РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Література.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
3. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. - К.:Либідь, 2014.

1. ВСТУП ТА ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Далі область G змінних $\mathbf{x} \equiv (x_1,...,x_r)$ – це відкрита[1] зв'язна множина в $\mathbb{R}^r$, яка може обмеженою чи необмеженою, $\bar{G}$ – її замикання. Будемо вважати, що межа $\partial G = \bar{G} \setminus G$, тобто точки, що належать $\bar{G}$, але не належать G , утворює гладку[2] або кусково-гладку поверхню в $\mathbb{R}^r$. За необхідності розглядають гладкість більш високого порядку.

- C_G – множина усіх функцій, неперервних в області G змінних $\mathbf{x}$; C_G^p – множина функцій, які мають неперервні частинні похідні (по сукупності змінних) в G до p-го порядку включно. У випадку однієї змінної також будемо використовувати позначення $C[a,b]$ для функцій, неперервних на відрізку $[a,b]$ або $C(a,b)$ – на відкритому інтервалі (a,b); аналогічно $C^p[a,b]$ та $C^p(a,b)$ для функцій, що мають неперервні похідні до p-го порядку включно.
- Функція $F(\mathbf{x})$ є квадратично інтегровною в області G, якщо існує інтеграл

$$\int_G |F(\mathbf{x})|^2 \, d^r\mathbf{x} < \infty,$$

множину таких функцій позначаємо L_G^2.

---

[1] Тобто кожна точка належить області разом із своїм околом.

[2] Поверхня є гладкою, якщо її можна задати рівнянням $g(\mathbf{x}) = 0$ з неперервно-диференційовною функцією $g(\mathbf{x})$, причому $\sum_{i=1}^{r} \left|\partial g / \partial x_i\right| \neq 0$.

Нехай $u(\mathbf{x})$ – дійсна або комплексна вектор-функція змінних $\mathbf{x} \equiv (x_1,...,x_r)$, яка є неперервно-диференційовною достатньо високого порядку. Позначимо $u,_j \equiv \partial_j u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $i = 1,...,r$, а для більшої кількості змінних

$$u,_{i_1 i_2 \ldots i_n} \equiv \partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_n} u \equiv \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}}$$

(n – натуральне число); індекси можуть і співпадати, тобто диференціювання по деяким змінним може виконуватися декілька разів. Інколи також пишемо $\nabla u \equiv \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \quad i = 1,...,r \right\} \equiv \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{x}}$.

- Оператор Лапласа (для r змінних) $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{r} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, тобто $\Delta u \equiv \sum_{i=1}^{r} u,_{ii}$.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними називають вираз виду

$$\mathbf{F}\{u, u,_i, ..., u,_{i_1,i_2,...,i_n}, \mathbf{x}) = 0, \tag{1}$$

де $u \equiv u(\mathbf{x})$ – вектор-функція змінних $\mathbf{x}$, $\mathbf{F} \equiv \{F_1,...,F_m\}$ – вектор-функція аргументів $\mathbf{x} \equiv (x_1,...,x_r)$.

Розв'язком рівняння (1) в G називатимемо таку функцію $u(\mathbf{x})$, для якої визначена ліва частина (1), причому $u(\mathbf{x})$ обертає (1) у тотожність в G.

Рівняння з частинними похідними називають лінійним, якщо шукані функції та усі похідні входять лінійно в F. У разі лінійності F лише відносно старших похідних, рівняння називають квазілінійним; при цьому коефіцієнти при старших похідних можуть залежати від $\mathbf{x}, u$ та від похідних меншого порядку.

