Асимптотична нотація

Андрій Фесенко

08.09.2021

Оцінка ресурсів

- нехай оцінка ресурсів алгоритму дорівнює $7n^2 + 13n + 135$, $n \in \mathbb{N}$, (в найгіршому випадку)

Оцінка ресурсів

- нехай оцінка ресурсів алгоритму дорівнює $7n^2 + 13n + 135$, $n \in \mathbb{N}$, (в найгіршому випадку)
- із значним зростанням n основний вплив на значення має доданок $7n^2$

Оцінка ресурсів

- нехай оцінка ресурсів алгоритму дорівнює $7n^2 + 13n + 135$, $n \in \mathbb{N}$, (в найгіршому випадку)
- із значним зростанням n основний вплив на значення має доданок $7n^2$
- сталий коефіцієнт не є важливим для гнучкості моделей обчислень

Оцінка ресурсів

- нехай оцінка ресурсів алгоритму дорівнює $7n^2 + 13n + 135$, $n \in \mathbb{N}$, (в найгіршому випадку)
- із значним зростанням n основний вплив на значення має доданок $7n^2$
- сталий коефіцієнт не є важливим для гнучкості моделей обчислень
- сталий коефіцієнт не є важливим з-за теореми Блюма

Оцінка ресурсів

- нехай оцінка ресурсів алгоритму дорівнює $7n^2 + 13n + 135$, $n \in \mathbb{N}$, (в найгіршому випадку)
- із значним зростанням n основний вплив на значення має доданок $7n^2$
- сталий коефіцієнт не є важливим для гнучкості моделей обчислень
- сталий коефіцієнт не є важливим з-за теореми Блюма
- $\Rightarrow$ є необхідним спрощення до n^2 (або іншої функції, яка зростає на асимптотиці не гірше)

Означення ($\mathcal{O}$ *велике*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$. Функція f є **"$\mathcal{O}$" великим від функції g на множині** D, якщо існує така константа $c > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq c|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in \mathcal{O}(g(z))$, $z \in D$.

Означення (*$\mathcal{O}$ велике*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$. Функція f є **“$\mathcal{O}$” великим від функції g на множині D**, якщо існує така константа $c > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq c|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in \mathcal{O}(g(z))$, $z \in D$.

Означення (*$\mathcal{O}$ велике в околі точки*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$, замикання якої містить точку $z_0 \in \mathbb{C}$. Функція f є **“$\mathcal{O}$” великим від функції g при $z \to z_0$,** $z \in D$, якщо існують такі константа $c > 0$ та число $\delta > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq c|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$, $0 < |z - z_0| < \delta$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in \mathcal{O}(g(z))$, $z \to z_0$.

Означення ($\mathcal{O}$ *велике на нескінченності*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій необмеженій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$. Функція f є **“$\mathcal{O}$” великим від функції g при $z \to \infty$, $z \in D$**, якщо існують такі константа $c > 0$ та число $m > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq c|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$, $|z| > m$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in \mathcal{O}(g(z))$, $z \to \infty$.

o мале

Означення ($\mathcal{O}$ *велике на нескінченності*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій необмеженій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$. Функція f є **“$\mathcal{O}$” великим від функції g при $z \to \infty$, $z \in D$**, якщо існують такі константа $c > 0$ та число $m > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq c|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$, $|z| > m$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in \mathcal{O}(g(z))$, $z \to \infty$.

Означення (o *мале на нескінченності*)

Нехай задані дві комплекснозначні функції $f, g : D \to \mathbb{C}$, визначені на деякій необмеженій множині комплексної площини $D \subseteq \mathbb{C}$. Функція f є **“o” малим від функції g при $z \to \infty$, $z \in D$**, якщо для довільного як завгодно малого значення $\varepsilon > 0$ існує таке число $m(\varepsilon) > 0$, що виконується нерівність $|f(z)| \leq \varepsilon|g(z)|$ для всіх значень $z \in D$, $|z| > m(\varepsilon)$. Позначають це за допомогою запису $f(z) \in o(g(z))$, $z \to \infty$.

