

Варіанти машини Тюрінга

Андрій Фесенко

Стандартна однострічкова машина Тюрінга

Означення

Стандартною однострічковою машиною Тюрінга називають абстрактний обчислювальний пристрій, який визначається кортежем $(\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де

- Γ — непорожня скінченна множина, яку називають **алфавітом машини Тюрінга M** або **алфавітом стрічки**;
- $\# \in \Gamma$ — **порожній символ**;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — непорожня скінченна множина, яку називають **вхідним алфавітом**;
- Q — непорожня скінченна **множина внутрішніх станів**;
- $Q_F \subseteq Q$ — **множина кінцевих внутрішніх станів**;
- $q_0 \in Q$ — **початковий (внутрішній) стан**;
- $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ — (часткова) **функція переходів**.

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Означення

Стандартною багатострічковою машиною Тюрінга називають абстрактний обчислювальний пристрій, який визначається кортежем $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де

- $k \in \mathbb{N}^+$ — кількість стрічок;
- Γ — непорожня скінченна множина, яку називають **алфавітом машини Тюрінга M** або **алфавітом стрічки**;
- $\# \in \Gamma$ — **порожній символ**;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — непорожня скінченна множина, яку називають **вхідним алфавітом**;
- Q — непорожня скінченна **множина внутрішніх станів**;
- $Q_F \subseteq Q$ — **множина кінцевих внутрішніх станів**;
- $q_0 \in Q$ — **початковий (внутрішній) стан**;
- $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$ — (часткова) **функція переходів**.

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Наслідок

Стандартна однострічкова машина Тюрінга є частковим випадком стандартної багатострічкової машини Тюрінга.

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Наслідок

Стандартна однострічкова машина Тюрінга є частковим випадком стандартної багатострічкової машини Тюрінга.

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна багатострічкова машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} , яка обчислює значення функції f за час $8k \cdot t^2(n) + 2t(n) \cdot (k^2 + k + 1) + 2k \cdot n^2 + 1$, тобто $\mathcal{O}(t^2(n) + n^2)$.

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k



Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft



Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft
- один такт M :

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- $\hat{a}, a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - ➊ пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- $\hat{a}, a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з \wedge

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- $\hat{a}, a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з $\hat{}$
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- $\hat{a}, a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з $\hat{}$
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з \hat{a}
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення
 - 5 за необхідності перемістити символи обмеження

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи z^{\wedge}
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення
 - 5 за необхідності перемістити символи обмеження
 - 6 $2 \cdot 2k \cdot t(n) + 2 + 2k^2$ тактів \tilde{M}

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- $\hat{a}, a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з \hat{a}
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення
 - 5 за необхідності перемістити символи обмеження
 - 6 $2 \cdot 2k \cdot t(n) + 2 + 2k^2$ тактів \tilde{M}
- останній “напівтакт”: $2k \cdot t(n) + 1$

Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з \hat{a}
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення
 - 5 за необхідності перемістити символи обмеження
 - 6 $2 \cdot 2k \cdot t(n) + 2 + 2k^2$ тактів \tilde{M}
- останній “напівтакт”: $2k \cdot t(n) + 1$
- додатково, перетворення вхідного слова: $2k \cdot n^2$



Стандартна багатострічкова машина Тюрінга

Доведення.

- для кожної стрічки — своя решітка з кроком k
- \hat{a} , $a \in \Gamma$ — місце зчитувальних пристроїв
- спеціальні символи для обмеження робочої області: \blacktriangleright , \blacktriangleleft
- один такт M :
 - 1 пройти всі комірки на всіх решітках (між обмеженнями)
 - 2 запам'ятати всі символи з \hat{a}
 - 3 знайти символи, які треба записати, новий стан та переміщення
 - 4 ще раз пройти всі комірки на всіх решітках, оновлюючи відповідні значення
 - 5 за необхідності перемістити символи обмеження
 - 6 $2 \cdot 2k \cdot t(n) + 2 + 2k^2$ тактів \tilde{M}
- останній “напівтакт”: $2k \cdot t(n) + 1$
- додатково, перетворення вхідного слова: $2k \cdot n^2$
- додатково, перетворення вихідного слова: $2 \cdot 2k \cdot t(n) \cdot t(n)$



Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна багатострічкова машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \{0, 1\}, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна багатострічкова машина Тюрінга \tilde{M} , яка використовує алфавіт стрічки $\{0, 1, \#\}$ і обчислює значення функції f за час $t(n) \cdot (5 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil - 1) + 2(t(n) + n)(\lceil \log |\Gamma| \rceil + 1) + 8$.

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)



Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :



Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ



Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення



Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення
 - 3 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб перемістити відповідно зчитувальні пристрої

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення
 - 3 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб перемістити відповідно зчитувальні пристрої
 - 4 можливо, $2 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil$ для зміни обмежень

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення
 - 3 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб перемістити відповідно зчитувальні пристрої
 - 4 можливо, $2 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil$ для зміни обмежень
 - 5 $5 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil - 1$ тактів \tilde{M}

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення
 - 3 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб перемістити відповідно зчитувальні пристрої
 - 4 можливо, $2 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil$ для зміни обмежень
 - 5 $5 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil - 1$ тактів \tilde{M}
- додатково, перетворення вхідного слова + обмеження:
 $2n \cdot (\lceil \log |\Gamma| \rceil + 1) + 4$

Машина Тюрінга з довільним алфавітом стрічки

Доведення.

- стиснення вмісту стрічки навпаки: одній комірці відповідає $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок (на крайній лівій блоку)
- спеціальні символи для обмеження робочої області: $\blacktriangleright, \blacktriangleleft$
- один такт M :
 - 1 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб “зчитати” символ
 - 2 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб оновити значення
 - 3 пройти $\lceil \log |\Gamma| \rceil$ комірок, щоб перемістити відповідно зчитувальні пристрої
 - 4 можливо, $2 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil$ для зміни обмежень
 - 5 $5 \cdot \lceil \log |\Gamma| \rceil - 1$ тактів \tilde{M}
- додатково, перетворення вхідного слова + обмеження:
 $2n \cdot (\lceil \log |\Gamma| \rceil + 1) + 4$
- додатково, перетворення вихідного слова:
 $2t(n) \cdot (\lceil \log |\Gamma| \rceil + 1) + 4$



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Означення

Зчитувальний пристрій машини Тюрінга **має можливість затримки**, якщо він на кожному такті на своїй стрічці може не рухатися праворуч або ліворуч, а залишитися на поточній комірці. Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з можливістю затримки** (Turing Machine with Stay option), якщо всі її зчитувальні пристрої мають можливість затримки.

Машина Тюрінга з можливістю затримки

Означення

Зчитувальний пристрій машини Тюрінга **має можливість затримки**, якщо він на кожному такті на своїй стрічці може не рухатися праворуч або ліворуч, а залишитися на поточній комірці. Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з можливістю затримки** (Turing Machine with Stay option), якщо всі її зчитувальні пристрої мають можливість затримки.

Наслідок

Будь-яка програма машини Тюрінга без можливості затримки є програмою машини Тюрінга з можливістю затримки.

Однострічкова машина Тюрінга з можливістю затримки:

$$\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}.$$

Багатострічкова машина Тюрінга з можливістю затримки:

$$\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k.$$

Машина Тюрінга з можливістю затримки

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна однострічкова машина Тюрінга M з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $2 \cdot t(n)$.

Машина Тюрінга з можливістю затримки

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна однострічкова машина Тюрінга M з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $2 \cdot t(n)$.

Доведення.

- нехай $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна однострічкова машина Тюрінга M з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $2 \cdot t(n)$.

Доведення.

