Теорія складності

2. Теорія обчислюваності

2.5 Функції Радо

Використання методу діагоналізації дозволяє побудувати необчислювальну функцію для будь-якої адекватної моделі обчислень. Для цього достатньо описати список всіх обчислювальних функцій і побудувати нову, яка, хоч трохи, але буде відрізнятися від кожної функції зі списку, що містить злічленну кількість функцій. Така конструкція не завжди є однозначною щодо отриманої функції та конкретних методів побудови. Також більш природним здається, що необчислювальна функція має зростати дуже швидко, щоб не вистачало ресурсів для обчислення її значення, а не побудова абстрактної функції, при обчисленні якої всі обчислювальні пристрої помиляються хоча б на одному вхідному слові.

В 1962 році угорський математик Ті́бор Ра́до (англ. Tibor Radó) в роботі [1] представив більш просту і однозначну конструкцію побудови необчислювальної функції, яка дуже швидко зростає.

Для початку розглянемо особливості моделі обчислень, яку використовував Тібор Радо. Він використовував однострічкову детерміновану машину Тюрінга з нескінченної в обидві сторони стрічкою, у якої алфавітом стрічки є множина $\{0, 1\}$, де символ 0 є порожнім символом, в множині внутрішніх станів є тільки один кінцевий стан, а функція переходів є повністю визначеною для всіх некінцевих внутрішніх станів (тобто, така машина Тюрінга зупиняється тоді й тільки тоді, коли знаходиться в цьому кінцевому стані), а зчитувальний пристрій на кожному такті роботи може переміщуватися на одну комірку ліворуч або праворуч, але не залишатися на тій самій комірці. Використовуючи введені позначення, такі машини Тюрінга мають вигляд $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$. Така модифікація однострічкової машини Тюрінга залишається універсальною моделлю обчислень.

Множину всіх таких машин Тюрінга можна розбити на два класи: машини Тюрінга, які не зупиняться на порожньому вхідному слові, і машини Тюрінга, які зупиняться на порожньому вхідному слові. Множину машин Тюрінга, які зупиняться на порожньому вхідному слові, називають класом Радо і позначають як $\mathcal{K}_{BB}$ від англійського зооніму "busy beaver", який позначає дуже зайняту людину. Цей сталий вираз використав Тібор Радо для представлення своєї концепції, але він закріпився в англомовних джерелах і є сталим терміном для позначення відповідних машин Тюрінга. Це є причиною того, що іноді при перекладі на українську мову використовують терміни "заклопотані бобри", "працьовиті бобри", "бобри-трудяги" або "зайняті бобри" для позначення відповідних машин Тюрінга, але в українській мові зооніми для позначення заклопотаності та працьовитості використовують, як правило, бджолу чи мураху і, щоб не створювати плутанини з термінологією, краще називати відповідні терміни на честь їх автора, Тібора Радо, і використовувати тільки в скорочених позначеннях латиницею абревіатуру BB.

Клас Радо можна розбити на класи машин Тюрінга, параметризовані за допомогою натурального числа — кількості некінцевих станів машини Тюрінга. Так, через $\mathcal{K}_{BB}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, позначають множину машин Тюрінга, які входять до класу Радо і містять точно n некінцевих станів, тобто, в яких загальна кількість внутрішніх станів дорівнює $n+1$. Таким чином $\mathcal{K}_{BB} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_{BB}(n)$.

Для довільної машини Тюрінга M з класу Радо через $s(M)$ позначають кількість тактів, яку зробить машина Тюрінга M з порожнім вхідним словом до своєї зупинки, а через $\sigma(M)$ позначають кількість непорожніх комірок, які залишаться на стрічці після зупинки машини Тюрінга M з порожнім вхідним словом.

Наслідок. Для довільної машини Тюрінга $M \in \mathcal{K}_{BB}$ виконується нерівність $\sigma(M) \leq s(M)$.

