УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ - 2
ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ ТА ЗГОРТКА

1.1. Означення

Нехай **A** – диференціальний оператор скінченого порядку зі сталими коефіцієнтами $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Фундаментальним розв'язком оператора **A** називають узагальнену функцію G, таку, що

$$\mathbf{A}G = \delta(x). \tag{1}$$

Це означає

$$\langle \mathbf{A}G, \chi \rangle = \chi(0) \quad \forall \chi \in D. \tag{2}$$

1.2. Згортка узагальненої та основної функції

Згортка $\varsigma = F * \chi$ узагальненої функції $F \in D'$ з основною $\chi \in D$ є за визначенням

$$\zeta\ (x) = \langle F(y), \chi\ (x-y) \rangle \quad \blacklozenge$$

Завдяки неперервності функціоналу, визначеного узагальненою функцією, можна переходити до границі під знаком $\langle ..., ... \rangle$. Звідси випливає неперервність $\zeta\ (x)$, а також і диференційовність. Наприклад,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \lim_{t \to 0} \left\{ t^{-1} \langle F(y), \chi(x+t-y) \rangle - \langle F(y), \chi(x-y) \rangle \right\} = \\ &= \left\langle F(y), \lim_{t \to 0} t^{-1} \left[\chi(x+t-y) - \chi(x-y) \right] \right\rangle = \langle F(y), \partial_x \chi(x-y) \rangle = \\ &= -\langle F(y), \partial_y \chi(x-y) \rangle = \langle \partial_y F(y), \chi(x-y) \rangle.\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо неперервну диференційовність $\zeta\ (x)$ довільного порядку. Але слід мати на увазі, що ***у загальному випадку*** $\zeta\ (x)$ ***може не належати*** D ***(не виконується вимога, що носій обмежений).***

За допомогою згортки та фундаментального розв`язку можна будувати розв`язки деяких рівнянь виду $A\varphi = f$.

Проілюструємо це на прикладі рівняння Пуассона в $\mathbb{R}^n$

$$\Delta\varphi=f \qquad (f \in D), \tag{3}$$

де $\Delta \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $\Delta G(x) = \delta^{(n)}(x)$, $\varphi(y)=\left(G * f\right)(y) \equiv \left\langle G(x), f(y-x)\right\rangle$.

Очевидно

$$\frac{\partial}{\partial y_i} f(y-x) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f(y-x), \qquad \frac{\partial}{\partial x_i^2} f(y-x) = \frac{\partial}{\partial y_i^2} f(y-x)$$

Маємо

$$\Delta_y \left(G * f\right)(y) \equiv \Delta_y \left\langle G(x), f(y-x)\right\rangle = \left\langle G(x), \Delta_y f(y-x)\right\rangle =$$
$$= \left\langle G(x), \Delta_x f(y-x)\right\rangle \equiv \left\langle \Delta_x G(x), f(y-x)\right\rangle.$$

Індекс у оператора Δ введено, щоб підкреслити, на яку змінну він діє.

Якщо узагальнена функція G є фундаментальним розв’язком оператора Δ: $\Delta G(x) = \delta^{(n)}(x)$, це означає $\left\langle \Delta_x G(x), f(y-x)\right\rangle = \left\langle \delta^{(n)}(x), f(y-x)\right\rangle = f(y)$,

тобто $\varphi=G * f$ є розв’язком рівняння Пуассона $\Delta\varphi=f$ в $\mathbb{R}^n$ $(f \in D)$.

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ - 3

3.1 Фундаментальний розв’язок оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$

Нехай $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$– арифметичний простір трьох просторових змінних (x, y, z);

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Розглянемо регулярну узагальнену функцію

$$\left\langle G, \chi \right\rangle \equiv -\frac{1}{4\pi} \int d^3\mathbf{r} \, \frac{\chi(\mathbf{r})}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| . \tag{5}$$

Далі перевіримо умови, які мають виконуватися для регулярної УФ.