- нехай $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$
- для кожного стану $q_a \in Q$ додаємо новий стан \tilde{q}_a до множини Q



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна однострічкова машина Тюрінга M з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $2 \cdot t(n)$.

Доведення.

- нехай $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$
- для кожного стану $q_a \in Q$ додаємо новий стан \tilde{q}_a до множини Q
- замість кожної команди виду (q_1, x, q_2, y, S) додаємо дві команди: $(q_1, x, \tilde{q}_2, y, R)$ і $(\tilde{q}_2, *, q_2, *, L)$



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ існує стандартна однострічкова машина Тюрінга M з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує стандартна однострічкова машина Тюрінга \tilde{M} без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $2 \cdot t(n)$.

Доведення.

- нехай $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$
- для кожного стану $q_a \in Q$ додаємо новий стан \tilde{q}_a до множини Q
- замість кожної команди виду (q_1, x, q_2, y, S) додаємо дві команди: $(q_1, x, \tilde{q}_2, y, R)$ і $(\tilde{q}_2, *, q_2, *, L)$
- замість одного такту в найгіршому випадку — 2 такти



Твердження

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- існує машина Тюрінга M_1 без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_1 з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$.

Машина Тюрінга з можливістю затримки

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- існує машина Тюрінга M_1 без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_1 з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$.
- існує машина Тюрінга M_2 з можливістю затримки, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_2 без можливості затримки, яка обчислює значення функції f за час $3 \cdot t(n) + 4n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Доведення.

- перше твердження — частковий випадок



Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- нехай $M_2 = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ з можливістю затримки



Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- нехай $M_2 = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ з можливістю затримки
- подвоєння вмісту кожної комірки на кожній стрічці (другий символ z^\wedge)



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- нехай $M_2 = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ з можливістю затримки
- подвоєння вмісту кожної комірки на кожній стрічці (другий символ z^{\wedge})
- команди з переміщенням зчитувального пристрою — точно 3 такти (оновити обидві комірки + переміщення на дві комірки)



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- нехай $M_2 = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ з можливістю затримки
- подвоєння вмісту кожної комірки на кожній стрічці (другий символ z^\wedge)
- команди з переміщенням зчитувального пристрою — точно 3 такти (оновити обидві комірки + переміщення на дві комірки)
- команди без переміщення зчитувального пристрою — точно 3 такти (оновити обидві комірки і зробити 3 такти в межах блоку)



Машина Тюрінга з можливістю затримки

Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- нехай $M_2 = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ з можливістю затримки
- подвоєння вмісту кожної комірки на кожній стрічці (другий символ z^\wedge)
- команди з переміщенням зчитувального пристрою — точно 3 такти (оновити обидві комірки + переміщення на дві комірки)
- команди без переміщення зчитувального пристрою — точно 3 такти (оновити обидві комірки і зробити 3 такти в межах блоку)
- копіювати вхід — $2n + 2n + \lceil \frac{n}{2} \rceil$



Машина Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **нескінченною в один бік**, якщо вона є нескінченною тільки в правий бік, а крайня ліва комірка, яку називають початком стрічки, містить спеціальний виділений **символ початку стрічки**.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками** (Turing Machine with Semi-infinite tape), якщо всі її стрічки є нескінченними в один бік.

Машина Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **нескінченною в один бік**, якщо вона є нескінченною тільки в правий бік, а крайня ліва комірка, яку називають початком стрічки, містить спеціальний виділений **символ початку стрічки**.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками** (Turing Machine with Semi-infinite tape), якщо всі її стрічки є нескінченними в один бік.

Наслідок

Однострічкова машина Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками — $(\Gamma, \Sigma, \#, \triangleright, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\triangleright \in \Gamma$ — **символ початку стрічки** і $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#, \triangleright\}$; якщо $\delta(q_1, \triangleright) = q_2, x, z$, де $q_1 \in Q \setminus Q_F$, $q_2 \in Q$, $x \in \Gamma$ і $z \in \{L, R\}$, то $x = \triangleright$ і $z = R$.

