Обчислюваність

Андрій Фесенко

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$

- якщо $x \in L_1$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L_1$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

машину Тюрінга M називають **вирішувачем** для мови L_1

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L_1$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L_1$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

машину Тюрінга M називають **вирішувачем** для мови L_1

Означення

машина Тюрінга M **розпізнає** (recognize) мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L_1$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L_1$, то $M(x) = 0$ (q_{rej}) або $M(x) = \perp$

машину Тюрінга M називають **розпізнавачем** для мови L_1

Розпізнавання мов

Означення

машина Тюрінга M **вирішує** (**розв'язує**) (decide) мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L_1$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L_1$, то $M(x) = 0$ (q_{rej})

машину Тюрінга M називають **вирішувачем** для мови L_1

Означення

машина Тюрінга M **розпізнає** (recognize) мову $L_1 \subseteq \{0,1\}^*$

- якщо $x \in L_1$, то $M(x) = 1$ (q_{acc})
- якщо $x \notin L_1$, то $M(x) = 0$ (q_{rej}) або $M(x) = \perp$

машину Тюрінга M називають **розпізнавачем** для мови L_1

Наслідок

Довільний вирішувач для довільної мови L_1 завжди зупиняється.
Довільний вирішувач для довільної мови L_1 є розпізнавачем для мови L_1.

Розпізнавання мов

Означення

Для довільної машини Тюрінга M **мовою машини Тюрінга** M (**мовою, асоційованою з машиною Тюрінга** M) називають множину всіх слів, які вона приймає і позначають як $L(M)$ (або L_M).

Розпізнавання мов

Означення

Для довільної машини Тюрінга M **мовою машини Тюрінга** M (**мовою, асоційованою з машиною Тюрінга** M) називають множину всіх слів, які вона приймає і позначають як $L(M)$ (або L_M).

Наслідок

$L(M) = L_1 \Leftrightarrow M$ є розпізнавачем для мови L_1

$L(M) = L_1$ і M завжди зупиняється $\Leftrightarrow M$ є вирішувачем для мови L_1

Розпізнавання мов

Означення

Для довільної машини Тюрінга M **мовою машини Тюрінга** M (**мовою, асоційованою з машиною Тюрінга** M) називають множину всіх слів, які вона приймає і позначають як $L(M)$ (або L_M).

Наслідок

$L(M) = L_1 \Leftrightarrow M$ є розпізнавачем для мови L_1

$L(M) = L_1$ і M завжди зупиняється $\Leftrightarrow M$ є вирішувачем для мови L_1

Зауваження

Будь-якій мові L_1 відповідає декілька (нескінченна кількість) машин Тюрінга $M_1, M_2, \dots$ таких, що $L_1 = L(M_1) = L(M_2) = \dots$

Властивості машин Тюрінга

Означення

Машини Тюрінга M_1 і M_2 є

- **однаковими**, якщо існує перестановка внутрішніх станів та/або зміна напрямків ‘ліворуч’ та ‘праворуч’, інакше — **принципово різними**
- **еквівалентними**, якщо $M_1 = M_2$ ($M_1 \simeq M_2$)
- **з однією мовою**, якщо $L(M_1) = L(M_2)$

Властивості машин Тюрінга

Означення

Машини Тюрінга M_1 і M_2 є

- **однаковими**, якщо існує перестановка внутрішніх станів та/або зміна напрямків 'ліворуч' та 'праворуч', інакше — **принципово різними**
- **еквівалентними**, якщо $M_1 = M_2$ ($M_1 \simeq M_2$)
- **з однією мовою**, якщо $L(M_1) = L(M_2)$

Наслідок

Для довільних машин Тюрінга M_1 і M_2

- якщо M_1 і M_2 є однаковими, то вони є еквівалентними
- якщо M_1 і M_2 є еквівалентними, то вони є з однією мовою

Властивості машин Тюрінга

Означення

Машини Тюрінга M_1 і M_2 є

- **однаковими**, якщо існує перестановка внутрішніх станів та/або зміна напрямків ‘ліворуч’ та ‘праворуч’, інакше — **принципово різними**
- **еквівалентними**, якщо $M_1 = M_2$ ($M_1 \simeq M_2$)
- **з однією мовою**, якщо $L(M_1) = L(M_2)$

Наслідок

Для довільних машин Тюрінга M_1 і M_2

- якщо M_1 і M_2 є однаковими, то вони є еквівалентними
- якщо M_1 і M_2 є еквівалентними, то вони є з однією мовою

Всі розпізнавачі (вирішувачі) однієї мови є з однією мовою (еквівалентними).

