Лекція 12

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Розглядаємо рівняння, яке описує процеси поширення тепла в однорідному середовищі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \,, \tag{1}$$

$u \equiv u(t,\mathbf{r}), \quad f \equiv f(t,\mathbf{r}) \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^n)$, $t > 0, \quad \mathbf{r} \equiv (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Це ж рівняння (1) описує і явища дифузії.

Далі припускаємо, що для кожного $T > 0 \;\; \exists M(T) < \infty$:

$\left| f(t,\mathbf{r}) \right| + \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < M(T)$, тобто $f(t,\mathbf{r})$ та її перші та другі похідні обмежені в кожній полосі $0 \le t \le T$. Позначаємо скалярний квадрат вектора $\mathbf{r}^2 \equiv x_1^2 + ... + x_n^2$.

Початкова умова для (1) така:

$$u(0,\mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r}) \in C(\mathbb{R}^n), \quad \left| v_0(\mathbf{r}) \right| \le M_1 < \infty \;. \tag{2}$$

Розв’язок шукаємо в класі функцій $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3)$.

Почнемо з однорідного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \tag{3}$$

з умовою (2).

Покажемо, що розв’язком рівняння (3) є

$$u(t,\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}' v_0(\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4a^2 t} \right] \;. \tag{4}$$

За $t > 0$ після заміни $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + 2a\mathbf{y}\sqrt{t}$ маємо

$$u(t,\mathbf{r})=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}\, v_0(\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t})\exp\left[-\mathbf{y}^2\right] \quad . \qquad (5)$$

Зауважимо, що з представленняя (5) завдяки (2) випливає $\left|u(t,\mathbf{r})\right|\le M_1$.

Диференціювання підінтегральних функцій в (4) по t й по x_i, $i=1,...,n$, при $t>0$ з наступною заміною $\mathbf{r}'=\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t}$ приводить до інтегралів, які рівномірно збігаються завдяки умові (2). Це виправдовує диференціювання по $t,\mathbf{r}$ під знаком невласних інтегралів, які проводяться далі.

Покажемо, що завдяки обмеженості $v_0(\mathbf{r})$ функція $u(t,\mathbf{r})$ неперервна і можна перейти до границі при $t\to 0$. Маємо

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2} v_0(\mathbf{r})\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}\exp\left[-\mathbf{y}^2\right]=v_0(\mathbf{r})\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx\exp\left(-x^2\right)\right]^n=v_0(\mathbf{r})$$

$$\left|u(t,\mathbf{r})-v_0(\mathbf{r})\right|\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}\left|v_0(\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t})-v_0(\mathbf{r})\right|\exp\left[-\mathbf{y}^2\right].$$

Розіб'ємо цей інтеграл на два по області $|\mathbf{y}|\le L$ та $|\mathbf{y}|>L$. Для будь якого $\varepsilon>0$ виберемо досить велике L, щоб

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{y>L} d^n\mathbf{y}\left|v_0(\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t})-v_0(\mathbf{r})\right|\exp\left[-\mathbf{y}^2\right]\le 2M\int\limits_{y>L} d^n\mathbf{y}\exp\left[-\mathbf{y}^2\right]<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Це виконується для будь-яких $t\to 0+0$.

Вибираючи $t>0$ досить малим, щоб виконувалося

$$\left|v_0(\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t})-v_0(\mathbf{r})\right|\le\mu(\varepsilon)$$

(це можливо в обмеженій області $|\mathbf{y}|\le L$)

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{y<L} d^n\mathbf{y}\left|v_0(\mathbf{r}+2a\mathbf{y}\sqrt{t})-v_0(\mathbf{r})\right|\exp\left[-\mathbf{y}^2\right]\le\left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{y<L} d^n\mathbf{y}\exp\left[-\mathbf{y}^2\right]<\frac{\varepsilon}{2}$$

Звідси $\left|u(t,\mathbf{r})-v_0(\mathbf{r})\right|<\varepsilon$, це означає $\left|u(t,\mathbf{r})-v_0(\mathbf{r})\right|\to 0$ при $t\to 0+0$, тобто початкова умова (2) виконана.

