Лекція 11

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Розглядаємо рівняння $\Box u = f$, $\Box \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$, або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f; \quad u \equiv u(t,\mathbf{r}), \quad f \equiv f(t,\mathbf{r}), . \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}_+ = \{t : t \in \mathbb{R}, t \geq 0\}, \ u \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3), \quad f \in C^2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}^3)$.

Зауважимо, що більш загальний випадок рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f$ легко зводиться до (1) заміною $t \to t/a, \quad f \to a^2 f$; використання (1) відповідає вибору розмірностей, за якого швидкість поширення взаємодій $a = 1$. Далі позначаємо $r' \equiv |\mathbf{r}|$.

Далі позначаємо

$S(R,\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}' : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = R\}$ – поверхня сфери радіуса R з центром у точці $\mathbf{r}$;

$B(R,\mathbf{r}) = \{\mathbf{r}' : |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \leq R\}$ – куля радіуса R з центром у точці $\mathbf{r}$.

Рівняння (1) розглядаємо разом із початковими умовами (задача Коші):

$$u(0,\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} u(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}), \quad \psi \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad , \tag{3}$$

Оскільки рівняння лінійне (1), розв’яжемо задачу для трьох окремих доданків $u(t,\mathbf{r}) = u_1(t,\mathbf{r}) + u_2(t,\mathbf{r}) + u_3(t,\mathbf{r})$, залишаючи з для кожного лише одну ненульову з трьох функцій φ, ψ, f .   .

А) Внесок умови (3). Нехай $\varphi \equiv 0, \ f \equiv 0$.

Покажемо, що у цьому разі розв’язком буде

$$u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{t}{4\pi} \int dO' \, \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}' t), \tag{4}$$

де інтегрування йде по одиничній сфері $S(1,\mathbf{0})$ (з довільною орієнтацією кутів), $\mathbf{n}'$–зовнішня нормаль до поверхні сфери – відповідає змінним інтегрування $dO' \equiv d\mathbf{n}'$.

Зокрема, можна ввести стандартні координати на сфері $\theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi]$, при цьому

$$dO = \sin\theta d\theta d\varphi; \quad \int dO ... = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta ...,$$

Тоді в (4) одиничний вектор $\mathbf{n}' = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ відповідає $dO' = \sin\theta d\theta d\varphi$.

Відповідно, $u_2(t,\mathbf{r}) \equiv \dfrac{t}{4\pi}\int dO' \psi(x + n_x' t, y + n_y' t, z + n_z' t)$.

Очевидно, $u_2(0,\mathbf{r}) = 0 \quad \forall \mathbf{r}$, тобто умова (2) виконана. Обчислимо

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dO' \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}'t) + \frac{t}{4\pi}\int dO' \frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}'t) =$$

$$= \frac{u_2}{t} + \frac{t}{4\pi}\int dO' \ \mathbf{n}' \cdot \nabla\psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}'t) \equiv \frac{u_2}{t} + \frac{t}{4\pi}\int dO' \ \mathbf{n}' \cdot \nabla'\psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{n}'t} . \quad (4а)$$

Тут ∇' означає диференціювання по $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$.

Зазначимо, що з (4а) випливає при $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(t,\mathbf{r})\Big|_{t=0} = \frac{1}{4\pi}\int dO' \psi(\mathbf{r} + \mathbf{n}'t)\Big|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}),$$

тобто умову (3) виконано.

Для довільної вектор-функції $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ в інтегралі по поверхні сфери $S(t,\mathbf{0})$ можна записати ($d\mathbf{S}' = \mathbf{n}' t^2 dO'$)

$$\int_{S(t,\mathbf{0})} d\mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}') = \int_{S(t,\mathbf{0})} dS' \left(\mathbf{n}'\mathbf{F}(\mathbf{r}')\right) \cdot = t^2 \int dO' \left(\mathbf{n}'\mathbf{F}(\mathbf{r}')\right).$$

Тому в (4а) інтеграл по тілесному куту dO' можна переписати як інтеграл по поверхні сфери:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{u_2}{t} + \frac{1}{4\pi t}\oint_{S(t,\mathbf{0})} d\mathbf{S}' \cdot \boldsymbol{\nabla}'\psi(\mathbf{r} + \mathbf{r}'),$$

де змінна $\mathbf{r}'$ є змінною інтегрування по $d\mathbf{S}' = t^2 dO'\mathbf{n}'$. За формулою Остроградського-Гаусса, враховуючи, що $\mathrm{div}\nabla\psi \equiv \Delta\psi$, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{u_2}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle'\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}') =$$

$$= \frac{1}{t}\left\{u_2 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\} \quad . \tag{5}$$

