Конструктивні функції

Андрій Фесенко

Функції часу роботи машини Тюрінга

- необчислювальні або важко обчислювальні функції

Функції часу роботи машини Тюрінга

- необчислювальні або важко обчислювальні функції
- часова складність $2^{2^{t(n)}}$ має бути більшою за складність $t(n)$

Функції часу роботи машини Тюрінга

- необчислювальні або важко обчислювальні функції
- часова складність $2^{2^{t(n)}}$ має бути більшою за складність $t(n)$
- додаткові можливості є меншими ніж ресурс на їх обчислення

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, називають **конструктивною за часом** (англ. time-constructible), якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M з часом роботи $\mathcal{O}(f(n))$ з довільним вхідним словом з довжиною n, і результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $1^{f(n)}$.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, називають **конструктивною за часом** (англ. time-constructible), якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M з часом роботи $\mathcal{O}(f(n))$ з довільним вхідним словом з довжиною n, і результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $1^{f(n)}$.

Приклади:

- $f(n) = c$, стала функція
- $f_1(n) = n$
- $f_2(n) = n \log n$
- $f_3(n) = n^3$
- $f_4(n) = 2^n$

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за часом**, якщо існують багатострічкова детермінована машина Тюрінга M і натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, час роботи машини Тюрінга M з довільним вхідним словом з довжиною n дорівнює $O(f(n))$ і машина Тюрінга M зупиняється з вхідним словом 1^n, виконавши точно $f(n)$ тактів.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за часом**, якщо існують багатострічкова детермінована машина Тюрінга M і натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, час роботи машини Тюрінга M з довільним вхідним словом з довжиною n дорівнює $O(f(n))$ і машина Тюрінга M зупиняється з вхідним словом 1^n, виконавши точно $f(n)$ тактів.

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за часом**, якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ час роботи машини Тюрінга M з довільним вхідним словом з довжиною n дорівнює $O(f(n))$ та існує вхідне слово з довжиною n, з яким машина Тюрінга M зупиняється, виконавши точно $f(n)$ тактів.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за часом**, якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ час роботи машини Тюрінга M з довільним вхідним словом з довжиною n дорівнює $\mathcal{O}(f(n))$ і машина Тюрінга M є застосовною до вхідного слова 1^n, а результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $\lfloor f(n) \rfloor$.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за часом**, якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ час роботи машини Тюрінга M з довільним вхідним словом з довжиною n дорівнює $\mathcal{O}(f(n))$ і машина Тюрінга M є застосовною до вхідного слова 1^n, а результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $\lfloor f(n) \rfloor$.

Контрольоване моделювання роботи машини Тюрінга

- запуск "годинника" паралельно **vs**
- запуск "годинника" послідовно

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Доведення.

- якщо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конструктивна за часом функція, то $\exists$ машина Тюрінга M з часом $t(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $M(1^n) = 1^{f(n)}$

$\square$

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Доведення.

- якщо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конструктивна за часом функція, то $\exists$ машина Тюрінга M з часом $t(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $M(1^n) = 1^{f(n)}$
- $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$: $t(n) \le cf(n)$, $\forall n \ge n_0$

$\square$

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Доведення.

- якщо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конструктивна за часом функція, то $\exists$ машина Тюрінга M з часом $t(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $M(1^n) = 1^{f(n)}$
- $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$: $t(n) \leq cf(n)$, $\forall n \geq n_0$
- нехай $f \notin \Omega(n) \Rightarrow \forall d \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $f(n) < dn$, $\forall n \geq n_1$

$\square$

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Доведення.

- якщо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конструктивна за часом функція, то $\exists$ машина Тюрінга M з часом $t(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $M(1^n) = 1^{f(n)}$
- $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$: $t(n) \leq cf(n)$, $\forall n \geq n_0$
- нехай $f \notin \Omega(n) \Rightarrow \forall d \in \mathbb{R}^+, \exists n_1 \in \mathbb{N}$: $f(n) < dn$, $\forall n \geq n_1$
- нехай $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ і $d = \frac{1}{c}$: $t(n) \leq cf(n) < n$, $\forall n \geq n_2$

$\square$

Конструктивні за часом функції

Твердження

Якщо функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивною за часом функцією, то або $f \in \Omega(n)$, $n \in \mathbb{N}$, або функція f є сталою на асимптотиці.

Доведення.

- якщо $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — конструктивна за часом функція, то $\exists$ машина Тюрінга M з часом $t(n) \in \mathcal{O}(f(n))$, $M(1^n) = 1^{f(n)}$
- $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+, n_0 \in \mathbb{N}$: $t(n) \leq cf(n)$, $\forall n \geq n_0$
- нехай $f \notin \Omega(n) \Rightarrow \forall d \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$: $f(n) < dn$, $\forall n \geq n_1$
- нехай $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ і $d = \frac{1}{c}$: $t(n) \leq cf(n) < n$, $\forall n \geq n_2$
- $f(n) = f(n_2)$, $\forall n \geq n_2$

$\square$

Властивості конструктивних за часом функцій

Твердження

Нехай функції $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ є конструктивними за часом функціями. Тоді функції

- $f_1 + f_2$;
- $f_1 \cdot f_2$;
- $f_1^{f_2}$;
- c^{f_1}, для довільного натурального числа $c \in \mathbb{N}$, $c > 1$,

також є конструктивними за часом функціями.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **повністю конструктивною за часом** (англ. fully time-constructible), якщо існують багатострічкова детермінована машина Тюрінга M і натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, машина Тюрінга M зупиняється, виконавши точно $f(n)$ тактів, з довільним вхідним словом з довжиною n.

Конструктивні за часом функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **повністю конструктивною за часом** (англ. fully time-constructible), якщо існують багатострічкова детермінована машина Тюрінга M і натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$ такі, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, машина Тюрінга M зупиняється, виконавши точно $f(n)$ тактів, з довільним вхідним словом з довжиною n.

Наслідок

Будь-яка повністю конструктивна за часом функція є конструктивною за часом функцією.

Конструктивні за пам'яттю функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за пам'яттю** (англ. space-constructible), якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ машина Тюрінга M є застосовною до довільного вхідного слова з довжиною n і при цьому використовується $\mathcal{O}(f(n))$ пам'яті, а результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $1^{f(n)}$.

Конструктивні за пам'яттю функції

Означення

Функцію $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ називають **конструктивною за пам'яттю** (англ. space-constructible), якщо існує така багатострічкова детермінована машина Тюрінга M, що для довільного значення $n \in \mathbb{N}$ машина Тюрінга M є застосовною до довільного вхідного слова з довжиною n і при цьому використовується $\mathcal{O}(f(n))$ пам'яті, а результатом роботи машини Тюрінга M з вхідним словом 1^n є слово $1^{f(n)}$.

Приклади:

- $f(n) = c$, стала функція
- $f_1(n) = n$
- $f_2(n) = n \log n$
- $f_3(n) = n^3$
- $f_4(n) = 2^n$
- $f_5(n) = \log n$

Конструктивні за пам'яттю функції

Наслідок

Будь-яка конструктивна за часом функція є конструктивною за пам'яттю функцією.

Конструктивні за пам'яттю функції

Наслідок

Будь-яка конструктивна за часом функція є конструктивною за пам'яттю функцією.

Зауваження

- конструктивні за часом $f(n) \geq n$, $f(n) \geq n + 1$, $f(n) \geq n \log n$
- конструктивні за часом — неспадні
- конструктивні за пам'яттю — неспадні, $f(n) \geq \log n$