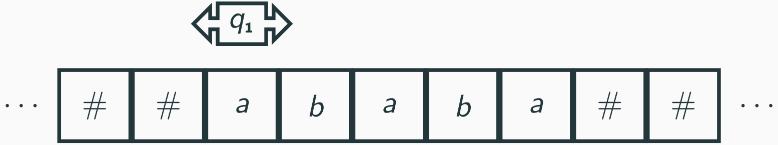
Машина Тюрінга та її властивості

Андрій Фесенко

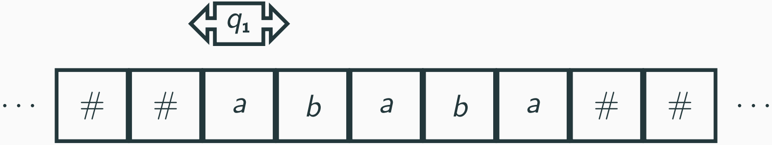
15.09.2021

Однострічкова машина Тюрінга



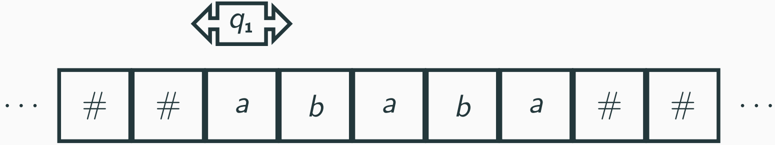
- абстрактний обчислювальний пристрій (**стрічка** та **зчитувальний пристрій**)

Однострічкова машина Тюрінга



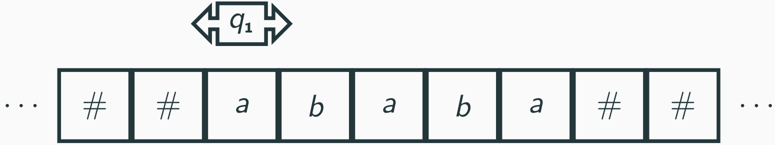
- абстрактний обчислювальний пристрій (**стрічка** та **зчитувальний пристрій**)
- в кожній **комірці** міститься рівно один **символ** зі скінченної множини символів Γ

Однострічкова машина Тюрінга



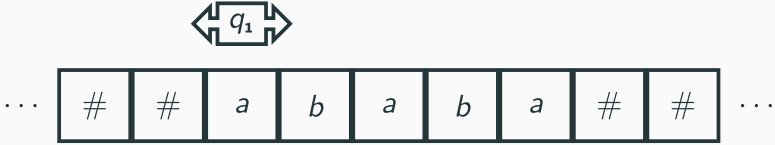
- абстрактний обчислювальний пристрій (**стрічка** та **зчитувальний пристрій**)
- в кожній **комірці** міститься рівно один **символ** зі скінченної множини символів Γ
- стрічка є потенційно нескінченною в обидві сторони

Однострічкова машина Тюрінга



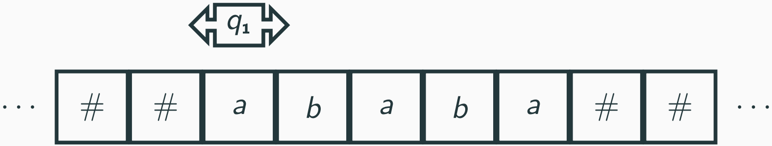
- абстрактний обчислювальний пристрій (**стрічка** та **зчитувальний пристрій**)
- в кожній **комірці** міститься рівно один **символ** зі скінченної множини символів Γ
- стрічка є потенційно нескінченною в обидві сторони
- Γ — **алфавіт стрічки**, **алфавіт машини** або **зовнішній алфавіт**

