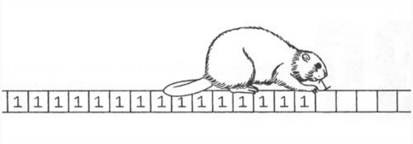
Функції Радо

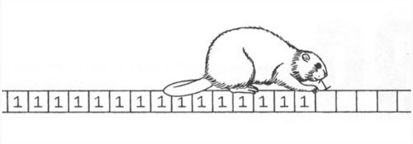
Андрій Фесенко

“Працьовиті бобри”



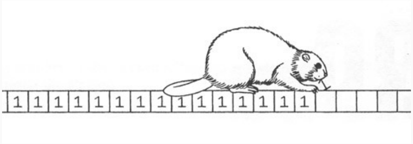
- Тібор Радо, 1962р.

"Працьовиті бобри"



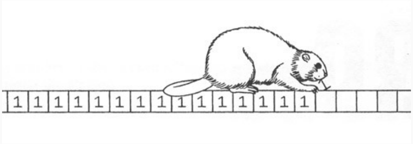
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$

"Працьовиті бобри"



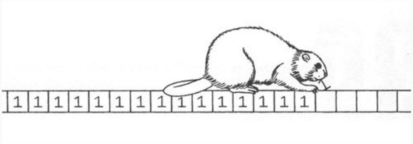
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)

"Працьовиті бобри"



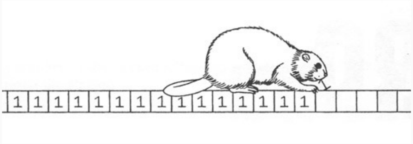
- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів

“Працьовиті бобри”



- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів
- $s(M)$ — кількість тактів, яку зробить машина Тюрінга M з порожнім вхідним словом до своєї зупинки

“Працьовиті бобри”



- Тібор Радо, 1962р.
- Модель машини Тюрінга — $(1, \{0, 1\}, \{1\}, 0, Q, q_H, q_0, \delta)$, де $\delta : (Q \setminus \{q_H\}) \times \{0, 1\} \to Q \times \{0, 1\} \times \{L, R\}$
- $\mathcal{K}_{BB}$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові (**клас Радо**)
- $\mathcal{K}_{BB}(n)$ — всі машини Тюрінга, які зупиняються на порожньому вхідному слові і мають n некінцевих станів
- $s(M)$ — кількість тактів, яку зробить машина Тюрінга M з порожнім вхідним словом до своєї зупинки
- $\sigma(M)$ — кількість непорожніх комірок, які залишаться на стрічці після зупинки машини Тюрінга M з порожнім вхідним словом

"Працьовиті бобри"

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

“Працьовиті бобри”

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Наслідок

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\Sigma(n) \leq S(n)$.

"Працьовиті бобри"

Означення

Функціями Радо називають функції $S, \Sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ приймають значення $S(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} s(M)$ і $\Sigma(n) = \max\limits_{M \in \mathcal{K}_{BB}(n)} \sigma(M)$.

Наслідок

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\Sigma(n) \leq S(n)$.

Твердження

Для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$ потужність класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(n)$ машин Тюрінга обмежена зверху значенням $(4(n+1))^{2n}$.

"Працьовиті бобри"

Теорема

Для довільної обчислювальної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що $\Sigma(n) > f(n)$ для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$.

"Працьовиті бобри"

Теорема

Для довільної обчислювальної функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ існує таке натуральне число $n_f \in \mathbb{N}$, що $\Sigma(n) > f(n)$ для всіх натуральних чисел $n \in \mathbb{N}$, $n > n_f$.

Наслідок

Σ функція Радо є необчислювальною.

S функція Радо є необчислювальною.

Наявні результати

Values of S(n, m)						
m \ n	2-state	3-state	4-state	5-state	6-state	7-state
2-symbol	6	21	107	47 176 870 ?	$> 7.4 \times 10^{36\,534}$	$> 10^{10^{10^{10^{18\,705\,353}}}}$
3-symbol	38	≥ 119 112 334 170 342 540	$> 1.0 \times 10^{14\,072}$	?	?	?
4-symbol	≥ 3 932 964	$> 5.2 \times 10^{13\,036}$	?	?	?	?
5-symbol	$> 1.9 \times 10^{704}$	?	?	?	?	?
6-symbol	$> 2.4 \times 10^{9866}$	?	?	?	?	?
Values of Σ(n, m)						
m \ n	2-state	3-state	4-state	5-state	6-state	7-state
2-symbol	4	6	13	4098 ?	$> 3.5 \times 10^{18\,267}$	$> 10^{10^{10^{10^{18\,705\,353}}}}$
3-symbol	9	≥ 374 676 383	$> 1.3 \times 10^{7036}$	?	?	?
4-symbol	≥ 2050	$> 3.7 \times 10^{6518}$	?	?	?	?
5-symbol	$> 1.7 \times 10^{352}$	?	?	?	?	?
6-symbol	$> 1.9 \times 10^{4933}$	?	?	?	?	?

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$

“Працьовиті бобри”

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(1919)$, яка зупиняється, коли теорія множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору є суперечною

"Працьовиті бобри"

- для довільної обчислювальної та арифметично коректної теорії існує таке натуральне число $k \in \mathbb{N}$, що для довільного числа $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, жодне твердження виду $S(n) = m$, де $m \in \mathbb{N}$, не може бути доведено в межах цієї теорії
- в межах теорії множин Цермело-Френкеля не можна обчислити значення $S(748)$
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(1919)$, яка зупиняється, коли теорія множин Цермело-Френкеля з аксіомою вибору є суперечною
- побудована машина Тюрінга з класу Радо $\mathcal{K}_{BB}(744)$, яка зупиняється, якщо гіпотеза Рімана є хибною

Висновки

- невеликі за побудовою машини Тюрінга можуть породжувати значні обчислення

Висновки

- невеликі за побудовою машини Тюрінга можуть породжувати значні обчислення
- існує певна межа обчислювальних функцій, і досить стрімкі за зростанням функції є необчислювальними

Корисні посилання

- Поточні рекорди та історія машин Тюрінга класу Радо
  `https://webusers.imj-prg.fr/~pascal.michel/`
  `http://turbotm.de/~heiner/BB/`
- Computerphile "Busy Beaver" відео (англ. мова), prof. Brailsford
  `https://www.youtube.com/watch?v=CE8UhcyJS0I`
- Фізична реалізація $(3, 2)$ Busy Beaver
  `https://www.youtube.com/watch?v=28pnk2JIBSE`
- Фізична реалізація $(4, 2)$ Busy Beaver
  `https://www.youtube.com/watch?v=2PjU6DJyBpw`
- Реалізація $(4, 2)$ Busy Beaver в Minecraft
  `https://www.youtube.com/watch?v=IefoYnf6xKI`