

Операції над машинами Тюрінга

Андрій Фесенко

- **композиція машин Тюрінга**

$$M_3(x) = (M_2 \cdot M_1)(x) = (M_2 \circ M_1)(x) = M_2(M_1(x))$$

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2), \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \cup Q_2, Q_{2,F}, q_{1,0}, \delta_3)$$

$$\delta_3 = \tilde{\delta}_1 \cup \tilde{\delta}_2 \cup \{(q, *, q_{2,0}, *, (S, \dots, S)), (q, \#, q_{2,0}, \#, (S, \dots, S))\},$$

$$\forall q \in Q_{1,F}$$

- **композиція машин Тюрінга**

$$M_3(x) = (M_2 \cdot M_1)(x) = (M_2 \circ M_1)(x) = M_2(M_1(x))$$

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2), \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \cup Q_2, Q_{2,F}, q_{1,0}, \delta_3)$$

$$\delta_3 = \tilde{\delta}_1 \cup \tilde{\delta}_2 \cup \{(q, *, q_{2,0}, *, (S, \dots, S)), (q, \#, q_{2,0}, \#, (S, \dots, S))\},$$

$$\forall q \in Q_{1,F}$$

- **піднесення до степеню машини Тюрінга**

- розгалуження машини Тюрінга

$$M_4 = M_3 \cdot \begin{cases} M_1, \dots \\ M_2, \dots \end{cases} = \begin{cases} M_3 \cdot M_1, \dots \\ M_3 \cdot M_2, \dots \end{cases}$$

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2)$$

$$M_3 = (k_3, \Gamma_3, \Sigma, \#, Q_3, Q_{3,F}, q_{3,0}, \delta_3), \quad Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$$

$$M_4 = (k_1 + k_2 + k_3, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Sigma, \#, Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3, Q_{1,F} \cup Q_{2,F}, q_{3,0}, \delta_4)$$

$$\delta_4 = \tilde{\delta}_1 \cup \tilde{\delta}_2 \cup \tilde{\delta}_3 \cup \tilde{\delta}, \quad \tilde{\delta} : q_1 \mapsto q_{1,0}, \quad q_2 \mapsto q_{2,0}, \quad q_1, q_2 \in Q_{3,F}$$

Операції над машинами Тюрінга

- розгалуження машини Тюрінга

$$M_4 = M_3 \cdot \begin{cases} M_1, \dots \\ M_2, \dots \end{cases} = \begin{cases} M_3 \cdot M_1, \dots \\ M_3 \cdot M_2, \dots \end{cases}$$

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2)$$

$$M_3 = (k_3, \Gamma_3, \Sigma, \#, Q_3, Q_{3,F}, q_{3,0}, \delta_3), \quad Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$$

$$M_4 = (k_1 + k_2 + k_3, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3, \Sigma, \#, Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3, Q_{1,F} \cup Q_{2,F}, q_{3,0}, \delta_4)$$

$$\delta_4 = \tilde{\delta}_1 \cup \tilde{\delta}_2 \cup \tilde{\delta}_3 \cup \tilde{\delta}, \quad \tilde{\delta} : q_1 \mapsto q_{1,0}, \quad q_2 \mapsto q_{2,0}, \quad q_1, q_2 \in Q_{3,F}$$

- контрольований виклик машини Тюрінга

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2), \quad Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \cup Q_2, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_3)$$

$$\delta_3 = \tilde{\delta}_1 \cup \tilde{\delta}_2 \cup \tilde{\delta}$$

$$\tilde{\delta} : q_{1,1} \mapsto q_{2,0}, \quad q_2 \mapsto q_{1,2}, \quad \forall q_2 \in Q_{2,F}, \quad q_{1,1}, q_{1,2} \in Q_1$$

- **ітерація машини Тюрінга** (M за парою внутрішніх станів (q_F, q))

$$M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$$

$$\tilde{\delta} : q_F \mapsto q, q_F \in Q_F, q \in Q$$

Операції над машинами Тюрінга

- ітерація машини Тюрінга (M за парою внутрішніх станів (q_F, q))

$$M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$$

$$\tilde{\delta} : q_F \mapsto q, q_F \in Q_F, q \in Q$$

- паралельне виконання машин Тюрінга

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2)$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \times Q_2, (Q_{1,F} \times Q_2) \cup (Q_2 \times Q_{2,F}), (q_{1,0}, q_{2,0}), \delta_3)$$