Означення 2.1. *Функціями Радо* називають функції $S, \Sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M\in\mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M\in\mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Наслідок. Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\Sigma(n) \leq S(n)$.

Отже, щоб обчислити значення однієї з функцій Радо, S або Σ, необхідно знайти максимальне значення зроблених тактів або непорожніх комірок серед усіх машин Тюрінга класу Радо з фіксованою кількістю внутрішніх станів.

Зауваження. Функцію Радо $S(n)$, $n \in \mathbb{N}$, іноді ще називають функцією *активності* (англ. activity) та деколи позначають як $time(n)$ або $ff(n)$.

Функцію Радо $\Sigma(n)$, $n \in \mathbb{N}$, іноді ще називають функцією *оцінки* (англ. score) або функцією *ефективності* (англ. productivity), та деколи позначають як $ones(n)$, $bb(n)$ або $BB(n)$.

Але, знову треба уважно слідкувати за нотацією, оскільки останнім часом в деяких роботах BB функцією від англ. “busy beaver” називають S функцію Радо, а не Σ функцію Радо. Більш того, дуже часто BB машинами Тюрінга або “busy beaver” (з n внутрішніми станами) (англ. n-state Busy Beaver) називають машину(и) Тюрінга, значення σ якої дорівнює $\Sigma(n)$ (а, іноді, навіть і машину(и) Тюрінга, значення s якої дорівнює $S(n)$). Все ж таки Тібор Радо визначив клас машин Тюрінга $\mathcal{K}_{BB}(n)$ для кожного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, які зупиняються на порожньому вхідному слові, і, які приймають участь в “грі Радо” (англ. Busy Beaver game, BB game, Busy Beaver Competition), щоб визначити машини Тюрінга з класу Радо, значення σ та s яких є максимальним в своєму класі. На множину машин Тюрінга $\mathcal{K}_{BB}(n)$ Тібор Радо посилався як BB-n класифікацію (англ. BB-n classification), а машини Тюрінга значення σ та s яких є максимальним в класі $\mathcal{K}_{BB}(n)$ називав *чемпіонами* (англ. champion, BB-n champion) та *переможцями* (англ. winner, BB-n winner) відповідно. Тому далі також будемо називати машини Тюрінга з класу Радо, значення σ та s яких є максимальним в своєму класі, чемпіонами та переможцями свого класу.

Твердження 2.1. Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ потужність класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$ машин Тюрінга обмежена зверху значенням $(4(n+1))^{2n}$.

$\triangleright$ Згідно з визначеною моделлю довільна машина Тюрінга з n, $n \in \mathbb{N}_1$, некінцевими внутрішніми станами визначається набором $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta\colon (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$ є всюди визначеною функцією, а $|Q \setminus \{q_H\}| = n$. Вважаючи однаковими машини Тюрінга, які мають однакові правила переходів з точністю до певного бієктивного відображення між множинами їх внутрішніх станів, загальна кількість різних машин Тюрінга з n некінцевими внутрішніми станами визначається кількістю можливих функцій переходів δ. Так як потужність області визначення функції δ дорівнює $2n$, а потужність області значень функції δ дорівнює $4(n+1)$, то загальна кількість різних функцій переходів δ дорівнює $(4(n+1))^{2n}$. Потужність класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$ машин Тюрінга не може бути більшою за загальну кількість машин Тюрінга з n некінцевими внутрішніми станами, а тому $|\mathcal{K}_{BB}(n)| \le (4(n+1))^{2n}$. $\square$

Зауваження. Якби функції переходів дозволялося бути частковою функцією, то загальна кількість машин Тюрінга з n некінцевими внутрішніми станами дорівнювала би $(4(n+1)+1)^{2n}$. Треба також зазначити, що з метою пошуку максимальних значень Σ та S функцій Радо немає потреби розглядати машини Тюрінга з частковими функціями переходів. Якщо для довільної машини Тюрінга з частковою функцією переходів побудувати продовження цієї функції, то значення σ та s утвореної машини Тюрінга не зменшаться.

