

ПИТАННЯ НА ЕКЗАМЕН

1. Класифікація диференціальних рівнянь другого порядку. Постановки задач. Граничні умови. Початкові умови та рівняння характеристик для рівнянь гіперболічного та параболічного типу.
2. Коректність задач математичної фізики. Приклад Адамара.
3. Унітарний простір. Властивості скалярного добутку (над полем дійсних та комплексних чисел). Поняття про гільбертів простір.
4. Унітарний простір. Нерівність Коші-Буняковського.
5. Унітарний простір. Нерівність трикутника.
6. Симетричні оператори в унітарному просторі. Достатня умова симетричності в унітарному просторі над полем комплексних чисел.
7. Задача на власні значення для симетричних операторів в унітарному просторі. Довести, що власні значення дійсні.
8. Задача на власні значення для симетричних операторів в унітарному просторі. Довести, що власні вектори, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.
9. Спектральна задача для оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Діріхле.
Повнота системи власних функцій.
10. Спектральна задача для оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Неймана.
Повнота системи власних функцій.
11. Загальна схема розв'язання задач типу $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} + f(t, x)$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Діріхле.
12. Загальна схема розв'язання задач типу $\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} + f(t, x)$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Неймана.
13. Загальна схема розв'язання задач типу $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + f(t, x)$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Діріхле.
14. Загальна схема розв'язання задач типу $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + f(t, x)$ на $[0,1]$ з нульовими умовами Неймана.
15. Задача Штурма — Ліувілля. Теорема Стеклова (формулювання).
16. Оператор Штурма — Ліувілля як симетричний оператор.
17. Задача Штурма — Ліувілля (ЗШЛ). Довести, що власні значення ЗШЛ — прості.
18. Задача Штурма — Ліувілля. Довести, що власні значення ЗШЛ — дійсні.
19. Задача Штурма — Ліувілля. Довести, що власні функції ЗШЛ, які відповідають різним власним значенням — ортогональні.
20. Задача Штурма — Ліувілля. Довести, що власні значення ЗШЛ — прості.
21. Метод розділення змінних. Розв'язок рівняння Пуассона всередині квадрата.

22. Поліноми Лежандра. Рівняння, властивості ортогональності. Зв'язок з задачами для оператора Лапласа в сферичних координатах за наявності аксіальної симетрії.
23. Приєднані функції Лежандра. Рівняння, властивості ортогональності. Схема розв'язання рівняння Пуассона в сферичних координатах всередині кулі.
24. Функції Бесселя. Розв'язок у вигляді ряду. Ортогональність. Приклади задач, що приводять до рівняння Бесселя. Хвильове рівняння всередині круга з умовами Діріхле.
25. Еліптичні рівняння в обмеженій області з граничними умовами Діріхле. Однозначність розв'язку.
26. Еліптичні рівняння в обмеженій області з граничними умовами Неймана. Однозначність розв'язку.
27. Однозначність розв'язку еліптичних рівнянь в необмеженій області.
28. Інтегральна формула для розв'язку рівняння Пуассона в тривимірному просторі. Основні властивості.
29. Розв'язок рівняння Пуассона в тривимірному просторі. Неперервна залежність від функції джерела.
30. Параболічні рівняння в обмеженій області з граничними умовами Діріхле. Однозначність розв'язку.
31. Параболічні рівняння в обмеженій області з граничними умовами Неймана. Однозначність розв'язку.
32. Рівняння теплопровідності – дифузії. Розв'язок однорідного рівняння в n-вимірному просторі. Неперервна залежність від початкових умов.
33. Рівняння теплопровідності – дифузії. Розв'язок неоднорідного рівняння в n-вимірному просторі. Неперервна залежність від функції джерела.
34. Однозначність розв'язку рівнянь гіперболічного типу в обмеженій області з граничними умовами Діріхле.
35. Однозначність розв'язку рівнянь гіперболічного типу в обмеженій області з граничними умовами Неймана.
36. Однорідне хвильове рівняння у тривимірному просторі. Формула Кірхгофа. Неперервна залежність від початкових умов.
37. Неоднорідне хвильове рівняння у тривимірному просторі з нульовими початковими умовами. Формула Кірхгофа. Неперервна залежність від функції джерела.
38. Розв'язок хвильового рівняння у тривимірному просторі.
39. Простори основних функцій. Простір фінітних функцій D та збіжність.
40. Узагальнені функції в D' . Регулярні узагальнені функції. Згортка узагальненої функції з основною.
41. Диференціювання узагальнених функцій. Визначення, властивості.
42. Послідовності функцій, що приводять до функції Дірака. Довести

$$\frac{1}{\pi x} \sin nx \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad n \rightarrow \infty.$$
43. Послідовності функцій, що приводять до функції Дірака. Довести

$$\frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon^2}\right) \xrightarrow{D'} \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$
44. Формули Сохоцького.

45. Фундаментальний розв'язок оператора Лапласа.
46. Властивості згортки основної функції з фундаментальним розв'язком оператора Лапласа. Неперервність фундаментального розв'язку як функціоналу в D' .
47. Фундаментальний розв'язок хвильового оператора. Неперервність фундаментального розв'язку як функціоналу в D' .
48. Фундаментальний розв'язок для рівняння теплопровідності.
49. Фундаментальний розв'язок оператора Гельмгольца.