3.2. Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$.

Досі ми не з'ясовували трансформаційні властивості величин $F_{\mu\nu}$, які є розв'язками рівнянь електродинаміки (3.1), (3.2). За певних граничних умов розв'язок цих рівнянь визначений єдиним чином. Для подальшого досить розглянути якусь одну постановку задачі для (3.1), (3.2), що забезпечує єдиність, зокрема, що відповідає розгляду ізольованої системи. Адже фізичні властивості поля, в тому числі і трансформаційні співвідношення, що пов'язують різні інерціальні системи, не залежать від того, яка конфігурація зарядів створює це поле.

Врахуємо, що, за відсутності зовнішнього випромінювання, рівняння (3.1), (3.2) визначають електромагнітне поле $F_{\alpha\beta}$ (а також і $F^{\alpha\beta}$) обмеженої системи зарядів і струмів *однозначно в усьому просторі*, якщо ці рівняння розглядають, починаючи з нескінченного минулого. Відповідний розв'язок для поля ізольованої системи можна подати за допомогою запізнюючих потенціалів (див. далі (3.13) та представлення (3.10) електромагнітного поля через 4-вектор потенціалу), за допомогою яких $F_{\alpha\beta}$ однозначно виражається через 4-вектор струму. Ці формули дають змогу явно дослідити трансформаційні властивості $F_{\alpha\beta}$ при переході в іншу інерціальну систему відліку. Але тут ми вчинимо інакше, виходячи безпосередньо з рівнянь Максвелла.

Нехай $F_{\alpha\beta}$, що подає напруженості полів, є розв'язком рівнянь Максвелла в інерціальній системі S з координатами $\{x\}$, а $\tilde{F}_{\alpha\beta}$ – розв'язком в інерціальній системі S' з координатами в системі $\{x'\}$: $x'^{\alpha'} = L^{\alpha'}{}_{\alpha} x^{\alpha}$.

Маючи компоненти $F_{\alpha\beta}$ та $F^{\alpha\beta}$ в системі S, можна формально ввести тензор в усіх системах координат відомими співвідношеннями, зокрема, в системі S' це будуть компоненти

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= (L^{-1})^{\alpha}{}_{\mu}(L^{-1})^{\beta}{}_{\nu}F_{\alpha\beta}, \\ F'^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F'_{\alpha\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta} \end{aligned}. \qquad (3.4)$$

За властивостями тензорів, ці величини можна диференціювати, утворюючи нові тензори, утворювати лінійні комбінації з тензорами аналогічної будови тощо. Оскільки, за припущенням, $F_{\alpha\beta}$ є розв'язком рівнянь Максвелла (3.1),(3.2) в системі S:

$$\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{4\pi}{c} J^{\alpha} = 0\ ,\ \partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda}F_{\mu\nu} = 0\ ,$$

аналогічне співвідношення маємо для тензорів в лівій частині рівнянь і в системі S':

$$\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{4\pi}{c} J'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\alpha}\left(\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{4\pi}{c} J^{\alpha}\right) = 0\ ,$$

$$\begin{aligned} &\partial'_{\alpha} F'_{\beta\gamma} + \partial'_{\beta} F'_{\gamma\alpha} + \partial'_{\gamma} F'_{\alpha\beta} = \\ &= (L^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(L^{-1})^{\nu}{}_{\beta}(L^{-1})^{\lambda}{}_{\gamma}\left(\partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda}F_{\mu\nu}\right) = 0\ . \end{aligned}$$

Таким чином, тензор $F'_{\alpha\beta}$, що подається співвідношеннями (3.4), є розв'язком рівнянь електромагнітного поля в системі S'. Завдяки єдиності розв'язку цих рівнянь компоненти тензора $F'_{\alpha\beta} = \tilde{F}_{\alpha\beta}$ подають електромагнітне поле в новій системі відліку S'. Таким чином, зв'язок компонент тензора електромагнітного поля в різних системах дійсно можна подати формулами (3.4). Співвідношення, аналогічні (3.4), можна отримати між будь-якими системами відліку. Сукупність компонент $F_{\alpha\beta}$ в усіх системах утворює двічі коваріантний тензор.