Можна записати

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r}, \quad r = |\mathbf{r}| \ .$$

Покажемо, що формула (2) визначає ***регулярну*** **узагальнену функцію**: $\forall \chi \in D(\mathbb{R}^3)$

$$\langle G, \chi \rangle = -\frac{1}{4\pi}\left\langle \frac{1}{r}, \chi(\mathbf{r}) \right\rangle = -\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\, r^{-1}\chi(\mathbf{r}) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr\, r^2 \int dO\, r^{-1}\chi(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr\, r \int dO\ \chi(r,\theta,\varphi) .$$

Тут ми перейшли до сферичних координат r, θ, φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi ,\ y = r\sin\theta\sin\varphi ,\ z = r\cos\theta ,\ \theta \in [0;\pi],\ \varphi \in [0;2\pi],$$

у тривимірному просторі,

$$d^3\mathbf{r} = r^2 dO dr, \quad dO = \sin\theta d\theta d\varphi .$$

Очевидно, що тут усі інтеграли не мають особливостей, причому, завдяки тому, що функція χ – фінітна, інтегрування по r насправді відбувається у скінченних границях.

Покажемо неперервність. Нехай $\chi_n(\mathbf{r}) \xrightarrow{D} \chi_*(\mathbf{r}), \quad n \to \infty$. Завдяки фінітності та означенню збіжності в D маємо

$$\exists R: \quad \operatorname{supp} \chi_n(\mathbf{r}) \subset B_R, \quad \operatorname{supp} \chi_*(\mathbf{r}) \subset B_R .$$

Тоді

$$\langle G, \chi_n - \chi_* \rangle = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr\, r \int dO\, (\chi_n - \chi_*) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^R dr\, r \int dO\, (\chi_n - \chi_*) .$$

Звідси

$$\left|\langle G, \chi_n - \chi_* \rangle\right| \le \frac{1}{4\pi}\int_0^R dr\, r \int dO\, |\chi_n(\mathbf{r}) - \chi_*(\mathbf{r})| \le$$

$$\le \frac{1}{2} R^2 \sup\left\{ |\chi_n(\mathbf{r}) - \chi_*(\mathbf{r})|, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Це доводить неперервність функціоналу G ♦

Покажемо, що G **є фундаментальним розв'язком оператора Лапласа**, тобто у символічному записі

$$\Delta\left(r^{-1}\right) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \ . \qquad (6)$$

За означенням похідних від узагальненої функції і за означенням

$$\left\langle \Delta\left(r^{-1}\right), \chi(\mathbf{r}) \right\rangle = -\left\langle \nabla r^{-1}, \nabla\chi(\mathbf{r}) \right\rangle = \left\langle r^{-1}, \Delta\chi(\mathbf{r}) \right\rangle = \int d^3\mathbf{r}\, r^{-1}\, \Delta\chi \ .$$

Нехай R: $\operatorname{supp}\chi(\mathbf{r}) \subset B_R$; у виразі

$$\int d^3\mathbf{r}\; r^{-1}\Delta\chi(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r} \left[\operatorname{div}(r^{-1}\nabla\chi) - \nabla r^{-1} \cdot \nabla\chi) \right] \qquad (7)$$

підінтегральний вираз дорівнює нулю зовні кулі B_R. Щоб застосувати до інтегралу з дивергенцією формулу Остроградського-Гаусса, що вимагає неперервну диференційованість $r^{-1}\nabla\chi$ (яка формально порушена у початку координат), слід виключити з інтегралу кулю радіусу ε навколо точки $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, яка дає нульовий внесок при $\varepsilon \to 0$:

$$\int d^3\mathbf{r}\, \operatorname{div}(r^{-1}\nabla\chi) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{\varepsilon}^{R} dr\, r^2 \int dO\, \operatorname{div}(r^{-1}\nabla\chi) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_{\varepsilon}^{R} dr\, r^2 \int dO\, \operatorname{div}(r^{-1}\nabla\chi) = (**)$$