Однострічкова машина Тюрінга



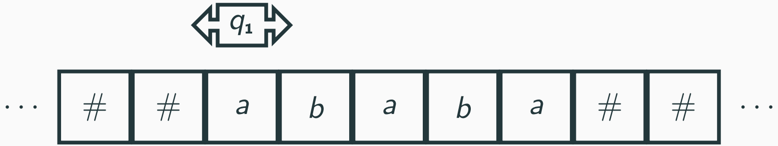
- абстрактний обчислювальний пристрій (**стрічка** та **зчитувальний пристрій**)
- в кожній **комірці** міститься рівно один **символ** зі <u>скінченної</u> множини символів Γ
- стрічка є потенційно нескінченною в обидві сторони
- Γ — **алфавіт стрічки**, **алфавіт машини** або **зовнішній алфавіт**
- $\#$ — **порожній символ (порожня комірка)**

Однострічкова машина Тюрінга



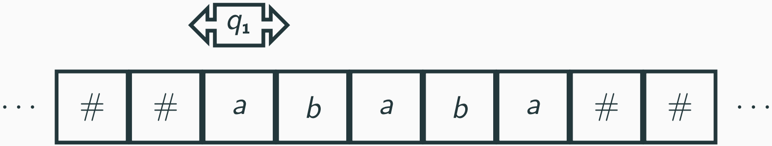
- <u>скінченна</u> **множина внутрішніх станів Q (внутрішній алфавіт)**

Однострічкова машина Тюрінга



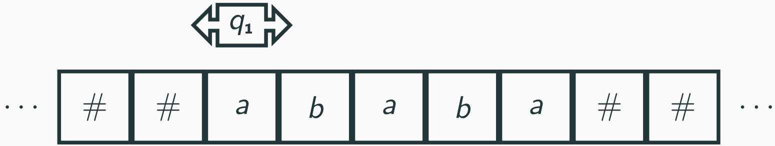
- <u>скінченна</u> **множина внутрішніх станів** Q **(внутрішній алфавіт)**
- в кожен момент часу знаходиться рівно в одному з цих **станів**

Однострічкова машина Тюрінга



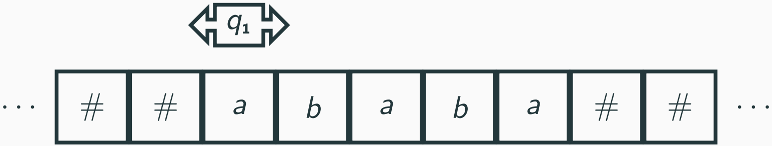
- <u>скінченна</u> **множина внутрішніх станів** Q **(внутрішній алфавіт)**
- в кожен момент часу знаходиться рівно в одному з цих **станів**
- один з елементів множини Q (q_0) — **початковий стан**

Одноcтрічкова машина Тюрінга



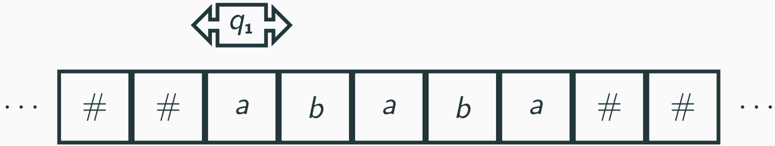
- скінченна **множина внутрішніх станів** Q **(внутрішній алфавіт)**
- в кожен момент часу знаходиться рівно в одному з цих **станів**
- один з елементів множини Q (q_0) — **початковий стан**
- множина **кінцевих станів** Q_F, $Q_F \subseteq Q$

Одностврічкова машина Тюрінга



- <u>скінченна</u> **множина внутрішніх станів** Q (**внутрішній алфавіт**)
- в кожен момент часу знаходиться рівно в одному з цих **станів**
- один з елементів множини Q (q_0) — **початковий стан**
- множина **кінцевих станів** Q_F, $Q_F \subseteq Q$
- переміщення зчитувального пристрою

Однострічкова машина Тюрінга



- <u>скінченна</u> **множина внутрішніх станів** Q (**внутрішній алфавіт**)
- в кожен момент часу знаходиться рівно в одному з цих **станів**
- один з елементів множини Q (q_0) — **початковий стан**
- множина **кінцевих станів** Q_F, $Q_F \subseteq Q$
- переміщення зчитувального пристрою
- дискретність функціонування

Однострічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою

Одностріччкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$

Одностріччкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга

Однострічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга
- повний набір команд — **програма**

Однострічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга
- повний набір команд — **програма**
- $(q_1, x_1) \mapsto (q_2, x_2, z)$ або $q_1, x_1 \mapsto q_2, x_2, z$, або $q_1 x_1 \mapsto q_2 x_2 z$, або навіть $q_1 x_1 q_2 x_2 z$

Одностррічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга
- повний набір команд — **програма**
- $(q_1, x_1) \mapsto (q_2, x_2, z)$ або $q_1, x_1 \mapsto q_2, x_2, z$, або $q_1 x_1 \mapsto q_2 x_2 z$, або навіть $q_1 x_1 q_2 x_2 z$
- для детермінованої машини частково визначена функція $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ — **функція переходів**

Одострічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга
- повний набір команд — **програма**
- $(q_1, x_1) \mapsto (q_2, x_2, z)$ або $q_1, x_1 \mapsto q_2, x_2, z$, або $q_1 x_1 \mapsto q_2 x_2 z$, або навіть $q_1 x_1 q_2 x_2 z$
- для детермінованої машини частково визначена функція $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ — **функція переходів**
- машина Тюрінга **зупиняється**, якщо немає відповідної команди

Одністрічкова машина Тюрінга

- один **такт** — зчитування символу, зміна стану, записування символу, зміщення зчитувального пристрою
- рух зчитувального пристрою — елемент множини $\{L, S, R\}$
- впорядкована п'ятірка (q_1, x_1, q_2, x_2, z), де $q_1, q_2 \in Q$, $x_1, x_2 \in \Gamma$ і $z \in \{L, S, R\}$, — **команда** машини Тюрінга
- повний набір команд — **програма**
- $(q_1, x_1) \mapsto (q_2, x_2, z)$ або $q_1, x_1 \mapsto q_2, x_2, z$, або $q_1 x_1 \mapsto q_2 x_2 z$, або навіть $q_1 x_1 q_2 x_2 z$
- для детермінованої машини частково визначена функція $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ — **функція переходів**
- машина Тюрінга **зупиняється**, якщо немає відповідної команди
- машина Тюрінга $\Leftrightarrow$ програма (машини Тюрінга)

Одностврічкова машина Тюрінга

- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — **вхідний алфавіт**

Одностiрічкова машина Тюрінга

- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — **вхідний алфавіт**
- машині **подано вхідне слово** (або **слово подано на вхід машини**) $x \in \Sigma^*$, $x = x_1 \ldots x_n$, де $x_1, \ldots, x_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}_0$,

Одностврічкова машина Тюрінга

- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — **вхідний алфавіт**
- машині **подано вхідне слово** (або **слово подано на вхід машини**) $x \in \Sigma^*$, $x = x_1 \dots x_n$, де $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- машина Тюрінга на вхідному слові **зациклюється** (**не застосовна** або **є незастосовною до вхідного слова**) або зупиняється (**застосовна** або **є застосовною до вхідного слова**)

Одностврічкова машина Тюрінга

- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — **вхідний алфавіт**
- машині **подано вхідне слово** (або **слово подано на вхід машини**) $x \in \Sigma^*$, $x = x_1 \dots x_n$, де $x_1, \dots, x_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}_0$,
- машина Тюрінга на вхідному слові **зациклюється** (**не застосовна** або **є незастосовною до вхідного слова**) або зупиняється (**застосовна** або **є застосовною до вхідного слова**)
- зупинка зчитувального пристрою (правило з S) $\neq$ зупинка машини Тюрінга

Однострічкова детермінована машина Тюрінга

Означення

Однострічкова детермінована машина Тюрінга M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який визначається кортежем $(\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де

- Γ — непорожня скінченна множина, яку називають **алфавітом машини Тюрінга** M або **алфавітом стрічки**;
- $\# \in \Gamma$ — **порожній символ**;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — непорожня скінченна множина, яку називають **вхідним алфавітом**;
- Q — непорожня скінченна **множина внутрішніх станів**;
- $Q_F \subseteq Q$ — **множина кінцевих внутрішніх станів**;
- $q_0 \in Q$ — **початковий (внутрішній) стан**;
- $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma \nrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, S, R\}$ — (часткова) **функція переходів**.