Наприклад, при дослідженні значення Σ функції Радо використовують такі правила скорочення перебору класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$ для відповідного значення $n \in \mathbb{N}$.

- Оскільки стрічка машини Тюрінга є симетричною в обидва боки, то для довільної машини Тюрінга M існує машина Тюрінга $\widetilde{M}$, яка є модифікацією машини Тюрінга M із заміною переміщення ліворуч зчитувального пристрою на праворуч, і навпаки, в усіх правилах переходів. При цьому $\sigma(M) = \sigma(\widetilde{M})$ і $s(M) = s(\widetilde{M})$. Тому достатньо обмежити перебір машин Тюрінга з класу Радо, розглядаючи лише такі машини Тюрінга M $=(1, \{\,0, 1\,\}, \{\,1\,\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, які містять правило переходу$\delta(q_0, 0) = (q, a, R)$, $q \in Q$, $a \in \{0, 1\}$, тобто такі машини Тюрінга, в яких на першому такті роботи з порожнім словом зчитувальний пристрій переміщується праворуч.

- Якщо машина Тюрінга не містить жодного правила переходів в кінцевий стан, то її можна не розглядати, оскільки вона ніколи не зупиниться.

- Якщо машина Тюрінга містить більше одного правила переходів в кінцевий стан, то її можна не розглядати, оскільки при роботі з порожнім вхідним словом буде використовуватися лише одне правило для зупинки, то можна зосередитися лише на машинах Тюрінга з одним правилом переходів в кінцевий стан.

- Можна зосередитися лише на машинах Тюрінга, в яких при правилі переходів в кінцевий стан на стрічку пишеться символ 1. Така сама машина Тюрінга з єдиною зміною у правилі переходів в кінцевий стан — на стрічку буде записуватися символ 0, матиме загальну кількість непорожніх комірок після зупинки або таку саму, або меншу на одиницю.

- З точки зору кількості непорожніх комірок та кількості зроблених тактів байдуже куди буде рухатися зчитувальний пристрій при застосуванні правила переходу в кінцевий стан. Тому розглядаються лише машини Тюрінга, в яких при застосуванні правила переходів у кінцевий стан зчитувальний пристрій рухається тільки праворуч.

Як наслідок, такі правила дозволяють скоротити перебір до $(2n-1) \cdot (4n)^{2n-2}$ машин Тюрінга в класі Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$.

Твердження 2.2. Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, існує машина Тюрінга M з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$, для якої $M(\varepsilon) = 1^n$.

$\triangleright$ Для кожного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, можемо безпосередньо побудувати одну з таких машин Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$.

Зафіксуємо довільне натуральне число $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Нехай $M = (1, \{\,0,1\,\}, \{\,1\,\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $Q = \{\,q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_H\,\}$. Визначимо $\delta(q_k, 0) = (q_{k+1}, 1, L)$ для довільного значення $k \in \{\,0, \ldots, n-2\,\}$, а також $\delta(q_{n-1}, 0) = (q_H, 1, R)$. Побудована машина Тюрінга M при застосуванні до порожнього вхідного слова зробить точно n тактів, при цьому напише на стрічці слово 1^n, й в момент зупинки зчитувальний пристрій буде знаходитися на крайньому лівому символі 1, тобто $M(\varepsilon) = 1^n$. $\square$

Теорема 2.1. *Для довільної обчислювальної функції $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що $\Sigma(n) > f(n)$ для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$.*

$\triangleright$ Розглянемо довільну обчислювальну функцію $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Якщо функція f є обчислювальною, то функція $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, де $g(n) = \sum\limits_{i=0}^{n}(f(i) + i^2)$, також є обчислювальною.

Більш того, для функція g має властивості, що для довільного натурального значення $n \in \mathbb{N}$:

1) $g(n) \geq f(n)$;

2) $g(n) \geq n^2$;

3) $g(n+1) > g(n)$.

