Метод розділення змінних та задача Штурма-Ліувілля

Для розв’язання лінійних задач математичної фізики часто використовують різноманітні розклади в ряди по повним системам функцій. Потужним засобом пошуку розв’язків є метод розділення змінних (метод Фур’є). Послідовність дій у цьому методі така.

(i) Шукаємо часткові розв’язки методом розділення змінних, тобто часткових розв’язків, які є (i) добутками функцій від окремих змінних та (ii) задовольняють граничним умовам. Пошук цих розв’язків приводить до задачі Штурма – Ліувілля.

(ii) Далі розв’язок вихідної задачі шукаємо у вигляді розкладу у нескінченний ряд по знайденим частковим розв’язкам.

Виникає природне питання, коли це можливо, зокрема, чи гарантована збіжність цих рядів? Чи достатня точність розв’язку з конкретними початковими та граничними умовами при обриванні ряду? У випадку задач на скінченному інтервалі часткову відповідь на це питання дає теорема Стєклова.

1. ЗАДАЧА ШТУРМА - ЛІУВІЛЛЯ[1]

Для побудови повної системи функцій, що задовольняє певним граничним умовам, ми приходили до задач з рівняннями другого порядку із умовами на кінцях певного відрізку. Більш загальний випадок приводить до *задачі Штурма–Ліувілля*.

Розглянемо оператор Штурма-Ліувілля

$$\mathbf{L}u \equiv -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u; \quad u\equiv u(x) \tag{26}$$

з дійсними $p(x)$, $q(x)$, що діє на двічі неперервно-диференційовні функції $u\equiv u(x)$.

Уведемо граничні умови

$$A_1u(a)=A_2u'(a); \quad B_1u(b)=-B_2u'(b) \quad (u'\equiv du/dx), \quad a<b. \tag{27а}$$

Нехай

$$A_1,A_2\ge 0, \quad A_1+A_2>0, \quad B_1,B_2\ge 0, \quad B_1+B_2>0 \ ; \tag{27б}$$

$$p(x)\in C^1[a,b], \ \ p(x)>0; \quad q(x)\in C[a,b], \ \ q(x)\ge 0 \ ; \tag{27в}$$

Зауважимо, що з додатності $p(x)$ на замкненій множині (відрізку $[a,b]$) випливає

$$\exists p_0 : p(x)\ge p_0>0, \qquad x\in[a,b] \ .$$

Далі розглядаємо рівняння Штурма – Ліувілля (див., напр., [1,2])

---

[1] Jacques Charles François Sturm (1803–1855) and Joseph Liouville (1809–1882).

$$\mathbf{L}u = \lambda u. \tag{28}$$

Також розглядатимемо рівняння

$$\mathbf{L}u = \lambda\rho(x)u, \tag{28'}$$

яке, за умови $\rho(x) \in C^1[a,b],\ \rho(x) > 0$, зводиться до вигляду (28) заміною

$$x \to z = \int_a^x \rho(x')dx', \quad p \to \tilde{p} = p\rho, \quad q \to \tilde{q} = q/\rho,$$

Задача Штурма — Ліувілля (ЗШЛ) полягає в тому, щоб *знайти нетривіальні розв'язки* $\{u,\lambda\}$ *рівняння (28) з умовами (27а), причому* $u(x) \in C^1[a,b] \cap C^2(a,b)$*, а друга похідна* $u''(x)$ *інтегровна на* $[a,b]$.

Випишемо (28') явно:

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = \lambda\rho(x)u \ . \tag{29}$$

Вказані вище значення параметра λ називають *власними значеннями ЗШЛ*, а відповідні їм розв'язки – *власними функціями* цієї задачі. Можна показати, що *власні значення ЗШЛ утворюють зліченну множину*.

Фундаментальну роль відіграє повнота системи власних функцій ЗШЛ, тобто можливість розкладати розв'язки різних задач в ряди за цими функціями. Доведення відповідної теореми, формулювання якої дещо відрізняється в різних посібниках, можна знайти в [1,2,3] на основі зведення ЗШЛ до інтегрального рівняння [1,3] або за допомогою варіаційного формулювання спектральної задачі [2].

