Циліндричні функції

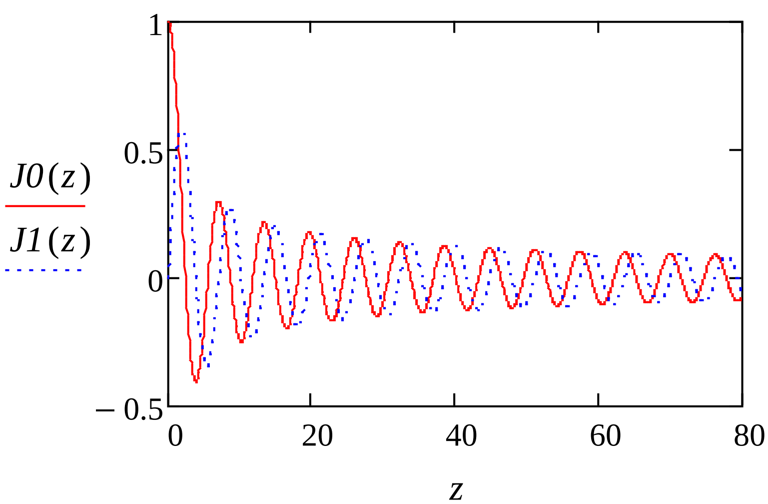
1. При розв'язанні задач в сферичних та циліндричних координатах виникає рівняння Бесселя:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{d\Phi}{dz}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\Phi=0 \qquad (1)$$

Розв'язки рівняння (1) називають циліндричними функціями. **Єдиний *незалежний* розв'язок цього рівняння при $z>0$, що є обмеженим при** $z\to 0+0$**,** можна подати у виді ряду:

$$\boldsymbol{J}_\nu(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\;\Gamma(\nu+k+1)}\cdot\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad (2)$$

Функцію $\boldsymbol{J}_\nu(z)$ називають ***функцією Бесселя першого роду***. Тут $\Gamma(z)$– гамма-функція, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$; для цілих n: $\Gamma(n+1)=n!$.



Вигляд функцій Бесселя $\boldsymbol{J}_0(z), \boldsymbol{J}_1(z)$.

Другий незалежний розв'язок рівняння (1) при $\nu\neq 0,\pm1,\pm2,\ldots$ є $\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)$, але він має особливість при $z\to 0$.

При цілому n має місце тотожність:

$$\boldsymbol{J}_{-n}(z)=(-1)^n\boldsymbol{J}_n(z)$$

і ця функція не є незалежною від $\boldsymbol{J}_n$. В цьому разі незалежний від $\boldsymbol{J}_n$ розв'язок дає ***функція Неймана*** або ***функція Бесселя другого роду:***

$$\boldsymbol{N}_\nu(z)=\frac{1}{\sin(\pi\nu)}\left[\boldsymbol{J}_\nu(z)\cos(\pi\nu)-\boldsymbol{J}_{-\nu}(z)\right], \qquad (3)$$

яка означена також для цілих n за допомогою граничного переходу $\nu\to n$**.**

Розв'язками (1) є також ***функції Ганкеля***:

$$\boldsymbol{H}_\nu^{(1)}(z)=\boldsymbol{J}_\nu(z)+i\boldsymbol{N}_\nu(z)\ , \qquad (4)$$

$$\boldsymbol{H}_{\nu}^{(2)}\left(z\right)=\boldsymbol{J}_{\nu}\left(z\right)-i\boldsymbol{N}_{\nu}(z)\ , \qquad (5)$$

зручно використовувати в задачах, пов'язаних з випромінюванням. За $z\to\infty$ ці функції мають асимптотики:

$$H_{\nu}^{(1)}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(\left|z\right|^{-3/2}\right)$$

$$H_{\nu}^{(2)}\left(z\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+O\left(\left|z\right|^{-3/2}\right)$$

При $z\to 0$ функції Ганкеля мають особливість.

2. Наведемо приклади задач, де виникають циліндричні функції.