Вправа 3.3. Відносно інерціальної системи відліку S з координатами $\{t,\mathbf{r}\}, \mathbf{r} = (x,y,z)$, рухається із сталою швидкістю $\mathbf{v}$ інша інерціальна система S' з координатами $\{t',\mathbf{r}'\}, \mathbf{r}' = (x',y',z')$. У деякий момент початки координат збігалися. Перетворення координат $S \to S'$ має вид

$$\mathbf{r}'_{||} = \frac{\mathbf{r}_{||} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp} \quad , \qquad (*)$$

де позначки $\|$ $\|$ та $\perp$ відповідають поздовжнім та поперечним компонентам тривимірних векторів. За допомогою закону перетворення для тензора електромагнітного поля покажіть, що відповідні до (*) перетворення поперечних та поздовжніх компонент напруженості електричного поля та індукції магнітного поля мають вид

$$\mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||}, \quad \mathbf{B}'_{||} = \mathbf{B}_{||},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Вправа 3.5. Виходячи з 4-вектора густини струму, покажіть, що перетворення густини заряду та густини струму, відповідні переходу $S \to S'$ з Вправи 3.3, мають вид

$$\rho' = \frac{\rho - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{v})/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{J}'_{||} = \frac{\mathbf{J}_{||} - \rho\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp}.$$

3.6. Вектор–потенціал електромагнітного поля у випадку ізольованої системи

У цьому розділі отримаємо явний розвязок рівнянь електромагнітного поля за допомогою *4-вектор потенціалу,* існування якого забезпечене рівняннями (3.2): внаслідок цих рівнянь можна ввести коваріантне векторне поле A_μ (4-потенціал), таке, що

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad . \tag{3.10}$$

Дійсно, підстановка (3.10) в рівняння (3.2) дає тотожний нуль. Можна показати й обернене, що з рівняння (3.2) дійсно випливає існування деякого поля A_μ, що дає (3.10). Однак ми не доводимо це твердження, оскільки ми отримаємо A_μ в явному вигляді, з якого буде видно, що це дійсно коваріантний вектор, який реалізує розв'язок (3.1), що відповідає умовам ізольованої системи зарядів та струмів; при цьому (3.2), як було зазначено, виконуються тотожно.

Очевидно, фізичні поля, що їх описує тензор $F_{\mu\nu}$ згідно до (3.10), залишаться незмінними при перетворенні виду $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \chi$, де χ – довільна функція. Це перетворення 4-потенціалу називають *калібрувальним (або градієнтним).* Завдяки калібрувальній інваріантності можна накласти *умову Лоренца*[1]

$$\partial_\nu A^\nu = 0 . \tag{3.11}$$

Цю умову також далі перевіримо явно, коли отримаємо потрібний розв'язок.

За умови (3.11) підстановка (3.10) у рівняння Максвелла (3.1) дає

$$\Box A^\nu = (4\pi / c) J^\nu , \tag{3.12}$$

де $\Box \equiv \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ – оператор Даламбера (хвильовий оператор).

Розв'язок (3.12), що задовольняє також (3.11), породжує розв'язок рівнянь Максвелла для тензора електромагнітного поля за формулою (3.10). Далі ми знов звернемося до постановки задачі, що відповідає *ізольованій системі за відсутності зовнішнього випромінювання.* Розглянемо розв'язок (3.12) починаючи з нескінченного минулого, припускаючи, що

[1] Якщо б ця умова не виконувалася, можна підібрати функцію χ так, аби забезпечити (3.11) для нового 4-потенціалу.

4-вектор $J^{\nu}(x) \equiv J^{\nu}(x^0, \mathbf{x})$ відмінний від нуля лише в обмеженій області просторових координат $\mathbf{x}$, а будь-які джерела на нескінченності відсутні. Як відомо з курсу математичної фізики, цим умовам відповідає розв'язок рівняння (3.12) у вигляді запізнюючих потенціалів, що можна подати за допомогою фундаментального розв'язку $D_{ret}(x)$ оператора Даламбера:

$$D_{ret}(x) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta[(x^0)^2 - \mathbf{x}^2]\ ,\ x \equiv \{x^{\alpha}\} \equiv (x^0, \mathbf{x})\,,$$

$\theta(t) \equiv \{0, x<0; 1, x>0\}$ – функція Хевісайда, δ – функція Дірака; цей розв'язок, за визначенням, задовольняє рівнянню

$$\Box D_{ret}(x) = \delta^4(x) \equiv \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)\,.$$

