Деякі спеціальні функції

1. **Сферичні функції.**

1.1. В сферичних координатах часто застосовують розклади в ряди по сферичних функціях. Ці функції визначаються так[1]:

1.2.

$$Y_{km}(\theta,\varphi)=(-1)^m\left[\frac{2k+1}{4\pi}\cdot\frac{(k-|m|)\;!}{(k+|m|)\;!}\right]^{1/2}\mathrm{P}_k^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{1}$$

$$Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}}\,P_\ell^m(\cos\theta)\,e^{im\varphi}\qquad -\ell\le m\le\ell.$$

k=0,1,2,,..., $-k\le m\le k$;

де $\mathrm{P}_k^m(z)$ – приєднані функції Лежандра, m, k–цілі числа, $0\le m\le k$.

$$\mathrm{P}_\ell^{\,k}(z)=\left(1-z^2\right)^{k/2}\frac{d^k}{dz^k}\mathrm{P}_\ell(z),\qquad z=\cos\theta \tag{2}$$

$\mathrm{P}_\ell(z)$ – поліном Лежандра

$$\mathrm{P}_\ell(z)=\frac{1}{2^\ell\,\ell!}\cdot\frac{d^\ell}{dz^\ell}\left(z^2-1\right)^\ell \tag{3}$$

– приєднана функція Лежандра.

Рівняння для приєднаних функцій Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell^m(x)\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_\ell^m(x)=0,$$

Сферичні функції утворюють повну систему у множині функцій, квадратично-інтегровних на одиничній сфері $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$, з скалярним добутком:

$$\int(f,g)=\int f(\theta,\varphi)g^*(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

Система функцій ортонормована, тобто:

$$\int Y_{\ell m}(\theta,\varphi)Y^*{}_{\ell' m'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$$

---

[1] Тут подано визначення $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ як комплексних функцій дійсних змінних θ,φ. Часто можна зустріти також дещо інше визначення системи сферичних функцій через $\mathrm{Re}Y_{\ell m},\mathrm{Im}Y_{\ell m}$.

Повнота означає, що будь-яка квадратична інтегрована функція може бути подана як:

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_{\ell m}Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{4}$$

де $\alpha_{\ell m}=\int f(\theta,\varphi)Y^{*}{}_{\ell m}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$.

Якщо функція $\boldsymbol{f}$ не залежить від азимутального кута , можна обмежитися розкладом по поліномах Лежандра:

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n P_n(\cos\theta) \quad . \tag{5}$$

Наведемо декілька явних виразів для сферичних функцій та поліномів Лежандра:

$$\mathrm{P}_0(z)=1,\quad \mathrm{P}_1(z)=z\ ,\quad \mathrm{P}_2(z)=\frac{1}{2}\left(3z^2-1\right)$$

$$Y_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\qquad Y_{1,0}=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\qquad Y_{1,\pm1}=\pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\ e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{2,0}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right),\ Y_{2,\pm1}=\pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{2,\pm2}=\pm\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

1.2. Зручність сферичних функцій пов’язана із тим, що вони є власними функціями оператора Λ – кутової частини оператора Лапласа у сферичних координатах:

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Lambda,$$

де

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Вони задовольняють рівнянню:

$$\Lambda Y_{\ell m}(\theta,\varphi)=-\ell(\ell+1)Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{6}$$

Відповідно, для поліномів Лежандра маємо:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P_\ell(\cos\theta)}{\partial\theta}\right)+\ell(\ell+1)\mathrm{P}_\ell(\cos\theta)=0$$

Використовуючи (6) легко перевірити, що ряд:

$$\Phi=\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(\frac{\alpha_{\ell m}}{r^{\ell+1}}+b_{\ell m}r^{\ell}\right)Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \tag{7}$$

з довільними сталими $\alpha_{\ell m}$, $b_{\ell m}$, є розв'язком рівняння Лапласа в області збіжності.

1.3. Наведемо співвідношення з сферичними функціями, що часто застосовують в теорії потенціалу.

Нехай $\mathbf{r}(r,\theta,\varphi)$ та $\mathbf{r}'(r',\theta',\varphi')$ визначають дві точки простору, причому $r>r'$ і γ— кут між цими векторами. Тоді:

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell}\mathrm{P}_\ell(\cos\gamma) \tag{8}$$

Функцію:

$$\frac{1}{\left[1-2xz+x^2\right]^{1/2}}=\sum_{\ell=0}^{\infty}x^{\ell}\mathrm{P}_\ell(z), \qquad |x|<1,$$

що відповідає рівності (8), називають твірною функцією для поліномів Лежандра, оскільки вона дає змогу визначити за допомогою розкладу по степенях *x*.

2. Циліндричні функції.

2.1. При розв'язанні задач в сферичних та циліндричних координатах виникає рівняння Бесселя:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\Phi}{dx}+\left(1-\frac{v^2}{x^2}\right)\Phi=0 \tag{1}$$

Розв'язки (1) називають циліндричними функціями. Розв'язок цього рівняння при $z>0$, що є обмеженим при $z\to 0+0$, можна подати у виді ряду:

$$\boldsymbol{J}_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{2}$$

Функцію називають функцією Бесселя. Тут $\Gamma(z)$ – гамма-функція (для цілих n: $\Gamma(n+1) = n!$).