1.2. У цьому курсі ми розглядаємо **лінійні рівняння другого порядку для однієї функції** $u \equiv u(\mathbf{x})$:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x})\, u_{ij} + \sum_{j=1}^{r} B_j(\mathbf{x})\, u_j + C(\mathbf{x})u + F\left(\mathbf{x}\right) = 0 \quad , \tag{2}$$

де $u_j \equiv u,_j \equiv \partial_j u \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $u_{ij} \equiv u,_{ij} \equiv \partial_i \partial_j u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

Як правило, ми будемо далі вважати, що функції A_{ij}, B_j, C, F є неперервно диференційовними. Якщо не зазначено додаткових умов (початкових, граничних тощо), **розв'язком рівняння (2) в деякій області G будемо називати двічі неперервно диференційовну функцію $u(\mathbf{x})$, яка перетворює (2) на тотожність в цій області.**

Важливу роль для вивчення властивостей розв'язку відіграє **тип рівняння,** який визначається коефіцієнтами при старших похідних. Тип

визначають у кожній точці $\mathbf{x}_0$ окремо; але ми далі будемо розглядати рівняння, тип яких не міняється в усьому просторі.
Запишемо *характеристичну форму* рівняння (2):

$$Q(\lambda_1,...,\lambda_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}(\mathbf{x}_0)\lambda_i\lambda_j .$$

Це – квадратична форма змінних $\lambda_1,...,\lambda_n$; у кожній точці $\mathbf{x}$ її можна звести до канонічного виду за допомогою неособливого лінійного перетворення $\lambda_1,...,\lambda_n \to \lambda_1',...,\lambda_n'$:

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\tilde{A}_i(\mathbf{x}_0)\lambda_i'^2 .$$

- Якщо усі $\tilde{A}_i$ не дорівнюють нулю та мають однаковий знак, рівняння (2) називають **еліптичним** (у точці $\mathbf{x}$).
  Прикладом еліптичного рівняння є рівняння Пуассона
  $$\Delta u = f(\mathbf{x});\quad u\equiv u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\equiv(x_1,...,x_r).$$

Це рівняння описує, наприклад, електростатичний потенціал або ньютонівський гравітаційний потенціал. Якщо $f\equiv 0$ маємо рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0;$$

функції, що задовольняють цьому рівнянню в усьому просторі називають гармонічними.

- Якщо усі $\tilde{A}_i$ не дорівнюють нулю, але знак $\tilde{A}_1$ відрізняється від знаку інших коефіцієнтів, наприклад, якщо $\tilde{A}_1>0,$ але $\tilde{A}_i<0,\ i=2,...,n$, рівняння (2) називають **гіперболічним**.

  Приклад: хвильове рівняння або рівняння д’Аламбера (J. D'Alembert):
  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\Delta u = f(t,\mathbf{x});\quad u\equiv u(t,\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\equiv(x_1,...,x_r)\ ;$$

воно описує різноманітні хвильові процеси, такі, як поширення та генерація хвиль, прочому параметр a визначає швидкість поширення хвиль. У стаціонарному випадку, коли відомо, що $u(t,\mathbf{x})$ не залежить від t, рівняння зводиться до рівняння Пуассона.
Рівняння характеристик для хвильового рівняння має вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2-a^2\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^2=0,$$

одним з його розв’язків є $S=at-\sqrt{\sum_{i=1}^{r}x_i^2}$. Рівняння $S=const$ описує так званий характеристичний конусу майбутнього з вершиною у початку координат.

- Якщо хоча би один з коефіцієнтів $\tilde{A}_i$ (але не всі) рівний нулю, то рівняння називається **параболічним** в точці *x*.
  Приклад: рівняння теплопровідності або дифузії
  $$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \Delta u + f(t, \mathbf{x}); \quad u \equiv u(t, \mathbf{x}),\ \mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_r).$$

Це рівняння описує процеси поширення тепла чи дифузійні процеси, відповідно, параметр $\kappa > 0$ пропорційний коефіцієнту теплопровідності або дифузії. У стаціонарному випадку це рівняння також зводиться до рівняння Пуассона.