Відповідний розв'язок рівняння (3.12) має вид згортки[1]

$$A^{\nu} = \frac{4\pi}{c} D_{ret} * J^{\nu}\,. \qquad (3.13)$$

Формально це можна записати так:

$$A^{\nu}(x) = \frac{2}{c}\int d^4x\ \theta(x^0 - x'^0)\delta[(x^0 - x'^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2]J^{\nu}(x')\ =$$

(після інтегрування по x^0)

$$= \frac{1}{c}\int d^3\mathbf{x}'\ \frac{J^{\nu}(x^0_{ret}, \mathbf{x}')}{|\,\mathbf{x} - \mathbf{x}'\,|}\text{, де } x^0_{ret} \equiv x^0 - |\,\mathbf{x} - \mathbf{x}'\,|\,.$$

Розв'язок описує електромагнітне поле обмеженої системи з 4-вектором густини струму J^{ν}. Функція $D_{ret}(x)$ є скаляром

[1]Згортка функцій (відрізняти від згортки тензорів!) є $(f * g)(x) = \int d^4y f(y) g(x-y)$.

відносно власних перетворень Лоренца, оскільки тут аргумент δ-функції залежить від квадрата інтервалу, а в $\theta(x^0)$ аргумент не змінює знак при цих перетвореннях. Тому з (3.13) випливає, що A^ν **є чотиривектором відносно перетворень власної групи Лоренца, оскільки** J^ν **– чотиривектор.**

Формула (5.13), що явно гарантує властивості A^ν як чотиривектора, дозволяє прямо обчислити за допомогою (3.10) закон перетворення компонент $F_{\mu\nu}$ при переході в іншу систему відліку. Це дає змогу встановити, що $F_{\mu\nu}$ **– двічі коваріантний тензор**.

Користуючись рівнянням (3.13), перевіримо також калібрувальну умову (3.11). Маємо

$$\partial_\nu A^\nu = \frac{4\pi}{c}\partial_\nu\{D_{ret} * J^\nu\} \equiv \frac{4\pi}{c}\int \frac{\partial}{\partial x^\nu} D(x-x')J^\nu(x')d^4x' =$$
$$= \frac{4\pi}{c}\int D(x-x')\frac{\partial}{\partial x^\nu}J^\nu(x')d^4x' \equiv \frac{4\pi}{c}D_{ret} * \partial_\nu J^\nu = 0,$$

внаслідок закону збереження заряду (3.3). За умови Лоренца з рівнянь (3.11),(3.12) випливає (3.1).

Таким чином, тензор $F_{\mu\nu}$, обчислений за формулами (3.10),(3.13), задовольняє рівнянням (3.1), (3.2).

3.3. Рівняння руху зарядженої частинки

Як було зазначено, рівняння Максвелла задовольняють принципу відносності; тому при створенні СТВ вони не потребували жодних коректив. Навпаки, рівняння руху ньютонівської динаміки, зокрема, для зарядженої частинки, мали бути модифіковані: можна показати, вони не задовольняють принципам СТВ і призводять до нефізичних наслідків, коли швидкості руху наближаються до швидкості світла. Цю модифікацію можна отримати, якщо врахувати принцип відносності і те, що рівняння руху не містять якихось додаткових фізичних величин, окрім швидкості, прискорення, компонент $F_{\mu\nu}$, а також маси частинки m та її заряду q.

Отримаємо ці рівняння з урахуванням *принципу відповідності з класичною теорією*: за малих швидкостей в деякій системі відліку можна користуватися ньютонівськими рівняннями руху

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left\{\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]\right\}.$$

Основна ідея полягає у тому, що якщо ми знаємо співвідношення між тензорними величинами в одній системі відліку, то ці співвідношення можна поширити на будь які системи (див. основні властивості тензорів з п.2).

Розглянемо коваріантний 4-вектор

$$R^{\mu} = mc^2\frac{du^{\mu}}{ds} - qF^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu},$$

де $s = c\tau$, τ – власний час вздовж світової лінії частинки, $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$.