Вирішувані та рекурсивно злічені мови

Означення

Мову (множину) називають **вирішуваною** (за Тюрінгом) (**рекурсивною**, **обчислюваною**), якщо для неї існує вирішувач (інакше — **невирішувана**).
Мову (множину) називають **рекурсивно зліченою** (за Тюрінгом) (**зліченою**, **напіввирішуваною**), якщо для неї існує розпізнавач.
Мову (множину) називають **корекурсивно зліченою** (за Тюрінгом), якщо її доповнення є зліченою мовою (множиною).

Вирішувані та рекурсивно злічені мови

Означення

Мову (множину) називають **вирішуваною** (за Тюрінгом) (**рекурсивною**, **обчислюваною**), якщо для неї існує вирішувач (інакше — **невирішувана**).
Мову (множину) називають **рекурсивно зліченою** (за Тюрінгом) (**зліченою**, **напіввирішуваною**), якщо для неї існує розпізнавач.
Мову (множину) називають **корекурсивно зліченою** (за Тюрінгом), якщо її доповнення є зліченою мовою (множиною).

Мова є вирішуваною $\Leftrightarrow$ її характеристична функція є обчислюваною.
Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ її напівхарактеристична функція є обчислюваною $\mathbb{I}_{L_1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in L_1 \\ \perp, & x \notin L_1 \end{cases}$.

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Доведення.

- нехай для мови L_1 є розпізнавач M_R

$\square$

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Доведення.

- нехай для мови L_1 є розпізнавач M_R
- множина всіх слів над алфавітом є зліченою — $w_1, w_2, \ldots$

$\square$

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Доведення.

- нехай для мови L_1 є розпізнавач M_R
- множина всіх слів над алфавітом є зліченою — $w_1, w_2, \ldots$
- переписувач — для $i = 1, 2, 3, \ldots$ змоделювати роботу M_R з вхідними словами $w_1, w_2, \ldots, w_i$ впродовж i тактів, записати всі слова, які M_R прийме

$\square$

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Доведення.

- нехай для мови L_1 є розпізнавач M_R
- множина всіх слів над алфавітом є зліченою — $w_1, w_2, \ldots$
- переписувач — для $i = 1, 2, 3, \ldots$ змоделювати роботу M_R з вхідними словами $w_1, w_2, \ldots, w_i$ впродовж i тактів, записати всі слова, які M_R прийме
- нехай для мови L_1 є переписувач M_E

$\square$

Машина Тюрінга як переписувач

Переписувач — машина Тюрінга, яка виписує по черзі всі слова з мови, можливо, з повторенням.

Мова є рекурсивно зліченою $\Leftrightarrow$ існує переписувач для цієї мови.

Доведення.

- нехай для мови L_1 є розпізнавач M_R
- множина всіх слів над алфавітом є зліченою — $w_1, w_2, \ldots$
- переписувач — для $i = 1, 2, 3, \ldots$ змоделювати роботу M_R з вхідними словами $w_1, w_2, \ldots, w_i$ впродовж i тактів, записати всі слова, які M_R прийме
- нехай для мови L_1 є переписувач M_E
- розпізнавач — змоделювати роботу переписувача M_E і порівнювати його слова з вхідним словом

$\square$

Властивості вирішуваних та рекурсивно злічених мов

Твердження

- порожня мова є вирішуваною мовою
- будь-яка скінченна мова та її доповнення є вирішуваними мовами
- існують нескінченні вирішувані мови з нескінченним доповненням (слова парної довжини)
- доповнення вирішуваної мови є вирішуваною мовою
- об’єднання та перетин скінченної кількості вирішуваних мов є вирішуваною мовою
- будь-яка вирішувана мова є рекурсивно зліченою
- об’єднання та перетин скінченної кількості рекурсивно злічених мов є рекурсивно зліченою мовою

Теорема Поста

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Доведення.

