Лекція 8

1. **Поліноми Лежандра**

Нехай $\mathbf{r}$ та $\mathbf{R}$ визначають дві точки простору, причому $R > r$ і θ– кут між цими векторами; $\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} = rR\cos\theta$;

Позначимо $z = \cos\theta$; тоді

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rRz + R^2}} = \frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xz + 1}}.$$

Розкладемо в ряд за степенями $x = r/R < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xz + 1}} = \sum_{n=0} x^n P_n(z) \,, \tag{1}$$

де $P_n(z)$– деякі поліноми від z (поліноми Лежандра). Цей вираз поширюється і на від'ємні значення , $|x| < 1$.

Звідси при $r < R$

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

Функцію $\left(x^2 - 2xz + 1\right)^{-1/2}$ називають твірною функцією для поліномів Лежандра. При $z = 1,\ |x| < 1$ маємо

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0} x^n \,,$$

тому порівняння з (1) дає $P_n(1) = 1$.

Аналогічно, покладаючи $z = -1$, отримаємо $P_n(-1) = (-1)^n$.

Наведемо декілька явних виразів для поліномів Лежандра:

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z \,, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}\left(3z^2 - 1\right).$$

Легко перевірити, що при $\mathbf{r} \neq \mathbf{R}$

$$\Delta\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} = 0.$$

У сферичних координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}\,,$$

де

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Звідси, вибираючи вісь аплікат вздовж вектора $\mathbf{R}$, з формули (2) маємо

$$\Delta\sum_{n=0}\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$

$$= \sum_{n=0}\left(\frac{1}{R}\right)^n \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial r^n}{\partial r}\right)P_n(\cos\theta) + \frac{r^n}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)\right)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}\frac{r^{n-2}}{R^n}\left\{n(n+1)P_n(\cos\theta) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)\right)\right\} = 0 \quad .$$

Коефіцієнти при різних степенях r мають дорівнювати нулю:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}P_n(\cos\theta)\right) + n(n+1)P_n(\cos\theta) = 0 \qquad (3)$$

Перепишемо це через $z = \cos\theta$:

$$\frac{d}{dz}\left[\left(1-z^2\right)\frac{dP_n(z)}{dz}\right] + n(n+1)P_n(z) = 0. \qquad (4)$$

Можна показати, що єдиним розв’язком рівняння (4), що задовольняє умові $P_n(1) = 1$, є

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(z^2-1\right)^n; \quad n = 0,1,2,\dots , \qquad (5)$$

(формула Родріга). Звідси видно, що $P_n(z)$ – це дійсно поліноми степені n.

Множина поліномів $P_n(z)$ є плотною у множині неперервних функцій на відрізку $[-1,1]$ і повною в $L^2(-1,1)$.

2. Приєднані функції Лежандра

Як видно з (3), функції $P_n(\cos\theta)$ є власними функціями оператора $\hat{\Lambda}$:

$$\hat{\Lambda}P_n(\cos\theta) = -n(n+1)P_n(\cos\theta); \qquad (6)$$

вони вичерпують задачу на власні значення, якщо шукати розв’язок цього рівняння серед функцій, що не залежать від азімутального кута φ.

Розглянемо більш загальне рівняння

$$\hat{\Lambda}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -n(n+1)u \ , \qquad (7)$$

яка виникає при розділенні змінних у рівнянні Лапласа та інших.

Оскільки в сферичних координатах розв'язок є періодичною функцією від φ: $u(\theta,\varphi)\equiv u(\theta,\varphi+2\pi)$, його можна шукати за допомогою розкладу в ряд Фур'є з членами $u(\theta,\varphi)\sim P(\theta)\exp(im\varphi)$. Підстановка в (7) дає

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}P=-n(n+1)P. \qquad (8)$$

У термінах змінної $z=\cos\theta$ це приводить до рівняння

$$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n^m}{dz}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P_n^m=0\quad , \qquad (9)$$

де $P_n^m\equiv P_n^m(z)$; $P(\theta)\equiv P_n^m(\cos\theta)$.

Розв'язком (9) є ***приєднані функції Лежандра*** **(**m, n–цілі числа, $0\le m\le n$).

$$P_n^m(z)=\left(1-z^2\right)^{m/2}\frac{d^mP_n(z)}{dz^m}\ . \qquad (10)$$

Для кожного $m\ge 0$ функції $P_n^m(z)$, $n=m,m+1,\ldots$ утворюють повну систему в $L^2(-1,1)$.