Машина Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **нескінченною в один бік**, якщо вона є нескінченною тільки в правий бік, а крайня ліва комірка, яку називають початком стрічки, містить спеціальний виділений **символ початку стрічки**.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками** (Turing Machine with Semi-infinite tape), якщо всі її стрічки є нескінченними в один бік.

Наслідок

Однострічкова машина Тюрінга з нескінченними в один бік стрічками — $(\Gamma, \Sigma, \#, \triangleright, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де $\triangleright \in \Gamma$ — **символ початку стрічки** і $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#, \triangleright\}$; якщо $\delta(q_1, \triangleright) = q_2, x, z$, де $q_1 \in Q \setminus Q_F$, $q_2 \in Q$, $x \in \Gamma$ і $z \in \{L, R\}$, то $x = \triangleright$ і $z = R$.

$\mathcal{O}(t^2(n))$ для однострічкової машини Тюрінга

$\mathcal{O}(t(n))$ для багатострічкової машини Тюрінга

Стрічки, доступні тільки для зчитування

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **доступною тільки для зчитування**, якщо забороняється використовувати правила переходів, які змінюють будь-який її символ.

Багатострічкову машину Тюрінга, яка має більше однієї стрічки, називають **машиною Тюрінга з вхідною стрічкою, доступною тільки для зчитування** (Offline Turing Machine), якщо її вхідна стрічка є доступною тільки для зчитування.

Стрічки, доступні тільки для зчитування

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **доступною тільки для зчитування**, якщо забороняється використовувати правила переходів, які змінюють будь-який її символ.

Багатострічкову машину Тюрінга, яка має більше однієї стрічки, називають **машиною Тюрінга з вхідною стрічкою, доступною тільки для зчитування** (Offline Turing Machine), якщо її вхідна стрічка є доступною тільки для зчитування.

Наслідок

Для багатостріркової машини Тюрінга з вхідною стрічкою, доступною тільки для зчитування, змінюється область значень функції переходів: $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, R\}^k$.

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- ❶ існує машина Тюрінга M_1 без можливості запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_1 з можливістю запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$.
- ❷ існує машина Тюрінга M_2 з можливістю запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_2 без можливості запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n) + 2n + 2$.

Стрічки, доступні тільки для зчитування

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ та довільної функції $t : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

- 1 існує машина Тюрінга M_1 без можливості запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_1 з можливістю запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$.
- 2 існує машина Тюрінга M_2 з можливістю запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, то існує машина Тюрінга \tilde{M}_2 без можливості запису на вхідну стрічку, яка обчислює значення функції f за час $t(n) + 2n + 2$.

Доведення.

- перше твердження — частковий випадок
- використаємо додаткову стрічку і скопіюємо на неї вхідне слово — n тактів + $n + 2$, щоб повернутися на початок слова

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою без видалення**, якщо забороняється перезаписувати будь-який непорожній символ порожнім символом.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга без видалення** (Non-erasing Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками без видалення.

Властивості машин Тюрінга

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою без видалення**, якщо забороняється перезаписувати будь-який непорожній символ порожнім символом.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга без видалення** (Non-erasing Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками без видалення.

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою з обов'язковим перезаписуванням**, якщо обов'язково змінювати символ в її комірці на кожному такті.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з обов'язковим перезаписуванням** (Always writing Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками з обов'язковим перезаписуванням.

Означення

Багатострічкову машину Тюрінга, яка має більше однієї стрічки, називають **багатоканальною машиною Тюрінга** (Multi-track Turing Machine), якщо всі її зчитувальні пристрої завжди рухаються однаково ($\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}$).

Властивості машин Тюрінга

Означення

Багатострічкову машину Тюрінга, яка має більше однієї стрічки, називають **багатоканальною машиною Тюрінга** (Multi-track Turing Machine), якщо всі її зчитувальні пристрої завжди рухаються однаково ($\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}$).