- існують розпізнавачі M_1 і M_2 для мови L_1 та її доповнення

$\square$

Теорема Поста

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Доведення.

- існують розпізнавачі M_1 і M_2 для мови L_1 та її доповнення
- вирішувач $\tilde{M}_1$ для мови L_1 — моделюємо роботу M_1 і M_2 з одним вхідним словом паралельно

$\square$

L_1 є вирішуваною $\Leftrightarrow$ L_1 і $\overline{L_1}$ є рекурсивно зліченими

Теорема Поста

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Доведення.

- існують розпізнавачі M_1 і M_2 для мови L_1 та її доповнення
- вирішувач $\tilde{M}_1$ для мови L_1 — моделюємо роботу M_1 і M_2 з одним вхідним словом паралельно
- якщо $M_1(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 1$; якщо $M_2(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 0$

$\square$

L_1 є вирішуваною $\Leftrightarrow$ L_1 і $\overline{L_1}$ є рекурсивно зліченими

Теорема Поста

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Доведення.

- існують розпізнавачі M_1 і M_2 для мови L_1 та її доповнення
- вирішувач $\tilde{M}_1$ для мови L_1 — моделюємо роботу M_1 і M_2 з одним вхідним словом паралельно
- якщо $M_1(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 1$; якщо $M_2(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 0$
- за скінченну кількість тактів $M_1(x) = 1$ або $M_2(x) = 1$ ($x \in L_1$ або $x \in \overline{L_1}$)

□

L_1 є вирішуваною $\Leftrightarrow$ L_1 і $\overline{L_1}$ є рекурсивно зліченими

Теорема Поста

Теорема Поста

Якщо мова L_1 та її доповнення є рекурсивно зліченими, то мова L_1 та її доповнення є вирішуваними.

Доведення.

- існують розпізнавачі M_1 і M_2 для мови L_1 та її доповнення
- вирішувач $\tilde{M}_1$ для мови L_1 — моделюємо роботу M_1 і M_2 з одним вхідним словом паралельно
- якщо $M_1(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 1$; якщо $M_2(x) = 1$, $\tilde{M}_1(x) = 0$
- за скінченну кількість тактів $M_1(x) = 1$ або $M_2(x) = 1$ ($x \in L_1$ або $x \in \overline{L_1}$)
- вирішувач $\tilde{M}_2$ для мови $\overline{L_1}$ — якщо $M_1(x) = 1$, $\tilde{M}_2(x) = 0$; якщо $M_2(x) = 1$, $\tilde{M}_2(x) = 1$

$\square$

L_1 є вирішуваною $\Leftrightarrow$ L_1 і $\overline{L_1}$ є рекурсивно зліченими

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{\, \langle M, x \rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x \,\}$
$\langle M, x \rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{\, \langle M, x \rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x \,\}$
$\langle M, x \rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x \}$
$\langle M, x \rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Доведення.

- змоделювати на 'універсальній' машині Тюрінга U машину Тюрінга M з вхідним словом x

$\square$

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{ \langle M, x\rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x \}$
$\langle M, x\rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Доведення.

- змоделювати на 'універсальній' машині Тюрінга U машину Тюрінга M з вхідним словом x
- якщо M приймає слово x, то U приймає слово $\langle M, x\rangle$

$\square$

Мова $A_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x \}$
$\langle M, x \rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Доведення.

- змоделювати на 'універсальній' машині Тюрінга U машину Тюрінга M з вхідним словом x
- якщо M приймає слово x, то U приймає слово $\langle M, x \rangle$
- якщо M відхиляє слово x, то U відхиляє слово $\langle M, x \rangle$

□

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{\, \langle M, x\rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x\,\}$
$\langle M, x\rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Доведення.

- змоделювати на 'універсальній' машині Тюрінга U машину Тюрінга M з вхідним словом x
- якщо M приймає слово x, то U приймає слово $\langle M, x\rangle$
- якщо M відхиляє слово x, то U відхиляє слово $\langle M, x\rangle$
- $\Rightarrow$ розпізнаємо мову A_{TM}

$\square$

Мова A_{TM}

Мова $A_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid$ машина Тюрінга M приймає вхідне слово $x\}$
$\langle M, x \rangle \equiv \lfloor (M, x) \rfloor$

Теорема

Мова A_{TM} є невирішуваною, але є рекурсивно зліченою.