Операції над машинами Тюрінга

- ітерація машини Тюрінга (M за парою внутрішніх станів (q_F, q))

$$M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$$

$$\tilde{\delta} : q_F \mapsto q, q_F \in Q_F, q \in Q$$

- паралельне виконання машин Тюрінга

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2)$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \times Q_2, (Q_{1,F} \times Q_2) \cup (Q_2 \times Q_{2,F}), (q_{1,0}, q_{2,0}), \delta_3)$$

- узагальнення операцій на довільну скінченну кількість операндів

Операції над машинами Тюрінга

- ітерація машини Тюрінга (M за парою внутрішніх станів (q_F, q))

$$M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$$

$$\tilde{\delta} : q_F \mapsto q, q_F \in Q_F, q \in Q$$

- паралельне виконання машин Тюрінга

$$M_1 = (k_1, \Gamma_1, \Sigma, \#, Q_1, Q_{1,F}, q_{1,0}, \delta_1)$$

$$M_2 = (k_2, \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_2, Q_{2,F}, q_{2,0}, \delta_2)$$

$$M_3 = (k_1 + k_2 - 1, \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Sigma, \#, Q_1 \times Q_2, (Q_{1,F} \times Q_2) \cup (Q_2 \times Q_{2,F}), (q_{1,0}, q_{2,0}), \delta_3)$$

- узагальнення операцій на довільну скінченну кількість операндів
- узагальнення операцій на довільну скінченну комбінацію операцій

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X :

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X : $\underbrace{11\dots 1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1$

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X :
$$\underbrace{11\dots1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{1-ий ел.}}{000\dots00}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}}$$

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X :
$$\underbrace{11 \dots 1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overbrace{000 \dots 00}^{\text{1-ий ел.}}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \underbrace{\overbrace{000 \dots 01}^{\text{2-ий ел.}}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{|X| \text{ разів}}$$

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X :
$$\underbrace{11 \dots 1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{1-ий ел.}}{000 \dots 00}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \underbrace{\overset{\text{2-ий ел.}}{000 \dots 01}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \dots$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{|X| \text{ разів}}$
- відображення $f : X \rightarrow Y$:

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- скінченна множина X :
$$\underbrace{11 \dots 1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{1-ий ел.}}{000 \dots 00}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \underbrace{\overset{\text{2-ий ел.}}{000 \dots 01}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{|X| \text{ разів}}$$

- відображення $f : X \rightarrow Y$:

$$\underbrace{11 \dots 1}_{|X| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{11 \dots 1}_{|Y| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{елемент } X}{u_1 u_2 u_3 \dots}}_{\lceil \log |X| \rceil \text{ разів}} \underbrace{\overset{\text{елемент } Y}{v_1 v_2 v_3 \dots}}_{\lceil \log |Y| \rceil \text{ разів}}$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{|Dom f| \text{ разів}}$$

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$:

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

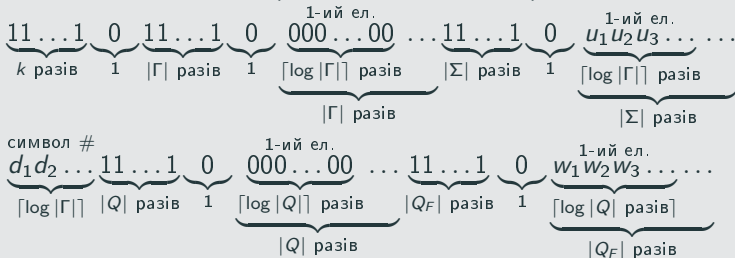
- машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$:

$\underbrace{11 \dots 1}_k \text{ разів} \underbrace{0}_1 \underbrace{11 \dots 1}_{|\Gamma| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{1-ий ел.}}{000 \dots 00}}_{\substack{\lceil \log |\Gamma| \rceil \text{ разів} \\ |\Gamma| \text{ разів}}} \dots \underbrace{11 \dots 1}_{|\Sigma| \text{ разів}} \underbrace{0}_1 \underbrace{\overset{\text{1-ий ел.}}{u_1 u_2 u_3 \dots}}_{\substack{\lceil \log |\Gamma| \rceil \text{ разів} \\ |\Sigma| \text{ разів}}}$

