

Նպատակներ: Աշխատանքի նպատակն է մշակել հարթության վրա կետերի հաջորդականության սփլայնային մոտարկման տեսությունը՝ բարդ կառուցվածքի սփլայնների օգտագործման դեպքում: Ի տարբերություն պարզ, օրինակ՝ բազմանդամային սփլայնի, բաղադրյալ սփլայնը պարունակում է մի քանի տարրերի կրկնվող կապեր(փնչեր): Նման խնդիր առաջանում է երկաթուղային և մայրուղիների նախագծման ժամանակ: Նման երթուղու հատակագիծը (պրոյեկցիան հորիզոնական հարթության վրա) կոր է, որը բաղկացած է տարրերի կրկնվող փնչից՝ «ուղիղ գիծ + կլոտոիդ + շրջան + կլոտոիդ...», որը ապահովում է ոչ միայն կորի և շոշափողի, այլև կորության անընդհատությունը: Սփլայնի տարրերի քանակը անհայտ է և պետք է որոշվի նախագծային խնդիրը լուծելու ընթացքում: Հնդիանուր դեպքում, մոտարկող սփլայնը բազմաթեր ֆունկցիա է: Նրա գրաֆիկի կետերի կոռորդինատների վրա կարող են դրվել սահմանափակումներ: Մեկ այլ նշանակալի գործոն, որը բարդացնում է խնդիրը, կլոտոիդների առկայությունն է, որոնք անալիտիկորեն (բանաձևով) չեն արտահայտվում: Ներկայացված աշխատանքում դիտարկվում է սփլայնի ոչ գծային ծրագրավորման կիրառմամբ լավարկման խնդրի լուծումը:

Մեթոդներ: Սփլայնի պարամետրերը օպտիմալացնելու համար օգտագործվում է նոր մաթեմատիկական մոդել՝ փոփոխված Լագրանժի ֆունկցիայի տեսքով և հատուկ ոչ գծային ծրագրավորման ալգորիթմ: Այս դեպքում հնարավոր է անալիտիկորեն հաշվարկել նպատակային ֆունկցիայի ածանցյալները սփլայնի պարամետրերի նկատմամբ՝ այդ պարամետրերով դրա անալիտիկ արտահայտության բացակայության դեպքում:

Արդյունքներ: Մշակվել են բաղադրյալ սփլայնի պարամետրերի օպտիմալացիայի մաթեմատիկական մոդելը և ալգորիթմը, ընդ որում սփլայնը կազմված է շրջանագծերի աղեղներից, զուգակցված կլոտոիդներով և ուղիղներով:

Ներածություն

Հարթության վրա տրված կետերի հաջորդականությունը հատուկ տիպի սփլայնով մոտարկման մեթոդը ներառում է խնդրի լուծման երկփուլային սխեմա [1]: Առաջին փուլը բաղկացած է սփլայնի տարրերի քանակի և դրա պարամետրերի մոտավոր արժեքների գտնելուց՝ օգտագործելով դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը: Երկրորդ փուլում, ստացված սփլայնը որպես նախնական մոտավորություն օգտագործելով, դրա պարամետրերը օպտիմալացվում են ոչ գծային ծրագրավորման միջոցով: Ներկայացված աշխատանքում դիտարկված են շրջանագծերով և ուղիղներով գուգակցված կլոտոփոխներով սփլայների օգտագործման երկրորդ փուլի կիրառումը:

Սփլայնը բաղկացած է կրկնվող կապից՝ «գծի հատվածից + կլոտոփոխային աղեղից + շրջանաձև աղեղից + կլոտոփոխային աղեղից...»: Հետազայում «աղեղ» բառը բաց կթողնվի կարծության համար, եթե դա չի ստեղծի երկիմաստություն: Այս փուլում հայտնի են դրա մեջ գտնվող շոշափողի սկզբնակետը և ուղղությունը, բոլոր կորերի երկարությունները և դրանք գուգորդող գծերը, ինչը թույլ է տալիս կիրառել անընդհատ օպտիմալացման մեթոդներ, մասնավորապես՝ գրադիենտային տիպի ոչ գծային ծրագրավորման մեթոդներ, չնայած այն հանգամանքին, որ ցանկալի սփլայնը, ընդհանուր առմամբ, բազմարժեք ֆունկցիա է: Խնդիրը դիտարկվում է երկաթուղիների և մայրուղիների երթուղային պլանի նախագծման հետ կապված, որտեղ, ի տարբերություն այլ գծային կառուցվածքների, օրինակ՝ խողովակաշարերի, կլուտոփոխային գծերը պարտադիր են կորության անընդհատությունը և, համապատասխանաբար, երթևեկության հարմարավետությունն ու անվտանգությունն ապահովելու համար :

