РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Узагальнення рівняння дифузії-теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - B(t,x)u + f \tag{1}$$

A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B \geq 0$.

$u \equiv u(t,x), \quad f \equiv f(t,x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}_+, \quad x \equiv (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$\mathbb{R}_+ = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$;.

Розв'язки (1) розглядаємо в класі функцій $u \equiv u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^n)$, які досить швидко спадають з першими похідними до нуля на нескінченності

$|u(t,x)| \leq C(|x|) \to 0, \quad \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right| \leq D(|x|) \to 0$ при $|x| \to \infty$, причому $\forall t \in [0,T]$, $T > 0$,

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, u^2(t,\mathbf{r}) < \infty$.

Зауважимо, що ці умови пов'язані між собою і їх можна послабити.

Далі припускаємо, що для кожного $T > 0 \ \exists M(T) < \infty : \ |f(t,\mathbf{r})| < M(T)$, тобто $f(t,\mathbf{r})$ обмежена в кожній полосі $0 \leq t \leq T$, причому $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f^2(t,\mathbf{r}) < \infty$. Далі позначаємо $\mathbf{r}^2 \equiv x_1^2 + ... + x_n^2$ – скалярний квадрат вектора $\mathbf{r}$.

Початкова умова для (1) така:

$$u(0,\mathbf{r}) = v_0(\mathbf{r}) \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad |v_0(\mathbf{r})| \leq M_1 < \infty \ . \tag{2}$$

Частковим випадком (1) є однорідне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

з умовою (2).

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - B(t,x)u^2 + u\, f(t,x) \tag{3}$$

Проінтегруємо по усьому простору:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\, u^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\int d^n x\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\int d^n x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} -$$

$$-\int d^n x\, B(t,x)u^2 + \int d^n x\, u\, f(t,x)\,.$$

Завдяки умовам на нескінченності $\int d^n x \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, а завдяки додатній визначеності A_{ij} та невід'ємності A_{ij} другий та третій доданки у правій частині менше нуля. Тому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\, u^2(x,t) \le \int d^n x\, u\, f(t,x)\,. \tag{4}$$

При $f(t,x) \equiv 0$ маємо

$$\int d^n x\, u^2(t,x) \le \int d^n x\, u^2(0,x) \tag{5}$$

– оцінка через початкові умови.

Застосуємо це для доведення єдиності розв'язків задачі (1,2).

Нехай функції u_1, u_2 належать зазначеному класу функцій та задовольняють (1) з умовами (2). Тоді для різниці $w = u_1 - u_2$ маємо рівняння

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - B(t,x)w},$$

для якого отримуємо оцінку, аналогічну (5). Оскільки $w(0,x) = 0$, звідси $\int d^n x\, w^2(t,x) \le 0$, що можливо лише коли $w(t,x) \equiv 0$, щ.т.д.

РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

Розглядаємо

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - B(x)u + f = 0}\quad , \tag{6}$$

A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B \ge 0$.

Розв'язки (1) розглядаємо в класі функцій $u \equiv u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, які досить швидко спадають з першими похідними до нуля на нескінченності:

$|u(x)| \le C(|x|) \to 0, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le D(|x|) \to 0$ при $|x| \to \infty$, причому $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, u^2(t,\mathbf{r}) < \infty$.

Аналогічно (3)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x) u \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - B(x)u^2 + u\, f(x) = 0.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{2}\int d^n x \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2 \right\} = \int d^n x\, u\, f(x) \ . \tag{7}$$

Припустимо, що у нас є розв'язки u_1, u_2 з однаковими правими частинами з названого класу функцій. Тоді для різниці $w = u_1 - u_2$ маємо рівняння (6), в якому $f \equiv 0$. З рівняння (7), підставляючи $w = u_1 - u_2$ маємо

$\int d^n x \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x)w^2 \right\} = 0$, що дає $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x)w^2 \equiv 0$ та

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} \equiv 0$, а значить $\frac{\partial w}{\partial x_j} \equiv 0$, $\quad w \equiv const$. З умов на нескінченності $w \equiv 0$.

РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

(нова нумерація)

Розглядаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - B(x) + f \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}_+ = \{t : t \in \mathbb{R}, t \ge 0\}$, $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3), \quad f \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3)$.

Як і раніше, A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B > 0$, але A_{ij}, B не залежать від *t*.

Рівняння (1) розглядаємо разом із початковими умовами (задача Коші):

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\right|_{t=0}=\psi(x),\quad \psi\in C^2(\mathbb{R}^3)\quad , \tag{3}$$

Домножимо (1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\equiv\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-B(x)u\frac{\partial u}{\partial t}+f\frac{\partial u}{\partial t}=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(B(x)u^2\right)+f\frac{\partial u}{\partial t}$$

або

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+B(x)u^2\right]=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+f\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Інтегруємо по всьому простору

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}+B(x)u^2\right]=\int d^n x\, f\frac{\partial u}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Нехай функції u_1, u_2 належать зазначеному класу функцій та задовольняють (1) з умовами (2). Тоді для різниці $w=u_1-u_2$ маємо рівняння (1,2,3) з нульовим джерелом $f\equiv 0$ та нульовими початковими умовами. З рівняння (4) при $f(t,x)\equiv 0$ маємо

$$\frac{d}{dt}\int d^n x\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+B(x)w^2\right]=0$$

Звідси, з урахуванням нульових початкових умов

$$\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}+B(x)w^2\right]_t\equiv 0 \text{ і } \quad w\equiv 0\,.$$