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\Gamma, \Sigma, \cancel{\#}, Q, Q_F, q_0, \delta)$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\Gamma, \cancel{\Sigma}, \cancel{\#}, Q, Q_F, q_0, \delta)$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)
- зазвичай вхідний алфавіт — $\{0, 1\}$

Домовленості опису машини Тюрінга

$$M = (\cancel{\Gamma}, \cancel{\Sigma}, \cancel{\#}, Q, Q_F, q_0, \delta)$$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)
- зазвичай вхідний алфавіт — $\{0, 1\}$
- зазвичай алфавіт стрічки — $\{0, 1, \#\}$

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\cancel{\Gamma}, \cancel{\Sigma}, \cancel{\#}, Q, \cancel{Q_F}, q_0, \delta)$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)
- зазвичай вхідний алфавіт — $\{0, 1\}$
- зазвичай алфавіт стрічки — $\{0, 1, \#\}$
- опускають множину всіх кінцевих внутрішніх станів

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\cancel{\Gamma}, \cancel{\Sigma}, \cancel{\#}, Q, \cancel{Q_F}, \cancel{q_0}, \delta)$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)
- зазвичай вхідний алфавіт — $\{0, 1\}$
- зазвичай алфавіт стрічки — $\{0, 1, \#\}$
- опускають множину всіх кінцевих внутрішніх станів
- стандартне позначення для початкового внутрішнього стану q_0

Домовленості опису машини Тюрінга

$M = (\cancel{\Gamma}, \cancel{\Sigma}, \cancel{\#}, \cancel{Q}, \cancel{Q_F}, \cancel{q_0}, \delta)$

- алфавіт машини Тюрінга Γ та вхідний алфавіт Σ відрізняються на один символ (стандартне позначення)
- зазвичай вхідний алфавіт — $\{0, 1\}$
- зазвичай алфавіт стрічки — $\{0, 1, \#\}$
- опускають множину всіх кінцевих внутрішніх станів
- стандартне позначення для початкового внутрішнього стану q_0
- всі внутрішні стани зустрічаються в командах

Домовленості опису машини Тюрінга

Приклад

Скорочений запис

$M = (\{q_0 1 q_1 0 R,\ q_0 0 q_0 1 S,\ q_1 1 q_2 1 R,\ q_1 0 q_3 1 S,\ q_1 \# q_1 1 S\})$

Домовленості опису машини Тюрінга

Приклад

Скорочений запис

$M = (\{q_0 1 q_1 0 R,\ q_0 0 q_0 1 S,\ q_1 1 q_2 1 R,\ q_1 0 q_3 1 S,\ q_1 \# q_1 1 S\})$

Повний запис

$M = (\{0, 1, \#\},\ \{0, 1\},\ \#,\ \{q_0, q_1, q_2, q_3\},\ \{q_2, q_3\},\ q_0,\ \{q_0 1 q_1 0 R,$
$q_0 0 q_0 1 S,\ q_1 1 q_2 1 R,\ q_1 0 q_3 1 S,\ q_1 \# q_1 1 S\})$

Конфігурація машини Тюрінга

Означення

Конфігурацією (одностагрічкової) машини Тюрінга $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ на будь-якому такті називають впорядковану трійку $C = (w, q, v)$, де $q \in Q$ — значення поточного внутрішнього стану машини Тюрінга, $w, v \in \Gamma^*$ такі, що вміст стрічки машини Тюрінга дорівнює значенню $w \| v$, доповненому з обох боків нескінченною кількістю порожніх символів $\#$, перший символ слова w та останній символ слова v не дорівнюють порожньому символу, на поточному такті зчитувальний пристрій знаходиться над першим символом слова v, тобто слова w та v знаходяться зліва та справа від зчитувального пристрою відповідно. Для довільної конфігурації $C = (w, q, v)$ внутрішній стан q називають **станом конфігурації** C, а слово $w \| v$ — **вмістом конфігурації** C.

