Лекція 4+

ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ ТА ОПЕРАТОРИ

Нагадаємо, що **поле** – множина, для якої визначено дві пари бінарних операцій: додавання/віднімання та множення/ділення, що задовольняють умовам, подібним до властивостей арифметичних операцій над раціональними, дійсними або комплексними числами. Надалі нас цікавитимуть лінійні простори над полем *комплексних чисел* $\mathbb{C}$.

Означення лінійного (векторного) простору. **Лінійний простір** над полем K — це множина елементів L, де визначені бінарні операції, що задовольняють нижчезазначеним аксіомам.

а) Додавання векторів: кожним двом елементам $f \in L$, $g \in L$ відповідає елемент h цієї ж множини L, який називається сумою (позначення $h = g + f \in L$).

б) Множення на елементи з K: для будь-яких $\alpha \in K$ та $h \in L$ визначений елемент $\alpha f \in L$, який називається добутком елемента на число.

Для цих операцій виконані аксіоми:

- комутативність додавання: $g + f = g + f$;
- асоціативність додавання: $(f+g)+h = f+(g+h)$;
- існування нульового елементу $\theta \in L,$ такого, що $\forall f \in L: f + \theta = f$;
- існування протилежного вектора, тобто $\forall f \in L \quad \exists g \in L: \quad g + f = \theta$.

Для множення на елементи α, β з поля K мають виконуватися

- асоціативність $\forall \alpha, \beta \in K: \quad (\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$ та
- дистрибутивність $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$, $\quad (\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$;
- якщо 1 – це одиниця поля K ($\forall \alpha \in K : \alpha 1 = 1\alpha = \alpha$), то $1 \cdot f = f$ ♦

Елементи лінійного простору називають векторами.

Деякі наслідки цих аксіом

- Єдиність нуля $\theta \in L,$.
- Єдиність протилежного елемента: $\forall \mathbf{f}$ протилежний елемент $\mathbf{f}'$ (такий, що $\mathbf{f} + \mathbf{f}' = \mathbf{0}$) визначений єдиним чином.
- $(-a)\mathbf{f} = -(a\mathbf{f}) = a(-\mathbf{f})$, де $-\mathbf{f}$ – елемент, протилежний до $\mathbf{f}$.
- $0 \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}$

Означення. Векторний простір над полем комплексних чисел називають **унітарним**, якщо для кожної впорядкованої пари елементів $f \in L$, $g \in L$ співставлено комплексне число $\langle f,g \rangle$, яке називають **скалярним добутком**, таке, що

- $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle^*$ (зірочка означає комплексне спряження);
- $\langle f,\alpha g \rangle = \alpha \langle f,g \rangle$;
- $\langle f+g,h \rangle = \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$; $\quad \langle f,\alpha g+\beta h \rangle = \alpha \langle f,g \rangle + \beta \langle f,h \rangle$
- Квадрат вектора є дійсним та невід'ємним: $\langle f,f \rangle \ge 0$;

  причому $\langle f,f \rangle = 0$ тоді й тільки тоді, коли $f = 0$ ♦

  Для унітарного простору інколи вживають термін «предгільбертів простір».

  З умови $\langle f,\alpha g \rangle = \alpha \langle f,g \rangle$ випливає $\langle \alpha f,g \rangle = \langle g,\alpha f \rangle^* = \alpha^* \langle g,f \rangle^* = \alpha^* \langle f,g \rangle$.

Означення. Елементи v_1, v_2 називають **ортогональними**, якщо $\langle v_1,v_2 \rangle = 0$. Позначення $v_1 \perp v_2$ ♦

Застереження. Ми використовуємо позначення ближче до фізичних застосувань, де $\langle f,g \rangle$ є операцією, лінійною по **другому** аргументу. У літературі можна зустріти скалярний добуток у вигляді $(g,f) = \langle f,g \rangle$, тобто тут буде $(\alpha g,f) = \alpha (g,f)$.

Величину $\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$ називають **нормою** вектора.

Вправа. Доведіть тотожність паралелограма: $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right)$.

Теорема 1. Для будь-яких векторів f,g в унітарному просторі має місце **нерівність Коші-Буняковського[1]**:

$$|\langle f,g \rangle| \le \|f\| \cdot \|g\| \ . \tag{1}$$

Рівність має місце лише коли $\exists \lambda \in \mathbb{C}: \quad f = \lambda g$ або $g = \lambda f$.