Оскільки функція g є обчислювальною, то існує машина Тюрінга M_g (визначена згідно з моделлю Радо), яка обчислює значення функції g. Нехай машина Тюрінга M_g має k, $k \in \mathbb{N}$, внутрішніх станів, включно із кінцевим станом.

Згідно з твердженням 2.2 для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, існує машина Тюрінга M_n^1 з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$, для якої $M_n^1(\varepsilon) = 1^n$.

Розглянемо машину Тюрінга M, яка є композицію машин Тюрінга $M_g \circ M_g \circ M_n^1$. З означень машин Тюрінга M_g та M_n^1 випливає, що $M(\varepsilon) = 1^{g(g(n))}$ (спочатку машина Тюрінга M_n^1 з порожнім вхідним словом напише на стрічці n символів 1, а потім машина Тюрінга M_g обчислить значення $1^{g(n)}$ і $1^{g(g(n))}$ відповідно). Це означає, що машина Тюрінга M з $n + 2k$ некінцевими внутрішніми станами зупиниться на порожньому вхідному слові і в результаті роботи напише на стрічці $g(g(n))$ символів 1. З цього випливає, що машина Тюрінга M належить класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n + 2k)$ машин Тюрінга, а також, що $\Sigma(n + 2k) \geq g(g(n))$. Оскільки $g(n) \geq n^2$ для довільного натурального значення $n \in \mathbb{N}$, то існує таке натуральне число $m \in \mathbb{N}$, що для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, $g(n) > n + 2k$. Використовуючи монотонність функції g, маємо, що, якщо $g(n) > n + 2k$, то $g(g(n)) > g(n + 2k)$, а отже $g(g(n)) > f(n + 2k)$. З цього випливає, що існує таке натуральне число $m \in \mathbb{N}$, що для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, виконується нерівність $\Sigma(n + 2k) \geq g(g(n)) > f(n + 2k)$. Якщо визначити натуральне число $n_f = m + 2k$, то це означає, що для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$, виконується нерівність $\Sigma(n) > f(n)$. $\square$

Наслідок. Σ функція Радо є необчислювальною.

Наслідок. S функція Радо є необчислювальною.

Дійсно, на практиці, значення Σ функції Радо та S функції Радо є відомими лише для значень $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. І, якщо ще є шанс обчислити значення $\Sigma(5)$ та $S(5)$, то абсолютна більшість дослідників вважає, що значення $\Sigma(7)$ та $S(7)$ навряд чи коли вдасться обчислити. Хоча більш правильними будуть сумніви щодо доведення, що деякі відомі значення є максимальними. Найбільшою проблемою є не повний перебір класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(7)$, а існування в класі таких машин, для яких важким є аналітичне доведення відсутності зупинки і практична реалізація дуже довгий час працює без повторень.

Більш того, зростання, наприклад, S функції Радо є настільки швидким, що для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії.

Так, є доведення того, що в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$. Побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(1919)$, яка зупиняється, коли теорія множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору є суперечною, і побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(744)$, яка зупиняється, якщо гіпотеза Рімана є хибною. Таким чином такі результати показують певну межу обчислюваності математичних теорій, і вважають, що функції Радо можуть допомогти в проведенні чіткого розмежування обчислюваних та необчислюваних функцій.

2.5.1 Відомі обмеження функцій Радо

Тібор Радо в роботі [1] навів нерівність для значень S та Σ функцій Радо: для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $S(n) \leq (n+1)\Sigma(5n)2^{\Sigma(5n)}$.

Мілтон Грін (англ. Milton Green) в 1964 році в роботі [2] побудував певний клас машин Тюрінга, щоб довести нерівність $\Sigma(2n) > 3 \uparrow^{n-2} 3 > A(n-2, n-2)$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, де $A\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функція Акермана, а $\uparrow$ є нотацією Кнута. Більш того, в тій же роботі він довів, що для довільної обчислювальної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$, виконується нерівність $\Sigma(n+1) > f(\Sigma(n))$.