$C = (w, q, v)$ використовують запис $C = w \| q \| v$.

Конфігурація машини Тюрінга

- $C_1 \vdash C_2$ (конфігурація C_2 **безпосередньо виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за один свій такт змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів

Конфігурація машини Тюрінга

- $C_1 \vdash C_2$ (конфігурація C_2 **безпосередньо виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за один свій такт змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- $C_1 \models C_2$ або $C_1 \vdash^* C_2$ (конфігурація C_2 **виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за скінченну кількість своїх тактів змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів

Конфігурація машини Тюрінга

- $C_1 \vdash C_2$ (конфігурація C_2 **безпосередньо виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за один свій такт змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- $C_1 \models C_2$ або $C_1 \vdash^* C_2$ (конфігурація C_2 **виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за скінченну кількість своїх тактів змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- $C_1 \vdash^n C_2$, $n \in \mathbb{N}_1$, (конфігурація C_2 **виводиться з конфігурації** C_1 **за** n **тактів**) означає, що машина Тюрінга M за n своїх тактів змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів

Конфігурація машини Тюрінга

- $C_1 \vdash C_2$ (конфігурація C_2 **безпосередньо виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за один свій такт змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- $C_1 \vDash C_2$ або $C_1 \vdash^* C_2$ (конфігурація C_2 **виводиться з конфігурації** C_1) означає, що машина Тюрінга за скінченну кількість своїх тактів змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- $C_1 \vdash^n C_2$, $n \in \mathbb{N}_1$, (конфігурація C_2 **виводиться з конфігурації** C_1 **за** n **тактів**) означає, що машина Тюрінга M за n своїх тактів змінює конфігурацію з C_1 на C_2 згідно з правилами функції переходів
- можуть використовуватись позначення $\vdash_M$, $\vDash_M$ або $\vdash_M^*$, та $\vdash_M^n$

Конфігурація машини Тюрінга

Твердження

Нехай машина Тюрінга M задана як $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$.
Нехай $q_1 \in Q \setminus Q_F$, $q_2 \in Q$, $x, y \in \Gamma^*$ і $a, b, c \in \Gamma$.

- Конфігурація (q_2, xb, y) машини Тюрінга M безпосередньо виводиться з конфігурації (q_1, x, ay), тобто $(q_1, x, ay) \vdash_M (q_2, xb, y)$, тоді й тільки тоді, коли $\delta(q_1, a) = (q_2, b, R)$.
- Конфігурація (q_2, x, cby) машини Тюрінга M безпосередньо виводиться з конфігурації (q_1, xc, ay), тобто $(q_1, xc, ay) \vdash_M (q_2, x, cby)$, тоді й тільки тоді, коли $\delta(q_1, a) = (q_2, b, L)$.
- Конфігурація (q_2, x, by) машини Тюрінга M безпосередньо виводиться з конфігурації (q_1, x, ay), тобто $(q_1, x, ay) \vdash_M (q_2, x, by)$, тоді й тільки тоді, коли $\delta(q_1, a) = (q_2, b, S)$.

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \not\vdash C_2$ ($\overset{\circ}{\vdash} C_1$ та $\overset{\circ}{\models} C_1$)

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \not\vdash C_2$ ($\overset{\circ}{\vdash} C_1$ та $\overset{\circ}{\models} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \nvdash C_2$ ($\overset{\circ}{\vdash} C_1$ та $\overset{\circ}{\models} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — **скінченний**, якщо $m \neq \infty$ і **нескінченний**, якщо $m = \infty$

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \not\vdash C_2$ ($\overset{\circ}{\vdash} C_1$ та $\overset{\circ}{\models} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — **скінченний**, якщо $m \neq \infty$ і **нескінченний**, якщо $m = \infty$
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ найбільшої довжини, де $C_0 = (\varepsilon, q_0, x)$, — **(повний) шлях обчислень для вхідного слова** x або **виконання машини Тюрінга з вхідним словом** x