1.3. Характеристичні поверхні

Нехай скалярна функція $S(\mathbf{x}) \in C^1$ задовольняє рівняння
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j} = 0 \tag{3}$$
причому на будь-якій поверхні $S(\mathbf{x}) = C$ вектор $\nabla S(\mathbf{x}) \neq 0$. Тоді поверхні $S(\mathbf{x}) = const$ називають ***характеристичними поверхнями*** (або характеристиками) рівняння (2). Для двовимірного простору ($r = 2$) маємо справу з характеристичними лініями. Відповідно, (2) називають рівнянням характеристик.
Рівняння (2) не завжди має дійсні розв'язки; наприклад, для еліптичних рівнянь завдяки додатній визначеності квадратичної форми по змінним ∇S єдиним розв'язком є тривіальний $S(\mathbf{x}) \equiv const$. Втім, для певних задач комплексні характеристичні поверхні також можна використовувати для дослідження дійсних розв'язків.

1.3.1. Характеристики та поширення розривів

Як було зазначено вище, ми переважно матимемо справу з двічи неперервно-диференційовними розв'язками рівняння (2). Тим не менш, існують ситуації, коли $u \in C^1(G)$, але другі похідні є *кусково* неперервні. Це означає існування обмежених граничних значень $u_{i,j}(\mathbf{x})$ на поверхнях розривів, які, однак, можуть не збігатися на різних сторонах розривів. Виникає задача вивчення структури розривів у розв'язках. Зокрема, коли – у випадку рівнянь гіперболічного типу – є виділена змінна, яку зазвичай можна розглядати як час, виникає питання про еволюцію розривів, що асоціюється з питанням про поширення хвильових збурень у фізичній системі.

Щоб з'ясувати це питання, розглянемо заміну змінних у рівнянні (2) $\mathbf{x} \to \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \in C^2$, причому виберемо $y_1 = y_1(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$, а інші $y_i, i = 2,...,r$ виберемо довільним чином, але так, щоб перетворення $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ було неособливим, нові змінні $y_i, i = 2,...,r$ були незалежні від y_1 та між собою і існувало обернене перетворення $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$. При цьому

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x})\, u_{ij} \equiv \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \sum_{r=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} \tilde{A}_{kn}(\mathbf{y})\, \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_n} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\left[A_{ij}(\mathbf{x}) \sum_{n=1}^{r} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial y_n}\right] \quad ,$$

тут старші похідні зосереджені лише у першому доданку, де позначено

$$\tilde{A}_{kn}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}.$$

В нових змінних (2) набуває вигляду

$$\sum_{r=1}^{r}\sum_{n=1}^{r} \tilde{A}_{kn}(\mathbf{y})\, \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_n} + R\left(\mathbf{y}, \nabla u, u\right) = 0, \tag{2'}$$

де $R\left(\mathbf{y}, \nabla u, u\right)$ не містить других похідних від u, а коефіцієнт при $\partial^2 u / \partial y_1^2$ є

$$\tilde{A}_{11}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} \quad . \tag{4}$$

Якщо функція $y_1 = S(\mathbf{x})$ задовольняє (3), маємо $\tilde{A}_{11}(\mathbf{y}) = 0$ і рівняння (2') не містить других похідних по y_1. Звідси видно, що рівняння (3) є необхідною умовою існування розривів функції $\partial^2 u / \partial y_1^2$, причому усі члени в (2') є неперервними, оскільки це рівняння містить лише перші похідні по $y_1 = S(\mathbf{x})$, які, як будемо припускати, не містять розривів (диференціювання по іншим змінним вздовж поверхні S не призводить до розривів). Тоді єдина можливість мати розрив функції $\partial^2 u / \partial y_1^2$ полягає у виконанні умови (3). Таким чином, якщо $S(\mathbf{x})$ задовольняє (3), то поверхня $S(\mathbf{x}) = C$ для фіксованої константи C може бути поверхнею розриву другої похідної функції $u(\mathbf{x})$, яка реалізує деякий розв'язок рівняння (2). У конкретному випадку наявність чи відсутність розриву визначається граничними та початковими умовами. Наприклад, поверхня $S(\mathbf{x}) = 0$ може описувати поширення фронту хвилі, причому $u(\mathbf{x}) = 0$ в області $S(\mathbf{x}) > 0$, але $u(\mathbf{x}) \neq 0$ в області $S(\mathbf{x}) < 0$.