Після застосування формули Остроградського-Гаусса до (7) виникає інтеграл по зовнішній сфері радіусу R (що дає нуль завдяки фінітності $\chi(\mathbf{r})$) та додатковий інтеграл по поверхні малої сфери радіусу ε (який, однак, також дає нульовий внесок у границі $\varepsilon \to 0$):

$$(**) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left\{ R \int dO \left. \frac{\partial\chi}{\partial r} \right|_{r=R} - \int dO\, R \left. \frac{\partial\chi}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} \right\} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left\{ -\varepsilon \int dO \left. \frac{\partial\chi}{\partial r} \right|_{r=\varepsilon} \right\} = 0 \ .$$

Звідси отримуємо в формулі (7)

$$\int d^3\mathbf{r}\; r^{-1}\Delta\chi(\mathbf{r}) = -\int d^3\mathbf{r}\; \nabla r^{-1} \cdot \nabla\chi = \int d^3\mathbf{r}\; r^{-3}(\mathbf{r} \cdot \nabla\chi) \ .$$

Цей інтеграл збігається в нулі. Далі врахуємо, що $(\mathbf{n} \cdot \nabla) = \dfrac{\partial}{\partial r}$, де $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r} / r$:

$$\int d^3\mathbf{r}\, r^{-3}(\mathbf{r}\cdot\nabla\chi)=\int_0^\infty dr\,(\mathbf{n}\cdot\nabla\int dO\,\chi(r,\theta,\varphi)=\int_0^\infty dr\,\frac{\partial}{\partial r}\int dO\,\chi(r,\theta,\varphi)=$$

$$=-\int dO\,\chi(0,\theta,\varphi)=-4\pi\,\chi\big|_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}\,.$$

Таким чином,

$$-\frac{1}{4\pi}\left\langle\Delta\left(\frac{1}{r}\right),\chi(\mathbf{r})\right\rangle=-\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\,\frac{\Delta\chi}{r}=\chi(\mathbf{0})\;\blacklozenge$$

3.2 Розглянемо ***рівняння Пуассона в*** $\mathbb{R}^3$

$$\Delta\psi=f(\mathbf{r})\;. \tag{8}$$

Обмежимося випадком дійсної функції $f(\mathbf{r})\in D(\mathbb{R}^3)$ і розглянемо згортку

$$\left(G*f\right)(\mathbf{r})=\left\langle G(\mathbf{r}'),\,f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle,$$

де $G(\mathbf{r})=-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{r}$. Як ми бачили, це – регулярна узагальнена функція, тому

$$\left\langle G,\varphi\right\rangle=-\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\,\frac{\varphi(\mathbf{r})}{r},\quad \varphi\in D. \tag{9}$$

Звідси функція

$$\left(G*f\right)(\mathbf{r})\equiv-\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{f(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'|}=-\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{10}$$

є розв’язком рівняння Пуассона (6). ♦

Важливо зазначити, що з неперервності функціоналу G випливає ***неперервна залежність цього розв’язку від правої частини (6).***

УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ - 4

4.1 Фундаментальний розв’язок оператора Даламбера $\Box$ *в* $\mathbb{R}^4$

Оператор Даламбера (D’Alembert) діє на функції від змінних $x\equiv(t,\mathbf{r})\in\mathbb{R}^4$:

$$\Box\psi(t,\mathbf{r})=\psi_{tt}-\Delta\psi;\qquad \psi_{tt}\equiv\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Розглянемо функціонал (нова нумерація)

$$\langle G,\chi\rangle = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\,\frac{\chi(r,\mathbf{r})}{r}, \quad r\equiv|\mathbf{r}|, \quad \chi(t,\mathbf{r})\in D(\mathbb{R}^4)\ \blacklozenge \tag{1}$$

Легко перевірити за допомогою переходу в сферичні координати, що інтеграл у правій частині (1) Для позначення цієї узагальненої функції часто використовують також вираз

$$G(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\delta[t^2-\mathbf{r}^2]\theta(t),$$