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \not\vdash C_2$ ($\mathring{\vdash} C_1$ та $\mathring{\models} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — **скінченний**, якщо $m \neq \infty$ і **нескінченний**, якщо $m = \infty$
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ найбільшої довжини, де $C_0 = (\varepsilon, q_0, x)$, — **(повний) шлях обчислень для вхідного слова** x або **виконання машини Тюрінга з вхідним словом** x
- якщо для всіх вхідних слів машини Тюрінга їхні шляхи обчислень є скінченними, то кажуть, що машина Тюрінга **завжди зупиняється**

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \not\vdash C_2$ ($\mathring{\vdash} C_1$ та $\mathring{\vDash} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — **скінченний**, якщо $m \neq \infty$ і **нескінченний**, якщо $m = \infty$
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ найбільшої довжини, де $C_0 = (\varepsilon, q_0, x)$, — **(повний) шлях обчислень для вхідного слова** x або **виконання машини Тюрінга з вхідним словом** x
- якщо для всіх вхідних слів машини Тюрінга їхні шляхи обчислень є скінченними, то кажуть, що машина Тюрінга **завжди зупиняється**
- якщо повний шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ для вхідного слова x є скінченним і $C_m = (\varepsilon, q, y)$, то слово $y \in \Gamma^*$ — **результат застосування машини Тюрінга до вхідного слова** x і позначають це як $M(x) = y$

Обчислення (за Тюрінгом)

- конфігурація C_1 — **завершальна**, якщо $C_1 \nvdash C_2$ ($\mathring{\vdash} C_1$ та $\mathring{\vDash} C_1$)
- $C_0, C_1, \ldots, C_m$, $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $C_i \vdash C_{i+1}$, $0 \leq i < m$, — **обчислення (за Тюрінгом)** або **шлях обчислень**
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ — **скінченний**, якщо $m \neq \infty$ і **нескінченний**, якщо $m = \infty$
- шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ найбільшої довжини, де $C_0 = (\varepsilon, q_0, x)$, — **(повний) шлях обчислень для вхідного слова** x або **виконання машини Тюрінга з вхідним словом** x
- якщо для всіх вхідних слів машини Тюрінга їхні шляхи обчислень є скінченними, то кажуть, що машина Тюрінга **завжди зупиняється**
- якщо повний шлях обчислень $C_0, C_1, \ldots, C_m$ для вхідного слова x є скінченним і $C_m = (\varepsilon, q, y)$, то слово $y \in \Gamma^*$ — **результат застосування машини Тюрінга до вхідного слова** x і позначають це як $M(x) = y$
- зациклювання — $M(x) = \perp$

Одострічкова машина Тюрінга

Означення

Машина Тюрінга $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ **обчислює часткову функцію** $f : \Sigma^* \nrightarrow \Delta^*$, якщо $\Delta \subset \Gamma$ і для довільного слова з множини визначення функції $x \in D(f)$, $D(f) \subseteq \Sigma^*$, є правильною тотожність $M(x) = f(x)$, а $M(x) = \perp$ тоді й тільки тоді, коли $x \in (\Sigma^* \setminus D(f))$.

Функцію $f : \Sigma^* \nrightarrow \Delta^*$ називають **обчислюваною (за Тюрінгом)**, якщо існує машина Тюрінга, яка обчислює функцію f.

Означення

Машина Тюрінга $M = (\Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$ **обчислює часткову функцію** $f : \Sigma^* \nrightarrow \Delta^*$, якщо $\Delta \subset \Gamma$ і для довільного слова з множини визначення функції $x \in D(f)$, $D(f) \subseteq \Sigma^*$, є правильною тотожність $M(x) = f(x)$, а $M(x) = \perp$ тоді й тільки тоді, коли $x \in (\Sigma^* \setminus D(f))$.
Функцію $f : \Sigma^* \nrightarrow \Delta^*$ називають **обчислюваною (за Тюрінгом)**, якщо існує машина Тюрінга, яка обчислює функцію f.