Обчислимо другу похідну за часом

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2(t,\mathbf{r}) = -\frac{1}{t^2}\left\{u_2 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\} +$$

$$+\frac{1}{t}\left\{\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\},$$

де враховано $\triangle'\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}') \equiv \triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')$. Замість $\dfrac{\partial u_2}{\partial t}$ підставимо (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2(t,\mathbf{r}) = -\frac{1}{t^2}\left\{u_2 + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\} +$$

$$+\frac{1}{t}\left\{\left[\frac{u_2}{t} + \frac{1}{4\pi t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right] + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\}.$$

і після скорочень дістанемо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\triangle\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\right\}. \tag{6}$$

Об’ємний інтеграл запишемо через повторний інтеграл (в сферичних координатах, $d^3\mathbf{r}' \equiv r'^2\, dO'dr'$, $\mathbf{r}' \equiv r'\mathbf{n}'$)

$$\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\Delta\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}') = \int\limits_0^t dr'\, r'^2 \int dO'\,\Delta\psi(\mathbf{r}+r'\mathbf{n}')$$

тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}'\cdot\Delta\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}') = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t dr'\, r'^2 \int dO'\,\Delta\psi(\mathbf{r}+r'\mathbf{n}') = \tag{6a}$$

$$= r'^2 \int dO'\,\Delta\psi(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\Big|_{r'=t} = t^2\int dO'\Delta\psi(\mathbf{r}+t\mathbf{n}')$$

(тут використано формулу Лейбніца – див. напр.

https://uk.wikipedia.org/wiki/Інтегральне_правило_Лейбніца)

Тоді з (6),(6а), враховуючи вихідну формулу (4), дістанемо

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_2(t,\mathbf{r}) = \frac{t}{4\pi}\int dO'\Delta\psi(\mathbf{r}+t\mathbf{n}') = \Delta u_2(t,\mathbf{r}),$$

що й треба було довести.

Б) Нехай тепер $f \equiv 0$, а в початкових умовах $\psi \equiv 0$.

Шукаємо функцію $u_1(t,\mathbf{r})$, що задовольняє співвідношенням

$$\square u_1(t,\mathbf{r}) = 0, \quad u_1(0,\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}), \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u_1(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = 0.$$

Щоб побудувати цей розв'язок, розглянемо допоміжну функцію

$$v(t,\mathbf{r}) = \frac{t}{4\pi}\int dO'\,\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{n}'t);$$

в силу розгляду у частині (А), ця функція задовольняє умовам

$$\square v(t,\mathbf{r}) = 0, \quad v(0,\mathbf{r}) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}v(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}). \tag{7}$$

Покажемо, що шуканий розв'язок задачі є

$$u_1(t,\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial t}v(t,\mathbf{r}). \tag{8}$$

Очевидно, в силу (7)

$$\square u_1(t,\mathbf{r}) = 0, \quad u_1(0,\mathbf{r}) = \left.\frac{\partial}{\partial t}v(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}). \tag{8a}$$

Далі, з хвильового рівняння в (8а) та умови $v(0,\mathbf{r}) = 0$ ($\forall\mathbf{r}$), маємо

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\mathbf{r})(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^2}{\partial t^2}v(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \Delta v(0,\mathbf{r}) = 0,$$

оскільки $v(0,\mathbf{r}) \equiv 0$.

Усі умови виконано.

В) Внесок джерела: в початкових умовах (2),(3) $\psi \equiv 0, \quad \varphi \equiv 0$.

Шукаємо функцію $u_3(t,\mathbf{r})$, таку, що

$$\square u_3(t,\mathbf{r}) = f(t,\mathbf{r}), \quad u_3(0,\mathbf{r}) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t}u_3(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = 0.$$

Щоб побудувати розв'язок, розглянемо функцію

$$w(t,\tau,\mathbf{r}) = \frac{t-\tau}{4\pi}\int dO' \, f\left(\tau,\mathbf{r}+(t-\tau)\mathbf{n}'\right), \tag{9}$$

для якої, аналогічно розгляду частини (А), виконано хвильове рівняння та «початкові» умови при $t=\tau$

$$\Box w(t,\tau,\mathbf{r}) = 0, \quad w(\tau,\tau,\mathbf{r}) = 0, \quad \left.\frac{\partial}{\partial t} w(t,\tau,\mathbf{r})\right|_{t=\tau} = f(\tau,\mathbf{r}) \qquad (\forall\tau,\mathbf{r}). \tag{10}$$

Покладемо

$$u_3(t,\mathbf{r}) = \int_0^t w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau \; . \tag{11}$$

Очевидно, $u_3(0,\mathbf{r}) = 0.$

За формулою Лейбніца та з урахуванням $w(\tau,\tau,\mathbf{r}) = 0$, маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}u_3(t,\mathbf{r}) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau + w(t,t,\mathbf{r}) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau \, ,$$

звідки $\left.\frac{\partial}{\partial t}u_3(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = 0$.