Теорема (В.А. Стєклов). Нехай виконані умови (27б,в). Нехай функція $f(x)$, що задовольняє граничним умовам (27а), двічі неперервно-диференційовна на $[a,b]$. Тоді $f(x)$ можна розкласти в абсолютно і рівномірно збіжний ряд за власними функціями ЗШЛ (28,27а).

Власні функції ЗШЛ утворюють повну систему в $L^2[a,b]$.

Оскільки ЗШЛ однорідна, зазвичай власні функції $u_n(x)$ нормують в $L^2[a,b]$ або – у випадку рівняння (28') – у просторі квадратично-інтегровних з вагою $\rho(x)$, тобто накладають умову $\int_a^b |u(x)|^2 \rho(x)dx = 1$.

Властивості розв'язків ЗШЛ (28',27а).

1. Власні значення ЗШЛ — прості, тобто одному власному значенню не можуть відповідати дві і більше *лінійно незалежних* власних функції.
2. Власні функції $u_1(x), u_2(x)$, які відповідають різним власним значенням $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *ортогональні між собою з вагою* $\rho(x)$:

$$\int_a^b dx\,\rho(x)u_1(x)u_2(x)=0.$$

3. Власні значення ЗШЛ — *дійсні та невід'ємні*. Власні функції ЗШЛ пропорційні дійсним функціям і їх можна вибрати дійсними.

Доведення пп.1-3.

Помножимо (29), записане для $u\equiv u_1$, на деяку функцію u_2, що також є розв'язком ЗШЛ:

$$-u_2\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_1}{dx}\right)+qu_1u_2=\lambda_1\rho u_1u_2,$$

та проінтегруємо на $[a,b]$

$$-\left(pu_2\frac{du_1}{dx}\right)_a^b+\int_a^b dx\left[\left(p\frac{du_2}{dx}\frac{du_1}{dx}\right)+qu_1u_2\right]=\lambda_1\int_a^b dx\,\rho(x)u_1u_2 \qquad (30)$$

З умови (27): $A_1u(a)=A_2u'(a);\quad B_1u(b)=-B_2u'(b)\quad (u'\equiv du/dx),\quad a<b.$

Нехай, в умовах (27), наприклад, $A_2>0,\quad B_1>0$. Проінтегруємо (30) і отримаємо

$$\frac{A_1}{A_2}\left(pu_1u_2\right)_a+\frac{B_2}{B_1}\left(p\frac{du_1}{dx}\frac{du_2}{dx}\right)_b+\int_a^b dx\left[\left(p\frac{du_2}{dx}\frac{du_1}{dx}\right)+qu_1u_2\right]=\lambda_1\int_a^b dx\,\rho(x)u_1u_2 \qquad (31)$$

Звідси, покладаючи $u_2(x)=[u_1(x)]^*$ маємо, що λ_1– дійсне. Тоді рівняння (29) є повністю дійсним з дійсними граничними умовами і розв'язок можна вибрати дійсним (інакше – беремо дійсну чи уявну частину комплексного розв'язку і, завдяки лінійності, маємо дійсний розв'язок). З умов ЗШЛ та з (31) при $u_2(x)=[u_1(x)]^*$ видно, що ліва частина є додатно-визначеною, звідки $\lambda_1\geq 0$.

Якщо $u_2(x)$ є власним розв'язком з іншим власним значенням $\lambda_2\neq\lambda_1$, аналогічно (31) маємо (помінявши індекси 1 2)

$$\frac{A_1}{A_2}\left(pu_1u_2\right)_a+\frac{B_2}{B_1}\left(p\frac{du_1}{dx}\frac{du_2}{dx}\right)_a+\int_a^b dx\left[\left(p\frac{du_2}{dx}\frac{du_1}{dx}\right)+qu_1u_2\right]=\lambda_2\int_a^b dx\,\rho(x)u_1u_2.$$

Віднімаючи це рівняння від (31) для нетривіальних $u_1(x),u_2(x)$ маємо

$$(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b dx\,\rho(x)u_1u_2=0,$$

тобто $u_1(x),u_2(x)$ – ортогональні з вагою $\rho(x)$.

