РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Узагальнення рівняння дифузії-теплопровілності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-B(t,x)u+f \tag{1}$$

A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B\geq 0$.

$u\equiv u(t,x),\quad f\equiv f(t,x)\in C^2(\mathbb{R}_+\otimes\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathbb{R}_+,\quad x\equiv(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$,

$\mathbb{R}_+=\{t:t\in\mathbb{R},t\geq 0\}$.

Розв'язки (1) розглядаємо в класі дійсних функцій $u\equiv u(t,x)\in C^2(\mathbb{R}_+\otimes\mathbb{R}^n)$, які досить швидко спадають з першими похідними до нуля на нескінченності

$|u(t,x)|\leq C(|x|)\to 0,\quad \left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}\right|\leq D(|x|)\to 0$ при $|x|\to\infty$, причому $\forall t\in[0,T]$, $T>0$,

$\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x\, u^2(t,x)<\infty$.

Зауважимо, що ці умови пов'язані між собою і їх можна послабити.

Далі припускаємо, що для кожного $T>0\ \exists M(T)<\infty:\ |f(t,x)|<M(T)$, тобто $f(t,x)$ обмежена в кожній полосі $0\leq t\leq T$, причому $\int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x\, f^2(t,x)<\infty$. Далі позначаємо $x^2\equiv x_1^2+\ldots+x_n^2$ – скалярний квадрат вектора x.

Початкова умова для (1) така:

$$u(0,x)=v_0(x)\in C^2(\mathbb{R}^n),\quad |v_0(x)|\leq M_1<\infty\ . \tag{2}$$

З рівняння (1), помноживши на u, після простих перетворень, маємо

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial t}=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}-B(t,x)u^2+u\,f(t,x) \tag{3}$$

Проінтегруємо по усьому простору:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\, u^2 = \sum_{i,j=1}^{n}\int d^n x\, \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\int d^n x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} -$$

$$-\int d^n x\, B(t,x)u^2 + \int d^n x\, u\, f(t,x)\,.$$

Завдяки умовам на нескінченності $\int d^n x \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0$, а завдяки додатній визначеності A_{ij} та невід'ємності B другий та третій доданки у правій частині менше нуля. Тому

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\, u^2(x,t) \le \int d^n x\, u\, f(t,x). \tag{4}$$

При $f(t,x) \equiv 0$ маємо

$$\int d^n x\, u^2(t,x) \le \int d^n x\, u^2(0,x) \tag{4a}$$

– оцінка через початкові умови.

Єдиність.

Застосуємо це для доведення єдиності розв'язків задачі (1,2).

Нехай функції u_1, u_2 належать зазначеному класу функцій та задовольняють (1) з умовами (2). Тоді для різниці $w = u_1 - u_2$ маємо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(t,x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) - B(t,x)w,$$

для якого отримуємо оцінку, аналогічну (4а). Оскільки $w(0,x) = 0$, звідси $\int d^n x\, w^2(t,x) \le 0$, що можливо лише коли $w(t,x) \equiv 0$, щ.т.д.

- Розглянемо тепер більш загальний випадок. З нерівності (4) та нерівності Коші-Буняковського

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\, u^2(x,t) \le \left|\int d^n x\, u(t,x)\, f(t,x)\right| \le \sqrt{\int d^n x\, u^2(t,x)}\sqrt{\int d^n x\, f^2(t,x)}\,.$$

В термінах норми $\|u(t,x)\| = \sqrt{\int d^n x\, u^2(x,t)}$ це має вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 \le \|u\|\,\|f(t,x)\|, \text{ або } \frac{d}{dt}\|u\| \le \|f(t,x)\|\,.$$

Звідси маємо оцінку розв’язку задачі (1) через початкові умови

$$\|u(t,x)\| \le \|u(0,x)\| + \int_0^t dt' \| f(t',x)\| \,. \tag{5}$$

У випадку $u(0,x)=0, \quad f(t,x)=0$ можливий лише тривіальний розв’язок.

РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

(нова нумерація)

Розглядаємо рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - B(x) + f \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}_+ = \{t : t \in \mathbb{R}, t \ge 0\}$, $u \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3), \quad f \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3)$.

Як і раніше, A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B > 0$, але A_{ij}, B не залежать від *t*.

Рівняння (1) розглядаємо разом із початковими умовами (задача Коші):

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad \varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\right|_{t=0} = \psi(x), \quad \psi \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad , \tag{3}$$

Домножимо (1) на $\frac{\partial u}{\partial t}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \equiv \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - B(x) u \frac{\partial u}{\partial t} + f\frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(B(x)u^2\right) + f\frac{\partial u}{\partial t}$$

або

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + f\frac{\partial u}{\partial t} \,.$$

Інтегруємо по всьому простору

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int d^n x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right] = \int d^n x\, f\,\frac{\partial u}{\partial t}\,. \tag{4}$$

Єдиність.