Доведення.

- змоделювати на 'універсальній' машині Тюрінга U машину Тюрінга M з вхідним словом x
- якщо M приймає слово x, то U приймає слово $\langle M, x \rangle$
- якщо M відхиляє слово x, то U відхиляє слово $\langle M, x \rangle$
- $\Rightarrow$ розпізнаємо мову A_{TM}
- якщо M зациклюється на слові x, то U зациклюється на слові $\langle M, x \rangle$

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x \rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$

□

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється
- побудуємо МТ M_D, яка на вхідному слові $\langle M\rangle$:

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється
- побудуємо МТ M_D, яка на вхідному слові $\langle M\rangle$:
  1. моделює $\tilde{M}_A$ на слові $\langle M, \langle M\rangle\rangle$

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x \rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється
- побудуємо МТ M_D, яка на вхідному слові $\langle M \rangle$:
  1. моделює $\tilde{M}_A$ на слові $\langle M, \langle M \rangle \rangle$
  2. повертає інше значення ніж $\tilde{M}_A$ ($1 - \tilde{M}_A(\langle M, \langle M \rangle \rangle)$)

□

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється
- побудуємо МТ M_D, яка на вхідному слові $\langle M\rangle$:
  1. моделює $\tilde{M}_A$ на слові $\langle M, \langle M\rangle\rangle$
  2. повертає інше значення ніж $\tilde{M}_A$ ($1 - \tilde{M}_A(\langle M, \langle M\rangle\rangle)$)
- $M_D(\langle M\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ не приймає слово } \langle M\rangle \\ 0, & M \text{ приймає слово } \langle M\rangle \end{cases}$

$\square$

Мова A_{TM}

Доведення.

- метод від супротивного
- нехай $\tilde{M}_A$ є вирішувачем для мови A_{TM}
- $\tilde{M}_A(\langle M, x\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ приймає слово } x \\ 0, & M \text{ не приймає слово } x \end{cases}$
- $\tilde{M}_A$ завжди зупиняється
- побудуємо МТ M_D, яка на вхідному слові $\langle M\rangle$:
  1. моделює $\tilde{M}_A$ на слові $\langle M, \langle M\rangle\rangle$
  2. повертає інше значення ніж $\tilde{M}_A$ ($1 - \tilde{M}_A(\langle M, \langle M\rangle\rangle)$)
- $M_D(\langle M\rangle) = \begin{cases} 1, & M \text{ не приймає слово } \langle M\rangle \\ 0, & M \text{ приймає слово } \langle M\rangle \end{cases}$
- $M_D(\langle M_D\rangle) = \begin{cases} 1, & M_D \text{ не приймає слово } \langle M_D\rangle \\ 0, & M_D \text{ приймає слово } \langle M_D\rangle \end{cases}$

□

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}

$\square$

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_E$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_A$ для мови A_{TM}, який на вхідному слові $\langle M, x \rangle$:

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_E$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_A$ для мови A_{TM}, який на вхідному слові $\langle M, x \rangle$:
  1. будує нову машину Тюрінга M_w, яка для довільного вхідного слова w — $M_w(x) = \begin{cases} 0, & x \neq w \\ M(x), & x = w \end{cases}$

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_E$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_A$ для мови A_{TM}, який на вхідному слові $\langle M, x \rangle$:
  1. будує нову машину Тюрінга M_w, яка для довільного вхідного слова w — $M_w(x) = \begin{cases} 0, & x \neq w \\ M(x), & x = w \end{cases}$
  2. моделює роботу вирішувача $\tilde{M}_E$ з $\langle M_w \rangle$

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_E$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_A$ для мови A_{TM}, який на вхідному слові $\langle M, x \rangle$:
  1. будує нову машину Тюрінга M_w, яка для довільного вхідного слова w — $M_w(x) = \begin{cases} 0, & x \neq w \\ M(x), & x = w \end{cases}$
  2. моделює роботу вирішувача $\tilde{M}_E$ з $\langle M_w \rangle$
  3. $\tilde{M}_A(\langle M, x \rangle) = 1 - \tilde{M}_E(\langle M_w \rangle)$