Аналіз ресурсів

- $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ — множина всіх функцій виду $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Аналіз ресурсів

- $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ — множина всіх функцій виду $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- для зручності уникаємо $\lceil \cdot \rceil$, наприклад $n \log n$

Аналіз ресурсів

- $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$ — множина всіх функцій виду $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- для зручності уникаємо $\lceil \cdot \rceil$, наприклад $n \log n$
- тільки асимптотична поведінка, при $n \to \infty$

Асимптотична нотація

Означення

Нехай задані дві функції $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Функція f є **“$\mathcal{O}$” великим від функції g (при $n \to \infty$)**, якщо існують такі константа $c \in \mathbb{R}^+$ та натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $f(n) \leq cg(n)$ для всіх значень $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.
Функція f є **“o” малим від функції g (при $n \to \infty$)**, якщо якщо для довільного як завгодно малого значення $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ існує таке натуральне число $n_0(\varepsilon) > 0$, що виконується нерівність $f(n) \leq \varepsilon g(n)$ для всіх значень $n > n_0(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$.

Асимптотична нотація

Означення

Нехай задані дві функції $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Функція f є **"$\mathcal{O}$" великим від функції** g **(при** $n \to \infty$**)**, якщо існують такі константа $c \in \mathbb{R}^+$ та натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $f(n) \leq cg(n)$ для всіх значень $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.
Функція f є **"o" малим від функції** g **(при** $n \to \infty$**)**, якщо якщо для довільного як завгодно малого значення $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ існує таке натуральне число $n_0(\varepsilon) > 0$, що виконується нерівність $f(n) \leq \varepsilon g(n)$ для всіх значень $n > n_0(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$.

Наслідок

Нехай задані дві функції $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Функція f є "$\mathcal{O}$" великим від функції g тоді й тільки тоді, коли існують такі константа $c \in \mathbb{R}^+$ та натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ для всіх значень $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.
Функція f є "o" малим від функції g тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

Особливості позначень

Зауваження

Для скорочення запису будемо використовувати позначення $f \in \mathcal{O}(g)$ та $f \in o(g)$, як і $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ та $f(n) \in o(g(n))$ відповідно.

Особливості позначень

Зауваження

Для скорочення запису будемо використовувати позначення $f \in \mathcal{O}(g)$ та $f \in o(g)$, як і $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ та $f(n) \in o(g(n))$ відповідно.

Зауваження

- $f = \mathcal{O}(g)$ та $f = o(g)$ — не є рівностями, а є несиметричними відношеннями

Особливості позначень

Зауваження

Для скорочення запису будемо використовувати позначення $f \in \mathcal{O}(g)$ та $f \in o(g)$, як і $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ та $f(n) \in o(g(n))$ відповідно.

Зауваження

- $f = \mathcal{O}(g)$ та $f = o(g)$ — не є рівностями, а є несиметричними відношеннями
- вирази $\mathcal{O}(g) = f$ та $o(g) = f$ не мають сенсу

Особливості позначень

Зауваження

Для скорочення запису будемо використовувати позначення $f \in \mathcal{O}(g)$ та $f \in o(g)$, як і $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ та $f(n) \in o(g(n))$ відповідно.

Зауваження

- $f = \mathcal{O}(g)$ та $f = o(g)$ — не є рівностями, а є несиметричними відношеннями
- вирази $\mathcal{O}(g) = f$ та $o(g) = f$ не мають сенсу
- приклад — $4n^3 + 8n = \mathcal{O}(n^3)$ та $\mathcal{O}(n^3) = o(n^4)$, але твердження $o(n^4) = \mathcal{O}(n^3)$ є неправильним, а твердження $\mathcal{O}(n^3) = 4n^3 + 8n$ не має сенсу

Особливості позначень

Зауваження

Для скорочення запису будемо використовувати позначення $f \in \mathcal{O}(g)$ та $f \in o(g)$, як і $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ та $f(n) \in o(g(n))$ відповідно.