Властивість 1 легко встановити, використовуючи однорідність рівняння (29). Нехай, наприклад, в граничних умовах $A_2>0$. Якщо u задовольняє (29), віднормуємо його за допомогою перетворення $u\to u'=Cu$ так, щоб зафіксувати $u(a)$.

Тоді $u'(a) = A_1 u(a) / A_2$. Ці умови визначають розв’язок рівняння 2-го порядку однозначно. Оскільки це можна проробити з будь-яким розв’язком, тому усі розв’язки можуть відрізнятися лише коефіцієнтом пропорційності.

Проілюструємо метод розділення змінних на прикладі рівнянь з простими граничними умовами.

2. РІВНЯННЯ ПУАССОНА З ОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ.

Розглянемо рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \tag{1}$$

$u \equiv u(x, y)$, в квадраті $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ з однорідними граничні умовами: $u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0$. Будемо припускати[2], що такі ж умови виконуються для правої частини (1) $f(x, y)$, яка є неперервною функцією змінних x, y.

Етап 1: побудова повної системи функцій, що задовольняють зазначеним однорідним граничним умовам.

Розглянемо *часткові* розв’язки однорідного рівняння на власні значення

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u, \tag{2}$$

що мають вигляд добутків: $u(x, y) = u_1(x), u_2(y)$. Підстановка в (2) після розділення на u дає

$$\frac{u_2''(x)}{u_2(x)} + \frac{u_3''(y)}{u_3(y)} = -\lambda. \tag{3}$$

Оскільки змінні x, y є незалежними, виконання (3) можливо лише тоді, коли

$$\frac{u_1''(x)}{u_1(x)} = \lambda_1, \qquad \frac{u_2''(y)}{u_2(y)} = \lambda_2, \tag{4}$$

де λ_1, λ_2 – константи, $\lambda_1 + \lambda_2 = -\lambda$.

---

[2] Якщо це не так, можна розглянути розв’язки (1) для послідовності функцій $f_n(x, y)$, які задовольняють зазначеним граничним умовам і поточково збігаються до $f(x, y)$ усередині квадрата, тобто при $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$. Ця збіжність не буде рівномірною, але за досить загальних умов можна гарантувати збіжність в середньому та в L^2.

Розглянемо перше з рівнянь (4) для $u_1(x) \neq 0$:

$$u_1''(x) = \lambda_1 u_1(x)\,. \tag{5}$$

З урахуванням граничних умов маємо задачу Штурма-Ліувілля для $u_1(x)$, але з огляду на простоту рівняння (5) проаналізуємо його безпосередньо.

Для додатного $\lambda_1 = \omega^2 > 0$, аналізуючи загальний розв'язок

$$u_1(x) = C_1 \sinh(\omega x) + C_2 \cosh(\omega x)\,,$$

бачимо, що виконання нульових граничних умов при $x = 0,\ x = 1$ можливе лише за $C_1 = C_2 = 0$. Для $\lambda_1 = 0$ розв'язком (4) є лінійна функція $u_1(x) = C_1 x + C_2$, що також дає $C_1 = C_2 = 0$. Нетривіальний розв'язок отримуємо лише при $\lambda_1 = -\omega^2 < 0$:

$$u_1(x) = A_1 \sin(\pi n x)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ \lambda_1 = -\omega^2 = -(\pi n)^2\,.$$

Аналогічно

$$u_2(y) = A_2 \sin(\pi m y)\,, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \ \lambda_2 = -(\pi m)^2\,.$$

Важливим моментом є повнота системи функцій $\sin(\pi n x)$ на [0,1], тобто будь яку інтегровну в $L^2[0,1]$ функцію, що задовольняє нульовим граничним умовам на кінцях відрізку [0,1], можна розкласти в збіжний ряд по $\sin(\pi n x)$. Це є наслідком теореми Стєклова; втім, у даному разі це також легко довести, використовуючи властивості рядів Фур'є. Аналогічна ситуація з функціями $u_2(y)$.