Покажемо, що ця система є ортогональною. Нехай $n\ne n'$

$$0=P_{n'}^m\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{dP_n^m}{dz}\right)+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P_{n'}^mP_n^m=$$

$$=\frac{d}{dz}\left((1-z^2)P_{n'}^m\frac{dP_n^m}{dz}\right)-(1-z^2)\frac{dP_{n'}^m}{dz}\frac{dP_n^m}{dz}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)P_{n'}^mP_n^m.$$

Проінтегруємо це співвідношення по $z\in[-1,1]$

$$0=-\int_{-1}^{1}(1-z^2)\frac{dP_{n'}^m}{dz}\frac{dP_n^m}{dz}dz+n(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n'}^mP_n^mdz-m^2\int_{-1}^{1}\frac{P_{n'}^mP_n^m}{1-z^2}dz$$

Віднімаємо аналогічне співвідношення після заміни $n\leftrightarrow n'$ та отримуємо

$$\left[n(n+1)-n'(n'+1)\right]\int_{-1}^{1}P_{n'}^mP_n^mdz=0\ .$$

Можна показати

$$\int_{-1}^{1}\left(P_n^m\right)^2dz=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}.$$

Таким чином,

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n^m(z)\mathrm{P}_{n'}^m(z)dz = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\frac{2}{2n+1}\delta_{nn'} \quad . \tag{11}$$

Зокрема,

$$\int_{-1}^{1} \left[\mathrm{P}_l(z)\right]^2 \, dz = \frac{2}{2l+1} \ .$$

3. **Сферичні функції (сферичні гармоніки)**

В сферичних координатах часто застосовують розклади в ряди по сферичних функціях. Ці функції визначаються так[1]:

$$Y_n^m(\theta,\varphi) = \left[\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{\left(n-|m|\right)\,!}{\left(n+|m|\right)\,!}\right]^{1/2} \mathrm{P}_n^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi} \tag{12}$$

$-n \le m \le n; \quad n = 0,1,2,...;$

де $\mathrm{P}_k^m(z)$ – приєднані функції Лежандра, *m*, *k*–цілі числа, $0 \le m \le k$.

Сферичні функції утворюють повну систему у множині функцій, квадратично-інтегровних на одиничній сфері $\theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi]$ **з скалярним добутком**:

$$\langle f, g\rangle = \int \left[f(\theta,\varphi)\right]^* g(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{13}$$

Система функцій $Y_{\ell m}$ ортонормована, тобто:

$$\int Y_{nm}^*(\theta,\varphi)Y_{n'm'}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi = \delta_{nn'}\delta_{mm'} \tag{14}$$

Повнота означає, що будь-яка квадратично-інтегровна на одиничній сфері функція може бути подана як:

$$f(\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_{nm}Y_n^m(\theta,\varphi) \tag{15}$$

де $\alpha_{nm} = \int \left[Y_n^m(\theta,\varphi)\right]^* f(\theta,\varphi)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

Якщо функція $f(\theta,\varphi)$ не залежить від азимутального кута, можна обмежитися розкладом по поліномах Лежандра:

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta) \quad . \tag{16}$$

Наведемо декілька явних виразів для сферичних функцій:

---

[1] Тут подано визначення $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ як комплексних функцій дійсних змінних θ,φ. Часто можна зустріти дещо інше визначення системи сферичних функцій через $\mathrm{Re}Y_{\ell m}, \mathrm{Im}Y_{\ell m}$.

$$Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},\qquad Y_1^0(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\qquad Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\; e^{\pm i\varphi}$$

$$Y_2^0(\theta,\varphi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right),\;\; Y_2^{\pm1}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_2^{\pm2}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\varphi}$$

Зручність сферичних функцій пов’язана, зокрема, із тим, що вони є власними функціями оператора Λ – кутової частини оператора Лапласа у сферичних координатах:

$$\hat{\Lambda}Y_n^m=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n^m}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n^m}{\partial\varphi^2}=-n(n+1)Y_n^m\ .$$

Використовуючи (6) легко перевірити, що ряд:

$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{a_{nm}}{r^{n+1}}+b_{nm}r^n\right)Y_n^m\left(\theta,\varphi\right)$$

з довільними сталими a_{nm}, b_{nm}, є розв’язком рівняння Лапласа в області збіжності.