Պետք է նշել, որ ընդունված մոտեցումը զգալիորեն տարբերվում է նախագծային պրակտիկայում ընդունված տարրերի ինտերակտիվ ռեժիմով ընտրության մեթոդից, կորության գրաֆիկների և անկյունային դիագրամների հիման վրա կորերի սահմանները գտնելու տարբեր կիսաավտոմատ մեթոդներից, ինչպես նաև կորերի սահմանները գտնելու նոր հերիստիկ մեթոդից [4]՝ զենետիկական օպտիմալացման ալգորիթմների հետագա կիրառմամբ [5–14]:

Ավելի խոստումսալից է թվում համարժեք մաթեմատիկական մոդելների և մաթեմատիկորեն ճիշտ ալգորիթմների կիրառումը:

ԳԼՈՒԽ 1

1. Սվլայն

Մոտարկման դասական խնդիրը տանում է հետևյալին.

OXY կոորդինատական հարթությունում տրված են $M(x_0, y_0), \dots, M_n(x_n, y_n)$, կետեր $(x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ պահանջվում է գտնել <<ֆունկցիա>>, որի գրաֆիկը անցնում է տրված $n+1$ հատ կետերով: Որպես այդ խնդրի լուծում ֆունկցիան փնտրվում է n -րդ աստիճանի $L_n(x)$ բազմանդամի տեսքով:

Գտնենք $L_n(x)$ բազմանդամը: Այդ բազմանդամը փնտրենք հետևյալ տեսքով.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i C_i(x)$$

որտեղ y_i -երը հայտնի են: Փնտրենք $C_i(x)$ բազմանդամի տեսքը այնպես, որ բազմանդամի արժեքը x_j կետում լինի y_j , այսինքն

$$L_n(x_j) = y_j = y_0 C_0(x_j) + \dots + y_j C_j(x_j) + \dots + y_n C_n(x_j);$$

$$C_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ $C_i(x)$ բազմանդամները պետք է ունենան հետևյալ տեսքը.

$$C_i(x) = A_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1}),$$

$$(x - x_n) = A_i \prod_{k=0(k \neq j)}^n (x - x_k),$$

որտեղ $A_i = const$ $i = 0, 1, \dots, n$:

A_i հաստատունը ընտրենք այնպես $C_i(x) \equiv 1 \Rightarrow$

$$A_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = 1 \Rightarrow$$

$$A_i = \frac{1}{\prod_{k=0(k \neq j)}^n (x - x_k)}:$$

Տեղադրելով կատանանք

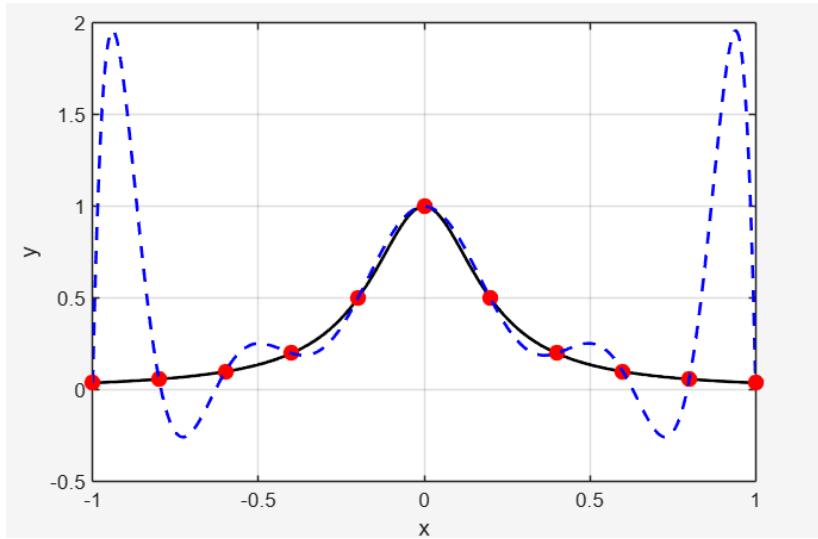
$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i C_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0, k \neq i}^n (x_i - x_k)}$$

կոչվում է Լանգրանժի ինտերպոլացիոն բազմանդամ:

Նկարագրված խնդիրը Լանգրանժի բազմանդամով լուծելիս առաջանում են 2 հիմնական խնդիրներ.

