I.Допоміжні відомості про диференціювання інтегральних (за Лебегом) виразів по параметру.

Теорема Фубіні про зміну порядку інтегрування.
Якщо

- функція $f(x,y),\quad x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$ вимірна[1],
- існує повторний інтеграл $\int\left[\int\left|f(x,y)\right|dx\right]dy<\infty$,

то $f(x,y)$ інтегровна.
Якщо функція $f(x,y),\quad x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^m$ інтегровна, то майже всюди існують та інтегровні $\int f(x,y)\,dx$ та $\int f(x,y)\,dy$, причому

$$\int f(x,y)\,dxdy=\int\left[\int f(x,y)\,dx\right]dy=\int\left[\int f(x,y)\,dy\right]dx\,.$$

Теорема про диференціювання по параметру
Нехай

- функція $f(x,t),\quad x\in\mathbb{R}^n, t\in(a,b)$ має неперервну по $t\in(a,b)$ похідну $f_t^{'}(x,t)$ для майже усіх $x\in\mathbb{R}^n$,
- існує інтегровна функція $g(x)$, така, що $\forall t\in(a,b)$ для майже усіх x: $\left|f_t^{'}(x,t)\right|\le g(x)$,
- для деякого $t_0\in(a,b)$ існує інтеграл $\int f(x,t_0)\,dx$.

Тоді $\int f(x,t)\,dx\in C^1(a,b)$, причому

$$\frac{d}{dt}\int f(x,t)\,dx=\int f_t^{'}(x,t)\,dx\,.$$

II. Інтеграли потенціального типу
Далі $\mathbf{r}\equiv\mathbf{x}\equiv(x_1,x_2,x_3),\quad r\equiv|\mathbf{r}|\equiv\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$; $\quad B(R,\mathbf{r})=\left\{\mathbf{r}':|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\le R\right\}$ – куля радіуса $R>0$ з центром в точці $\mathbf{r}$.
Нехай

$$I_\alpha(\mathbf{r})=\int_G\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^\alpha}d^3\mathbf{r}',\ \alpha=1,2$$

де $\operatorname{supp}\{\rho\}\subset B(R,\mathbf{0}),\quad R<\infty,\quad \rho(\mathbf{r})\in C^1(\mathbb{R}^3)$;
Можна показати, що звідси випливають твердження

1. $\left|I_\alpha(\mathbf{r})\right|\le C/r^\alpha$
2. $\left|I_\alpha(\mathbf{r})\right|\le CR^{3-\alpha}$
3. $I_\alpha(\mathbf{r})$ – неперервна й неперервно-диференційовна ф-ція від $\mathbf{r}$.

III. Розглянемо **рівняння Пуассона**

[1] Тобто її можна подати як границю послідовності кусково-неперервних функцій, що збігається майже всюди.

$$\Delta u = -4\pi\rho(\mathbf{r}), \;\; \rho(\mathbf{r}) \in C^1(\mathbb{R}^3). \tag{1}$$

З попередніх лекцій відомо, що розв'язок рівняння Пуассона єдиний в класі функцій з $C^2(\mathbb{R}^3)$, для яких

$$\sup\{r|u(\mathbf{r})|\} < \infty, \quad \sup\left\{r^2\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\right\} < \infty. \tag{2}$$

Позначимо

$$u(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \tag{3}$$

де $\rho(\mathbf{r}) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, а носій цієї функції

$$\mathrm{supp}\{\rho\} \subset B(R,0), \quad R < \infty. \tag{4}$$

З цих умов випливає

$$\exists M, M_1 : |\rho(\mathbf{r})| \le M, \quad |\partial\rho / \partial x_i| \le M_1. \tag{5}$$

Область інтегрування в (3) формально охоплює весь простір, але фактично вона є скінченною і знаходиться всередині $B(R,0)$.

IV. Покажемо, що **потенціал (3) є розв'язком рівняння (1), який задовольняє умови (2).**

За умов (4) інтеграл (3) можна диференціювати по x_i, $i = 1,2,3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(x_i' - x_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \int \frac{\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{|\mathbf{y}|^3} y_i \, d^3\mathbf{y}, \tag{6}$$

де зроблено заміну $\mathbf{y} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Зауважимо, що при $r > R$ область інитегрування не містить особливостейті і потенціал (3) можна диференціювати довільне число разів. При $r > R$ маємо $y = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \le 2R$ і область інтегрування по $\mathbf{y}$ знаходиться всередини $B(2R,0)$; звідси

$$\left|\int\limits_{B(2R,\mathbf{0})} \frac{\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{|\mathbf{y}|^3} y_i \, d^3\mathbf{y}\right| \le \left|\int\limits_{B(2R,\mathbf{0})} \frac{M}{|\mathbf{y}|^2} d^3\mathbf{y}\right| \le 4\pi M \int\limits_0^{2R} \frac{1}{y^2} y^2 dy = 8\pi RM < \infty,$$

де зроблено перехід до сферичних координат з центром в точці $\mathbf{y} = 0$, $d^3\mathbf{y} = y^2 dy dO$, й виконано інтегрування по кутам $dO = \sin\theta d\theta d\varphi$. Звідси випливає рівномірна збіжність (6) як невласного інтегралу й можливість диференціювання по x_i.