Зауваження

- $f = \mathcal{O}(g)$ та $f = o(g)$ — не є рівностями, а є несиметричними відношеннями
- вирази $\mathcal{O}(g) = f$ та $o(g) = f$ не мають сенсу
- приклад — $4n^3 + 8n = \mathcal{O}(n^3)$ та $\mathcal{O}(n^3) = o(n^4)$, але твердження $o(n^4) = \mathcal{O}(n^3)$ є неправильним, а твердження $\mathcal{O}(n^3) = 4n^3 + 8n$ не має сенсу
- $(1 + o(1))^{\mathcal{O}(n)} + 4n^5 = \mathcal{O}(e^n) + 2$

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)
4. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**правило членства**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)
4. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**правило членства**)
5. $\mathcal{O}(cf) = \mathcal{O}(f + c) = \mathcal{O}(f)$

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)
4. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**правило членства**)
5. $\mathcal{O}(cf) = \mathcal{O}(f + c) = \mathcal{O}(f)$
6. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$ (**правило додавання**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)
4. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**правило членства**)
5. $\mathcal{O}(cf) = \mathcal{O}(f + c) = \mathcal{O}(f)$
6. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$ (**правило додавання**)
7. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g)$

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Властивості

Для довільних функцій $f, g, h, f_1, f_2, g_1, g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ та довільної константи $c \in \mathbb{R}^+$ виконуються такі твердження.

1. Якщо $f(n) \leq g(n)$ для всіх значень $n \in \mathbb{N}$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**узгодженість порядку**)
2. $f = \mathcal{O}(f)$ (**рефлексивність**)
3. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$ і $g = \mathcal{O}(h)$, то $f = \mathcal{O}(h)$ (**транзитивність**)
4. Якщо $f = \mathcal{O}(g)$, то $\mathcal{O}(f) \subseteq \mathcal{O}(g)$ (**правило членства**)
5. $\mathcal{O}(cf) = \mathcal{O}(f + c) = \mathcal{O}(f)$
6. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$ (**правило додавання**)
7. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g)$, то $f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g)$
8. Якщо $f_1 = \mathcal{O}(g_1)$ і $f_2 = \mathcal{O}(g_2)$, то $f_1 f_2 = \mathcal{O}(g_1 g_2)$ (**правило множення**)

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Якщо $f = o(g)$, то $f = \mathcal{O}(g)$, але не навпаки.
Наприклад, $4x^3 = \mathcal{O}(x^3)$, але $4x^3 \neq o(x^3)$.

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?
- $n^{14} + n^2 = \mathcal{O}(n^{14} + 5)$?

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?
- $n^{14} + n^2 = \mathcal{O}(n^{14} + 5)$?
- $10^5 + n^{14} + n^2 + 3 = \mathcal{O}(10^5)$?

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?
- $n^{14} + n^2 = \mathcal{O}(n^{14} + 5)$?
- $10^5 + n^{14} + n^2 + 3 = \mathcal{O}(10^5)$?
- $n = \mathcal{O}(\log_2 n)$?

Властивості $\mathcal{O}$ великого

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?
- $n^{14} + n^2 = \mathcal{O}(n^{14} + 5)$?
- $10^5 + n^{14} + n^2 + 3 = \mathcal{O}(10^5)$?
- $n = \mathcal{O}(\log_2 n)$?
- $n = \mathcal{O}(4^n)$?

Приклад

- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{15})$?
- $n^{14} = \mathcal{O}(n^{13})$?
- $n^{14} + n^2 = \mathcal{O}(n^{14} + 5)$?
- $10^5 + n^{14} + n^2 + 3 = \mathcal{O}(10^5)$?
- $n = \mathcal{O}(\log_2 n)$?
- $n = \mathcal{O}(4^n)$?
- $4^n = \mathcal{O}(n)$?

