③ $A: f(n) = O((n+\varepsilon)^n) \quad \forall \varepsilon > 0$

$B: f(n) = o((n+\varepsilon)^n) \quad \forall \varepsilon > 0$

$A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \exists C: \exists N: \forall n > N: f(n) <$
$< C(n+\varepsilon)^n$

~~$B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \lim \frac{(n+\varepsilon)^n}{f(n)}$~~

$B \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{(n+\varepsilon)^n} = 0$

$\forall \delta > 0: \forall \varepsilon > 0: \exists N: \forall n > N: f(n) < \delta (n+\varepsilon)^n.$

$B \Rightarrow A$ – завжди, δ_0 $o \Rightarrow O$

$A \Rightarrow B$?

~~$\forall \varepsilon > 0: \exists C, N: \forall n > N: f(n) < C (n+\varepsilon)^n.$~~

~~$\left(f(n) = n^n. \quad f = O((n+\varepsilon)^n).\ \forall \varepsilon > 0. \right.$~~

~~$\left. \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^n}{(n+\varepsilon)^n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+\varepsilon}\right)^n = 0 \quad ✓ \right)$~~

③ ...

$$\log_4 n \overset{?}{=} \Theta(\log_{14} n).$$

$$\log_{14} n = \log_4 n \cdot \log_{14} 4$$

Тобто $\log_{14} n = c \cdot \log_4 n$.

$$\log_4 n = \Theta(\log_{14} n) \quad ✓$$

Нехай $0<a<b$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(4+a)^n}{(4+b)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4+a}{4+b}\right)^n =$$

$$= 0, \quad \text{бо} \quad \frac{4+a}{4+b} < 1.$$

Тобто $\forall a,b:\ 0<a<b:$

$$(4+a)^n = o((4+b)^n)$$

$$f(n) = O((4+\varepsilon)^n) \quad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = O\left(\left(4+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n\right)$$

$$\left(4+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = o\left((4+\varepsilon)^n\right)$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = O\left(o\left((4+\varepsilon)^n\right)\right) = o\left((4+\varepsilon)^n\right) \quad \blacksquare$$

(5) $L_2 = \{\varphi_1, \varphi_2 \mid \exists x : \varphi_1 \oplus \varphi_2 = 1\}$

$\oplus$ - XOR.

$M_{L_2}(\varphi_1, \varphi_2) = M_1(\varphi_1 \oplus \varphi_2)$

$M_1 = M_{SAT}$

$M_{SAT}(\varphi) = M_{L_2}(\varphi, 0)$.

Тобто $SAT \le L_2$.

Тобто $L_2 \in NPC, P^{SAT}$

$\Rightarrow$ $L_2 \notin P$.

$L_2 \notin coNP$

$L_2 \in NP, EXP, PSPACE$

тактів | L_1

$(n+2m)\cdot$ зчитуємо $(10)^{n+2m}$

зчитуємо $(11)^m$

$O(m\cdot(n+2m))$

- видаляємо по 4 символи з початку рядка за кожен блок (11). (два блоки (10))

- зчитуємо $(00)^n$

$O(n\cdot(n))$.

- видаляємо по 2 символи з початку рядка за кожен блок (00). (по блоку 10).

Тобто $T(n) = O(n+2m+ m(n+2m) + n^2)$

Тобто $L_1 \in P$, PSPACE

$\Rightarrow L_1 \in NP, coNP, EXP, P^{SAT}$.

- $L_1 \not\leq L_2$, бо

(4) $L_1 = \{\langle M\rangle \mid \exists \tilde{M} : \varepsilon \in L(\tilde{M}) \cup L(M)\}$

Насправді $L_1 = ALL$
цю мову вирішує МТ,
яка повертає q_{acc} на всіх
вхідних словах.

Тобто, L_1 – вирішувана, рекурсивно
злічена та корекурсивно
злічена.

(тому що завжди можна вибрати
одну єдину $\tilde{M}$, що приймає
лише ε).

$L_2 = \{\langle M\rangle \mid M(\varepsilon) = \perp \land M(111) \neq \perp\}$

Нехай L_2 – корекурсивно злічена.
Тобто $\exists$ TM M_{L_2}: $M_{L_2}(M) = \begin{cases} 1, & M(\varepsilon) = \perp,\ M(111) \neq \perp \\ \perp, & \text{else} \end{cases}$

Будуємо $M_{1,M}$: $M_{1,M}(w) = \begin{cases} M(w), & w \neq 111 \\ q_{acc}, & w = 111 \end{cases}$

Тоді $M_2(M) = \cancel{\ldots}\ M_{L_2}(M_{1,M})$ –
– вирішує задачу $\overline{HALT_\varepsilon}$

Протиріччя. $\overline{HALT_\varepsilon}$ – не розпізнається.

$$M_{\overline{L_2}}(M) = \begin{cases} 1, & M(\varepsilon) \neq \perp \lor M(111) = \perp \\ \perp, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Нехай ~~...~~ $\overline{L_2}$ – рекурсивно зачеплена

тобто $\exists M_{\overline{L_2}}$.

$$M_{1,M}(w) = \begin{cases} M(w), & w = 111 \\ \perp, & w \neq 111 \end{cases}$$

Тобто $M_{L_2}(M_{1,M}) = \begin{cases} 1, & M(111) = \perp \\ \perp, & \text{otherwise} \end{cases}$

Нехай $M_{2,M}(w) = M(w \cdot 111)$

$M_{2,M}(\varepsilon) = M(111)$.

let $M_3(M) = M_{L_2}(M_{1,(M_{2,M})})$

$M_3(M) = 1$ якщо

якщо $M_{1,}(M_{(2,M)})(111) = \perp \Rightarrow$

$\Rightarrow M_{2,M}(111) = \perp \Rightarrow$

$\Rightarrow M(\varepsilon) = \perp$.

Тобто M_3 вирішує задачу $\overline{HALT_\varepsilon}$.

Протиріччя.

Тобто, L_2 – не RE, не $\overline{RE}$

тим більше, не R