Представлення машин Тюрінга

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

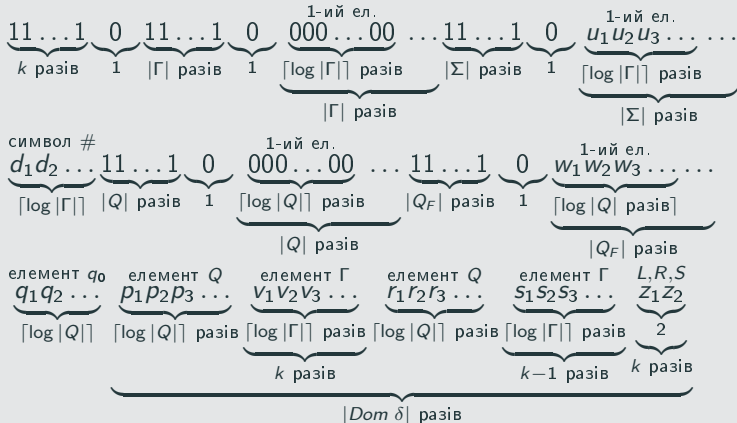
- машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$:



Представлення машин Тюрінга

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

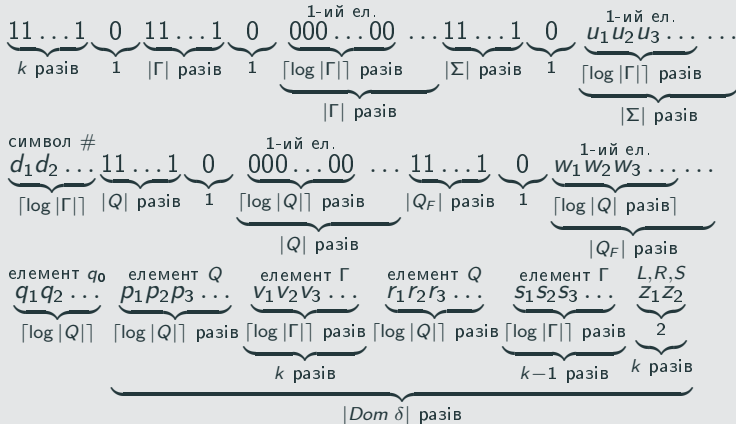
- машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$:



Представлення машин Тюрінга

Кодування над алфавітом $\{0, 1\}$

- машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$:



$$\leq k + 3 + (|\Gamma| + |\Sigma| + 1)(\lceil \log |\Gamma| \rceil + 1) + (|Q| + |Q_F|)(\lceil \log |Q| \rceil + 1) + 2^k |Q| |\Gamma|^k \lceil \log |Q| \rceil^2 \lceil \log |\Gamma| \rceil^{2k-1}$$

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0,1\}^*$

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0, 1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0, 1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)
- кожне слово $x \in \{0, 1\}^*$ кодує машину Тюрінга M_x
(1, {1, #}, { q_0 }, \emptyset)

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0, 1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)
- кожне слово $x \in \{0, 1\}^*$ кодує машину Тюрінга M_x
($1, \{1, \#\}, \{q_0\}, \emptyset$)
- нумерація всіх машин Тюрінга

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0, 1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)
- кожне слово $x \in \{0, 1\}^*$ кодує машину Тюрінга M_x
($1, \{1, \#\}, \{q_0\}, \emptyset$)
- нумерація всіх машин Тюрінга
- взаємно однозначна відповідність між машинами Тюрінга та словами з $\{0, 1\}^*$ (злічена кількість машин Тюрінга)

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0, 1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)
- кожне слово $x \in \{0, 1\}^*$ кодує машину Тюрінга M_x $(1, \{1, \#\}, \{q_0\}, \emptyset)$
- нумерація всіх машин Тюрінга
- взаємно однозначна відповідність між машинами Тюрінга та словами з $\{0, 1\}^*$ (злічена кількість машин Тюрінга)
- подати на вхід машини Тюрінга двійкове представлення іншої машини Тюрінга? (Тюрінг, 1936р.)

Представлення машин Тюрінга

- кожна машина Тюрінга M має двійкове представлення $[M] \in \{0,1\}^*$
- кожна машина Тюрінга M має безліч двійкових представлень (зайві 0 на початку представлення)
- кожне слово $x \in \{0,1\}^*$ кодує машину Тюрінга M_x
($1, \{1, \#\}, \{q_0\}, \emptyset$)
- нумерація всіх машин Тюрінга
- взаємно однозначна відповідність між машинами Тюрінга та словами з $\{0,1\}^*$ (злічена кількість машин Тюрінга)
- подати на вхід машини Тюрінга двійкове представлення іншої машини Тюрінга? (Тюрінг, 1936р.)
- існування однієї машини Тюрінга, яка моделює всі інші