В околі $\forall t>0$ прямим диференціюванням отримуємо

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\frac{1}{t^{n/2}}\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4a^2t}\right] = 0\,.$$

Завдяки зазначеній вище рівномірній збіжності, операції диференціювання можна провести під знаком інтегралу (4).

Звідси маємо $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u$.

Вправа. Покажіть, що за умови $|v_0(\mathbf{r})| \le M_1 < \infty$ для розв’язку рівняння (3) з умовою (2) маємо $|u(t,\mathbf{r})| = M_1$.

- Тепер розглянемо розв’язок неоднорідного рівняння (1), але з нульовою початковою умовою. Для цього розглянемо допоміжну функцію ($t > \tau$)

$$w(t,\tau,\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} d^n\mathbf{y}\, f(\tau, \mathbf{r} + 2a\,\mathbf{y}\sqrt{t-\tau})\exp\left[-\mathbf{y}^2\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^n\mathbf{r}' f(\tau,\mathbf{r}')\exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4a^2(t-\tau)}\right],$$

яка є розв’язком рівняння (3) $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Delta w$ й задовольняє умові

$$w(\tau,\tau,\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{y}\, f(\tau,\mathbf{r})\exp\left[-\mathbf{y}^2\right] = f(\tau,\mathbf{r})\,.$$

Покладемо

$$u(t,\mathbf{r}) = \int\limits_0^t d\tau\, w(t,\tau,\mathbf{r})\ . \tag{6}$$

Очевидно, $u(0,\mathbf{r}) = 0$ – нульова початкова умова виконана;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w(t,t,\mathbf{r}) + \int\limits_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[w(t,\tau,\mathbf{r})\right] = f(t,\mathbf{r}) + \int\limits_0^t d\tau \frac{\partial}{\partial t}\left[w(t,\tau,\mathbf{r})\right] =$$

$$= f(t,\mathbf{r}) + \int\limits_0^t d\tau\, a^2\Delta w(t,\tau,\mathbf{r}) = f(t,\mathbf{r}) + \Delta u \quad .$$

Розгляд завершено. Повний розв’язок рівняння (1) з початковою умовою (2) є, очевидно, сумою розв’язків (4),(6)

$$u(t,\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\right)^n \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}' f(\tau,\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4a^2(t-\tau)}\right] +$$

$$+\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}' v_0(\mathbf{r}') \exp\left[-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}{4a^2 t}\right].$$

Це – формула Пуассона.

Зазначимо деякі властивості розв'язку за умови, що функції $v_0(\mathbf{r})$

- Розглянемо питанням неперервної залежності розв'язку задачі Коші для рівняння (1) від початкових умов та правої частини рівняння (1), а також єдиність цього розв'язку для функцій $u \equiv u(t,\mathbf{r}) \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^n)$, які досить швидко спадають з першими похідними до нуля на нескінченності, причому $\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, u^2(t,\mathbf{r}) < \infty$, $\forall t \in [0,T]$, $T > 0$. Ці умови заміняють умову обмеженості і є більш жорсткими.

Припустимо, що є два розв'язки задачі типу (1)-(2)

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \Delta u_1 + f_1, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \Delta u_2 + f_2,$$

$$u_1(0,\mathbf{r}) = v_1(\mathbf{r}), \quad u_2(0,\mathbf{r}) = v_2(\mathbf{r}) .$$

Позначимо $f_d = f_1 - f_2$, . Для $w = u_1 - u_2$ маємо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \Delta w + f_d , \tag{7}$$

$$v_d = v_1 - v_2 \; w(0,\mathbf{r}) = v_d , \tag{8}$$

З рівняння (7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{w^2}{2} = a^2 w \Delta w = a^2\left[\operatorname{div}(w\nabla w) - (\nabla w)^2\right] + w\, f_d . \tag{9}$$

Для довільної інтегровної функції $\phi(\mathbf{r})$ позначимо $\|\phi\|_t = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\,\phi^2(\mathbf{r})}$. Після інтегрування (9) по $d\mathbf{r}^n$ інтеграл від дивергенції зникає (за умови швидкого спадання на нескінченності), що дає

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_t^2 = -a^2\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\left(\nabla w\right)^2 + \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, w\, f \le \int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, w\, f \le \|w\|_t \,\| f\|_t,$$

звідки

$$\frac{d}{dt}\|w\|_t \le \| f\|_t$$

і маємо оцінку відхилення розв'язків

$$\|w\|_t \le \|v_d\|_0 + \int_0^t dt'\| f_d\|_{t'} \,. \qquad (10)$$

Використаємо (10) для доведення єдиності. Якщо $v_d \equiv 0,\quad f_d \equiv 0$, маємо $\|w\|_t \le 0$, що можливо лише тоді, коли $\|w\|_t = 0 \to w \equiv 0$.

