Оператори в гільбертовому просторі

Означення. Нехай у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ задано правило $\mathbf{A}$, за яким будь-якому елементу f з множини $D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{H}$ співставляють елемент $g = \mathbf{A}f \in \mathbf{H}$, будемо говорити, що в $\mathbf{H}$ діє оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A})$ ♦

Далі вважатимемо $D(\mathbf{A})$ **щільною** в $\mathbf{H}$.

Означення. Нехай оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D \subset \mathbf{H}$ діє у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$. Будемо говорити, що цей оператор **лінійний**, якщо $\forall\, f, g \in D$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ маємо

$$\alpha f + \beta g \in D \quad \text{і} \quad \mathbf{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{A}f + \beta \mathbf{A}g \ ♦ \tag{5}$$

Область визначення лінійного оператора є лінійним підпростором в $\mathbf{H}$.

Область визначення D відображається оператором $\mathbf{A}$ в область значень $\operatorname{Im}\mathbf{A} = \mathbf{A}(D) \subset \mathbf{H}$.

У $\mathbf{H}$ визначений одиничний оператор $\mathbf{I}$: $\forall f \in \mathbf{H}$: $\mathbf{I}f = f$.

Якщо $\forall g \in \operatorname{Im}\mathbf{A}$ рівняння $\mathbf{A}f = g$ має єдиний розв'язок відносно $f \in D$, будемо говорити, що оператор $\mathbf{A}$ має **обернений** $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A}^{-1}g = f$.

Лінійні оператори широко використовуються, зокрема, у квантовій механіці та квантовій теорії поля, де елементи деякого гільбертового простору[1] $\mathbf{H}$ визначають стани фізичної системи. Як правило, область визначення оператора, пов'язаного з фізичною величиною, є щільною у просторі станів $\mathbf{H}$; далі розглядатимемо саме такі оператори. Спостережуване (середнє) значення фізичної величини (наприклад, енергії чи імпульсу) для системи, яка знаходиться у стані f, дається виразом $\langle f, \mathbf{A}f \rangle$. Тому природно вимагати, щоб цей вираз був дійсним.

Означення. Оператор, для якого виконана умова $\langle f, \mathbf{A}g \rangle = \langle \mathbf{A}f, g \rangle$ для $\forall f, g \in D(\mathbf{A})$, називають **ермітовим або симетричним**[2].

---

[1] Далі суттєво, що $\mathbf{H}$ є лінійним простором над полем *комплексних* чисел.

[2] Близькими, але не тотожними, є поняття ермітовості та самоспряженості лінійного оператора. У фізичній літературі на ці відмінності часто не звертають уваги.

Теорема 3. Нехай лінійний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{H}$ діє у комплексному гільбертовому просторі $\mathbf{H}$, причому $\forall f \in D$ величина $\langle f, \mathbf{A}f \rangle$ є дійсною. Тоді $\forall f, g \in D(\mathbf{A})$ маємо

$$\langle f, \mathbf{A}g \rangle = \langle \mathbf{A}f, g \rangle \quad . \tag{6}$$

Доведення. За умовою $\langle f, \mathbf{A}f \rangle = \langle f, \mathbf{A}f \rangle^* = \langle \mathbf{A}f, f \rangle \ \ \forall f \in D$.

Суттєво, що область визначення $D(\mathbf{A})$ – лінійний простір. Тому $\forall \ f, g \in D$ та для *довільного* комплексного λ маємо

$$\langle f + \lambda g, \mathbf{A}(f + \lambda g) \rangle = \langle \mathbf{A}(f + \lambda g), f + \lambda g \rangle .$$

Розкриємо скалярні добутки у правій та лівій частині цієї рівності з використанням співвідношень $\langle f, \mathbf{A}f \rangle = \langle \mathbf{A}f, f \rangle$, $\langle g, \mathbf{A}g \rangle = \langle \mathbf{A}g, g \rangle$ та лінійності оператора, що має місце за умовою, й дістанемо

$$\lambda \langle f, \mathbf{A}g \rangle - \lambda^* \langle \mathbf{A}g, f \rangle = \lambda \langle \mathbf{A}f, g \rangle - \lambda^* \langle g, \mathbf{A}f \rangle .$$

