Теореми про прискорення

Андрій Фесенко

Теореми про прискорення

- теореми про лінійне прискорення (linear speedup)
- теорема Блюма про прискорення (Blum speedup)

Теореми про прискорення

- теореми про лінійне прискорення (linear speedup)
  Якщо можна розпізнати мову (обчислити функцію) з використанням $f(n)$ ресурсів (час, пам'ять), то це можна зробити з використанням $cf(n)$ ресурсів для довільного значення $c > 0$.
- теорема Блюма про прискорення (Blum speedup)
  Існує мова (функція), для якої не існує "оптимального" алгоритму розпізнавання (обчислення) — для будь-якого алгоритму завжди існує такий, що використовує менше ресурсів.

Теорема про лінійне покращення пам'яті

Теорема (про лінійне покращення пам'яті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Теорема (про лінійне покращення пам'ятті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$

$\square$

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Теорема (про лінійне покращення пам'ятті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $\tilde{\Gamma} = \left(\Gamma \cup \hat{\Gamma}\right)^c \cup \Sigma \cup \{\#\}$

□

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Теорема (про лінійне покращення пам'ятті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $\tilde{\Gamma} = \left(\Gamma \cup \hat{\Gamma}\right)^{c} \cup \Sigma \cup \{\#\}$
- один блок з c комірками машини Тюрінга $M \leftrightarrow$ одна комірка машини Тюрінга $\tilde{M}$, $\hat{}$— положення зчитувальних пристроїв M

$\square$

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Теорема (про лінійне покращення пам'ятті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $\tilde{\Gamma} = \left(\Gamma \cup \hat{\Gamma}\right)^c \cup \Sigma \cup \{\#\}$
- один блок з c комірками машини Тюрінга $M \leftrightarrow$ одна комірка машини Тюрінга $\tilde{M}$, $\hat{}$ — положення зчитувальних пристроїв M
- якщо переміщення M в межах блоку, то змістити символ $\hat{}$

$\square$

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Теорема (про лінійне покращення пам'ятті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $\tilde{\Gamma} = \left(\Gamma \cup \hat{\Gamma}\right)^{c} \cup \Sigma \cup \{\#\}$
- один блок з c комірками машини Тюрінга $M \leftrightarrow$ одна комірка машини Тюрінга $\tilde{M}$, $\hat{}$ — положення зчитувальних пристроїв M
- якщо переміщення M в межах блоку, то змістити символ $\hat{}$
- машина Тюрінга $\tilde{M}$ використовує $\left\lceil \frac{s(n)}{c} \right\rceil \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ комірок

$\square$

Теорема про лінійне покращення пам'яті

Теорема (про лінійне покращення пам'яті)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, яка використовує пам'ять $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує k стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка використовує пам'ять $\tilde{s}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{s}(n) \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- якщо $\varepsilon < 1$, то $c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$
- $\tilde{\Gamma} = \left(\Gamma \cup \hat{\Gamma}\right)^c \cup \Sigma \cup \{\#\}$
- один блок з c комірками машини Тюрінга $M \leftrightarrow$ одна комірка машини Тюрінга $\tilde{M}$, $\hat{}$ — положення зчитувальних пристроїв M
- якщо переміщення M в межах блоку, то змістити символ $\hat{}$
- машина Тюрінга $\tilde{M}$ використовує $\left\lceil \frac{s(n)}{c} \right\rceil \leq \lceil \varepsilon s(n) \rceil$ комірок
- метод стиснення стрічки (tape compression)

$\square$

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Для однострічкової машини Тюрінга $\tilde{s}(n) - n \leq \lceil \varepsilon(s(n) - n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$.

Теорема про лінійне покращення пам'ятті

Для одностфрічкової машини Тюрінга $\tilde{s}(n) - n \leq \lceil \varepsilon(s(n) - n) \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$.

Існує машина Тюрінга $\tilde{M}$ з однією робочою стрічкою.