Додаткові позначення

$f \preceq g$	$f \in \mathcal{O}(g)$			
$f \succeq g$	$g \in \mathcal{O}(f)$			
$f \prec g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \notin \mathcal{O}(f)$			
$f \succ g$	$g \in \mathcal{O}(f)$ і $f \notin \mathcal{O}(g)$			
$f \approx g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \in \mathcal{O}(f)$			

Додаткові позначення

$f \preceq g$	$f \in \mathcal{O}(g)$	f обмежена зверху g
$f \succeq g$	$g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена знизу g
$f \prec g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \notin \mathcal{O}(f)$	g домінує над f
$f \succ g$	$g \in \mathcal{O}(f)$ і $f \notin \mathcal{O}(g)$	f домінує над g
$f \approx g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена зверху і знизу g

Додаткові позначення

$f \preceq g$	$f \in \mathcal{O}(g)$	f обмежена зверху g	$\mathcal{O}$
$f \succeq g$	$g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена знизу g	Ω
$f \prec g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \notin \mathcal{O}(f)$	g домінує над f	o
$f \succ g$	$g \in \mathcal{O}(f)$ і $f \notin \mathcal{O}(g)$	f домінує над g	ω
$f \approx g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена зверху і знизу g	

Додаткові позначення

$f \preceq g$	$f \in \mathcal{O}(g)$	f обмежена зверху g	$\mathcal{O}$
$f \succeq g$	$g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена знизу g	Ω
$f \prec g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \notin \mathcal{O}(f)$	g домінує над f	o
$f \succ g$	$g \in \mathcal{O}(f)$ і $f \notin \mathcal{O}(g)$	f домінує над g	ω
$f \approx g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена зверху і знизу g	Θ
$f \sim g$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f еквівалентна g	

Додаткові позначення

$f \preceq g$	$f \in \mathcal{O}(g)$	f обмежена зверху g	$\mathcal{O}$	$\leq$
$f \succeq g$	$g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена знизу g	Ω	$\geq$
$f \prec g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \notin \mathcal{O}(f)$	g домінує над f	o	$<$
$f \succ g$	$g \in \mathcal{O}(f)$ і $f \notin \mathcal{O}(g)$	f домінує над g	ω	$>$
$f \approx g$	$f \in \mathcal{O}(g)$ і $g \in \mathcal{O}(f)$	f обмежена зверху і знизу g	Θ	$\approx$
$f \sim g$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f еквівалентна g		$=$

Додаткові позначення Ω, ω та Θ

Означення

Нехай задані дві функції $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Функція f є **“Ω” великим від функції g (при $n \to \infty$)**, якщо існують такі константа $c \in \mathbb{R}^+$ та натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $f(n) \geq cg(n)$ для всіх значень $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.
Функція f є **“ω” малим від функції g (при $n \to \infty$)**, якщо для довільного якзавгодно малого значення $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ існує таке натуральне число $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$, що виконується нерівність $|f(n)| > \varepsilon|g(n)|$ для всіх значень $n > n_0(\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$.
Функція f є **“Θ” від функції g (при $n \to \infty$)**, якщо існують такі константи $c_1 \in \mathbb{R}^+$ і $c_2 \in \mathbb{R}^+$ та натуральне число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконується нерівність $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ для всіх значень $n > n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Функція f є “Ω” великим від функції $g \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \inf \frac{f(n)}{g(n)} > 0$.
Функція f є “ω” малим від функції $g \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \infty$.