Легко бачити, що рівняння (2') задає певний зв'язок між функцією та її першими похідними на характеристичній поверхні. Дійсно, якщо на поверхні $y_1 = S(\mathbf{x})$ відомі функції

$$u(\mathbf{x})\big|_{y_1=const} = u_0(y_2,...,y_r), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1=const} \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\right|_{y_1=const} = u_1(y_2,...,y_r)$$

то диференціюючи ці співвідношення по $y_2,...,y_r$ отримуємо усі перші похідні $\left.\frac{\partial u}{\partial y_1}\right|_{y_1=const}$ та мішані похідні $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_i \partial y_j}\right|_{y_1=const}$, $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_j}\right|_{y_1=const}$ $i, j \neq 1$, які входять в (2'). Щодо другої похідної $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right|_{y_1=const}$, то вона в (2’) відсутня. Таким чином, функції $u_0(y_2,...,y_r)$ та $u_1(y_2,...,y_r)$ не можуть бути задані незалежно.

1.4. Постановки основних задач

Легко перевірити, що, коли на $u(\mathbf{x})$ не накладати додаткові умови, окрім диференційованості, рівняння (4,5,6) мають безліч розв’язків. Сформулюємо на прикладі цих рівнянь деякі широко вживані постановки крайових задач, коли треба задовольнити певні умови на межі області змінних $\mathbf{x} \equiv (x_1,...,x_r)$.

Далі G – обмежена відкрита область змінних $\mathbf{x}$, $\bar{G}$– її замикання, $\partial G = \bar{G} \setminus G$– гладка межа області, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – нормаль до межі у точці $\mathbf{x} \in \partial G$. Нагадаємо, що для гладкої поверхні $S = \partial G$, що визначена рівнянням $g(\mathbf{x}) = 0$, нормаль $\mathbf{n} \equiv (n_1,...,n_r)$ у точці $\mathbf{x} \in S$ – це одиничний вектор, колінеарний до $\nabla g(\mathbf{x}) \equiv \{g,_1(\mathbf{x}),...,g,_r(\mathbf{x})\}$. Зазвичай, якщо не зазначено протилежне, вважатимемо, що нормаль є зовнішньою. Уведемо нормальну похідну у точці $\mathbf{x} \in \partial G$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla g(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{r} n_i\, g,_i \,. \tag{5}$$

1.4.1. Еліптичні рівняння.

Якщо рівняння (2) є еліптичним і треба знайти його розв’язок в *обмеженій* області G, на її межі $S = \partial G$ часто накладають такі умови:

$$\left.\left(A_1 u + A_2 \frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_S = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \tag{6}$$

A_1, A_2, ν – задані неперервні функції від $\mathbf{x}$ на S, причому, $|A_1|+|A_2| \neq 0$. На знак цих функцій також можуть бути накладені певні обмеження.

Різновидом задач з умовами (6) є такі.

- Задача Діріхле: шукаємо розв’язок (2) в G з умовою

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \tag{7}$$

u_0 – задана неперервна функція на S.

- Задача Неймана: шукаємо розв’язок (2) в G з умовою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = u_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \tag{8}$$

u_1 – задана неперервна функція на S.

Якщо еліптичне рівняння розглядають в усьому просторі змінних $\mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_r)$, додатковими умовами як правило є обмеження на поведінку розв’язків на нескінченності, зокрема, накладають певні умови спадання самих розв’язків та/або їх похідних.