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k + 1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів

$\square$

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k + 1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок

$\square$

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок
- є вся інформація для m тактів машини Тюрінга M

$\square$

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок
- є вся інформація для m тактів машини Тюрінга M
- 2 такти на оновлення комірок $\tilde{M}$ та переміщення

□

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок
- є вся інформація для m тактів машини Тюрінга M
- 2 такти на оновлення комірок $\tilde{M}$ та переміщення
- щонайбільше $6\frac{t(n)}{m}$ тактів і $n + \frac{n}{m} + 2$ на копіювання вхідного слова

$\square$

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \leq \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок
- є вся інформація для m тактів машини Тюрінга M
- 2 такти на оновлення комірок $\tilde{M}$ та переміщення
- щонайбільше $6\frac{t(n)}{m}$ тактів і $n + \frac{n}{m} + 2$ на копіювання вхідного слова
- якщо $m = \frac{6}{\varepsilon}$, то загальна кількість тактів — $\varepsilon t(n) + n + n\frac{\varepsilon}{6} + 2$

$\square$

Теорема про лінійне прискорення

Теорема (про лінійне прискорення)

Для будь-якої k стрічкової машини Тюрінга M, $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, час роботи якої є $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, та довільного значення $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, існує $k+1$ стрічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, час роботи якої $\tilde{t}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\tilde{t}(n) \le \lceil \varepsilon t(n) + n + 2 \rceil$ для всіх чисел $n \in \mathbb{N}$, при цьому $M \simeq \tilde{M}$.

Доведення.

- метод стиснення стрічки в m разів
- 4 такти (L, R, R, L) — зчитати вміст сусідніх комірок
- є вся інформація для m тактів машини Тюрінга M
- 2 такти на оновлення комірок $\tilde{M}$ та переміщення
- щонайбільше $6\frac{t(n)}{m}$ тактів і $n + \frac{n}{m} + 2$ на копіювання вхідного слова
- якщо $m = \frac{6}{\varepsilon}$, то загальна кількість тактів — $\varepsilon t(n) + n + n\frac{\varepsilon}{6} + 2$
- $\varepsilon t(n) + n + 2$

□

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази

$\square$

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку

□

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки

□

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку

$\square$

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку
- зберігати значення комірки з перекриття

□

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку
- зберігати значення комірки з перекриття
- загальна кількість тактів — $\frac{t(n)}{2} + n + \frac{n}{2} + 2$

$\square$

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку
- зберігати значення комірки з перекриття
- загальна кількість тактів — $\frac{t(n)}{2} + n + \frac{n}{2} + 2$
- для прискорення — різні значення стиснення та перекриття

$\square$

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку
- зберігати значення комірки з перекриття
- загальна кількість тактів — $\frac{t(n)}{2} + n + \frac{n}{2} + 2$
- для прискорення — різні значення стиснення та перекриття

$\square$

Є застосовним і для обчислення функцій

Теореми про лінійне прискорення

Доведення.

- прискорення в 2 рази
- стиснення вмісту стрічок в 3 рази з перекриттям на 1 комірку
- зчитувальний пристрій тільки в центрі трійки
- мінімум 2 такти, щоб перейти в нову комірку
- зберігати значення комірки з перекриття
- загальна кількість тактів — $\frac{t(n)}{2} + n + \frac{n}{2} + 2$
- для прискорення — різні значення стиснення та перекриття

$\square$

Є застосовним і для обчислення функцій

використання $\mathcal{O}$ нотації, майже всі обчислення можна прискорити

Аксіоми Блюма

Означення

Аксіомами Блюма називають твердження, що

1. області визначення функцій φ_i та Φ_i збігаються;
2. характеристична функція множини $\{\, (i, x, t) \in \mathbb{N}^3 \mid \Phi_i(x) \simeq t \,\}$ є обчислювальною;

для довільної нумерації Геделя φ множини всіх унарних часткових обчислювальних функцій $\mathcal{P}^{(1)}$ та довільної обчислювальної функції Φ виду $\mathbb{N} \to \mathcal{P}^{(1)}$, де φ_i,$i \in \mathbb{N}$, позначає i-ту унарну часткову обчислювальну функцію з множини$\mathcal{P}^{(1)}$, а Φ_i, $i \in \mathbb{N}$, позначає унарну часткову обчислювальну функцію, яка є значенням $\Phi(i)$.