Тепер видно, що добутки $\sin(\pi n x)\sin(\pi m y)$, які є власними функціями задачі (1) з відповідними крайовими умовами, утворюють повну систему для функцій двох змінних в квадраті $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ і можна шукати розв'язок у вигляді ряду

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn} w_{mn}(x,y)\,, \text{ де } w_{mn}(x,y) = \sin(\pi n x)\sin(\pi m y)\,. \tag{6}$$

Власні значення задачі (1) у квадраті $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ з нульовими крайовими умовами є $\lambda_{mn} = \pi^2(m^2 + n^2)$.

Резюмуємо, що мета цього етапу була знайти повну систему власних функцій, яка задовольняє накладеним граничним умовам. *Якщо ця система наперед відома, цей етап можна пропустити.* Слід однак зауважити, що у більш складних випадках знаходження повної системи може бути досить трудомістким.

Етап 2 полягає власне у побудові потрібного розв'язку. Шукаємо його у вигляді (6). Відповідно треба розкласти праву частину по функціям w_{mn}.

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} w_{mn}(x,y)\,. \tag{7}$$

Для знаходження коефіцієнтів f_{mn} скористаймося рівністю для натуральних k,l,m,n:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, w_{kl}(x,y) w_{mn}(x,y) = \frac{1}{4}\delta_{k,m}\delta_{l,n}\ .$$

Для функцій $w_{mn}(x,y)$ це легко отримати з урахуванням явного вигляду (6). Інакше це можна отримати, як наслідок ортогональністі власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. Множення (7) на $w_{kl}(x,y)$ та інтегрування в квадраті $0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1$ дає

$$f_{kl} = 4\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, w_{kl}(x,y)\, f(x,y)\,.$$

Підстановка розкладів (6) та (7) у вихідне рівняння (1) з урахуванням незалежності функцій w_{kl} дозволяє обчислити u_{mn} звідки

$$u(x,y) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \frac{\sin(\pi m x)\sin(\pi n y)}{m^2+n^2}\ .$$

Але слід мати на увазі, що у такому підході можна отримати ряди, що збігаються повільно, крім того, якщо розв’язок отримано у вигляді подвійної суми, збіжність також може погіршуватися. Це проаналізовано у наступному прикладі.

3. РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА З НЕОДНОРІДНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ.

Задачу для рівняння Пуассона чи Лапласа з неоднорідними крайовими умовами можна звести до попереднього розгляду шляхом заміни шуканої функції. Це, однак, залежить від конкретного вигляду цих умов та форми області.

Розглянемо приклад з рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,\quad 0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 1\,, \tag{8}$$

з неоднорідними граничними умовами:

$$u(0,y) = f_0(y),\quad u(1,y) = f_1(y),\quad u(x,0) = 0, u(x,1) = 0\,. \tag{9}$$

Будемо припускати, що умови (9) є неперервними вздовж границі області $(x,y) \in [0,1] \otimes [0,1]$, тобто

$$f_0(0) = f_0(1) = f_1(0) = f_1(1) = 0 \tag{10}$$

Покладемо $u(x,y) = v(x,y) + f_0(y) + x\left[f_1(y) - f_0(y) \right]$. Для нової функції $v(x,y)$ маємо рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-f_0''(y)-x\left[f_1''(y)-f_0''(y)\right]$$

(штрих означає похідну) з нульовими граничними умовами. У випадку, коли $u(x,0)\neq 0, u(x,1)\neq 0$, можна позбавитися неоднорідностей аналогічно, послідовно зануляючи умови на вертикальних та горизонтальних сторонах квадрата.