За властивістю скалярного добутку $\langle \mathbf{A}g, f \rangle = \langle f, \mathbf{A}g \rangle^*$, $\langle g, \mathbf{A}f \rangle = \langle \mathbf{A}f, g \rangle^*$, тому

$$\mathrm{Im}\{\lambda \langle f, \mathbf{A}g \rangle\} = \mathrm{Im}\{\lambda \langle \mathbf{A}f, g \rangle\} .$$

Оскільки тут λ можна вибирати довільно, покладемо спочатку $\lambda = 1$, а потім $\lambda = i$, звідки отримаємо рівність уявної , а потім дійсної частини (6), а значить і пряме твердження теореми.

Нехай тепер оператор $\mathbf{A}$ є симетричним, тоді $\forall f \in D$, маємо $\langle f, \mathbf{A}f \rangle = \langle \mathbf{A}f, f \rangle = \langle f, \mathbf{A}f \rangle^*$, тобто $\langle f, \mathbf{A}f \rangle$, як число, що дорівнює своєму комплексному спряженню, є дісним♦

Справедливо також обернене твердження: якщо оператор $\mathbf{A}$ є симетричним $\forall f \in D$, величина $\langle f, \mathbf{A}f \rangle$ є дійсною.

Означення. Якщо для елемента $f \in D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{H}$, $\|f\| \neq 0$, має місце $\mathbf{A}f = \lambda f$, де λ– комплексне, то цей елемент називають **власним вектором** оператора $\mathbf{A}$, а λ– **власним числом (**або **власним значенням)**, що відповідає f ♦

Очевидно, що коли f є власним вектором оператора $\mathbf{A}$, то для будь-якого $a \neq 0$ вектор $g = a\,f$ також є власним вектором оператора $\mathbf{A}$.

Можлива ситуація, коли одному й тому ж власному числу λ відповідають декілька лінійно-незалежних власних векторів, тоді кажуть, що λ є виродженим власним числом.

Теорема 4. Нехай симетричний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D \subset \mathbf{H}$ діє у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$ та має власний вектор f з власним значенням λ:

$$\mathbf{A}f = \lambda f\,, \tag{7}$$

де λ–комплексне. Тоді λ є дійсним числом.

Доведення. Помножимо (7) скалярно зліва на f. Маємо

$\langle f, \mathbf{A}f \rangle = \lambda \langle f, f \rangle, \quad \langle f, f \rangle \neq 0$, звідки видно, що $\lambda = \dfrac{\langle f, \mathbf{A}f \rangle}{\langle f, f \rangle}$ є дійсним♦

Теорема 5. Нехай симетричний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D \subset \mathbf{H}$ діє у гільбертовому просторі $\mathbf{H}$, причому, для деяких ненульових $v_1, v_2 \in D$, має місце

$$\mathbf{A}v_1 = \lambda_1 v_1\,, \quad \mathbf{A}v_2 = \lambda_2 v_2 \tag{7}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді власні вектори v_1, v_2 ортогональні.

Доведення. Помножимо перше співвідношення (7) зліва скалярно на v_2. Маємо

$$\langle v_2, \mathbf{A}v_1 \rangle = \lambda_1 \langle v_2, v_1 \rangle\,.$$

Завдяки симетричності

$$\langle v_2, \mathbf{A}v_1 \rangle = \langle \mathbf{A}v_2, v_1 \rangle = \langle \lambda_2 v_2, v_1 \rangle = \lambda_2 \langle v_2, v_1 \rangle\,.$$

де враховано, що λ_2 є дійсним. Віднімаючи отримані співвідношення, маємо $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_2, v_1 \rangle = 0$, звідки випливає твердження теореми♦

Розглянемо оператор Штурма-Ліувілля

$$\mathbf{L}u \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx} \right] + q(x)u; \quad u \equiv u(x) \tag{26}$$

з дійсними $p(x)$, $q(x)$, що діє на двічи неперервно-диференційовні функції $u \equiv u(x)$.