Означення

Зчитувальний пристрій машини Тюрінга називають **зчитувальним пристроєм з обов'язковим рухом праворуч (ліворуч)**, якщо зчитувальний пристрій може рухатися тільки праворуч (ліворуч) (або залишатися на місці).

Багатострічкову машину Тюрінга, яка має більше однієї стрічки, називають **машиною Тюрінга з обов'язковим рухом праворуч**, якщо її вихідна стрічка має зчитувальний пристрій з обов'язковим рухом праворуч.

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою з декількома зчитувальними пристроями**, якщо декілька зчитувальних пристроїв незалежно рухаються вздовж стрічки (рух і дії зчитувальних пристроїв є незалежними).

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з декількома зчитувальними пристроями** (Multi-head Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками з декількома зчитувальними пристроями.

Властивості машин Тюрінга

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою з декількома зчитувальними пристроями**, якщо декілька зчитувальних пристроїв незалежно рухаються вздовж стрічки (рух і дії зчитувальних пристроїв є незалежними).

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з декількома зчитувальними пристроями** (Multi-head Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками з декількома зчитувальними пристроями.

Означення

Стрічку машини Тюрінга називають **стрічкою із заборною перезаписування**, якщо забороняється перезаписувати будь-який непорожній символ.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з заборною перезаписування** (Once-write Turing Machine), якщо всі її стрічки є стрічками із заборною перезаписування.

Означення

Зчитувальний пристрій машини Тюрінга називають **зчитувальним пристроєм з можливістю більшого пересування**, якщо зчитувальний пристрій може пересуватися більше ніж на одну комірку за один такт.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з можливістю більшого пересування** (Jumping Turing Machine), якщо всі її зчитувальні пристрої є зчитувальними пристроями з можливістю більшого пересування

$(\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k \times \{1, \dots, m\}^k).$

Властивості машин Тюрінга

Означення

Зчитувальний пристрій машини Тюрінга називають **зчитувальним пристроєм з можливістю більшого пересування**, якщо зчитувальний пристрій може пересуватися більше ніж на одну комірку за один такт.

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з можливістю більшого пересування** (Jumping Turing Machine), якщо всі її зчитувальні пристрої є зчитувальними пристроями з можливістю більшого пересування

$$(\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k \times \{1, \dots, m\}^k).$$

Означення

Машину Тюрінга називають **машиною Тюрінга з одним кінцевим станом** (Turing Machine with One Final state), якщо вона має тільки один кінцевий стан.

- можна обирати декілька властивостей одночасно

- можна обирати декілька властивостей одночасно
- властивості машини Тюрінга vs властивості стрічки та зчитувального пристрою

- можна обирати декілька властивостей одночасно
- властивості машини Тюрінга vs властивості стрічки та зчитувального пристрою
- різниця між варіантами — $\mathcal{O}(t(n))$ або $\mathcal{O}(t^2(n))$ ($\mathcal{O}(t^m(n))$)

- можна обирати декілька властивостей одночасно
- властивості машини Тюрінга vs властивості стрічки та зчитувального пристрою
- різниця між варіантами — $\mathcal{O}(t(n))$ або $\mathcal{O}(t^2(n))$ ($\mathcal{O}(t^m(n))$)
- **Однострічкова машина Тюрінга з можливістю затримки та нескінченною в обидва боки стрічкою**

- можна обирати декілька властивостей одночасно
- властивості машини Тюрінга vs властивості стрічки та зчитувального пристрою
- різниця між варіантами — $\mathcal{O}(t(n))$ або $\mathcal{O}(t^2(n))$ ($\mathcal{O}(t^m(n))$)
- **Однострічкова машина Тюрінга з можливістю затримки та нескінченною в обидва боки стрічкою**
- **Багатострічкова машина Тюрінга з можливістю затримки, нескінченними в обидва боки стрічками та вхідною стрічкою, доступною тільки для зчитування**