Юлстром (англ. Julstrom) в 1992 році довів, що $S(n) < Sigma(20n)$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, а Ван (англ. Wang) і Сюй (англ. Xu) в роботі 1995 року поліпшили цю оцінку до $S(n) < Sigma(10n)$, хоча ще в 1990 році Міхаель Буро (англ. Michael Buro) в своєму дипломі (німецькою мовою) довів, що $S(n) < Sigma(9n)$.

В роботі [3] 1997 року Ян (англ. Yang), Дін (англ. Ding) і Сюй довели, що $S(n) < Sigma(8n)$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, а також те, що існує така константа $c \in \mathbb{N}$, що $S(n) < Sigma(3n + c)$.

В роботі [4] 1996 року доведені нерівності $S(n) \leq (2n-1)\Sigma(3n+3)$ і $S(n) < \Sigma(3n + 6)$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$, які були асимптотично поліпшені в роботі [5] 2002 року до нерівності $S(n) \leq \Sigma(n + \lceil \frac{8n}{\log n} \rceil + c)$ для деякої константи $c \in \mathbb{N}$ і $n \geq 2$.

2.5.2 Чемпіони, переможці та поточні лідери класів Радо

Очевидно, що $\Sigma(0) = 0$ і $S(0) = 0$, а також, що $\Sigma(1) = 1$ і $S(1) = 1$.

Значення $\Sigma(2) = 4$ зустрічається в роботі Радо [1], де також висловлюється припущення, що $\Sigma(3) = 6$. Доведення, що $S(2) = 6$, також не є складним і, скоріш за все, вперше отримав його Шень Лінь (англ. Shen Lin), студент Тібора Радо, в своїй дисертації.

Використовуючи комп'ютер для аналізу простих машин Тюрінга і дослідивши більш складні екземпляри аналітично, Тібор Радо та його студент Шень Лінь в роботі [6] 1965 року довели, що $\Sigma(3) = 6$ і $S(3) = 21$ (Шень Лінь отримав результати в 1963 році в своїй дисертації, але стаття опублікована в 1965 році).

Аллен Брейді (англ. Allen H. Brady) в 1964 році знайшов машину Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(4)$, для якої значення σ функції Радо дорівнює 13, а значення s функції Радо дорівнює 107. Доведення того, що ці значення є максимальними, він зміг зробити у 1974 році, а саме доведення опубліковане лише у 1983 році.

Пошук переможців та чемпіонів в класі Радо $\mathcal{K}_{BB}(5)$ триває вже досить довгий час і на даний момент ще намає остаточних результатів. Наразі поточним

$q_0 0$	$q_0 1$	$q_1 0$	$q_1 1$	$\sigma(M)$	$s(M)$
$q_1 1R$	$q_1 1L$	$q_0 1L$	$q_H 1R$	4	6
$q_1 1R$	$q_H 1R$	$q_1 1L$	$q_0 1L$	3	6
$q_1 1R$	$q_1 0L$	$q_0 1L$	$q_H 1R$	3	6

Таблица 1.1 — Переможці та чемпіони класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(2)$