Мова E_{TM}

Мова $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема

Мова E_{TM} є невирішуваною, але є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_E$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_A$ для мови A_{TM}, який на вхідному слові $\langle M, x \rangle$:
  1. будує нову машину Тюрінга M_w, яка для довільного вхідного слова w — $M_w(x) = \begin{cases} 0, & x \neq w \\ M(x), & x = w \end{cases}$
  2. моделює роботу вирішувача $\tilde{M}_E$ з $\langle M_w \rangle$
  3. $\tilde{M}_A(\langle M, x \rangle) = 1 - \tilde{M}_E(\langle M_w \rangle)$
- суперечність

Мова EQ_{TM}

Мова
$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ — машини Тюрінга і $L(M_1) = L(M_2) \}$

Мова EQ_{TM}

Мова
$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ — машини Тюрінга і $L(M_1) = L(M_2) \}$

Теорема

Мова EQ_{TM} є невирішуваною і є корекурсивно зліченою.

Мова EQ_{TM}

Мова
$EQ_{TM} = \{ \langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2$ — машини Тюрінга і $L(M_1) = L(M_2) \}$

Теорема

Мова EQ_{TM} є невирішуваною і є корекурсивно зліченою.

Доведення.

- нехай існує вирішувач $\tilde{M}_{EQ}$ для мови EQ_{TM}
- використовуючи $\tilde{M}_{EQ}$, побудуємо вирішувач $\tilde{M}_E$ для мови E_{TM}, який на вхідному слові $\langle M_1 \rangle$:
  1. будує нову машину Тюрінга M_2, яка для довільного вхідного слова w — $M_2(x) = 0$
  2. моделює роботу вирішувача $\tilde{M}_{EQ}$ з $\langle M_1, M_2 \rangle$
  3. $\tilde{M}_E(\langle M_1 \rangle) = \tilde{M}_{EQ}(\langle M_1, M_2 \rangle)$
- суперечність

□

Задача $HALT$

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x.

Мова $HALT_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(x) \neq \perp \}$

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0, 1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x.

Мова $HALT_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(x) \neq \perp \}$

Теорема

Задача $HALT$ (мова $HALT_{TM}$) є невирішуваною.

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x.

Мова $HALT_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(x) \neq \perp \}$

Теорема

Задача *HALT* (мова $HALT_{TM}$) є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує вирішувач M_{HALT}, $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x, x)$

$\square$

Задача $HALT$

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x.

Мова $HALT_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(x) \neq \perp \}$

Теорема

Задача $HALT$ (мова $HALT_{TM}$) є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує вирішувач M_{HALT}, $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x, x)$
- $M_{co}(x) = \begin{cases} \perp, M_{diag}(x) = 1 \\ 1, M_{diag}(x) = 0 \end{cases}$,

□

Задача *HALT*

Задача HALT

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M та вхідним словом $x \in \{0,1\}^*$, чи зупиниться машина Тюрінга M на вхідному слові x.

Мова $HALT_{TM} = \{ \langle M, x \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(x) \neq \perp \}$

Теорема

Задача $HALT$ (мова $HALT_{TM}$) є невирішуваною.

Доведення.

- нехай існує вирішувач M_{HALT}, $M_{diag}(x) = M_{HALT}(x,x)$
- $M_{co}(x) = \begin{cases} \perp, M_{diag}(x) = 1 \\ 1, M_{diag}(x) = 0 \end{cases}$,
- $M_{co}(\langle M \rangle) = \begin{cases} \perp, & M(\langle M \rangle) \neq \perp \\ 1, & M(\langle M \rangle) = \perp \end{cases}$

□

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. Мова $HALT_\varepsilon = \{\, \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(\varepsilon) \neq \perp \,\}$

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. Мова $HALT_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(\varepsilon) \neq \bot \}$

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. Мова $HALT_\varepsilon = \{\, \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(\varepsilon) \neq \perp \,\}$

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$: $\tilde{M}_x(\varepsilon) = \tilde{M}(x)$

$\square$

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. Мова $HALT_\varepsilon = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(\varepsilon) \neq \perp \}$

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$: $\tilde{M}_x(\varepsilon) = \tilde{M}(x)$
- якщо існує машина Тюрінга, яка розв'язує задачу $HALT_\varepsilon$, то вона розв'язує задачу $HALT$

$\square$

Задача $HALT_\varepsilon$

Задача $HALT_\varepsilon$

Визначити за двійковим представленням машини Тюрінга M, чи зупиниться машина Тюрінга M на порожньому вхідному слові. Мова $HALT_\varepsilon = \{\, \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $M(\varepsilon) \neq \perp \,\}$

Теорема

Задача $HALT_\varepsilon$ є невирішуваною.