Другий незалежний розв'язок рівняння (1) при $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ є $\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)$.

При цілому n має місце тотожність:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

В цьому разі незалежний від розв'язок дає функція Неймана:

$$N_{\nu}(x) = \frac{1}{\sin \pi\nu}\left[J_{\nu}(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)\right],$$

яка означена також для цілих n за допомогою граничного переходу $\nu \to n$.

Функції Ганкеля:

$$H^{(1)}{}_n(x) = J_n(x) + iN_n(x)$$

$$H^{(2)}{}_n(x) = J_n(x) - iN_n(x)$$

зручно використовувати в задачах, пов'язаних з випромінюванням. За $z \to \infty$ ці функції мають асимптотики:

$$H^{(1)}{}_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\ell^{\,i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(x^{-3/2}\right) \tag{3}$$

При $x \to 0$ функції Ганкеля мають особливість.

2.2. Наведемо приклади задач, де виникають циліндричні функції.

Рівняння Гельмгольца у сферичних координатах:

$$\Delta\Phi + k^2\Phi = -4\pi\rho.$$

Розкладаючи по сферичних гармоніках за формулою (7) у сферичних координатах, маємо:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi_{\ell m}}{\partial r}\right) + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right)\Phi_{\ell m} = -4\pi\rho, \tag{5}$$

$$\Phi_{\ell m} \equiv \Phi_{\ell m}(r)$$

Нехай права частина дорівнює нулю за $r > R$. Розглянемо (5) в цій області. Покладемо:

$$\Phi_{\ell m} = \chi_{\ell m} / \sqrt{r},$$

звідки дістаємо:

$$\frac{d^2\chi_{\ell m}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\chi_{\ell m}}{dr} + \left(k^2 - \frac{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right)\chi_{\ell m} = 0$$

Загальним розв’язком цього рівняння є лінійна комбінація циліндричних функцій індекса $\nu = l + 1/2$:

$$\chi_{\ell m} = \alpha_{\ell m} H^{(1)}{}_{\ell + \frac{1}{2}}(kr) + b_{\ell m} H^{2}{}_{\ell + \frac{1}{2}}(kr)$$

За умови випромінювання $\Phi \approx \exp(ikr), \quad r \to \infty$, тому для ізольованої системи, що випромінює, згідно з асимптотикою (3), слід покласти $b_{lm} = 0$.

В області $r < R$, де права частина (5) відмінна від нуля, розв’язок можна подати у квадратурах методом варіації сталих.

2.3. Рівняння Гельмгольца у циліндричних координатах має вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z} + k^2 \Phi = -4\pi\rho \tag{6}$$

Обмежимось випадком $\rho = 0$.

Застосуємо перетворення Фур'є по змінній $\boldsymbol{Z}$:

$$\tilde{\Phi}(r, \varphi, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dz\, e^{-iz\mu} \Phi(r, \varphi, z)$$

Для функції маємо рівняння:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \varphi^2} + \left(k^2 - \mu^2\right)\tilde{\Phi} = 0 \tag{7}$$

Далі функцію $\tilde{\Phi}$ розкладемо в ряд Фур'є по куту $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$\tilde{\Phi}(r, \varphi, \mu) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r, \mu) \ell^{im\varphi},$$

причому підставляючи в (7) дістаємо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f_m}{\partial r} \right) + \left(x^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) f_m = 0, \tag{8}$$

де $\lambda^2 = k^2 - \mu^2$.

Це рівняння легко зводиться до виду (1).

Його розв’язок, що задовольняє умови регулярності при $r \to 0$

$$f_m(r,\mu) = const \cdot J_m(\lambda r)$$

Зауважимо, що функція $J_m(\lambda r)$ є дійсною для будь-якого знаку λ^2

При λ=0 лінійно-незалежними розв'язками рівняння (8) є r^m, r^{-m}

3. Приклад розв'язання задач.

Знайти регулярний в нулі розв'язок рівняння Лапласа всередині круга $r \le R$ (r, ϕ- полярні координати), якщо на межі:

$$\Phi(R,\phi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m e^{im\phi}$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді ряду Фур'є:

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\varphi}$$

Для коефіцієнтів $\boldsymbol{f_m}$ дістаємо:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df_m}{dr}\right) - \frac{m^2}{r^2} f_m = 0$$

при $\boldsymbol{r < R}$.

Загальний розв'язок цього рівняння:

$$f_m(r) = C_m r^{|m|} + C'_m r^{-|m|}$$

З умови регулярності при $r \to 0$, маємо $C'_m = 0$ при $m \ne 0$; при $m = 0$ два доданки об'єднуються: $f_0(r) = C_0$. Звідси:

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m r^{|m|} e^{im\varphi}$$

При $\boldsymbol{r=R}$ з граничної умови випливає:

$$C_m R^{|m|} = \Phi_m,$$

звідки

$$\Phi(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Phi_m \left(\frac{r}{R}\right)^{|m|} e^{im\varphi}.$$