$q_0 0$	$q_0 1$	$q_1 0$	$q_1 1$	$q_2 0$	$q_2 1$	$\sigma(M)$	$s(M)$
$q_1 1R$	$q_H 1R$	$q_1 1L$	$q_2 0R$	$q_2 1L$	$q_0 1L$	5	21
$q_1 1R$	$q_H 1R$	$q_2 0L$	$q_2 0R$	$q_2 1L$	$q_0 1L$	5	20
$q_1 1R$	$q_0 1L$	$q_2 0R$	$q_H 1R$	$q_2 1L$	$q_0 0L$	5	20
$q_1 0R$	$q_H 1R$	$q_2 0L$	$q_0 1R$	$q_1 1R$	$q_2 1L$	4	17
$q_1 0R$	$q_2 1L$	$q_0 1L$	$q_1 1R$	$q_1 1L$	$q_H 1R$	5	16
$q_1 1R$	$q_H 1R$	$q_2 0R$	$q_1 1R$	$q_2 1L$	$q_0 1L$	6	14
$q_1 1R$	$q_2 1R$	$q_2 1L$	$q_H 1R$	$q_0 1R$	$q_1 0L$	6	13
$q_1 1R$	$q_2 1L$	$q_0 1L$	$q_1 1R$	$q_1 1L$	$q_H 1R$	6	13
$q_1 0R$	$q_2 1L$	$q_2 1R$	$q_1 1R$	$q_0 1L$	$q_H 1R$	5	13
$q_1 1R$	$q_0 1R$	$q_2 1L$	$q_H 1R$	$q_0 1R$	$q_1 1L$	6	12
$q_1 1R$	$q_2 1L$	$q_2 1R$	$q_H 1R$	$q_0 1L$	$q_1 10$	6	11

Таблица 1.2 — Переможці, чемпіони та деякі кандидати класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(3)$

$q_0 0$	$q_0 1$	$q_1 0$	$q_1 1$	$q_2 0$	$q_2 1$	$q_3 0$	$q_3 1$	$\sigma(M)$	$s(M)$
$q_1 1R$	$q_1 1L$	$q_0 1L$	$q_2 0L$	$q_H 1R$	$q_3 1L$	$q_3 1R$	$q_0 0R$	13	107
$q_1 1R$	$q_3 1L$	$q_2 1L$	$q_1 0R$	$q_0 1R$	$q_0 1L$	$q_H 1R$	$q_2 0L$	9	97
$q_1 1R$	$q_2 0R$	$q_0 1L$	$q_0 1R$	$q_H 1R$	$q_3 1R$	$q_3 1L$	$q_2 0L$	13	96

Таблица 1.3 — Переможці, чемпіони та деякі кандидати класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(4)$

лідером є машина Тюрінга, яку Хайнер Марксен (англ. Heiner Marxen) та Юрген Бунтрок (англ. Jürgen Buntrock) знайшли у вересні 1989 року і для якої значення σ функції Радо дорівнює 4098, а значення s функції Радо дорівнює 47176870. Досі невідомо, чи є ці значення максимальними. Головною проблемою є машини Тюрінга, які працюють дуже довго, але немає доведення, що вони ніколи не зупиняться. На даний момент є 42 машини Тюрінга, для яких треба довести, що вони не зупиняться або отримати відповідні значенням функцій Радо. Більшість дослідників вважає, що ці машини все ж таки не зупиняються на порожньому вхідному слові, але доведення цього факту є необхідним для повноцінного визнання переможця і чемпіона в в класі Радо $\mathcal{K}_{BB}(5)$. Є результат, в якому доведено, що 14 з цих 42 машин Тюрінга не зупиняться на порожньому слові, але цей результат вимагає додаткової перевірки.

Для класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(6)$ поточним лідером є машина Тюрінга, яку в 2010 році побудував Павел Кропітц (англ. Pavel Kropitz). Для цієї машини Тюрінга значення $\sigma \geq 3.514{\cdot}10^{18267}$ і $s \geq 7.412{\cdot}10^{36534}$ (точні значення можна знайти за посиланням http://turbotm.de/~heiner/BB/bb-xlist.txt)

В 2014 році користувач з ніком "Wythagoras", використовуючи аналіз Паскаля Мікела (англ. Pascal Michel) машини Тюрінга, побудованої Павлом Кропітцем, побудував машину Тюрінга класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(7)$, для якої значення $s > \sigma > 10^{10^{10^{10^{18705352}}}}$ (повне доведення оцінки з допомогою Паскаля Мікела зроблено користувачем з ніком "Cloudy176"). Цей результат є поточним лідером для класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(7)$.