1. M_i հանգույցների քանակը ավելացնելիս բազմանդամի աստիճար ավելանում է
2. որոշակի M_i կետերի ընտրության դեպքում կառուցված բազմանդամի գրաֆիկը էապես կարող է տարբերվել սկզբնական $f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից:

$$\text{Օրինակ } f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad x \in [-1,1] \quad (\Omega\text{ունգե})$$



M_{i+1} հանգուցային կետերը իրար միացնող կտորը m -րդ աստիճանի բազմանդամ է, ընդորում նշված հանգույցներում գոյություն ունի մինչև $(m-1)$ -րդ կարգը անընդհատ ածանցյալ:

Դիտարկենք սփլայների մի շարք մասնավոր դեպքեր.

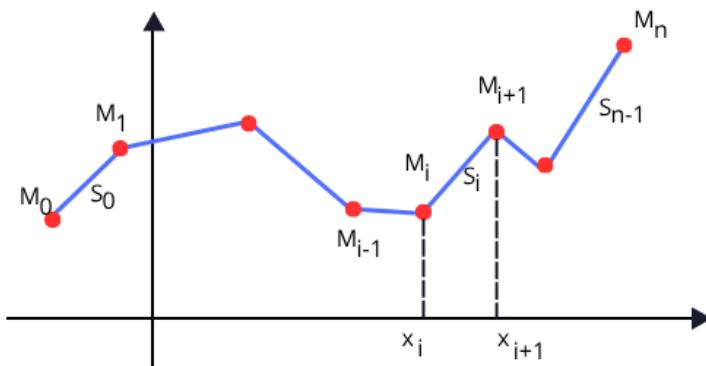
1. $m=1$ (քեկյալ) $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, պարզ է որ S_i օղակի բանաձևը

$$\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i} \Rightarrow$$

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1; x \in [x_i, x_{i+1}]$$

S_i օղակի բանաձևը կարելի է ներկայացնել պարամետրական տեսքով.

$$\begin{cases} x = x_i + (x_{i+1} - x_i)t \\ y = y_i + (y_{i+1} - y_i)t \end{cases} \quad t \in [0,1]:$$



Սկ. 2

Կառուցված քեկյալը անընդհատ է, սակայն ներքին հանգուցային կետերում առաջին կարգի ածանցյալը կարող է ունենալ խզումներ:

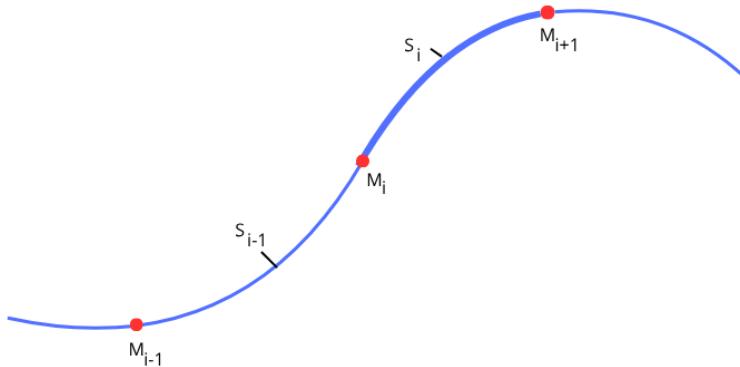
2. $m=2$ (քառակուսային սփլայն)

Դիցուք տրված են $M_0(x_0, y_0), \dots, M_n(x_n, y_n)$ հանգուցային կետերը ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$):

Կառուցենք այդ կետերով անցնող քառակուսային սփլայն: Ինչպես նշվել է սփլայնի սահմանման մեջ, M_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) սփլայնը պետք է ունենա առաջին կարգի անընդհատ ածանցյալ:

S_i կտորի քանաձևի համար կարող ենք գրել.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 ; \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (1)$$



Նկ. 3

Քանի որ $S_i(x_i) = y_i \Rightarrow a_i = y_i$: Բոլոր y_i -ը հայտնի են ուստի (1)-ի մեջ մասցել է զտնել b_i, c_i գործակիցները (ընդհանուր $2n$ հատ անհայտ):

Ունենք՝

$$\begin{aligned} S_i(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ y_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 &= y_{i+1} \\ b_i + c_i h_i &= \Delta_i \quad (i = 0, 1, \dots, n - 1) \end{aligned} \quad (2)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

M_i կետում կորի առաջին կարգի ածանցյալի անընդհատությունից կունենանք.

$$\begin{aligned} S'_{i-1}(x_i) &= S'_i(x_i) \\ b_{i-1} + 2c_{i-1}h_{i-1} &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

(2) և (3) առնչությունների ընդհանուր քանակը $2n - 1$ է: Մեզ հարկավոր է ևս մեկ առնչություն, որպեսզի b_i և c_i բոլոր գործակիցները գտնենք: Որպես մեկ լրացուցիչ պայման, կիրառում են հետևյալ երկու մոտեցումներից մեկը.