Розглянемо клас двічи неперервно-диференційовні функцій **K,** що задовольняють умовам

$$A_1 u(a) = A_2 u'(a); \quad B_1 u(b) = -B_2 u'(b) \quad (u' \equiv du/dx), \quad a < b. \qquad (27а)$$

де константи A_1, A_2, B_1, B_2 (спільні для усього класу **K**) задовольняють умовам

$$A_1, A_2 \geq 0, \quad A_1 + A_2 > 0, \quad B_1, B_2 \geq 0, \quad B_1 + B_2 > 0 \ . \qquad (27б)$$

Далі вважаємо, що

$$p(x) \in C^1[a,b], \ p(x) > 0; \quad q(x) \in C[a,b], \ q(x) \geq 0 \ ; \qquad (27в)$$

Покажемо, що **оператор L є симетричним на множині функцій K з скалярним добутком** $\langle f_1, f_2 \rangle = \int_a^b [\, f_1(x)]^* \, f_2(x)\, dx$.

Маємо для функцій з **K**

$$\left\langle w, \mathbf{L}u \right\rangle \equiv \int_a^b dx \; w^*(x) \left(-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx} \right] + q(x) u \right) =$$

$$= \int_a^b dx \left(-\frac{d}{dx}\left[w^*(x) p(x) \frac{du}{dx} \right] + p(x)\frac{dw^*}{dx}\frac{du}{dx} + q(x) w^* u \right) =$$

$$= -w^*(x) p(x) \frac{du}{dx}\bigg|_{x=b} + w^*(x) p(x) \frac{du}{dx}\bigg|_{x=a} + \int_a^b dx \left(p(x)\frac{dw^*}{dx}\frac{du}{dx} + q(x) w^* u \right) .$$

Далі треба використати (27б), розглядаючи випадки, коли хоча б один з коефіцієнтів A_1, A_2 та B_1, B_2 не дорівнює нулю. Нехай, наприклад, $A_2 \neq 0$, $B_1 \neq 0$. Тоді з (27а) $w'(a) = \frac{A_1}{A_2} w(a)$, $\quad u(b) = -\frac{B_2}{B_1} u'(b)$, звідки

$$\left\langle w, \mathbf{L}u \right\rangle =$$

$$= \frac{B_2}{B_1} p(b) w'^*(b) u'(b) + \frac{A_1}{A_2} p(a) w^*(a) u(a) + \int_a^b dx \left(p(x)\frac{dw^*}{dx}\frac{du}{dx} + q(x) w^* u \right) . \qquad (28)$$

$$\left\langle u, \mathbf{L}w \right\rangle =$$

$$= \frac{B_2}{B_1} p(b) w'(b) u'^*(b) + \frac{A_1}{A_2} p(a) u^*(a) w(a) + \int_a^b dx \left(p(x)\frac{du^*}{dx}\frac{dw}{dx} + q(x) u^* w \right)$$

Звідси очевидно

$$\left\langle \mathbf{L}w, u \right\rangle = \left\langle u, \mathbf{L}w \right\rangle^* =$$

$$= \frac{B_2}{B_1} p(b) w'^*(b) u'(b) + \frac{A_1}{A_2} p(a) w^*(a) u(a) + \int_a^b dx \left(p(x)\frac{dw^*}{dx}\frac{du}{dx} + q(x) w^* u \right) =$$

$$= \left\langle w, \mathbf{L}u \right\rangle,$$

щ.т.д. Варіанти з іншими A_1, A_2 та B_1, B_2 розглядаються аналогічно **(розгляньте це самостійно, переберіть усі можливі варіанти).**

Оператор називають невід'ємним, якщо $\langle u, \mathbf{L}u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathbf{K}$. За виконання умов (27в) оператор Штурма-Ліувілля є невід'ємним. Звідси випливає, що власні числа оператора $\mathbf{L}$ невід'ємні.

Для наступних питань достатньо існування норми (у банаховому просторі), де діє оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A})$.