Зафіксуємо деякій момент t_1 і подію А з координатами $(t_1, \mathbf{x}(t_1))$ та розглянемо інерціальну систему відліку S_1, таку, де швидкість частинки у цей момент дорівнює нулю: $\mathbf{v}=0$. Тоді, згідно з принципом відповідності, в цій системі у момент події А можна використати ньютонівські співвідношення (в декартових координатах)

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=q\left\{\mathbf{E}+\tfrac{1}{c}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right]\right\}=q\mathbf{E}\text{ , а також } m\frac{d(\mathbf{v}^2/2)}{dt}=0 .$$

Завдяки цьому легко обчислити усі компоненти в S_1: $R^{\mu}=0$ в момент події А. Але, оскільки, за побудовою, R^{μ} це вектор, згідно до властивостей векторів (п.2.2) він дорівнює нулю у довільній інерціальній системі. Звідси маємо рівняння руху в момент події А:

$$mc^2\frac{du^{\mu}}{ds}=qF^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu} . \tag{3.5}$$

Ці міркування можна повторити для будь-якої події на траєкторії частинки, тому рівняння (3.5) є шуканим релятивістським узагальненням рівняння руху зарядженої частинки.

Звернемо увагу, що серед чотирьох рівнянь (3.5) лише три є незалежними, якщо врахувати зв'язок (2.6) між компонентами чотири-швидкості. Навпаки, можна показати, що вони не суперечать (2.6): якщо помножити (3.5) на u_{μ}, в силу антисиметрії $F^{\mu\nu}$ у правій частині маємо $F^{\mu}{}_{\nu}u^{\nu}u_{\mu}\equiv F^{\mu\nu}u_{\mu}u_{\nu}\equiv 0$, звідки $u_{\mu}\frac{du^{\mu}}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d(u_{\mu}u^{\mu})}{ds}=0$, тобто з рівнянь (3.5) випливає $u^{\mu}u_{\mu}=const$. Кількість ступенів вільності, що визначається кількістю незалежних початкових умов для рівнянь руху, тут така ж сама, як і в класичній механіці.

З рівнянь руху отримаємо формулу для енергії та імпульсу частинки. Запишемо тривимірну форму рівнянь руху, яка є еквівалентною трьом компонентам (3.5) при $\mu = i = 1,2,3$:

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right\}.$$

Права частина – це сила Лоренца, що визначає швидкість передачі імпульсу від поля до зарядженої частинки. Звідси випливає *вираз для релятивістського (тривимірного) імпульсу*

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}},$$

зрозуміло, тут вважаємо, що нульовий імпульс відповідає нульовій швидкості.

Компонента $\mu = 0$ рівняння (3.5) дає

$$mc^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}).$$

Права частина – це звичайна потужність, яку витрачає електричне поле, діючи на частинку. Звідси випливає *релятивістський вираз для енергії рухомого тіла* $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}$.

Тут зроблено вибір константи інтегрування, що відповідає експериментальним даним щодо власної енергії частинок.

3.4. Плоскі хвилі

За відсутності зарядів і струмів ($J^\mu = 0$) розв'язок однорідних рівнянь Максвелла

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0\,,\ \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0\,,$$

можна шукати у вигляді суперпозиції плоских хвиль

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}\exp[-i\Omega]\,,$$

де компоненти тензора $f_{\mu\nu}$ – сталі, а скаляр Ω – лінійна функція координат, $\Omega(x) = k_\mu x^\mu \equiv k^0 x^0 - \mathbf{kx}$, $k_\mu = \partial_\mu \Omega$ – хвильовий (коваріантний) чотиривектор.

Частота коливань електромагнітного поля, яка сприймається спостерігачем на світовій лінії $x^\mu_{\text{obs}}(\tau)$ – це швидкість зміни фази – величини $\Omega\left(x^\mu_{\text{obs}}(\tau)\right)$ – за власним часом спостерігача:

$$\omega = \frac{d}{d\tau}\Omega\left(x^\mu_{\text{obs}}(\tau)\right) = c\frac{d}{ds}\Omega = ck_\mu u^\mu_{\text{obs}}\,, \tag{3.6}$$

де $u^\mu_{\text{obs}} = \dfrac{dx^\mu_{\text{obs}}}{ds_{\text{obs}}}$ – чотиришвидкість спостерігача, $s_{\text{obs}} = c\tau_{\text{obs}}$.

Вектор $K^\mu = k^\mu - k_\alpha u^\alpha_{\text{obs}} u^\mu_{\text{obs}}$, ортогональний до u^μ_{obs}, визначає (у звичайному, тривимірному розумінні) напрямок руху електромагнітних хвиль відносно спостерігача. Дійсно, у власній системі спостерігача 4-швидкість має лише одну ненульову компоненту $\{u^\mu_{\text{obs}}\} = \{1,0,0,0\}$, звідки $K^0 = 0$, а тривимірні компоненти векторів співпадають $K^i = k^i$.

