До лекції 2.

1.1.1. Параболічне рівняння: задача Коши та граничні умови.

Розглянемо розв’язки $u \equiv u(t,\mathbf{x})$ рівняння параболічного типу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(t,\mathbf{x})\, u_{,ij} + \sum_{j=1}^{r} B_j(t,\mathbf{x})\, u_{,j} + C(t,\mathbf{x})u + F\left(t,\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{x} \equiv (x_1,...,x_r), \quad (12)$$

де $A_{ij}(t,\mathbf{x})$ – додатно визначена матриця, причому функції $u \in C^1_{\bar{H}} \bigcap C^2_H$ задовольняють початковим умовам

$$u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \quad (13)$$

$u_0 \in C^1_{\bar{G}}$, а також крайовим умовам (11) для усіх $t \in [0,T]$.

У деяких випадках вимоги щодо неперервності чи гладкості початкових або крайових умов можуть не виконуватися. У цьому разі задача має бути модифікована. Наприклад, можливий варіант, коли рівняння (3),(4),(5) виконані лише для внутрішніх точок області G, а замість початкових та граничних умов (6) та (9) розглядають певні граничні переходи, коли $\mathbf{x}$ прямує до будь-якої точки на межі області, де розглядається рівняння, за винятком скінченного числа точок, де є розриви функцій, що входять в (6), (9).

1.2. Коректність задач математичної фізики.

Важливим елементом розгляду задач математичної фізики є аналіз їх коректності. Задача поставлена коректно, якщо розв’язок існує і він є єдиним для заданих початкових та граничних умов, а також він неперервно залежнить від малих змін початкових та граничних умов, а також інших функцій, що входять в рівняння. Ці властивості аналізують в рамках певних загальних вимог, таких, як порядок гладкості, обмеженість тощо, які накладають на розв’язок.

- Наведемо **приклад Адамара**, який ілюструє некоректну постановку класичної задачі Коші. Розглянемо рівняння для функції двох змінних $u = u(t,x), t > 0$:

$$u_{tt} = -u_{xx} \quad (14)$$

з початковими умовами $u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = \frac{1}{n}\sin(nx), \quad n = 1,2,...$. Можна ще накласти граничну умову $u(t,0) = 0, u(t,\pi) = 0$, якщо є бажання розглянути задачу на скінченному відрізку $[0,\pi]$. Легко перевірити, що розв’язок

$$u(t,x,n) = n^{-2}\sinh(nt)\sin(nx)$$

задовольняє усім поставленим вимогам.

Для нульових початкових умов розв'язок рівняння (14) є тривіальним. У разі неперервної залежності від початкових умов розв'язок мав би мало відрізнятися від нульового при $n \to \infty$, оскільки $n^{-1}\sin(nx) \Rightarrow 0, n \to \infty$. Але для фіксованого $t > 0$ бачимо, що $\sup\{u(t,x,n), x \in [0,\pi]\}$ прямує до нескінченності при $n \to \infty$, а не до нуля. Таким чином, неперервної залежності від початкових умов тут немає, задача поставлена некоректно.

А) Приклад розв'язання задачі параболічного типу.

$$u_t = u_{xx}, \qquad \text{(п.1)}$$

$u(t,0) = u(t,1) = 0$ (умови Діріхлє) , $t \ge 0, \quad x \in [0,1]$.

Початкова умова: $u(0,x) = \sin(\pi n x), \quad n = 1,2,3,...$ (п.2)

Зазначимо, що система функцій $\sin(\pi n x)$ для усіх $n = 1,2,3,...$ є повною на $[0,1]$, причому вони є власними функціями оператора правої частини рівняння (п.1).

Розв'язок: $u(0,x) = \sin(\pi n x)\exp(-\pi^2 n^2 t)$.

Б) Рівняння (п.1) з тими ж крайовими умовами, але з більш загальною початковою умовою

$$u(0,x) = \sum_{k=1}^{K} A_k \sin(\pi k x) \qquad \text{(п.2)}$$

Розв'язок $u(t,x) = \sum_{k=1}^{K} A_k \sin(\pi k x)\exp(-\pi^2 k^2 t)$.

В) Єдиність та стійкість розв'язку задачі (п.1) з граничними умовами (п.2)

$u(t,0) = u(t,1) = 0; \quad t \ge 0, \quad x \in [0,1];$

загальна початкова умова:

$$u(0,x) = u_0(x)\ . \qquad \text{(п.3)}$$

Задачу розглядаємо в класі неперервно-диференційовних по (t,x) *та двічи неперервно-диференційовних по* x.

Припустимо спочатку, що є два розв'язки цієї задачі $u_1(t,x), u_2(t,x)$, для яких $u_1(0,x) = u_{01}(x), \quad u_2(0,x) = u_{02}(x)$, де u_{01}, u_{02} задовольняють тим самим крайовим умовам і є також двічи неперервно-диференційовними.

Для різниці $v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ в силу лінійності виконуються однорідні крайові умови $v(t,0) = v(t,1) = 0$ та рівняння

$v_t = v_{xx} \quad \to v v_t = v v_{xx} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$. Оскільки $v v_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right)$, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[v\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Проінтегруємо це від 0 до 1:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^1 dx\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] = v\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_0^1 - \int_0^1 dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = -\int_0^1 dx\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \le 0 \quad .$$

Звідси $\int_0^1 dx\, v^2(t,x)$ – незростаюча функція, тому

$$\int_0^1 dx\, v^2(t,x) \le \int_0^1 dx\left(u_{01}(x) - u_{02}(x)\right)^2 . \qquad \text{(п.4)}$$

Якщо $u_{01}(x) \equiv u_{02}(x)$, звідси $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$, тобто розв'язок задачі єдиний.
Для різних початкових умов з (п.4) випливає, що розв'язок стійкий при по нормі L^2 : $\| f \| \equiv \sqrt{\int_0^1 dx\ f^2(x)}$, тобто $\|u_1 - u_2\| \le \|u_{01} - u_{02}\|$. Малим (по цій нормі) відхиленням початкових умов відповідатимуть малі відхилення розв'язку.

Додаткова вправа.
Нехай існують два розв'язки $u_1(t,x), u_2(t,x)$ $(t \ge 0, \quad x \in [0,1])$ *рівняння*

$$u_t = u_{xx}$$

з умовами $u(t,0) = u(t,1) = 0$, *для яких* $u_1(0,x) = u_{01}(x), \quad u_2(0,x) = u_{02}(x)$, *причому* u_{01}, u_{02} *є тричі неперервно-диференційовними. Розв'язки* $u_1(t,x), u_2(t,x)$ *розглядаємо в класі неперервно-диференційовних по сукупності змінних* t, x *та тричі неперервно-диференційовних по* x *функцій. Знайти оцінку для* $\sup\left\{\left|u_1(t,x) - u_2(t,x)\right|, x \in [0,1]\right\}$, $t \ge 0$ через u_{01}, u_{02} .