Аналогічно можна показати можливість ще одного диференціювання (6) завдяки другий умові (5) та неперервній диференційовності ρ:

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{B(2R,0)} \frac{\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{|\mathbf{y}|^3} y_i \, d^3\mathbf{y} =$$

$$= \int\limits_{B(2R,0)} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial x_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y} = \int\limits_{B(2R,0)} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y}\,,$$

де також має місце рівномірна збіжність:

$$\left|\int\limits_{B(2R,0)} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y}\right| \le 3M_1\left|\int\limits_{B(2R,0)} \frac{1}{|\mathbf{y}|^2}\,d^3\mathbf{y}\right| = 24M_1\pi R < \infty\,.$$

Завдяки цьому, для як завгодно малого $\varepsilon > 0$, другий інтеграл в сумі

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \int\limits_{\varepsilon<y<2R} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y} + \int\limits_{y<\varepsilon} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y}$$

прямує до нуля при $\varepsilon \to 0+0$, тобто

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon<y<2R} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y}\,.$$

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ підінтгральний вираз вже не містить особливих точок і його можна перетворити так:

$$\int\limits_{\varepsilon<y<2R} \frac{\partial\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})}{\partial y_i}\frac{y_i}{|\mathbf{y}|^3}\,d^3\mathbf{y} =$$

$$= \int\limits_{\varepsilon<y<2R} \operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3}\right] - \rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})\operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3}\right] d^3\mathbf{y}\,,$$

оскільки $\operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3}\right] \equiv 0$ в області, де $\mathbf{y} \ne 0$.

Завдяки теоремі Остроградського–Гаусса вираз

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon<y<2R} \operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3}\right] d^3\mathbf{y}$$

зводиться до двох поверхневих інтегралів: по поверхні зовнішньої сфери $S(R,\mathbf{0})$ радіуса $2R$ з центром в $\mathbf{y} = 0$ та внутрішньої сфери $S(\varepsilon,\mathbf{0})$, причому інтеграл по $S(R,\mathbf{0})$ дорівнює нулю:

$$\Delta u(\mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\oint\limits_{y=\varepsilon} \rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})\frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|^3}\,d\mathbf{S}\,,$$

де $d\mathbf{S} = y^2\mathbf{n}dO$, $\mathbf{n} = -\mathbf{y}/y$ – зовнішня нормаль для області $B(2R,\mathbf{0}) \setminus B(\varepsilon,\mathbf{0})$. Звідси

$$\Delta u(\mathbf{r}) = -\lim_{\varepsilon\to 0+0}\int \rho(\mathbf{y}+\mathbf{r})\Big|_{y=\varepsilon} dO, \quad \mathbf{y} = \varepsilon(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,.$$

Тут, очевидно, можливий граничний перехід під знаком інтеграла при $\varepsilon \to 0+0$: $\Delta u(\mathbf{r}) = -4\pi\rho(\mathbf{r})$, щ.т.д.

V. Неперервна залежність розв'язку (1) від правої частини.

Покажемо, що потенціал (3) мало змінюється при малих змінах $\rho(\mathbf{x})$. для функцій з обмеженим носієм. Нехай $u(\mathbf{r}),\tilde{u}(\mathbf{r})$ – потенціали виду (3), які є розв'язками (1) з правими частинами відповідно $\rho(\mathbf{r}),\tilde{\rho}(\mathbf{r})$; $\operatorname{supp}\{\rho\}\subset B(R,0)\ \operatorname{supp}\{\tilde{\rho}\}\subset B(R,0)$. Нехай $\left|\rho(\mathbf{r})-\tilde{\rho}(\mathbf{r})\right|<\mu$.

При $r<2R\to\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|<3R$:

$$\left|u(\mathbf{r})-\tilde{u}(\mathbf{r})\right|=\left|\int\frac{\rho(\mathbf{r}')-\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'\right|\le\int\limits_{B(R,0)}\frac{\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'\le$$

$$\le\int\limits_{B(3R,0)}\frac{\mu}{|\mathbf{y}|}d^3\mathbf{y}=18\pi\mu R^2.$$

При $r\ge 2R\to\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\ge r-r'\ge R$:

$$\left|u(\mathbf{r})-\tilde{u}(\mathbf{r})\right|\le\int\limits_{B(R,0)}\frac{\mu}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d^3\mathbf{r}'\le\int\limits_{B(R,0)}\frac{\mu}{R}d^3\mathbf{r}'=\frac{4}{3}\pi R^2\mu.$$

В обох випадках за досить малих μ маємо мале відхилення $\left|u(\mathbf{r})-\tilde{u}(\mathbf{r})\right|$, щ.т.д.