Підстановка тензора електромагнітного поля для плоских хвиль у (3.1) та (3.2) дає

$$f^{\mu\nu}k_\nu = 0\,, \tag{3.7}$$

$$f_{\alpha\beta}k_\gamma + f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta = 0\,. \tag{3.8}$$

Перше рівняння (3.7) складає умову поперечності електромагнітних хвиль у вакуумі. Згортаючи (3.8) з k^γ, після підсумовування за індексом γ з урахуванням (3.7) отримуємо $f_{\alpha\beta}k_\gamma k^\gamma = 0$ та, для ненульової амплітуди $f_{\alpha\beta}$,

$$k_\gamma k^\gamma = 0 \text{ або } \eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial x^\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{3.9}$$

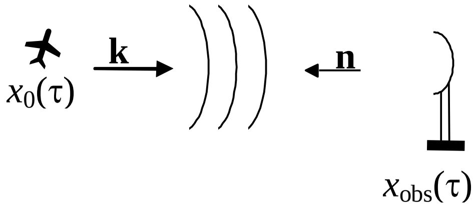
Звідси випливає $k^0 = |\mathbf{k}|$. Згортаючи (3.8) з $f^{\alpha\beta}$ із врахуванням (3.7) дістанемо $f^{\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = 0$, або $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E}^2 = \mathbf{B}^2$. Згорнемо (3.8) з $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}$ та врахуємо, що (3.8) можна записати як $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}k_\alpha f_{\beta\gamma} = 0$. Після такої операції зникають доданки

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(f_{\mu\nu}f_{\beta\gamma}k_\alpha + f_{\gamma\alpha}k_\beta) \equiv (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\alpha)f_{\beta\gamma} + (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}k_\beta)f_{\gamma\alpha} = 0$$

і залишається $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}f_{\mu\nu}f_{\alpha\beta} = 0$, або $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} = 0$, що еквівалентне $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = 0$. Як і слід було очікувати, отримано звичайні співвідношення для плоских хвиль у вакуумі.

3.5. Ефект Доплера

Отримаємо формулу ефекту Допплера, який полягає у зміні спостережуваної частоти випромінювання в залежності від руху джерела відносно спостерігача. Аналогічно (3.6) власна частота коливань випромінювача з траєкторією $x_0^\mu(\tau_0)$ та 4-швидкістю $u_0^\mu = dx_0^\mu / ds_0$ є $\omega_0 = \frac{d}{d\tau}\Omega\left(x_0^\mu(\tau_0)\right) = ck_\mu u_0^\mu$. Ця формула інваріантна, її можна використовувати у будь-якій системі.



Далі усі величини розглянемо у системі спостерігача, де його 4-швидкість $u_c^\mu = \{1,0,0,0\}$, а виміряна ним частота $\omega_{obs} = ck_\mu u_{obs}^\mu = ck_0 = ck^0$. Напрям поширення хвиль, що приймає спостерігач, визначається просторовою частиною чотиривектора k^μ; він є протилежним напрямку від спостерігача на джерело випромінювання $\mathbf{n} = -\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = -\mathbf{k}/k^0$.

Після переходу в систему спостерігача маємо

$$\frac{\omega_{obs}}{\omega_0} = \frac{k_\mu u_{obs}^\mu}{k_\mu u_0^\mu} = \frac{k_0}{k_\mu u_0^\mu} = \frac{1}{u_0^0(1+\mathbf{nv}/c)} = \frac{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}{(1+\mathbf{nv}/c)},$$

де $\mathbf{v}$ – швидкість джерела відносно спостерігача. За нерелятивістських швидкостей корінь у чисельнику можна наближено замінити на одиницю.

Нехай спостерігач та джерело знаходяться весь час на одній прямій. Коли джерело віддаляється від спостерігача, то

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1-\upsilon/c}{1+\upsilon/c}\right)^{1/2} < 1, \quad \upsilon = |\,\mathbf{v}\,|\,.$$

Коли, навпаки, джерело наближається до спостерігача, маємо

$$\frac{\omega_{\text{obs}}}{\omega_0} = \left(\frac{1+\upsilon/c}{1-\upsilon/c}\right)^{1/2} > 1\,.$$