2.5.3 Узагальнення функцій Радо

В роботі [4] 1996 року введено нові функції, які є схожими з функціями Радо і використовують ту саму модель. Так, для довільної машини Тюрінга M

$q_0 0$	$q_0 1$	$q_1 0$	$q_1 1$	$q_2 0$	$q_2 1$	$q_3 0$	$q_3 1$	$q_4 0$	$q_4 1$	$\sigma(M)$	$s(M)$
$q_1 1R$	$q_2 1L$	$q_2 1R$	$q_1 1R$	$q_3 1R$	$q_4 0L$	$q_0 1L$	$q_3 1L$	$q_H 1R$	$q_0 0L$	4098	47176870
$q_1 1R$	$q_3 0L$	$q_2 1L$	$q_3 1R$	$q_0 1L$	$q_2 1L$	$q_H 1R$	$q_4 1R$	$q_0 1R$	$q_1 0R$	4097	23554764
$q_1 1R$	$q_0 1R$	$q_2 1L$	$q_1 1L$	$q_0 1R$	$q_3 1L$	$q_0 1R$	$q_3 1L$	$q_H 1R$	$q_2 0L$	4098	11798826

Таблиця 1.4 — Кандидати класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(5)$

з класу Радо через $num(M)$ визначають максимальну довжину послідовних непорожніх комірок, які залишаться на стрічці після зупинки машини Тюрінга M з порожнім вхідним словом, а через $space(M)$ визначають кількість різних комірок стрічки, значення яких визначить зчитувальний пристрій машини Тюрінга M при роботі з порожнім вхідним словом до своєї зупинки.Відповідно визначають функції $Num, Space\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ як $Num(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} num(M)$ і $Space(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} space(M)$. Безпосередньо з означень випливає, що для довільної машини Тюрінга M з класу Радо $num(M) \leq \sigma(M) \leq space(M) \leq s(M)$. В роботі [4] доведена низка властивостей таких функцій — для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$

- $Space(n) \leq \Sigma(n)$;
- $Space(n) < \frac{1}{2} Num(3n+3)$;
- $Space(n) \leq \log_3 Num(3n+6)$;
- $S(n) \leq nSpace(n)2^{Space(n)}$;
- $S(n) < (2n-1)\Sigma(3n+3)$;
- $S(n) < Num(3n+6)$;
- $\Sigma(n) < \frac{1}{2} Num(3n+3)$.

Аллен Брейді в роботі [7] 1988 року узагальнив Σ та S функції Радо на випадок використання машин Тюрінга, алфавіт стрічки яких містить m символів (за домовленістю для позначення додаткових символів використовують десяткові цифри). Через $\mathcal{K}_{BB}(n, m)$, $n, m \in \mathbb{N}$, позначають множину машин Тюрінга, які містять точно n некінцевих станів, алфавіт стрічки яких містить m символів, і які зупиняються на порожньому вхідному слові. Відповідно *функціями Радо* називають функції $S, \Sigma\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільних натуральних чисел $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, приймають значення $S(n, m) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n,m)} s(M)$ і $\Sigma(n, m) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n,m)} \sigma(M)$. Оригінальні функції Радо є частковими випадками функцій $\Sigma(n, m)$ і $S(n, m)$ при значенні $m = 2$, тобто для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконуються рівності $\Sigma(n, 2) = \Sigma(n)$ і $S(n, 2) = S(n)$.

В роботі [8] розглянуті Σ та S функції Радо для модифікації машин Тюрінга, де функція переходів за один такт може або написати новий символ, або перемістити зчитувальний пристрій, але не може виконати обидві дії за один такт. В подальших роботах отримані певні результати щодо значень Σ та S функцій

Радо для таких машин Тюрінга. Але в роботі [9] доведено, що для довільної машини Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n, m)$ з такою модифікацією, яка зупиняється на порожньому вхідному слові, існує машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n, m)$ без модифікації, яка також зупиняється на порожньому слові, і при цьому значення σ функції Радо для цих машин Тюрінга є однаковими. Тому достатньо обмежити пошук лише машинами Тюрінга без такої модифікації.