Універсальна машина Тюрінга

$UTM = (k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$

для довільної машини Тюрінга $M = (\tilde{k}, \tilde{\Gamma}, \{0, 1\}, \tilde{\#}, \tilde{Q}, \tilde{Q}_F, \tilde{q}_0, \tilde{\delta})$
та довільного слова $x \in \{0, 1\}^*$ $UTM(\lfloor M \rfloor, x) = M(x)$

Приклад UTM

- вхідна стрічка (тільки для зчитування)
- стрічка з описом машини Тюрінга
- робочі стрічки вхідної машини Тюрінга
- стрічка зі станом вхідної машини Тюрінга
- вихідна стрічка (Arora, Barak pp. 23-25, 35-38)

Кількість ресурсів УТМ

- Тюрінг, 1936р., 1937р. — $\mathcal{O}(T^2(n))$ (однострічкова)
- Хенні (Hennie), Стернс (Stearns), 1966р. — $\mathcal{O}(T(n) \log T(n))$, $\mathcal{O}(S(n))$ (двострічкова)

Найменші (m, n) UTM

- Мур, 1956р. — перша найменша UTM, 3 стрічки, 2 символи, 15 станів, 57 команд

Універсальна машина Тюрінга

Найменші (m, n) UTM

- Мур, 1956р. — перша найменша UTM, 3 стрічки, 2 символи, 15 станів, 57 команд
- Шеннон, 1956р. — найменша UTM?, обмін стани-символи, мінімум 2 стани
 (n, m) машина Тюрінга: n станів — $A, B, C, \dots (0, 1, 2, \dots)$,
 m символів — $0, 1, 2, \dots$,
Двійкова машина Тюрінга: $m = 2, \{0, 1\}$, є універсальною

Універсальна машина Тюрінга

Найменші (m, n) UTM

- Мур, 1956р. — перша найменша UTM, 3 стрічки, 2 символи, 15 станів, 57 команд
- Шеннон, 1956р. — найменша UTM?, обмін стани-символи, мінімум 2 стани
 (n, m) машина Тюрінга: n станів — $A, B, C, \dots (0, 1, 2, \dots)$,
 m символів — $0, 1, 2, \dots$,
Двійкова машина Тюрінга: $m = 2, \{0, 1\}$, є універсальною
- Мінський (Minsky), 1962р. — $(7, 4)$ UTM,
неможливість $(2, 2)$ UTM (Маргенштерн, 2010р.)

Універсальна машина Тюрінга

Найменші (m, n) UTM

- Мур, 1956р. — перша найменша UTM, 3 стрічки, 2 символи, 15 станів, 57 команд
- Шеннон, 1956р. — найменша UTM?, обмін стани-символи, мінімум 2 стани

(n, m) машина Тюрінга: n станів — $A, B, C, \dots (0, 1, 2, \dots)$,
 m символів — $0, 1, 2, \dots$,

Двійкова машина Тюрінга: $m = 2, \{0, 1\}$, є універсальною

- Мінський (Minsky), 1962р. — $(7, 4)$ UTM, неможливість $(2, 2)$ UTM (Маргенштерн, 2010р.)
- Рогожин, 1996р. — $(15, 2), (9, 3), (6, 4), (5, 5), (4, 6), (3, 9)$ і $(2, 18)$ UTM
 $(4, 6)$ UTM з 22 правилами переходів — найменша за описом

Універсальна машина Тюрінга

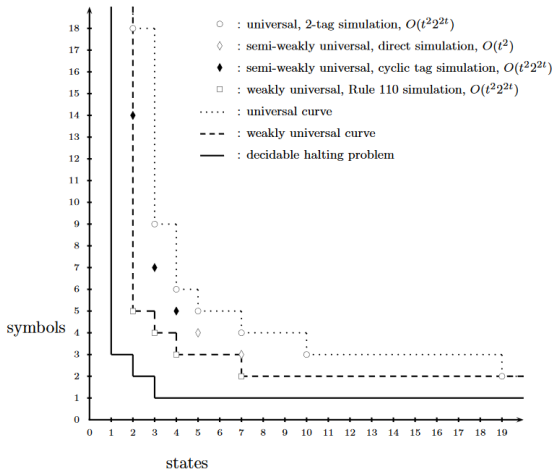


Рис. 1: (n, m) UTM

Найменші (n, m) UTM

Вольфрам (Stephen Wolfram), 2002р. — (2, 5) UTM

Вольфрам, 2007р. — (2, 3) UTM

Сміт (Alex Smith), 24.10.2007 — доведення (\$25.000)