ա) Զախից բնական պայման . $c_0 = 0$,

բ) Զախից կորի թեքման պայման . $S_0'(x_0) = m_0$, այսինքն $b_0 = m_0(m_0\text{-ն տրված է լինում ի սկզբանե)$:

(2)-ից $i = 0$ դեպքում կստանանք՝

$$m_0 = b_0 = \Delta_0 - c_0 h_0:$$

Վերը նշված ա) կամ բ) պայմաններին համապատասխան առնչությունը կարող ենք գրել.

$$\alpha C_0 = \beta \quad (4); \text{ ընդունում}$$

ա) դեպքում կարող ենք վերցնել $\alpha = 1; \beta = 0$,

բ) դեպքում կվերցնենք $\alpha = h_0, \beta = \Delta_0 - m_0$:

(2)-ից $i = 1, 2, \dots, n-1$ արժեքների համար, կունենանք՝

$$b_i = \Delta_i - c_i h_i,$$

$$b_{i-1} = \Delta_{i-1} - c_{i-1} h_{i-1},$$

որոնք տեղադրելով (3)-ի մեջ կստանանք .

$$\Delta_{i-1} - c_{i-1} h_{i-1} + 2c_{i-1} h_{i-1} = \Delta_i - c_i h_i$$

$$c_{i-1} h_{i-1} + c_i h_i = \Delta_i - \Delta_{i-1} \quad (5) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

Նշանակելով $r_i = \Delta_i - \Delta_{i-1}$, (4) և (5) առնչությունները կարող ենք գրել հետևյալ մատրիցային հավասարման տեսքով

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & h_{n-1} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_C = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}}_r \quad (6)$$

$$A \cdot C = r \quad (6')$$

Քանի որ $A - \bar{n}$ ը երկանկյունազգային քառակուսային մատրից է, որի

$$\det A = \alpha \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot \cdots \cdot h_{n-1} \neq 0$$

ուստի գոյություն ունի A^{-1} հակադարձ մատրիցը:(6')-ից կգտնենք c_i անհայտ գործակիցների այունը .

$$C = A^{-1}r:$$

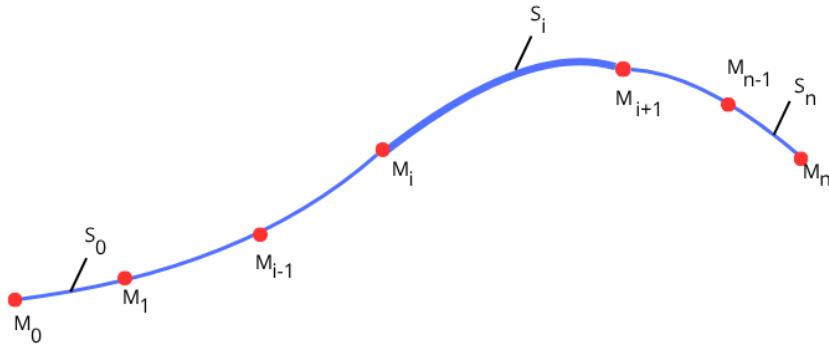
Ստացված c_i արժեքները տեղադրելով (2)-ի մեջ կգտնենք բոլոր b_i գործակիցները:

3. m=3 (խորանարդային սփլայն)

Դիցուք տրված են $M_0(x_0, y_0), \dots, M_n(x_n, y_n)$ հանգուցային կետերը ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$): Կառուցենք այդ կետերով անցնող խորանարդային սփլայն : Սփլայնի սահմանման համաձայն, M_i ներքին հանգուցային կետերում ($i = 1, 2, \dots n - 1$) սփլայնը պետք է ունենա մինչև երկրորդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

S_i սեկտորի բանաձևի համար կարող ենք գրել.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3; i = 0, 1, \dots n - 1 \quad (7)$$



Ալ. 4

Քանի որ $S_i(x_i) = y_i \Rightarrow a_i = y_i$: Բոլոր y_i -ը հայտնի են ուստի (7)-ի մեջ մասացել է գտնել b_i, c_i, d_i գործակիցները (ընդհանուր 3n հատ անհայտ):

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \quad (= S_{i+1}(x_{i+1})),$$

$$a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 = y_{i+1},$$

$$b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1} - y_i,$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 \quad (i = 0, 1, \dots n - 1) \quad (8)$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i,$$

$$2c_i = m_i,$$

(7)-ից՝

$$S'_{i-1}(x_i) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,$$

$$S''_i(x_i) = 2c_i + 6d_i(x - x_i);$$

M_i կետում կորի առաջին կարգի ածանցյալի անընդհատությունից կունենանք.