Розглянемо на цьому прикладі ще один спосіб розгляду задачі (8) з граничними умовами (9), оснований на розділенні змінних. Тут можна шукати розв'язок у вигляді розкладу по функціях $w_n(y)=\sin(\pi n y)$:

$$u(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\sin(\pi n y)\ . \tag{11}$$

Нехай проведено розклад

$$f_0(y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{0n}\sin(\pi n y),\ f_1(y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{1n}\sin(\pi n y) \tag{12}$$

Підстановка (11) у вихідне рівняння (8) дає

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}=\pi^2 n^2 u_n\ . \tag{13}$$

Маємо загальний розв'язок цього рівняння

$$u_n(x)=A_n\sinh\left(\pi n x\right)+B_n\sinh\left(\pi n(1-x)\right),$$

форма якого підібрана[3] таким чином, щоб легше було працювати на границях $x=0,\quad x=1.$

Тоді прирівнюючи розв'язок та граничні умови (12) при $x=0,\quad x=1$, маємо

$$B_n=f_{0n}/\sinh\left(\pi n\right),\quad A_n=f_{1n}/\sinh\left(\pi n\right)$$

і

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi n y\right)}{\sinh\left(\pi n\right)}\left[f_{1n}\sinh\left(\pi n x\right)+f_{0n}\sinh\left(\pi n(1-x)\right)\right]. \tag{14}$$

Використаємо (14), щоб показати, як виконання умов гладкості впливає на збіжність розв'язку.

Приклад 1. Нехай, $f_0(y)=y(1-y)$, $f_1(y)=0$. У цьому разі $f_{1n}=0$, $f_{0n}=\frac{4[1-(-1)^n]}{(\pi n)^3}$, тоді

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left[\pi(2n+1)(1-x)\right]\sin\left[\pi(2n+1)y\right]}{(2n+1)^3\sinh\left[\pi(2n+1)\right]}$$

---

[3] Гіперболічні функції $\sinh\left(x\right)$ та $\sinh\left(x-a\right)$ є лінійно незалежними при $a\neq 0$.

Щоб оцінити якість апроксимації частковими сумами, розглянемо

$$U(x,y,N)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sinh\left[\pi(2n+1)(1-x)\right]\sin\left[\pi(2n+1)y\right]}{(2n+1)^3\sinh\left[\pi(2n+1)\right]}$$

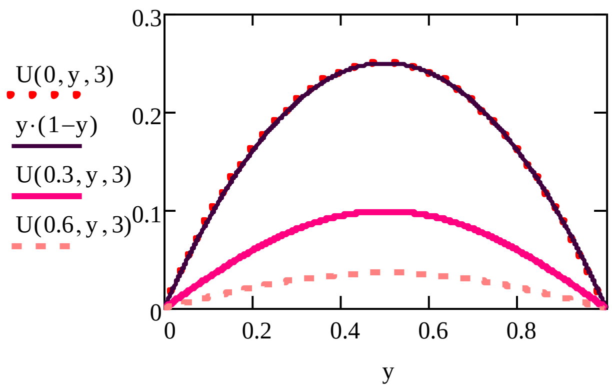


Рис.1 Графіки функцій $U(x,y,N)$ для значень $x=0;0.3;0.6$ у наближеннях з трьома членами ряду (N=3), а також функція $f_0(y)=y(1-y)$ з граничної умови (9), що задовольняє умовам при $y=0, y=1$.

На Рис.1 показано графіки функцій $U(x,y,N)$ для декількох фіксованих значень x у різних наближеннях з N членами ряду. При $x\to1$ розв'язок прямує до нуля відповідно до нульової граничної умови. Видно, що для $N=3$ апроксимація розв'язку при $x=0$ практично збігається з граничною умовою $f_0(y)$.