Нехай функції u_1, u_2 належать зазначеному класу функцій та задовольняють (1) з умовами (2). Тоді для різниці $w = u_1 - u_2$ маємо рівняння (1,2,3) з нульовим джерелом $f \equiv 0$ та нульовими початковими умовами. З рівняння (4) при $f(t,x) \equiv 0$ маємо

$$\frac{d}{dt}\int d^n x\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x)w^2\right] = 0$$

Звідси, з урахуванням нульових початкових умов

$$\left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x)w^2\right]_t \equiv 0 \text{ і } \quad w \equiv 0\text{, щ.т.д.}$$

- Застосуємо (4) у більш загальному випадку, коли права частина (1) не дорівнює нулю. Позначимо

$$N(t) \triangleq \sqrt{\int d^n x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right]}\,.$$

Маємо з нерівності Коші-Буняковського

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[N^2(t)\right] = \int d^n x\, f\,\frac{\partial u}{\partial t} \le \sqrt{\int d^n x\, f^2}\sqrt{\int d^n x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} \le$$

$$\le \sqrt{\int d^n x\, f^2}\sqrt{\int d^n x\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right]} \le \sqrt{\int d^n x\, f^2}\cdot N(t)\,.$$

Або, після скорочення на $N(t)$,

$$\frac{d}{dt}N(t) \le \sqrt{\int d^n x\, f^2}\,.$$

Звідси отримуємо оцінку через праву частину (1) та початкові умови

$$N(t) \le N(0) + \int_0^t dt'\sqrt{\int d^n x\, f^2(t',x)} \tag{5}$$

Нехай $B(x) \ge b > 0$. Отримаємо оцінку розв’язку.

$$\|u\|^2 \le \frac{1}{b}\int d^n x\, B(x)u^2 \le \frac{1}{b}N^2(t) \le \left[N(0) + \int_0^t dt'\sqrt{\int d^n x\, f^2(t',x)}\right]^2 \tag{6}$$

РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

(нова нумерація)

Розглядаємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - B(x)u + f = 0 \quad , \tag{1}$$

A_{ij} – симетрична додатно визначена матриця; $B \ge 0$.

Розв'язки (1) розглядаємо в класі функцій $u \equiv u(x) \in C^2(\mathbb{R}^n)$, які досить швидко спадають з першими похідними до нуля на нескінченності:

$|u(x)| \le C(|x|) \to 0$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \le D(|x|) \to 0$ при $|x| \to \infty$, причому $\int_{\mathbb{R}^n} d^n\mathbf{r}\, u^2(t,\mathbf{r}) < \infty$.

Аналогічно (3)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)u\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} - B(x)u^2 + u\, f(x) = 0 .$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{2}\int d^n x\left\{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right\} = \int d^n x\, u\, f(x) \quad . \tag{2}$$

Звідси

$$\int d^n x\left\{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right\} \le 2\sqrt{\int d^n x\, u^2}\sqrt{\int d^n x\, f^2} \equiv 2\|u\|\|f\| \quad . \tag{3}$$

Нехай $B(x) \ge b > 0$. Отримаємо оцінку розв'язку.

$$\frac{1}{2}b\|u\|^2 = \frac{1}{2}b\int d^n x\, u^2 \le \frac{1}{2}\int d^n x\left\{B(x)u^2\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int d^n x\left\{\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x)u^2\right\} \le \|u\|\|f\|$$

За $\|u\| \ne 0$ маємо

$$\|u\| \le \frac{2}{b}\| f \|. \tag{4}$$

Звідси також випливає оцінка і для похідних

$$\int d^n x \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\} \le \int d^n x \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + B(x) u^2 \right\} \le \frac{4}{b} \| f \|^2 \tag{5}$$

Єдиність.

Припустимо, що у нас є розв'язки u_1, u_2 з однаковими правими частинами з названого класу функцій. Тоді для різниці $w = u_1 - u_2$ маємо рівняння (1), в якому $f \equiv 0$. З рівняння (1), підставляючи $w = u_1 - u_2$ маємо

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) - B(x) w = 0$$

$\int d^n x \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x) w^2 \right\} = 0$, що дає $\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} + B(x) w^2 \equiv 0$ та

$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} \equiv 0$, а значить $\frac{\partial w}{\partial x_j} \equiv 0$, $w \equiv const$. З умов на нескінченності $w \equiv 0$.