Доведення. Для $g = \theta$ та $\|g\| = 0$ виконання (1) очевидне. Для будь-яких векторів f,g, $g \ne \theta$, з унітарного простору покладемо $\lambda = \langle f,g \rangle^* \langle g,g \rangle^{-1}$. Маємо

$$0 \le \langle f-\lambda g, f-\lambda g \rangle = \langle f,f \rangle - \lambda^* \langle g,f \rangle - \lambda \langle f,g \rangle + |\lambda|^2 \langle g,g \rangle = \langle f,f \rangle - \frac{|\langle f,g \rangle|^2}{\langle g,g \rangle}.$$

[1] У англомовній літературі **Cauchy–Schwarz inequality**, а також **Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz inequality.** The inequality for sums was published by Augustin-Louis Cauchy (1821), while the corresponding inequality for integrals was first proved by Viktor Bunyakovsky (1859). The modern proof of the integral inequality was given by Hermann Amandus Schwarz (1888). https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality

Тому $|(f,g)|^2 \le \langle g,g\rangle\langle f,f\rangle$, причому рівність може бути лише за умови колінеарності векторів f,g. Звідси випливає (1) і твердження теореми♦

Теорема 2. Для будь-яких елементів f,g з унітарного простору має місце **нерівність трикутника**:

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\| \ . \tag{2}$$

Доведення. Завдяки (1) маємо $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle \le |\langle f,g\rangle| \le \|f\|\cdot\|g\|$, тому

$$\|f+g\|^2 \equiv \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + 2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle + \langle g,g\rangle \le \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\|+\|g\|)^2,$$

звідки випливає твердження теореми (2) ♦

Означення. Лінійний простір L над полем K називають нормованим, якщо $\forall f \in L$ існує число $\|f\|$, таке що

1) $\|f\| \ge 0$, причому $\|f\| = 0$ тоді й тільки тоді, коли $f = 0$;
2) $\forall f \in L, \quad \alpha \in K$ маємо $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$;
3) $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$

Таким чином, унітарний простір є нормований з нормою $\|f\| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$.

Наявність норми, що задовольняє зазначеним вище умовам дозволяє ввести відстань $\|f-g\|$ між довільними елементами унітарного простору f,g, завдяки чому цей простір можна розглядати як приклад так званого *метричного* простору.

Означення. Послідовність елементів унітарного простору $f_1, f_2, f_3, \ldots$ **збігається** до елементу g, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - g\| = 0$. Це будемо позначати так: $f_n \Rightarrow g$ (границя послідовності $\{f_n\}$)♦

Означення. Послідовність елементів унітарного простору $f_1, f_2, f_3, \ldots$ є **фундаментальною (збіжною за Коші)**, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує $N(\varepsilon)$, таке, що $\forall n,m > N(\varepsilon)$: $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ ♦

Означення. Унітарний простір **H** є **гільбертовим**, якщо для будь-якої фундаментальної послідовності елементів $f_1, f_2, f_3, \ldots \in \mathbf{H}$ існує елемент g з цього ж простору, для якого $f_n \Rightarrow g$ (умова повноти простору відносно введеної норми)♦

Зауважимо, що повний нормований лінійний простір називають простором Банаха (**банаховим** простором). Таким чином, **гільбертів простір є одночасно банаховим простором** відносно введеної норми $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$.

Приклади.

Простір l^2. Розглянемо простір, елементами якого є послідовності комплексних чисел виду $f \equiv \{x_n, n=1,2,...\} \equiv \{x_1, x_2, x_3, ...\}$.

Для елементів $f \equiv \{x_n, n=1,2,...\}$, $g \equiv \{y_n, n=1,2,...\}$ та комплексного числа α покладемо $f+g \equiv \{x_n + y_n, n=1,2,...\}$, $\alpha f \equiv \{\alpha x_n, n=1,2,...\}$. Легко перевірити, що ці операції задовольняють умови лінійного простору. Нехай додатково виконуються умови абсолютної збіжності послідовностей з цього простору: $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. Тоді для будь-яких двох таких послідовностей можна отримати[2]

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^2\right)^{1/2} < \infty \quad ; \qquad (3)$$

тобто існує скінченна величина $\langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* y_n$, яку можна розглядати як скалярний добуток елементів f та g. Звідси випливає, що простір l^2 є унітарним. Можна довести умову повноти й показати, що цей простір також є гільбертовим.

Простір $L^2[a,b]$ – гільбертів простір квадратично-інтегровних за Лебегом комплексних функцій однієї дійсної змінної на відрізку $[a,b]$. У цьому просторі скалярний добуток функцій f та g визначають так (див. *застереження* до визначення скалярного добутку):

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b [f(x)]^* g(x)\, dx \quad . \qquad (4)$$

Сюди входить випадок, коли $a = -\infty, b = \infty$. Означення тривіально узагальнюється на випадок функцій багатьох змінних. Зауважимо, що умова інтегровності за Лебегом суттєва для розгляду питань збіжності. Для розгляду унітарних просторів (коли питання збіжності несуттєві) з скалярним добутком (4), можна обмежитися інтегровністю за Ріманом.

Базиси в гільбертовому просторі. Будемо говорити, що система незалежних векторів $\{v_\alpha\}$ з гільбертового простору $\mathbf{H}$ індексується множиною m, якщо є взаємно-однозначна відповідність між векторами системи та усіма елементами цієї множини: $v_\alpha \Leftrightarrow \alpha$. Для квантово-механічних застосувань важливими є випадки $m = \mathbb{N}$ та $m = \mathbb{R}$. Незалежність векторів означає, що жоден з них не може бути лінійною комбінацією інших векторів.