Для другої похідної

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3(t,\mathbf{r}) &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau + \left.\frac{\partial}{\partial t} w(t,\tau,\mathbf{r})\right|_{\tau=t} = \\ &= \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau + f(t,\mathbf{r})\end{aligned} \; .$$

Оскільки згідно (10) $\Box w(t,\tau,\mathbf{r}) = 0$,

$$\Delta u_3(t,\mathbf{r}) = \int_0^t \Delta w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau \, ,$$

Звідси $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_3(t,\mathbf{r}) = \Delta u_3(t,\mathbf{r}) + f(t,\mathbf{r})$, або $\Box u_3(t,\mathbf{r}) = f(t,\mathbf{r})$. Це завершує розгляд (В).

Повний розв'язок вихідної задачі (1,2,3) – завдяки лінійності хвильового рівняння – отримуємо як суму розв'язків задач (А,Б,В):

$$u(t,\mathbf{r}) = \frac{t}{4\pi}\int dO'\,\psi(\mathbf{r}+\mathbf{n}'t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int dO'\,\varphi(\mathbf{r}+\mathbf{n}'t)\right] + \\ + \int_0^t d\tau \frac{t-\tau}{4\pi}\int dO'\, f\left(\tau, \mathbf{r}+\mathbf{n}'(t-\tau)\right) \quad . \tag{12}$$

Г) Формула Кірхгофа. Як видно з цього розв’язку, на поле в точці $\mathbf{r}$ впливають початкові умови на сфері $S(t,\mathbf{r})$. Якщо функції φ,ψ мають фінітний носій, їхній вплив для фіксованого $\mathbf{r}$ триває обмежений час, після якого інтегрування по dO йде по області, де підінтегральні функції і відповідна частина розв’язку, що визначається початковими умовами, дорівнюють нулю.

Перепишемо останній доданок у (12), що описує внесок джерела:

$$u_3(t,\mathbf{r}) = \int_0^t w(t,\tau,\mathbf{r})d\tau =$$

$$= \int_0^t d\tau \frac{t-\tau}{4\pi}\int dO'\, f\left(\tau,\mathbf{r}+\mathbf{n}'(t-\tau)\right)d\tau = \int_0^t dr' \frac{r'^2}{4\pi r'}\int dO'\, f\left(t-r,\mathbf{r}+\mathbf{r}'\right)\Big|_{\mathbf{r}'=r'\mathbf{n}'} = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_{B(t,\mathbf{0})} d^3\mathbf{r}' \frac{f\left(t-r',\mathbf{r}+\mathbf{r}'\right)}{r'} \quad . \tag{13}$$

де зроблено заміну $r' = t-\tau$ з подальшим переходом від повторного до об’ємного інтегрування в сферичних координатах (r',θ',φ', $dO = dO'$, $d^3\mathbf{r}' = dr' r'^2\, dO'$) по об’єму кулі $B(0,t)$. Заміна змінних $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}+\mathbf{r}'$ приводить до інтегралу по об’єму кулі $B(\mathbf{r},t)$ радіуса t з центром в точці $\mathbf{r}$:

$$u_3(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(t,\mathbf{r})} d^3\mathbf{r}'' \frac{f\left(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|,\mathbf{r}''\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \tag{14}$$

У інших доданках в (12) перейдемо від інтегрування по dO до інтегрування по поверхні сфери $S(t,\mathbf{r})$: $dS = t^2 dO$.

Остаточний результат запишемо для задачі з хвильовим рівнянням, де параметр швидкості поширення взаємодії a уведено явно:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\Delta u = f(t,\mathbf{r}) \tag{1a}$$

$$u(0,\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}), \quad \varphi \in C^3(\mathbb{R}^3), \tag{2a}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} u(t,\mathbf{r})\right|_{t=0} = \psi(\mathbf{r}), \quad \psi \in C^2(\mathbb{R}^3) \quad , \tag{3a}$$

Розв’язок дається формулою Кірхгофа

$$\begin{gathered} u(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{B(at,\mathbf{r})} d^3\mathbf{r}' \frac{f\left(t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \\ + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{S(at,\mathbf{r})} dS' \, \psi(\mathbf{r}') + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \int\limits_{S(at,\mathbf{r})} dS' \, \varphi(\mathbf{r}')\right]. \end{gathered} \tag{14a}$$

Цю формулу легко переписати у випадку, коли задача Коші для хвильового рівняння розглядається на $[T_0, \infty]$, а початкові умови задано при $t = T_1 < T_0$. Якщо джерело діє починаючи з $T_1 = -\infty$, причому область, де початкові функції φ, ψ й джерело $f(t,\mathbf{r})$ відмінні від нуля в обмеженій області, то внесок початкових умов прямує до нуля при $T_1 \to -\infty$, а інтегрування у першому доданку (14a) можна поширити на весь простір. У цьому разі маємо розв’язок хвильового рівняння для ізольованої системи

$$u_{isol}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_{\infty} d^3\mathbf{r}' \frac{f\left(t - \dfrac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a}, \mathbf{r}'\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} .$$