Доведення.

- для довільної пари МТ $\tilde{M}$ та вхідного слова x існує МТ $\tilde{M}_x$: $\tilde{M}_x(\varepsilon) = \tilde{M}(x)$
- якщо існує машина Тюрінга, яка розв'язує задачу $HALT_\varepsilon$, то вона розв'язує задачу $HALT$
- суперечність

$\square$

Мова INF_{TM}

Мова $INF_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $|L(M)| = \infty \}$

Мова INF_{TM}

Мова $INF_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $|L(M)| = \infty \}$

Теорема

Мова INF_{TM} не є вирішуваною, не є рекурсивно зліченою і не є корекурсивно зліченою.

Невирішуваність

Довести невирішуваність мови —

- пряме доведення (метод діагоналізації)

Невирішуваність

Довести невирішуваність мови —

- пряме доведення (метод діагоналізації)
- використання іншої невирішуваної мови

Невирішуваність

Довести невирішуваність мови —

- пряме доведення (метод діагоналізації)
- використання іншої невирішуваної мови
- теорема Райса(-Успенського)

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ визначається множиною мов над алфавітом Σ. Мова $L_1 \in \Sigma^*$ **має властивість** $\mathbb{P}$, якщо $L_1 \in \mathbb{P}$. Для довільної властивості $\mathbb{P}$ **мовою розпізнавання властивості** $\mathbb{P}$ називають мову, яка складається з представлень машин Тюрінга, мови яких належать властивості $\mathbb{P}$, і позначають її як $L_{\mathbb{P}}$, $L_{\mathbb{P}} = \{\langle M\rangle | L(M) \in \mathbb{P}\}$.

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ визначається множиною мов над алфавітом Σ. Мова $L_1 \in \Sigma^*$ **має властивість** $\mathbb{P}$, якщо $L_1 \in \mathbb{P}$. Для довільної властивості $\mathbb{P}$ **мовою розпізнавання властивості** $\mathbb{P}$ називають мову, яка складається з представлень машин Тюрінга, мови яких належать властивості $\mathbb{P}$, і позначають її як $L_{\mathbb{P}}$, $L_{\mathbb{P}} = \{\langle M\rangle | L(M) \in \mathbb{P}\}$.

Приклади

- ✓ $E_{TM} = \{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ визначається множиною мов над алфавітом Σ. Мова $L_1 \in \Sigma^*$ **має властивість** $\mathbb{P}$, якщо $L_1 \in \mathbb{P}$. Для довільної властивості $\mathbb{P}$ **мовою розпізнавання властивості** $\mathbb{P}$ називають мову, яка складається з представлень машин Тюрінга, мови яких належать властивості $\mathbb{P}$, і позначають її як $L_{\mathbb{P}}$, $L_{\mathbb{P}} = \{\langle M\rangle | L(M) \in \mathbb{P}\}$.

Приклади

- ✓ $E_{TM} = \{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$
- ✓ $INF_{TM} = \{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $|L(M)| = \infty \}$

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ визначається множиною мов над алфавітом Σ. Мова $L_1 \in \Sigma^*$ **має властивість** $\mathbb{P}$, якщо $L_1 \in \mathbb{P}$. Для довільної властивості $\mathbb{P}$ **мовою розпізнавання властивості** $\mathbb{P}$ називають мову, яка складається з представлень машин Тюрінга, мови яких належать властивості $\mathbb{P}$, і позначають її як $L_\mathbb{P}$, $L_\mathbb{P} = \{\langle M\rangle | L(M) \in \mathbb{P}\}$.