Означення. Множина $D \subset \mathbf{H}$ є щільною в $\mathbf{H}$, якщо для будь-якого $g \in \mathbf{H}$ можна знайти послідовність $\{f_n, n=1,2...\} \subset D$, яка збігається до g, тобто $f_n \Rightarrow g$ ♦

Означення. Систему векторів $S = \{u_\alpha, \alpha \in m\}$ гільбертова простору, що індексується множиною m, називають **ортогональною**, якщо для будь-якої пари $\alpha, \beta \in m$ має місце

[2] Запишіть нерівність (1) для скінченних послідовностей та застосуйте граничний перехід до нескінченності.

$u_\alpha \perp u_\beta$. Якщо додатково $\|u_\alpha\| = 1 \ \forall \alpha \in m$, систему S називають **ортонормованою**. Система векторів S називається **повною в $\mathbf{H}$**, якщо множина скінчених лінійних комбінацій векторів u_α щільна в $\mathbf{H}$. Повну ортонормальну систему векторів гільбертового простору $\mathbf{H}$ називають **ортонормальним базисом** в $\mathbf{H}$ ♦

Означення. Гільбертів простір називають **сепарабельним**, якщо **у** ньому можна обрати ортонормальний базис із зліченної множини векторів♦. Наприклад, простір $L^2[a,b]$ є сепарабельним. Можна показати, що будь-які два сепарабельні гільбертові простори ізоморфні.

Приклад. Розглянемо гільбертів простір $L^2[0,2\pi]$.

З теорії рядов Фур'є випливає що тригонометрична система

$e_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ є повною у цьому просторі.

Маємо

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-inx}dx = 1, \qquad (e_n, e_{n'}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')x}dx = 0, \ n \neq n'.$$

Ця система ортонормована, вона утворює зліченний ортонормований базис в $L^2[0,2\pi]$, тому цей простір є сепарабельним.

Процедура ортогоналізації Грама-Шмідта. Нехай система незалежних векторів $S = \{g_n \neq \theta, n \in \mathbb{N}\}$ є повною в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathbf{H}$. Покажемо, як з цієї системи можна отримати ортонормальний базис.

Покладемо $e_1 = g_1 / \|g_1\|, \quad h_2 = g_2 - \langle e_1, g_2 \rangle e_1, \quad e_2 = h_2 / \|h_2\|$, очевидно $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

Далі за індукцією: припускаємо, що є $n-1$ ортонормованих векторів $e_1, \ldots, e_{n-1}$, що утворені з лінійних комбінацій векторів $g_1, \ldots, g_{n-1}$. Покладемо $h_n = g_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, g_n \rangle e_i$. Завдяки ортонормованості $e_1, \ldots, e_{n-1}$ маємо $\langle h_n, e_i \rangle = 0, \ i = 1, \ldots, n-1$. Завдяки незалежності векторів $g_1, \ldots, g_{n-1}$ маємо $e_n \neq \theta$ і можна покласти $e_n = h_n / \|h_n\|$. Цей алгоритм дозволяє побудувати зліченний базис в $\mathbf{H}$.

Приклад. Поліноми Лежандра. У просторі $L^2[-1,1]$ з скалярним добутком $\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} dx\, g(x) h(x)$ повною є система дійсних функцій $\{g_n = x^n, n = 0,1,2,\ldots\}$. Повнота випливає з теореми Вейерштрасса про можливість апроксимації функцій поліномами з будь-якою заданою точністю. За допомогою процесу Грама-Шмідта звідси можна отримати ортогональні (але не нормовані) поліноми Лежандра $P_n(x), \quad x \in [-1,1]$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n, \qquad \int_{-1}^{1} dx\, P_n(x) P_m(x) = \frac{2\delta_{nm}}{2n+1}.$$

Зокрема, $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$.

Поліноми Лежандра є регулярними розв'язками рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n = 0.$$

Поліноми Ерміта. Для дійсних функцій, заданих на $(-\infty, \infty)$ з скалярним добутком $\langle g, h\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x)h(x)\exp(-x^2)$ подібним чином можна побудувати ортогональну систему поліномів Ерміта[3]:

$$h_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\, h_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{nm}.$$

Поліноми Ерміта виникають, зокрема, при розв'язанні рівняння Шредінгера для квантового гармонічного осцилятора

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{x^2}{2}\psi_n = \lambda_n \psi_n,$$

тут розв'язками задачі на власні значення є

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} h_n(x), \quad \lambda_n = n + \frac{1}{2}; \quad n = 1, 2, ...$$

[3] Подане визначення поліномів здебільшого використовується у фізичних застосуваннях («фізичні» поліноми Ерміта). Інші визначення відрізняються коефіцієнтами при x.