Розглянемо хвильове рівняння всередині сфери радіуса R

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\Delta\Phi \qquad (6)$$

з граничною умовою на поверхні $\Phi(t,R,\theta,\varphi)=0$ (у сферичних координатах r,θ,φ). Нас цікавитимуть коливні розв'язки виду $\Phi(t,R,\theta,\varphi)=\psi(r,\theta,\varphi)e^{\pm i\omega t}$; це приводить до рівняння Гельмгольца

$$\Delta\psi+k^2\psi=0,\quad k^2=\left(\omega/c\right)^2,\quad \psi(R,\theta,\varphi)=0\ .$$

Після розкладу по по сферичних гармоніках

$$\psi(k,r,\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}f_{nm}(k,r)\cdot Y_n^m(\theta,\varphi);$$

маємо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f_{nm}}{\partial r}\right)+\left(k^2-\frac{n\left(n+1\right)}{r^2}\right)f_{nm}=0\,,\quad f_{nm}(k,R)=0\ . \qquad (7)$$

Загальний розв'язок рівняння (6) буде суперпозицією коливних розв'язків виду $e^{-i\omega t}f_{nm}(k,r)Y_n^m(\theta,\varphi)$

Покладемо:

$$f_{nm}(k,r)=\frac{g_{nm}(k,r)}{\sqrt{r}}$$

звідки дістанемо

$$\frac{d^2g_{nm}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg_{nm}}{dr}+\left(k^2-\frac{\left(n+1/2\right)^2}{r^2}\right)g_{nm}=0 \qquad (8)$$

Еквівалентна форма

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg_{nm}}{dr}\right)+\left(rk^2-\frac{\left(n+1/2\right)^2}{r}\right)g_{nm}=0\ . \qquad (8a)$$

Заміна $x = kr$ приводить до рівняння Бесселя

$$\frac{d^2 g_{nm}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dg_{nm}}{dx} + \left(1 - \frac{(n+1/2)^2}{x^2}\right) g_{nm} = 0\,.$$

Резулярний в нулі розв'язок цього рівняння є $\boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}(x)$, відповідно,

$$g_{nm}(k,r) = \boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Умова на поверхні дає

$\boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}(k_{np}R) = 0$, тобто $k = k_{n,p} = \dfrac{\alpha_{n,p}}{R}, \quad p = 1, 2, \ldots$, де $\alpha_{n,p}$ – це p-й корінь функціх $\boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}(x)$. Таким чином, для кожної пари n, m маємо нескінченний набір розв'язків рівняння (8)

$$g_{nmp}(r) = \boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{np}\frac{r}{R}\right)$$

Зазначимо, що в цій задачі крайовими умовами для розв'язків (8) є умова регулярності в нулі та умова на поверхні сфери.

Покажемо, що при фіксованих n, m розв'язки з різними $\alpha_{n,p}$ ортогональні для скалярного добутку $\langle g, f\rangle = \int_0^R dr\, r\; g(r) f(r)$.

Нехай g_{nmp}, $g_{nmp'}$ з різними $\alpha_{n,p} \neq \alpha_{n,p'}$ задовольняють (8а):

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg_{nmp}}{dr}\right) - + \left(rk_{nmp} - \frac{(n+1/2)^2}{r}\right) g_{nmp} = 0, \tag{9а}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dg_{nmp'}}{dr}\right) - + \left(rk_{nmp'} - \frac{(n+1/2)^2}{r}\right) g_{nmp'} = 0\,. \tag{9б}$$

Помножимо (9а) на $g_{nmp'}$ і дістанемо

$$\frac{d}{dr}\left(rg_{nmp'}\frac{dg_{nmp}}{dr}\right) - r\frac{dg_{nmp'}}{dr}\frac{dg_{nmp}}{dr} + \left(rk_{nmp} - \frac{(n+1/2)^2}{r}\right) g_{nmp} g_{nmp'} = 0$$

Проінтегруємо від 0 до R з врахуванням крайових умов:

$$-\int_0^R r\frac{dg_{nmp'}}{dr}\frac{dg_{nmp}}{dr}dr + \int_0^R \left(rk_{nmp} - \frac{(n+1/2)^2}{r}\right) g_{nmp} g_{nmp'} dr = 0\,.$$

Віднімаючи аналогічне рівняння, отримане з (9б), дістаємо

$$\left(k_{nmp}-k_{nmp'}\right)\int_{0}^{R} r\, g_{nmp}(r) g_{nmp'}(r) dr = 0,$$

щ.т.д.

Повертаючись до вихідного рівняння (6), бачимо, що частоти можуть набувати дискрених значень $\omega = \pm k_{n,p} c$, що типово для коливань в обмежениому об'ємі.

Загальний розв'язок рівняння (6) має вид

$$\Phi(t,r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sum_{p=1}^{\infty} \left(C_{nmp} e^{i\omega_{np} t} + D_{nmp} e^{-i\omega_{np} t}\right) \boldsymbol{J}_{n+\frac{1}{2}}\left(\alpha_{np} \frac{r}{R}\right) Y_n^m(\theta,\varphi)$$

де $\omega_{n,p} = \alpha_{n,p} c / R$ коефціцієнти C_{nmp}, D_{nmp}, що відповідають внеску кожної коливної компоненти, визначаються початковими умовами виникнення коливань.