Означення. Лінійний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{B}$ у банаховому просторі $\mathbf{B}$ **обмежений**, якщо існує число $N < \infty$, таке, що $\forall f \in D(\mathbf{A}),\ f \neq 0$ виконано нерівність $\|\mathbf{A}f\| < N\|f\|$ ♦

Найменше $N_0 = \inf\{N,\}$ з усіх можливих чисел N називають нормою оператора $\mathbf{A}$.

$$\frac{\|\mathbf{A}f\|}{\|f\|} \leq N_0 \quad \forall f \in D(\mathbf{A}), \quad f \neq 0. \tag{8}$$

Означення. Лінійний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{B}$ у банаховому просторі $\mathbf{B}$ **неперервний**, якщо для будь-якої послідовності $f_n \subset D(\mathbf{A}),\ \|f_n\| \to 0$ маємо $\|\mathbf{A}\, f_n\| \to 0$ ♦

Теорема 6. Лінійний оператор $\mathbf{A}$ з областю визначення $D(\mathbf{A}) \subset \mathbf{B}$ у банаховому просторі $\mathbf{B}$ неперервний тоді і тільки тоді, коли він є обмежений ♦

Доведення від супротивного. Нехай оператор $\mathbf{A}$ неперервний, але не обмежений, тобто припускаємо, що є послідовність $\{f_n\} \subset D(\mathbf{A}),\quad f_n \neq 0$, така, що $\dfrac{\|\mathbf{A}f_n\|}{\|f_n\|} \to \infty$. З $\{f_n\}$ виберемо підпослідовність $\{f_n^{'}\}$, таку, що $\dfrac{\|\mathbf{A}f_n^{'}\|}{\|f_n^{'}\|} > n$.

Покладемо $f_n^{''} = \dfrac{f_n^{'}}{n\|f_n^{'}\|} \to \infty$, тоді $\|f_n^{''}\| = \dfrac{1}{n} \to 0$. Але $\dfrac{\|\mathbf{A}f_n^{''}\|}{\|f_n^{''}\|} = \dfrac{\|\mathbf{A}f_n^{'}\|}{\|f_n^{'}\|} > n$, звідки $\|\mathbf{A}f_n^{''}\| > n\|f_n^{''}\| = 1$, що суперечить умові неперервності та доводить твердження теореми.

Обернене твердження, що з обмеженості випливає неперервність, легко отримати з нерівності $\|\mathbf{A}f\| \leq N_0\|f\|$ ♦.

Приклади.

а) Оператор диференціювання не є неперервним чи обмеженим. Наприклад, послідовність $n^{-1}\sin(n^2x)$ збігається до нуля при $n \to \infty$, чого не можна сказати про відповідну послідовність похідних.

б) Розглянемо оператор

$$\mathbf{A}f(x) \equiv \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

з неперервним ядром $K(x,y) \in C\{[a,b]\times[a,b]\}$, $b > a$. Позначимо

$K_0 = \sup\{|K(x,y)|, (x,y) \in [a,b]\times[a,b]\}$.

Маємо оцінку

$$|g(x)| = \left|\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right| \le \int_a^b dy\,|f(y)|\cdot K_0 \le K_0\sqrt{b-a}\,\|f\|.$$

Тому

$$\|g\|^2 = \int_a^b dx\,|g(x)|^2 \le (b-a)\|f\|^2 K_0^2 \int_a^b dx \le (b-a)^2 K_0^2 \|f\|^2,$$

або $\|g\| \le (b-a)K_0\|f\|$, тобто цей оператор є неперервним та обмеженим в $L^2[a,b]$:

Додаткові відомості

Д1. Спектр оператора в банаховому просторі.

Нехай $\mathbf{A}$ — оператор, що діє в комплексному банаховому просторі $\mathbf{B}$. Комплексне число λ має назву *регулярного значення* для оператора $\mathbf{A}$, якщо оператор $R(\lambda) = \left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ визначений на всьому $\mathbf{B}$ і неперервний. Множина регулярних значень оператора $\mathbf{A}$ має назву *резольвентної множини* цього оператора, а доповнення резольвентної множини до комплексної площини - **спектром** цього оператора. Оператор $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ називають *резольвентою оператора* $\mathbf{A}$;

a) *дискретним (або точковим) спектром* називається множина всіх власних значень оператора $\mathbf{A}$;

b) *неперервним спектром* називається множина значень , за яких резольвента $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ визначена на всюди щільній множині в $\mathbf{B}$, але не є неперервною;

c) *остаточним спектром* називається множина точок спектру, що не входять ні до дискретної, ні до неперервної частин: $\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)^{-1}$ існує, не є неперервний, але область визначення не є усюди плотною.

Д2. Метод стискуючих відображень.