Відстанню між двома комірками стрічки називають кількість комірок між ними, збільшену на одиницю. Для довільного цілого додатного числа $n \in \mathbb{N}^+$ підмножину комірок стрічки, будь-яка пара з яких знаходиться на відстані, що ділиться націло на n називають **решіткою з кроком** n.

Часова складність машини Тюрінга

Означення

Часом роботи машини Тюрінга M, яка завжди зупиняється, на вхідному слові x називають довжину найбільшого повного шляху обчислень для вхідного слова x і позначають як $Time_M(x)$.
Функцією часової складності машини Тюрінга M, яка завжди зупиняється, називають функцію $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, яка визначена як $T_M(n) = \max_{x \in \Sigma^*, |x| = n} (Time_M(x))$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$.
Говорять, що **машина Тюрінга M працює за час** t, де $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, якщо для довільного вхідного слова $x \in \Sigma^*$ виконується нерівність $T_M(|x|) \le t(|x|)$.

Просторова складність машини Тюрінга

Означення

Використаною пам'яттю машини Тюрінга M, яка завжди зупиняється, на вхідному слові x називають довжину найбільшого вмісту конфігурації з повного шляху обчислень для вхідного слова x і позначають як $Space_M(x)$.

Функцією просторової складності машини Тюрінга M, яка завжди зупиняється, називають функцію $S_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, яка визначена як $S_M(n) = \max\limits_{x \in \Sigma^*, |x| = n} (Space_M(x))$ для довільного натурального числа $n \in \mathbb{N}$.

Говорять, що **машина Тюрінга** M **використовує пам'ять** s, де $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, якщо для довільного вхідного слова $x \in \Sigma^*$ виконується нерівність $S_M(|x|) \leq s(|x|)$.

Види стрічок машини Тюрінга

- за структурою
  - нескінченна в обидві сторони
  - нескінченна в одну сторону
  - з символами обмеження
- за можливістю пересування зчитувального пристрою
  - в будь-яку сторону
  - в одну сторону (одноразова)
  - без зупинок
- за записом-читанням
  - доступна для зчитування та запису;
  - доступна тільки для зчитування;
  - тривіальна (залежить тільки від часу)

Багатострічкова машина Тюрінга

Означення

Багатострічкова детермінована машина Тюрінга M — це абстрактний обчислювальний пристрій, який визначається кортежем $(k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, де

- $k \in \mathbb{N}^+$ — кількість стрічок;
- Γ — непорожня скінченна множина, яку називають **алфавітом машини Тюрінга** M або **алфавітом стрічки**;
- $\# \in \Gamma$ — **порожній символ**;
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\#\}$ — непорожня скінченна множина, яку називають **вхідним алфавітом**;
- Q — непорожня скінченна **множина внутрішніх станів**;
- $Q_F \subseteq Q$ — **множина кінцевих внутрішніх станів**;
- $q_0 \in Q$ — **початковий (внутрішній) стан**;
- $\delta : (Q \setminus Q_F) \times \Gamma^k \nrightarrow Q \times \Gamma^{k-1} \times \{L, S, R\}^k$ — (часткова) **функція переходів**.

Властивості машин Тюрінга

Твердження

Якщо для довільної функції $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ і довільної функції $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $t(n) \geq n$, існує багатострічкова машина Тюрінга $M = (k, \Gamma, \Sigma, \#, Q, Q_F, q_0, \delta)$, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, ...

- використовуючи алфавіт стрічки Γ, то існує багатострічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка обчислює значення функції f за час $5t(n) \lceil \log |\Gamma| \rceil$, використовуючи алфавіт $\{0, 1, \#\}$.
- використовуючи k робочих стрічок (плюс одна вхідна та вихідна), то існує (багатострічкова) машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка обчислює значення функції f за час $5k\,(t(n))^2$, використовуючи одну робочу стрічку (плюс одна вхідна та вихідна).
- використовуючи нескінченні в обидві сторони стрічки, то існує багатострічкова машина Тюрінга $\tilde{M}$, яка обчислює значення функції f за час $t(n)$, використовуючи стрічки, нескінченні лише в одну сторону.