Історичні моменти

- 1894 р. — введено позначення “$\mathcal{O}$ велике” німецьким математиком Паулем Бахманом (англ. Paul Bachmann)

Історичні моменти

- 1894 р. — введено позначення “$\mathcal{O}$ велике” німецьким математиком Паулем Бахманом (англ. Paul Bachmann)
- 1909 р. — “$\mathcal{O}$ велике” адаптовано Едмундом Ландау (англ. Edmund Landau), який також ввів позначення “o мале”

Історичні моменти

- 1894 р. — введено позначення "$\mathcal{O}$ велике" німецьким математиком Паулем Бахманом (англ. Paul Bachmann)
- 1909 р. — "$\mathcal{O}$ велике" адаптовано Едмундом Ландау (англ. Edmund Landau), який також ввів позначення "o мале"
- 1914 р. — введено символ Ω (Харді (англ. Hardy) та Літлвуд (англ. Littlewood)), але як заперечення відношення "o мале"

Історичні моменти

- 1894 р. — введено позначення "$\mathcal{O}$ велике" німецьким математиком Паулем Бахманом (англ. Paul Bachmann)
- 1909 р. — "$\mathcal{O}$ велике" адаптовано Едмундом Ландау (англ. Edmund Landau), який також ввів позначення "o мале"
- 1914 р. — введено символ Ω (Харді (англ. Hardy) та Літлвуд (англ. Littlewood)), але як заперечення відношення "o мале"
- 1976 р. — Дональд Кнут дає нове означення символу Ω та визначає "ω мале" і Θ

Історичні моменти

- 1894 р. — введено позначення "$\mathcal{O}$ велике" німецьким математиком Паулем Бахманом (англ. Paul Bachmann)
- 1909 р. — "$\mathcal{O}$ велике" адаптовано Едмундом Ландау (англ. Edmund Landau), який також ввів позначення "o мале"
- 1914 р. — введено символ Ω (Харді (англ. Hardy) та Літлвуд (англ. Littlewood)), але як заперечення відношення "o мале"
- 1976 р. — Дональд Кнут дає нове означення символу Ω та визначає "ω мале" і Θ
- набір відношень "$\mathcal{O}$ велике", "o мале", "Ω велике", "ω мале" і Θ — **нотація Ландау (нотація Ландау-Бахмана) або асимптотична нотація**

Асимптотична нотація

$\mathcal{O}(1)$	клас констант
$\mathcal{O}(\log \log n)$	клас двічі логарифмічних функцій
$\mathcal{O}(\log n)$	клас логарифмічних функцій
$\mathcal{O}(\log^c n)$, $c > 1$	клас полілогарифмічних функцій
$\mathcal{O}(n^c)$, $0 < c < 1$	клас функцій кореня
$\mathcal{O}(n)$	клас лінійних функцій
$\mathcal{O}(n \log^* n)$	клас ітеративно логарифмічних функцій
$\mathcal{O}(n \log n)$	клас лінеаритмічних (квазілінійних) функцій
$\mathcal{O}(n^2)$	клас квадратичних функцій
$\mathcal{O}(n^c)$	клас поліноміальних функцій
$L_n[\alpha, c]$, $0 < \alpha < 1$	клас субекспоненціальних функцій
$\mathcal{O}(c^n)$, $c > 1$	клас експоненціальних функцій
$\mathcal{O}(n!)$	клас факторіальних функцій

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами
- $\Rightarrow$ **схема кодування**

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами
- $\Rightarrow$ **схема кодування**
- будь-яка масова задача Π має скінченне представлення

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами
- $\Rightarrow$ **схема кодування**
- будь-яка масова задача Π має скінченне представлення
- будь-яка індивідуальна задача $I \in D_\Pi$ будь-якої масової задачі Π має скінченне представлення

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами
- $\Rightarrow$ **схема кодування**
- будь-яка масова задача Π має скінченне представлення
- будь-яка індивідуальна задача $I \in D_\Pi$ будь-якої масової задачі Π має скінченне представлення
- схема кодування $e : D_\Pi \to \Sigma^*$