Розглянемо обмежений оператор $\mathbf{A}$, визначений у замкненій банаховому просторі $\mathbf{B}$, який не виводить з $\mathbf{B}$, тобто $\mathbf{A}(\mathbf{B}) \subset \mathbf{B}$. Нехай його норма $q = \sup\left\{\frac{\|\mathbf{A}f\|}{\|f\|},\quad f \ne 0,\ f \in D(\mathbf{A})\right\} < 1$. У цьому разі оператор називають стискуючим. Покажемо, що розв'язок рівняння $f = \mathbf{A}f$ існує в $\mathbf{B}$ і цей розв'язок єдиний (Теорема Банаха) і цей розв'язок є границею послідовності ітерацій $\{f_m\}$: $f_m = \mathbf{A}f_{m-1}$, $m = 1, 2, \ldots$; $f_0 \in \mathbf{B}$.

Ми розглянемо це питання у більш широкому контексті, використовуючи міркування, що проходять у більш загальному випадку (наприклад, якщо $\mathbf{A}$ не є лінійним оператором). Уведемо відстань $\rho(f,g) = \|f - g\|$ між елементами $f, g \in \mathbf{B}$. Для цієї відстані, з урахуванням повноти $\mathbf{B}$, виконані усі аксіоми **повного метричного простору (https://uk.wikipedia.org/wiki).** Для стискуючого оператора маємо

$$\rho(\mathbf{A}f, \mathbf{A}g) = \|\mathbf{A}f - \mathbf{A}g\| \le q\|f - g\| = q\rho(f,g).$$

Відображення $\mathbf{A}(\mathbf{H}) \to \mathbf{H}$, що задовольняє умові $\rho(\mathbf{A}f, \mathbf{A}g) \le q\rho(f, g), \quad q < 1$, називають стискуючим. Таким чином оператор $\mathbf{A}$, що реалізує відображення банахового простору $\mathbf{B}$ в себе, підходить під умови наступної теореми.

Теорема Банаха (Стефан Банах, польск. Stefan Banach)**. Стискуюче відображення повного метричного простору в себе має єдину нерухому точку.**
Нехай $\mathbf{M}$ – повний метричний простір з відстанню ρ, а відображення $\mathbf{A}$ переводить $\mathbf{M}$ в себе: $\mathbf{A}(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$, причому воно є стискуючим

$$\rho(\mathbf{A}f, \mathbf{A}g) \le q\rho(f, g), \quad q < 1. \tag{9}$$

Для довільного елементу $f_0 \in \mathbf{M}$ будуємо послідовність

$\{f_m\}: \quad f_1 = \mathbf{A}f_0, \quad f_2 = \mathbf{A}f_1, \quad f_m = \mathbf{A}f_{m-1}, \dots$

У силу (9) за індукцією

$$\rho(f_n, f_{n-1}) \le q\,\rho(f_{n-1}, f_{n-2}) \le \dots \le q^{n-1}a, \quad a = \rho(f_1, f_0).$$

Звідси (за $n \ge m$)

$$\rho(f_n, f_m) \le \rho(f_n, f_{n-1}) + \rho(f_{n-1}, f_{n-2}) + \dots + \rho(f_{m+1}, f_m) \le q^{n-1}a + q^{n-2}a + \dots + q^m a < \frac{q^m a}{1-q}.$$

Вибором m цю величину можна зробити як завгодно малою. Тому послідовність $\{f_m\}$ є фундаментальною в $\mathbf{M}$, а за умови повноти $\mathbf{M}$ вона збігається до деякого $f^* \in \mathbf{M}$.

Маємо $f^* = \lim\limits_{n\to\infty} f_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A}f_{n-1} = \mathbf{A}\lim\limits_{n\to\infty} f_{n-1} = \mathbf{A}f^*$, де використано неперервність $\mathbf{A}$.

Таким чином, розв'язок існує.

Якщо припустити існування ще одного розв'язку: $f_1^* = \mathbf{A}f_1^*$, тоді

$$\rho(f_1^*, f^*) = \rho(\mathbf{A}f_1^*, \mathbf{A}f^*) \le q\,\rho(f_1^*, f^*) < \rho(f_1^*, f^*),$$

що можливо лише коли $f_1^* = f^*$ ♦