Приклад 2. Для порівняння розглянемо розв'язок цієї ж задачі (8,9) з $f_0(y)\equiv1$. Тут не виконана умова неперервності на стороні $x=0$ при $y=0,\quad y=1$. Платою за це є більш повільна збіжність до початкової умови при $x=0$, що видно з Рис.2. Тут часткові суми ряду мають вид

$$U(x,y,N)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sinh\left[\pi(2n+1)(1-x)\right]\sin\left[\pi(2n+1)y\right]}{(2n+1)\sinh\left[\pi(2n+1)\right]}.$$

При $x>0$ ряд збігається дуже швидко, але умова при $x=0$ вимагає значної кількості членів ряду.

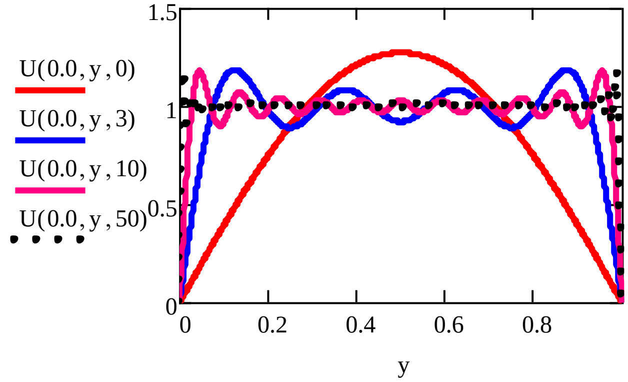


Рис.2. Часткові суми $U(x, y, N)$ з різними кількостями членів N, що апроксимують граничну умову (9) з $f_0(y) \equiv 1$, $f_1(y) = 0$ при $x = 0$.

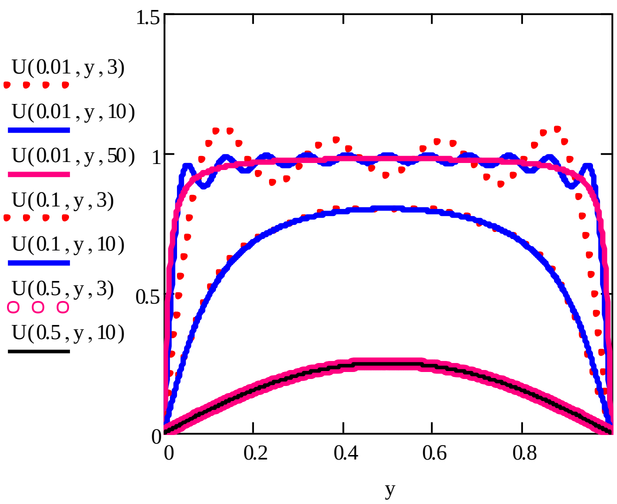
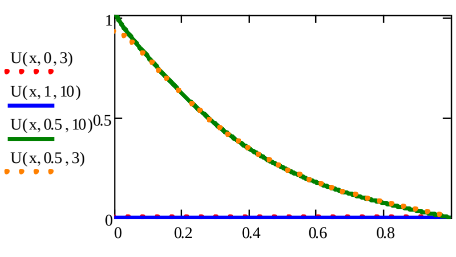
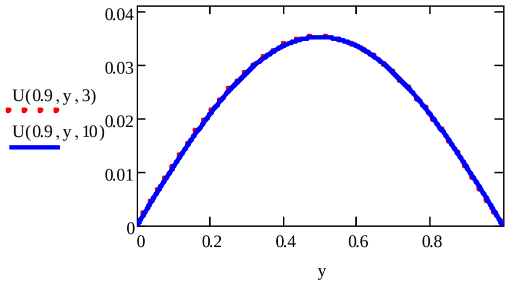


Рис.3. Часткові суми $U(x, y, N)$ з різними кількостями членів, що апроксимують граничну умову (9) з $f_0(y) \equiv 1$, $f_1(y) = 0$ при різних значеннях $x \in [0,1]$. Точність різко покращується зі збільшенням x.





Розв'язки спадають до нуля при $x \to 1$.

Література.

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
2. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
3. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. - К.:Либідь, 2014.