp$

Означення

Мови — вирішувані (рекурсивні) або напіввирішувані (рекурсивно злічені)

мова $L(M)$ (L_M) машини Тюрінга M — всі слова, які вона приймає

Невирішуваність

Означення

Машини Тюрінга M_1 і M_2 є

- **однаковими**, якщо існує перестановка внутрішніх станів та/або зміна напрямків ‘ліворуч’ та ‘праворуч’, інакше — **принципово різними**
- **еквівалентними**, якщо $M_1 = M_2$ ($M_1 \simeq M_2$)
- **з однією мовою**, якщо $L(M_1) = L(M_2)$

Задача $HALT$

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Теорема

Задача *HALT* є невирішуваною.

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Теорема

Задача *HALT* є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує M_{HALT}

□

Задача $HALT$

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Теорема

Задача $HALT$ є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує M_{HALT}
- $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x, x)$

$\square$

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Теорема

Задача *HALT* є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує M_{HALT}
- $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x, x)$
- $M^{co}(x) = \begin{cases} cycle, M_{diag}(x) = 1 \\ stop, M_{diag}(x) = 0 \end{cases},$

$\square$

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x. (Розв'язати мову L_{HALT}.)

Теорема

Задача *HALT* є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує M_{HALT}
- $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x,x)$
- $M^{co}(x) = \begin{cases} cycle, M_{diag}(x) = 1 \\ stop, M_{diag}(x) = 0 \end{cases},$
- $M^{co}(\lfloor M^{co} \rfloor)$?

$\square$

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. (Розв'язати мову L_{HALT_ε}.)

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. (Розв'язати мову L_{HALT_ε}.)

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. (Розв'язати мову L_{HALT_ε}.)

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$

□

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. (Розв'язати мову L_{HALT_ε}.)

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$
- якщо існує машина Тюрінга, яка розв'язує задачу $HALT_\varepsilon$, то вона розв'язує задачу $HALT$

$\square$

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. (Розв'язати мову L_{HALT_ε}.)

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$
- якщо існує машина Тюрінга, яка розв'язує задачу $HALT_\varepsilon$, то вона розв'язує задачу $HALT$
- суперечність

$\square$

Теорема Райса

Означення

Числову множину $S \subseteq \mathbb{N}$ називають **інваріантною**, якщо представлення будь-яких двох еквівалентних МТ одночасно належать або одночасно не належать множині S.

Теорема Райса

Означення

Числову множину $S \subseteq \mathbb{N}$ називають **інваріантною**, якщо представлення будь-яких двох еквівалентних МТ одночасно належать або одночасно не належать множині S.

Приклади

- всі МТ, які приймають вхідне слово 11

Теорема Райса

Означення

Числову множину $S \subseteq \mathbb{N}$ називають **інваріантною**, якщо представлення будь-яких двох еквівалентних МТ одночасно належать або одночасно не належать множині S.

Приклади

- всі МТ, які приймають вхідне слово 11
- всі МТ, які приймають хоч одне вхідне слово

Теорема Райса

Означення

Числову множину $S \subseteq \mathbb{N}$ називають **інваріантною**, якщо представлення будь-яких двох еквівалентних МТ одночасно належать або одночасно не належать множині S.

Приклади

- всі МТ, які приймають вхідне слово 11
- всі МТ, які приймають хоч одне вхідне слово
- всі МТ, які ніколи не зациклюються

Теорема Райса

Означення

Числову множину $S \subseteq \mathbb{N}$ називають **інваріантною**, якщо представлення будь-яких двох еквівалентних МТ одночасно належать або одночасно не належать множині S.

Приклади

- всі МТ, які приймають вхідне слово 11
- всі МТ, які приймають хоч одне вхідне слово
- всі МТ, які ніколи не зациклюються
- всі МТ, які зупиняться через 15 тактів з вхідним словом 1