$$S'_i(x_i) = S'_{i-1}(x_i),$$

$$b_i = b_{i-1} + m_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + 3d_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2$$

$$b_i - b_{i-1} = m_{i-1}h_{i-1} + 3d_{i-1}h_{i-1}^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (9)$$

Երկրորդ կարգի ածանցյալի անընդհատության պայմանից կստանանք.

$$S''_i(x_i) = S''_{i-1}(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$2c_i = 2c_{i-1} + 6d_{i-1}(x_i - x_{i-1});$$

$$m_i = m_{i-1} + 6d_{i-1}h_{i-1};$$

$$d_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \quad (10)$$

(10)-ը տեղադրելով (8)-ի մեջ, կունենանք.

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2m_i + m_{i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-2) \quad (11)$$

(10)-ը և (11)-ը տեղադրելով (9)-ի մեջ և կատարելով որոշ պարզեցումներ, կստանանք.

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})m_i + h_im_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad (i = 1, \dots, n-2) \quad (12)$$

Այժմ մտուի պատկերացնենք, որ ևս մեկ M_{n+1} հանգուցային կետ է ավելացվում: Այդ դեպքում (12)-ը կլինի ճիշտ նաև $i = n-1$ դեպքում:

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})m_i + h_im_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (13)$$

Այժմ m_i -ի քանակը $(n+1)$ հատ է, իսկ (13)-ում ունենք $(n-1)$ հատ հավասարում:

Պակասող երկու առնչությունները փնտրենք հետևյալ բնական ենթադրություններից.

ա) $S_0''(x_0) = 0, S_{n-1}''(x_n) = 0$, (բնական սփլայն)

բ) $S_0'(x_0) = p, S_{n-1}'(x_n) = q$: (եզրային կետերում տրված են ածանցյալները)

Դիտարկենք ա) դեպքը:

$$S_0''(x_0) = 2c_0 = 0 \Rightarrow m_0 = 0,$$

$$S_{n-1}''(x_n) = 2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0,$$

(10)-ը (հաշվի առնելով, որ այն ճիշտ է նաև $i = n$ դեպքում, ըստ վերը նշված պատկերավոր վերցված M_{n+1} կետի), կստանանք.

$$m_{n-1} + (m_n - m_{n-1}) = 0,$$

$$m_n = 0:$$

Կատարելով նաև հետևյալ նշանակումը.

$$r_i = 6 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \right), (i = 1, \dots, n-1)$$

(13) համակարգը $m_0 = m_n = 0$ պայմանների հետ միասին կարելի է գրել հետևյալ մատրիցային հավասարման տեսքով.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1)h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}}_r$$

Այժմ անցնենք բ) դեպքին.

$$S'_0(x) = b_0 + 2c_0(x - x_0) + 3d_0(x - x_0)^2; S'_0(x) = p \Rightarrow b_0 = p \quad (14)$$

$$S'_{n-1}(x) = b_{n-1} + 2c_{n-1}(x - x_{n-1}) + 3d_{n-1}(x - x_{n-1})^2; S'_{n-1}(x) = q$$

$$b_{n-1} + 2m_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = q \quad (15)$$

(14)-ը տեղադրելով (11)-ի մեջ, կստանանք.

$$p = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(2m_0 + m_1),$$

$$2m_0 + m_1 = \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - p \right) \quad (16)$$

(10)-ի մեջ վերցնենք $i = n$ (հաշվի առնելով պատկերավոր վերցված M_{n+1} կետը)

$$d_{n-1} = \frac{m_n - m_{n-1}}{6h_{n-1}}:$$

Նույն ձևով (11)-ի մեջ վերցնենք $i = n - 1$

$$b_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(2m_{n-1} + m_n):$$

Վերջիններս տեղադրելով (15)-ի մեջ, կստանանք.