де $\theta(t)$–функція Хевісайда. Дійсно, *формально* маємо

$$\frac{1}{2\pi}\int d^4x\,\delta[t^2-\mathbf{r}^2]\theta(t)\chi(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int d^3\mathbf{r}\int dt\,\delta[t^2-\mathbf{r}^2]\theta(t)\chi(t,\mathbf{r}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int d^3\mathbf{r}\int dt\left[\delta(t-r)+\delta(t+r)\right]\theta(t)\frac{\chi(t,\mathbf{r})}{2|t|} = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\,\frac{\chi(r,\mathbf{r})}{r},$$

де використано формулу (2) з п.1.1. Ці формальні викладки можна зробити більш строгими, але для подальшого нам буде досить визначення (1).

Покажемо, що (1) визначає неперервний функціонал – регулярну узагальнену функцію. Далі B_R – це куля в $\mathbb{R}^4$.

Нехай $\chi_n(t,\mathbf{r})\xrightarrow{D}\chi_*(t,\mathbf{r})$ при $n\to\infty$. Завдяки фінітності та означенню збіжності в D $\exists R:\quad \operatorname{supp}\chi_n(t,\mathbf{r})\subset B_R,\quad \operatorname{supp}\chi_*(t,\mathbf{r})\subset B_R$. Тоді

$$\left|\langle G,\chi_n-\chi_*\rangle\right| = \frac{1}{4\pi}\left|\int d^3\mathbf{r}\,\frac{1}{r}\left[\chi_n(r,\mathbf{r})-\chi_*(r,\mathbf{r})\right]\right| \le \frac{1}{4\pi}\int_0^R dr\,r\int dO\,\left|\chi_n(r,\mathbf{r})-\chi_*(r,\mathbf{r})\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}R^2\sup\left\{\left|\chi_n(r,\mathbf{r})-\chi_*(r,\mathbf{r})\right|,\quad (t,\mathbf{r})\in\mathbb{R}^4\right\}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Це доводить неперервність ♦

Покажемо, що

$$\Box G = \delta^{(4)}(x) = \delta^{(4)}(t,\mathbf{r}),$$

що означає

$$\langle \Box G,\chi\rangle = \chi(0,\mathbf{0}) \tag{2}$$

За визначенням

$$\left\langle \Box G,\chi \right\rangle = \left\langle G,\Box\chi \right\rangle = \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\; r^{-1}\cdot\psi(r,\mathbf{r})\}\,, \qquad (3)$$

де $\psi(\mathbf{r}) = \left(\Box\chi(t,\mathbf{r})\right)\Big|_{t=r} = \chi_{tt}(r,\mathbf{r}) - \Delta\chi(t,\mathbf{r})\,|_{t=r}$.

Перейдемо до сферичних координат r,θ,φ, у яких маємо такі загальні співвідношення

$$\Delta f(r,\theta,\varphi) \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\Lambda f}{r^2}\,,$$

де $\Lambda f \equiv \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$ – кутова частина оператора Лапласа.

Оцінимо внесок Λ в (3):

$$\int d^3\mathbf{r}\; r^{-3}\cdot\Lambda\chi(t,\mathbf{r})\Big|_{t=r} = \int_0^\infty dr\; r\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\;\Lambda\chi(t,\mathbf{r})\Big|_{t=r} =$$

$$= \int_0^\infty dr\; r\int_0^\pi d\theta\sin\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right\}_{t=r}.$$

Тут

$$\int_0^{2\pi} d\varphi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=2\pi} - \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0,$$

$$\int_0^\pi d\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\pi} - \sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 0.$$

Тому в формулі (3) залишається

$$\left\langle \Box G,\chi \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}\;\frac{1}{r}\left[\chi_{tt} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\chi}{\partial r}\right)\right]_{t=r} = \int_0^\infty dr\; r\left[\tilde\chi_{tt} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\tilde\chi}{\partial r}\right)\right]_{t=r} =,$$

$$= \int_0^\infty dr\; r\left[\tilde\chi_{tt} - \tilde\chi_{rr} - \frac{2}{r}\tilde\chi_r\right]_{t=r}\,,$$

де $\tilde\chi(t,r) \equiv \dfrac{1}{4\pi}\int dO\,\chi(t,r,\theta,\varphi)$, $\tilde\chi_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\tilde\chi(t,r)$, $\quad \tilde\chi_r = \dfrac{\partial}{\partial r}\tilde\chi(t,r)$.