Розглянемо, наприклад, рівняння Гельмгольца у тривимірному просторі

$$\Delta u + k^2 u = f(\mathbf{x}); \quad u \equiv u(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{10}$$

Це рівняння є наслідком хвильового рівняння (див. далі), до якого застосовано перетворення Фур’є. Тут додатковими умовами на нескінченності, що обмежують вибір розв’язку, є **умови випромінювання Зоммерфельда** за $r \equiv |\mathbf{x}| \geq x_0$ для досить великого $x_0 > 0$:

$$|u(\mathbf{x})| r < C < \infty; \quad \lim_{r\to\infty} \left\{ r\left[\mathbf{n}\cdot\nabla u - iku\right]\right\} = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{x}/r; \tag{11}$$

ці умови описують випромінювання, що уходить від джерела на нескінченність, але відкидають випадок хвиль, що приходять з нескінченності.

1.4.2. Гіперболічне рівняння: задача Коши та граничні умови.

Для рівнянь гіперболічного та параболічного типу маємо виділену змінну t. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(t,\mathbf{x})\, u_{,ij} + \sum_{j=1}^{r} B_j(t,\mathbf{x})\, u_{,j} + C(t,\mathbf{x})u + F\left(t,\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_r)\ . \tag{9}$$

Якщо за усіх значень аргументів $A_{ij}(t,\mathbf{x})$ – додатно визначена матриця, рівняння (9) є гіперболічним. Означимо циліндр H як прямий добуток обмеженої області G змінних $\mathbf{x}$ та інтервалу $(0,T)$ змінної t: $H = (0,T) \times G$ із замиканням $\bar{H}$.

Сформулюємо задачу Коши для рівняння (9). Шукатимемо розв’язки, , цього рівняння $u(t,\mathbf{x}) \in C^1_{\bar{H}} \bigcap C^2_H$ при $t \in [0,T]$, що задовольняють початковим умовам

$$u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \equiv (x_1, ..., x_r) \in G; \tag{10}$$

де $u_0 \in C^1_{\bar{G}}, u_1 \in C_{\bar{G}}$, а також крайовим (граничним) умовам

$$\left.\left(A_1 u + A_2 \frac{\partial u}{\partial n} \right)\right|_S = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S; \qquad (11)$$

для усіх $t \in [0,T]$, де функції A_1, A_2, v – задані й неперервні на S. Зазвичай ми вважаємо, що початкові функції $u_0(t,\mathbf{x})$ та $u_1(\mathbf{x})$ також задовольняють граничним умовам (11), але це не обов'язково.

Як вже було зазначено, постановки задач дещо відрізняються, коли розв'язки шукають у **необмеженій** області. Нехай $G = \mathbb{R}^r$. У цьому разі замість граничних умов типу (11) обмежують поведінку розв'язку на нескінченності. Це може бути зроблено безпосередньо через граничні властивості розв'язку або через належність розв'язку до класу функцій, наприклад, до L^2_G.

Умови Коші (10) задають $u(t,\mathbf{x})$ та її похідні при[i] $t = 0$. Зазначимо, що разом із $\frac{\partial u}{\partial t}$ при $t = 0$ визначені також $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u_0}{\partial x_i}$. Далі, за умови достатньої гладкості, диференціюванням отримуємо мішані похідні другого порядку $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$. Звідси похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ отримуємо з рівняння (9) і так далі. Цей процес можна продовжити до нескінченного порядку похідних, якщо усі функції, що входять в рівняння (9) та в початкові умови, є аналітичними і таким чином, побудувати розв'язок у вигляді ряду Тейлора (теорема Ковалєвської). Однак у багатьох реальних задачах аналітичність умова аналітичності є занадто жорсткою.

---

[i] Можливо задавати початкові умови на гіперповерхні $S(x) = const$ простору змінних $x = \{x_0, x_1, .., x_n\}$ ($t \equiv x_0$), за умови $\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial S}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_j} > 0$.