- теорія обчислюваності досліджувала функції $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- теорія складності має побудувати класифікацію **задач**
- модель обчислень — машина Тюрінга працює з формальними мовами
- $\Rightarrow$ **схема кодування**
- будь-яка масова задача Π має скінченне представлення
- будь-яка індивідуальна задача $I \in D_\Pi$ будь-якої масової задачі Π має скінченне представлення
- схема кодування $e : D_\Pi \to \Sigma^*$
- від будь-якого алфавіту можна перейти до алфавіту $\{0, 1\}$ ($e : D_\Pi \to \{0, 1\}$)

Схема кодування

Приклад

Задача пошуку нетривіального дільника натурального числа

$9 \mapsto 1001$ або $9 \mapsto 111111111$

$\lceil \log n \rceil$ vs n

"Розумні" схеми кодування

Схема кодування правильно побудованих слів (ППС)

Алфавіт — $\{0, 1, -, [,], (,), ,\}$

1. множина $\{0, 1, -\}$ для запису цілих чисел (всі числа записуються у двійковому вигляді, символ '-' використовують для від'ємних чисел
2. якщо x — ППС, то $[x]$ — мітка
3. якщо $x_1, \ldots, x_n$ — ППС, то $(x_1, \ldots, x_n)$ — послідовність

Приклади

- Раціональне число q кодується ППС(x, y), де x та y - ППС для двох цілих чисел a і b таких, що $\frac{a}{b} = q$ і НСД$(a, b) = 1$.
- Граф $G = (V, E)$ кодується ППС(x, y), де x, y - це ППС, які представляють множини V, E відповідно (елементи E - двоелементні підмножини V, які утворюють ребра).

Схеми кодування

$L[\Pi, e]$ називають **мовою кодування** або мовою, породженою масовою задачею Π за допомогою схеми кодування e, $L \subseteq \Sigma^*$.
Σ — алфавіт схеми кодування e
$L[\Pi, e] = \{x \in \Sigma^* : x -$ код індивідуальної задачі $I \in Y_\Pi$ при схемі $e\}$

Схеми кодування

$L[\Pi, e]$ називають **мовою кодування** або мовою, породженою масовою задачею Π за допомогою схеми кодування e, $L \subseteq \Sigma^*$.
Σ — алфавіт схеми кодування e
$L[\Pi, e] = \{x \in \Sigma^* : x -$ код індивідуальної задачі $I \in Y_\Pi$ при схемі $e\}$

Всі “розумні” схеми є лінійно (поліноміально) еквівалентними

Схеми кодування

$L[\Pi, e]$ називають **мовою кодування** або мовою, породженою масовою задачею Π за допомогою схеми кодування e, $L \subseteq \Sigma^*$.
Σ — алфавіт схеми кодування e
$L[\Pi, e] = \{x \in \Sigma^* : x - \text{ код індивідуальної задачі } I \in Y_\Pi \text{ при схемі } e\}$

Всі "розумні" схеми є лінійно (поліноміально) еквівалентними

Представлення "будь-якого" математичного об'єкту x над алфавітом $\{0, 1\}$ — $\lfloor x \rfloor$ (серіалізація)

Схеми кодування

$L[\Pi, e]$ називають **мовою кодування** або мовою, породженою масовою задачею Π за допомогою схеми кодування e, $L \subseteq \Sigma^*$.
Σ — алфавіт схеми кодування e
$L[\Pi, e] = \{x \in \Sigma^* : x - \text{ код індивідуальної задачі } I \in Y_\Pi \text{ при схемі } e\}$

Всі "розумні" схеми є лінійно (поліноміально) еквівалентними

Представлення "будь-якого" математичного об'єкту x над алфавітом $\{0, 1\}$ — $\lfloor x \rfloor$ (серіалізація)

Задача розпізнавання $\Leftrightarrow$ розпізнати мову $L_1 \subseteq \Sigma^*$