Тібо Радо для дослідження відповідних функцій визначив клас машин Тюрінга, в яких зчитувальний пристрій на кожному такті повинен зробити переміщення праворуч або ліворуч. Від особливостей визначеною моделі машин Тюрінга залежать конкретні значення функцій Радо. Дійсно, наприклад, при модифікації класу машин Тюрінга, за якої дозволяється зчитувальному пристрою залишатися на тій самій комірці стрічки без переміщення, в роботі [10] знайдено машину Тюрінга з п'ятьма некінцевими внутрішніми станам, для якої значення функцій s та σ дорівнюють 70740810 та 4098 відповідно (поточний рекорд функції s для таких машин Тюрінга без модифікації дорівнює 47176870).

Також існують деякі результати значень функцій Радо для машин Тюрінга, які мають нескінченну в одну сторону стрічку, та машин Тюрінга з двовимірними стрічками.

2.5.4 Інші цікаві посилання

- Поточні рекорди та історія машин Тюрінга класу Радо
  https://webusers.imj-prg.fr/~pascal.michel/
  http://turbotm.de/~heiner/BB/
- Computerphile "Busy Beaver" відео (англ. мова), prof. Brailsford
  https://www.youtube.com/watch?v=CE8UhcyJS0I
- Фізична реалізація $(3, 2)$ Busy Beaver
  https://www.youtube.com/watch?v=28pnk2JIBSE
- Фізична реалізація $(4, 2)$ Busy Beaver
  https://www.youtube.com/watch?v=2PjU6DJyBpw

- Реалізація $(4,2)$ Busy Beaver в Minecraft
  https://www.youtube.com/watch?v=IefoYnf6xKI

Список використаних джерел

1. *Rado T.* On Non-Computable Functions // Bell System Technical Journal. 1962. Трав. Т. 41, № 3. С. 877-884.
2. *Green M. W.* A lower bound RADO's sigma function for binary turing machines // 1964 Proceedings of the Fifth Annual Symposium on Switching Circuit Theory and Logical Design. IEEE, 11.1964.
3. *Yang R.*, *Ding L.*, *Xu S.* Some better results estimating the shift function in terms of busy beaver function // ACM SIGACT News. 1997. Бер. Т. 28, № 1. С. 43-48.
4. *Ben-Amram A. M.*, *Julstrom B. A.*, *Zwick U.* A note on busy beavers and other creatures // Mathematical Systems Theory. 1996. Серп. Т. 29, № 4. С. 375-386.
5. *Ben-Amram A. M.*, *Petersen H.* Improved Bounds for Functions Related to Busy Beavers // Theory of Computing Systems. 2002. Січ. Т. 35, № 1. С. 1-11.
6. *Lin S.*, *Rado T.* Computer Studies of Turing Machine Problems // Journal of the ACM. 1965. Квіт. Т. 12, № 2. С. 196-212.
7. *Brady A. H.* The Busy Beaver Game and the Meaning of Life // in: The Universal Turing Machine: A Half-Century Survey, R. Herken (Ed.), Oxford University Press. 1988. pp. 259-277.
8. *Oberschelp A.*, *Schmidt-Göttsch K.*, *Todt G.* Castor quadruplorum // Archive for Mathematical Logic. 1988. Бер. Т. 27, № 1. С. 35-44.
9. *Harland J.* Generating Candidate Busy Beaver Machines (Or How to Build the Zany Zoo). 2016. 11 жовт. arXiv: `1610.03184 [cs.FL]`.
10. *Bátfai N.* Recombinations of Busy Beaver Machines. 2009. 27 серп. arXiv: `0908.4013 [cs.CC]`.