Нумерація Геделя φ множини всіх унарних часткових обчислювальних функцій $\mathcal{P}^{(1)}$ та обчислювальна функція Φ виду $\mathbb{N} \to \mathcal{P}^{(1)}$ **задовольняють аксіоми Блюма**, якщо обидва твердження для них є правильними, та **не задовольняють аксіоми Блюма** в інших випадках.

Теорема Блюма

Означення

Мірою (обчислювальної) складності (**Блюма**) називають впорядковану пару (φ, Φ), де φ є нумерацією Геделя множини всіх унарних часткових обчислювальних функцій $\mathcal{P}^{(1)}$, а Φ є обчислювальною функцією виду $\mathbb{N} \to \mathcal{P}^{(1)}$, які задовольняють аксіоми Блюма.

Теорема Блюма

Означення

Мірою (обчислювальної) складності (**Блюма**) називають впорядковану пару (φ, Φ), де φ є нумерацією Геделя множини всіх унарних часткових обчислювальних функцій $\mathcal{P}^{(1)}$, а Φ є обчислювальною функцією виду $\mathbb{N} \to \mathcal{P}^{(1)}$, які задовольняють аксіоми Блюма.

Теорема Блюма

Для заданої міри обчислювальної складності Блюма (φ, Φ) та заданої всюди визначеної обчислювальної функції f арності 2 існує всюди визначена функція g арності 2 з множиною значень $\{0, 1\}$ така, що для будь-якого алгоритму i обчислення функції g існує алгоритм j обчислення функції g такий, що $f(x, \Phi_j(x)) \leq \Phi_i(x)$. Таку функцію f називають **функцією прискорення**.

Теорема Блюма

1. $\Phi(M, x)$ є скінченним значенням $\Leftrightarrow M(x) \neq \perp$
2. мова $\{ (M, x, t) \mid \Phi(M, x) = t \}$ є вирішуваною

Час роботи та пам'ять машини Тюрінга є мірами обчислювальної складності Блюма.

Теорема Блюма

1. $\Phi(M, x)$ є скінченним значенням $\Leftrightarrow M(x) \neq \perp$
2. мова $\{\, (M, x, t) \mid \Phi(M, x) = t \,\}$ є вирішуваною

Час роботи та пам'ять машини Тюрінга є мірами обчислювальної складності Блюма.

Наслідок

Існує мова така, що для довільної машини Тюрінга, яка вирішує цю мову за час $t(n)$, існує машина Тюрінга, яка вирішує цю мову за час $\mathcal{O}(\log t(n))$.

Теорема Блюма

1. $\Phi(M, x)$ є скінченним значенням $\Leftrightarrow M(x) \neq \bot$
2. мова $\{\, (M, x, t) \mid \Phi(M, x) = t \,\}$ є вирішуваною

Час роботи та пам'ять машини Тюрінга є мірами обчислювальної складності Блюма.

Наслідок

Існує мова така, що для довільної машини Тюрінга, яка вирішує цю мову за час $t(n)$, існує машина Тюрінга, яка вирішує цю мову за час $\mathcal{O}(\log t(n))$.

Наслідок

Не існує оптимального алгоритму.

Висновки

1. найбільш цікавими мір складності Блюма є тільки час та пам'ять
2. функції та мови, які є результатами застосування тверджень з використанням мір Блюма є достатньо громіздкими і штучними
3. більшість мір складності цікавих зараз не задовольняють аксіомам Блюма

Висновки

1. найбільш цікавими мір складності Блюма є тільки час та пам'ять
2. функції та мови, які є результатами застосування тверджень з використанням мір Блюма є достатньо громіздкими і штучними
3. більшість мір складності цікавих зараз не задовольняють аксіомам Блюма

Копперсміт та Віноград довели, що завжди існує кращий алгоритм множення матриць, для деякого класу алгоритмів множення. Наразі існує припущення, що це є правильним для всіх алгоритмів множення матриць.