Легко бачити

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\tilde{\chi}_t(r,r)-\tilde{\chi}_r(r,r)\right)-\tilde{\chi}(r,r)\right]=r\left[\tilde{\chi}_{tt}(r,r)-\tilde{\chi}_{rr}(r,r)\right]-2\tilde{\chi}_r(r,r).$$

Тому

$$\langle \Box G,\chi\rangle = =\int_0^\infty dr\,\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\tilde{\chi}_t(r,r)-\tilde{\chi}_r(r,r)\right)-\tilde{\chi}(r,r)\right]=\tilde{\chi}(0,0)=\chi(0,0).$$

Формулу (2) доведено ♦

Зазначимо, що, якщо не вводити додаткових умов на нескінченності, фундаментальний розв’язок (1) не є єдиним. Існують інші узагальнені функції, що задовольняють рівняння (2), наприклад, що описують випереджуючі потенціали. Але саме (1) задовольняє умові причинності.

4.2 Розв’язок неоднорідного хвильового рівняння

$$\Box\psi = f(t,\mathbf{r}) \quad , \tag{4}$$

де функція $f(\mathbf{r})\in D(\mathbb{R}^4)$

Розглянемо згортку

$$\psi(t,\mathbf{r})=\left(G*f\right)(t,\mathbf{r})=\left\langle G(t',\mathbf{r}'),\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle,$$

де $G\in D'$ подано формулою (1). Покажемо, що ця згортка є розв’язком рівняння Пуассона (6). Використовуючи властивості згортки, маємо

$$\Box(G*f)(\mathbf{r})\equiv\Box\left\langle G(t',\mathbf{r}'),\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle=\left\langle G(\mathbf{r}'),\Box_{t,\mathbf{r}}\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle=$$

$$=\left\langle G(\mathbf{r}'),\Box_{t',\mathbf{r}'}\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle=\left\langle \Box_{t',\mathbf{r}'}G(t',\mathbf{r}'),\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle=$$

$$=\left\langle \delta^{(4)}(t',\mathbf{r}'),\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle= f(t,\mathbf{r}).$$

Таким чином, $\psi=G*f$ є розв’язком рівняння (4) ♦

За формулою (1)

$$\psi(t,\mathbf{r})=\left\langle G(t',\mathbf{r}'),\, f(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right\rangle=\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}'\,\frac{f(t-r',\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{r'}.$$

Після заміни $\mathbf{r}''=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ маємо

$$\psi(t,\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\int d^3\mathbf{r}''\,\frac{f(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|,\mathbf{r}'')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \quad . \tag{5}$$

Завдяки наявності запізнюючого часу $t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|$ формулі (5) збурення правої частини в (4) у точці $\mathbf{r}'$ досягає точки $\mathbf{r}$ не відразу, а через час $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Тому (5) називають запізнюючим розв'язком. Якщо $f(t,\mathbf{r})=0$ при $t<0$, то $\psi(t,\mathbf{r})$ буде відмінним від нуля лише при $t>0$, що відповідає умові причинності. Для фінітної функції $f(t,\mathbf{r})$ її внесок в $\psi(t,\mathbf{r})$ поширюється із ростом часу t від $\operatorname{supp}\psi$ на все більші значення r аж до нескінченності, а не навпаки. Така умова забезпечує єдиність розв'язку (5); це буде обґрунтовано більш докладно при розгляді задачі Коші для рівняння (4).