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(2m_{n-1} + m_n) + m_{n-1}h_{n-1} + \frac{m_n - m_{n-1}}{2}h_{n-1} &= q; \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - q + \frac{m_{n-1} + 2m_n}{6}h_{n-1} &= 0; \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{6}{h_{n-1}} \left(q - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Հաշվի առնելով (16)-ը և (17)-ը, m_i -ը գտնելու համար կստանանք հետևյալ մատրիցային հավասարումը.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-1} + h_{n-2}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - p \right) \\ r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_{n-1} \\ \frac{6}{h_{n-1}} \left(q - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \end{pmatrix}}_r \end{aligned}$$

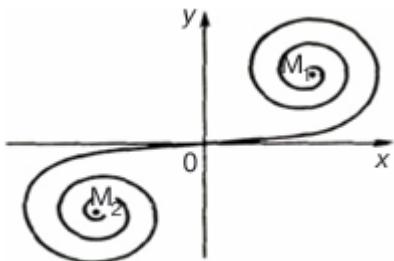
2. Խնդրի ձևակերպումը և ֆորմալացումը

Խնդրի ձևակերպումը և ֆորմալացումը շատ չեն տարբերվում [3]-ում նկարագրվածներից, երբ խնդիրը լուծվում է առանց կլոտոփիղի: Սակայն կլոտոփիղի առկայությունը զգալի դժվարություններ է ստեղծում ոչ գծային ծրագրավորման կիրառման համար գրադիենտի հաշվարկման գաղափարների իրականացման գործում:

Կլոտոփիղը հարթ կոր է (Ակ. 5), որի կորությունը σ գծային կերպով կախված է L երկարությունից:

Հետևաբար, կլոտոփիղի մի կտորի համար, որն ունի կամայական սկզբնական A կետ, որա վրա կորություն σ_A և վերջնակետ B՝ կորություն σ_B -ով, մենք ունենք հետևյալ բանաձևը՝

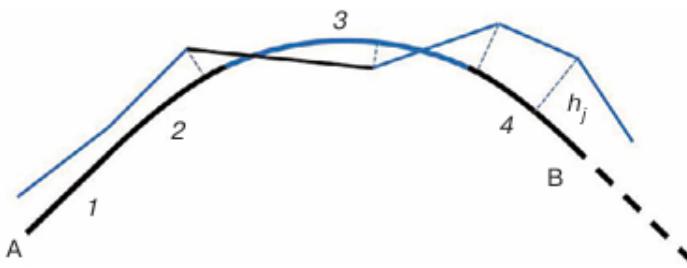
$$\sigma_B = \sigma_A + kL \quad (18)$$



Ակ. 5 Կլոտոփիղ

որտեղ L-ը կլոտոփիղի կտորի երկարությունն է, իսկ k-ն՝ դրա պարամետրը:

Այս գծային կախվածությունը հիմք է հանդիսանում ածանցյալների հաշվարկման բոլոր հետագա գործողությունների համար՝ մաթեմատիկական ծրագրավորումը կիրառելու համար: Խնդիրը հետևյալն է՝ գտնել տրված տիպի սփլայն, որը բավարարում է բոլոր սահմանափակություններին և լավագույնս մոտարկում է հարթության վրա կետերի տրված հաջորդականությունը (Ակ. 6):



Նկ. 6 Սփլայնի մեկ շղթան, 1-ուղիղ, 2 և 4 կլոտոիդ, 3 շրջանագիծ

Սկզբնական A կետը և շոշափողի ուղղությունը դեպի ցանկալի սփլայնը այդ կետում նշված են և չեն փոխվում օպտիմալացման գործընթացի ընթացքում:

Մոտարկման որակը գնահատվում է նշված կետերի սփլայնից h_j շեղումների քառակուսիների գումարով (Նկ. 6): Այլ կերպ ասած, h_j -ն նշված կետի տեղաշարժն է դեպի իր նախագծային դիրքը. h_j -երը հաշվարկվում են սկզբնական բեկյալի նորմալներով, այսինքն՝ երեք հարակից կետերը միացնող շրջանագծի կենտրոնի ուղղությամբ: Եթե երեք կետերը գտնվում են մեկ ուղղի վրա, ապա h_j -երը հաշվարկվում են այդ ուղղի նորմալով:

Սկզբնական կետերի տեղաշարժերը դեպի նախագծային դիրքը համարվում են դրական, եթե դրանք կատարվում են արտաքին նորմայի ուղղությամբ:

Այսպիսով, անհրաժեշտ է գտնել

$$\min F(h) = 1 / 2 \sum_1^n h_j^2 \quad (19)$$

Այստեղ $h(h_1, h_2, \dots, h_n)$ -ը անհայտների վեկտորն է, ո-ը՝ նրանց թիվը:

Հիմսական փոփոխականների սահմանափակումների համարագը պարունակում է պարզ անհավասարություններ, քանի որ յուրաքանչյուր փոփոխական սահմանափակվում է առանձին: Ավելացվում է միայն կլոտոիդի երկարության սահմանափակում, և փոփոխական շառավղի փոխարեն դիտարկվում է փոփոխական կորություն:

Հնարավոր չէ արտահայտել ուղիղ գծերի, կլոտոիդի և շրջանագծերի առկայության և դիրքի պայմանները h_j փոփոխականների միջոցով: Մենք այս փոփոխականները համարում ենք միջանկյալ, և հիմսական փոփոխականները ուղիղ գծերի, կլոտոիդի և շրջանագծերի երկարություններն են, ինչպես նաև շրջանագծերի կորությունները:

3. Խնդրի բնութագրեր

Սփլայնը ամբողջությամբ որոշվում է առաջնային փոփոխականներով՝ հաշվի առնելով սկզբնական կետը և դրա վրա շոշափողի ուղղությունը: Սակայն մենք չունենք միջանկյալ փոփոխականների առաջնային փոփոխականներից կախվածության վերաբերյալ վերլուծական արտահայտություններ (բանաձևեր): Առաջնային փոփոխականների սահմանափակումները չեն արտահայտվում միջանկյալ փոփոխականներով: (19) նպատակային ֆունկցիայի վերլուծական կախվածություն առաջնային փոփոխականներից չկա:

Կլոտոնիդը չի կարող ներկայացվել դեկարոյան կոորդինատային համակարգում $y(x)$ ֆունկցիայով:

Եթե կոորդինատային համակարգի սկզբնակետը համընկնում է կլոտոնիդի զրոյական կորության կետի հետ, և OX առանցքը ուղղված է այս կետում շոշափողի երկայնքով (Նկ.5), ապա օգտագործվում է x և y կոորդինատների պարամետրիկ ներկայացումը որպես 1 երկարության ֆունկցիաներ, որոնք չափվում են զրոյական կորության կետից, աստիճանային շարքերի տեսքով:

$$x(l) \approx l \left(1 - \frac{l^4 k^2}{40} + \frac{l^8 k^4}{3456} - \dots \right) \quad (20)$$
$$y(l) \approx \frac{l^3 k}{6} \left(1 - \frac{l^4 k^4}{56} + \frac{l^8 k^4}{7040} - \dots \right)$$

Կամայական կոորդինատային համակարգում գտնվող կլոտոնիդի համար ստացվել են շարքի վերլուծման բանաձևերը՝ հաշվի առնելով սկզբնական կետի կոորդինատները, դրա վրա գտնվող շոշափողի անկյունը OX առանցքի հետ և կորությունը [15]:

Խնդրի նշված առանձնահատկությունների պատճառով, գրադիենտային մեթոդներով [16–18] ոչ գծային ծրագրավորման խնդիր լուծելու գաղափարը թվում է անիրագործելի: Այնուամենայնիվ, ուղիղ գծերով գուգորդված շրջանագծային սփլայնային մոտարկման խնդիրը լուծվել է հենց այս կերպ [3], չնայած դիֆերենցվող ֆունկցիաների համար անալիտիկ արտահայտությունների բացակայությանը:

Ստացվել են h_j միջանկյալ փոփոխականների ածանցյալների բանաձևերը գլխավոր փոփոխականների նկատմամբ, ապա հաշվարկվել են նպատակային ֆունկցիայի ածանցյալները գլխավոր փոփոխականների նկատմամբ [3]:

4. Կլոտոիդի ինտեգրալ ներկայացումը և դրա կիրառումը

Քանի որ ցանկացած հարթ կորի համար $\sigma = d\varphi / dl$,

որտեղ σ -ն կորությունն է, φ -ն և l -ը՝ համապատասխանաբար OX առանցքի նկատմամբ շոշափողի կազմած անկյան երկարության ընթացիկ արժեքներն են, ապա (18)-ից ստանում ենք՝

$$\varphi_B = \varphi_A + \sigma_A l + k l^2 / 2 = \varphi_A + L(\sigma_A + \sigma_B) / 2 \quad (21)$$

Ցանկացած հարթ կորի աղեղի երկարության աճի և կոռոդինատների աճի միջև գոյություն ունեն $dx = \cos \varphi dl$ և $dy = \sin \varphi dl$ առնչություններ, որոնք

օգտագործելով (21)-ի հետ միասին ինտեգրման փոփոխականը նշանակելով t -ով, ստանում ենք կլոտոիդի պարամետրական ներկայացումը.

$$x(l) = x_A + \int_0^l \cos(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt,$$

$$y(l) = y_A + \int_0^l \sin(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt \quad (22)$$