Приклади

✓ $E_{TM} = \{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $L(M) = \varnothing \}$

✓ $INF_{TM} = \{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і $|L(M)| = \infty \}$

— $\{ \langle M\rangle \mid M$ — машина Тюрінга і вона має 10 внутрішніх станів $\}$

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **тривіальною**, якщо всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ належать цій властивості, або одночасно всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ не належать цій властивості. Інакше, властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **нетривіальною**.

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **тривіальною**, якщо всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ належать цій властивості, або одночасно всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ не належать цій властивості. Інакше, властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **нетривіальною**.

Для довільної тривіальної властивості формальних мов над алфавітом Σ її мова розпізнавання властивості є вирішуваною.

Теорема Райса

Означення

Властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **тривіальною**, якщо всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ належать цій властивості, або одночасно всі рекурсивно злічені мови над алфавітом Σ не належать цій властивості. Інакше, властивість формальних мов над алфавітом Σ називають **нетривіальною**.

Для довільної тривіальної властивості формальних мов над алфавітом Σ її мова розпізнавання властивості є вирішуваною.

Теорема Райса (Райса-Успенського)

Якщо властивість мов $\mathbb{P}$ є нетривіальною, то мова розпізнавання цієї властивості є невирішуваною.
$L_{\mathbb{P}} = \{\langle M\rangle | L(M) \in \mathbb{P}\}$

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

✓ властивість мови, а не окремої машини Тюрінга

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

✓ властивість мови, а не окремої машини Тюрінга

- нехай M_3 приймає всі слова, а M_4 відхиляє всі слова $\Rightarrow$ $M_3 \notin FIVE_{TM}$ і $M_4 \in FIVE_{TM}$

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{\, \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \,\}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

✓ властивість мови, а не окремої машини Тюрінга

- нехай M_3 приймає всі слова, а M_4 відхиляє всі слова $\Rightarrow$ $M_3 \notin FIVE_{TM}$ і $M_4 \in FIVE_{TM}$

✓ властивість є нетривіальною

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

✓ властивість мови, а не окремої машини Тюрінга

- нехай M_3 приймає всі слова, а M_4 відхиляє всі слова $\Rightarrow$ $M_3 \notin FIVE_{TM}$ і $M_4 \in FIVE_{TM}$

✓ властивість є нетривіальною

$\Rightarrow$ теорема Райса є застосовною і мова $FIVE_{TM}$ є невирішуваною

Теорема Райса

Зауваження

- Теорема Райса говорить про властивості мов, а не машин Тюрінга
- властивість має бути обов'язково нетривіальною

Приклад

$FIVE_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M$ — машини Тюрінга і $|L(M)| \leq 5 \}$

- нехай $L(M_1) = L(M_2) \Rightarrow M_1, M_2 \in FIVE_{TM}$ або $M_1, M_2 \notin FIVE_{TM}$

✓ властивість мови, а не окремої машини Тюрінга

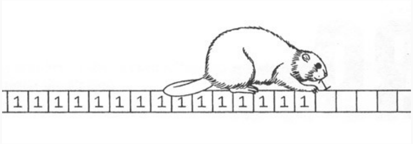
- нехай M_3 приймає всі слова, а M_4 відхиляє всі слова $\Rightarrow$ $M_3 \notin FIVE_{TM}$ і $M_4 \in FIVE_{TM}$

✓ властивість є нетривіальною

$\Rightarrow$ теорема Райса є застосовною і мова $FIVE_{TM}$ є невирішуваною

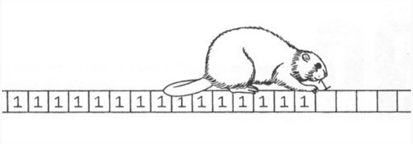
$\Rightarrow$ за теоремою Райса мова E_{TM} є невирішуваною

"Працьовиті бобри"



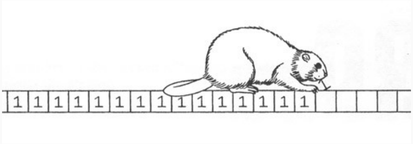
- Тібор Радо, 1962р.