- Вправа. Отримайте формулу Пуассона за допомогою перетворення Фур'є по просторових змінних $\mathbf{r} \equiv (x_1,...,x_n)$, припускаючи достатньо швидке спадання розв'язків при $|\mathbf{r}| \to \infty$.

Вказівки.

a) Розгляньте спочатку рівняння (3) та застосуйте до нього перетворення Фур'є по $\mathbf{r} \equiv (x_1,...,x_n)$:

$$\tilde{u}(t,\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left(-ik_1x_1\right)...\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(-ik_nx_n\right)u(t,\mathbf{r}).$$

$\mathbf{k} \equiv (k_1,...,k_n)$

Зокрема, початкова умова

$$\tilde{u}(0,\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left(-ik_1x_1\right)...\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \exp\left(-ik_nx_n\right)u(0,\mathbf{r}).$$

Результат (виведіть це) –рівняння першого порядку з однією змінною t:

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = -a^2\mathbf{k}^2\tilde{u}, \quad \tilde{u} \equiv \tilde{u}(t,\mathbf{k})$$

б) Розв'язок цього рівняння: $\tilde{u}(t,\mathbf{k}) = \tilde{u}(0,\mathbf{k})\exp\left(-a^2\mathbf{k}^2t\right)$.

в) Повертаємося до вихідного представлення:

$$u(t,\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\exp(ik_1x_1)...\int_{-\infty}^{\infty}dk_n\exp(ik_nx_n)\tilde{u}(t,\mathbf{k}),$$

де слід підставити розв'язок $\tilde{u}(t,\mathbf{k})$ та записати $\tilde{u}(0,\mathbf{k})$ через вихідну початкову умову $u(0,\mathbf{r})$

$$u(t,\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}d\mathbf{y}\,u(0,\mathbf{y})\prod_{p=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}dk_p\exp\left[ik_p\left(x_p-y_p\right)-a^2tk_p^2\right].$$

Після обчислень отримайте формулу (4).

г) Застосуйте перетворення Фур'є по $\mathbf{r}\equiv(x_1,...,x_n)$ до повного рівняння (1) з нульовою початковою умовою:

$$\frac{\partial\tilde{u}(t,\mathbf{k})}{\partial t}=-a^2\mathbf{k}^2\tilde{u}(t,\mathbf{k})+\tilde{f}(t,\mathbf{k});$$

$\tilde{f}(t,\mathbf{k})$ – результат перетворення Фур'є функції $f(t,\mathbf{r})$.

Розв'язок цього рівняння легко отримати після підстановки $\tilde{u}=v\exp(-a^2\mathbf{k}^2t)$; від має вид

$$\tilde{u}(t,\mathbf{k})=\int_0^t d\tau\exp\left[-a^2\mathbf{k}^2(t-\tau)\right]\tilde{f}(\tau,\mathbf{k}),$$

де враховано нульову початкову умову.

Далі слід підставити $\tilde{f}(\tau,\mathbf{k})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}d^n\mathbf{r}'\exp\left(-i\mathbf{k}\mathbf{r}'\right)f(\tau,\mathbf{r}')$ та обчислити обернене перетворення Фур'є $\tilde{u}(t,\mathbf{k})\to u(t,\mathbf{r})$. На цьому шляху зустрінуться інтеграли того ж типу, що й в пункті (в). В результаті отримайте

$$u(t,\mathbf{r})=\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\right)^n\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}d^n\mathbf{r}'f(\tau,\mathbf{r}')\exp\left[-\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)^2}{4a^2(t-\tau)}\right].$$