“Працьовиті бобри”



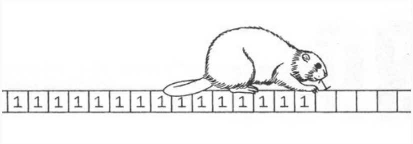
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$

“Працьовиті бобри”



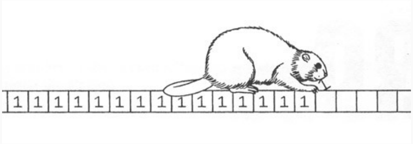
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)

"Працьовиті бобри"



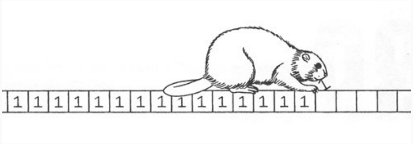
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів

“Працьовиті бобри”



- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів
- $s(M)$ — кількість тактів, яку зробить машина Тюрінга M з порожнім вхідним словом до своєї зупинки

“Працьовиті бобри”



- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів
- $s(M)$ — кількість тактів, яку зробить машина Тюрінга M з порожнім вхідним словом до своєї зупинки
- $\sigma(M)$ — кількість непорожніх комірок, які залишаться на стрічці після зупинки машини Тюрінга M з порожнім вхідним словом

“Працьовиті бобри”

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Наслідок

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\Sigma(n) \leq S(n)$.

“Працьовиті бобри”

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Наслідок

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\Sigma(n) \leq S(n)$.

Твердження

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ потужність класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$ машин Тюрінга обмежена зверху значенням $(4(n+1))^{2n}$.

“Працьовиті бобри”

Теорема

Для довільної обчислювальної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що $\Sigma(n) > f(n)$ для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$.

“Працьовиті бобри”

Теорема

Для довільної обчислювальної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що $\Sigma(n) > f(n)$ для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$.

Наслідок

Σ функція Радо є необчислювальною.
S функція Радо є необчислювальною.

"Працьовиті бобри"

Values of S(n, m)						
m \ n	2-state	3-state	4-state	5-state	6-state	7-state
2-symbol	6	21	107	47 176 870 ?	$> 7.4 \times 10^{36\,534}$	$> 10^{10^{10^{10^{18\,705\,353}}}}$
3-symbol	38	≥ 119 112 334 170 342 540	$> 1.0 \times 10^{14\,072}$	?	?	?
4-symbol	≥ 3 932 964	$> 5.2 \times 10^{13\,036}$	?	?	?	?
5-symbol	$> 1.9 \times 10^{704}$	?	?	?	?	?
6-symbol	$> 2.4 \times 10^{9866}$	?	?	?	?	?

Values of Σ(n, m)						
m \ n	2-state	3-state	4-state	5-state	6-state	7-state
2-symbol	4	6	13	4098 ?	$> 3.5 \times 10^{18\,267}$	$> 10^{10^{10^{10^{18\,705\,353}}}}$
3-symbol	9	≥ 374 676 383	$> 1.3 \times 10^{7036}$	?	?	?
4-symbol	≥ 2050	$> 3.7 \times 10^{6518}$	?	?	?	?
5-symbol	$> 1.7 \times 10^{352}$	?	?	?	?	?
6-symbol	$> 1.9 \times 10^{4933}$	?	?	?	?	?

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії

"Працьовиті бобри"

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(1919)$, яка зупиняється, коли теорія множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору є суперечною

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(1919)$, яка зупиняється, коли теорія множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору є суперечною
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(744)$, яка зупиняється, якщо гіпотеза Рімана є хибною

“Працьовиті бобри”

- Поточні рекорди та історія машин Тюрінга класу Радо
  http://www.logique.jussieu.fr/ michel/bbc.html
  http://turbotm.de/ heiner/BB/
- Computerphile “Busy Beaver” відео (англ. мова), prof. Brailsford
  `https://www.youtube.com/watch?v=CE8UhcyJS0I`
- Фізична реалізація $(3, 2)$ Busy Beaver
  `https://www.youtube.com/watch?v=28pnk2JIBSE`
- Фізична реалізація $(4, 2)$ Busy Beaver
  `https://www.youtube.com/watch?v=2PjU6DJyBpw`
- Реалізація $(4, 2)$ Busy Beaver в Minecraft
  `https://www.youtube.com/watch?v=IefoYnf6xKI`