Այստեղ x_A, y_A -ն սկզբնական կետի կոռոդինատներն են, իսկ l -ը՝ կլոտոիդի կտորի երկարությունը սկզբնական A կետից մինչև $x(l), y(l)$ կոռոդինատներով ընթացիկ կետը:
Ստորև մենք կիմսվենք կլոտոիդի պարամետրական (22) ներկայացման վրա:Դիտարկենք սփլայնի հետ տեղի ունեցող ձևափոխությունները, երբ փոխվում է միայն մեկ հիմսական փոփոխական: Այս ձևափոխությունները հասկանալը կօգնի մեզ ստանալ բանաձևեր միջանկյալ փոփոխականների մասնակի ածանցյալների (h_j) հաշվարկման համար ըստ տարրերի երկարությունների և կորությունների, այսինքն ըստ հիմսական փոփոխականների:

Երբ ուղիղ գծի երկարությունը փոխվում է ΔL -ով, սփլայնի աջ կողմը տեղաշարժվում է այս ուղիղ գծի ուղղությամբ: Երբ շրջանագծային աղեղի երկարությունը փոխվում է, տեղի է ունենում աղեղի վերջնակետում շոշափողի ուղղությամբ շարժում, ավելացված այդ

կետում կենտրոնով $\Delta\varphi = \sigma\Delta L$ չափով պտույտ: Եթե կլոտոիդի երկարությունը փոխվում է, տեղի է ունենում հետևյալը.

1. Կլոտոիդի պարամետրը փոխվում է այնպես, որ ծայրակետում գտնվող կորությունը չի փոխվում երկարության հետ, քանի որ մենք հաշվարկում ենք մասնակի ածանցյալներ:
2. Կլոտոիդի աջ ծայրակետի (B կետ) կոորդինատները և դրա վրա գտնվող շոշափողի անկյունը OX առանցքի հետ փոխվում են: Համաձայն (22)-ի

$$x_B = x_A + \int_0^L \cos(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt, \quad (23)$$

$$y_B = y_A + \int_0^L \sin(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial L} = \cos \varphi_B + \frac{\partial x_B}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial L} = \cos \varphi_B - \frac{\partial x_B}{\partial k} \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2} \quad (24)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial L} = \sin \varphi_B + \frac{\partial y_B}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial L} = \sin \varphi_B - \frac{\partial y_B}{\partial k} \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2} \quad (25)$$

այստեղ օգտագործվում է (18)-ից ստացված առնչությունը՝ $\frac{\partial k}{\partial L} = -(\sigma_B - \sigma_A) / L^2$.

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial L} = \sigma_A + kL + \frac{\partial k}{\partial L} \cdot \frac{L^2}{2} = \sigma_A + kL - \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{2} = \frac{(\sigma_B + \sigma_A)}{2} \quad (26)$$

Այսպիսով, կլոտոիդի աջ կողմում տեղի է ունենում տեղաշարժ և պտույտ՝ կենտրոնանալով B կետում, մինչդեռ կլոտոիդի ներսում պետք է հաշվի առնել միայն և պարամետրի փոփոխության ազդեցությունը:

Եթե շրջանագծի կորությունը փոխվում է, ձախ և աջ կողմերում հարակից կլոտոիդի պարամետրերը փոխվում են, ինչպես նաև շրջանագծի աղեղի ծայրակետի կոորդինատները և դրա վրա շոշափողի անկյունը OX առանցքի հետ: Այս ամենը հանգեցնում է աջ կլոտոիդի ծայրակետին հաջորդող սփլայնի մասի տեղաշարժերի և պտույտների:

Բացի այդ, շրջանագծի աղեղի ներքին կետերի՝ ձախ և աջ կլոտոփողի կոռորդինատները նույնպես փոխվում են: Անցնենք բանաձևերի ստացմանը, որոնք թույլ կտան մեզ հաշվի առնել կլոտոփողի պարամետրի փոփոխությունները:

Մեզ անհրաժեշտ կլինի չորս ինտեգրալ.

$$I_1 = \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t \, dt, \quad I_2 = \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t \, dt,$$

$$I_3 = \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t^2 \, dt, \quad I_4 = \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t^2 \, dt,$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) (kt + \sigma_A - \sigma_A) \, dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) d\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{\sigma_A}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) dt = -\frac{1}{k} (\cos \varphi_B - \cos \varphi_A) - \frac{\sigma_A}{k} (y_B - y_A) \quad (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) (kt + \sigma_A - \sigma_A) \, dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) d\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{\sigma_A}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) dt = -\frac{1}{k} (\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) - \frac{\sigma_A}{k} (x_B - x_A) \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{k} \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) t (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt = -\frac{1}{k} \int_0^L t d \cos(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}) - \frac{\sigma_A}{k} I_1 \\
&= -\frac{1}{k} (L \cos \varphi_B - (x_B - x_A)) + \frac{\sigma_A}{k^2} ((\cos \varphi_B - \cos \varphi_A) + \sigma_A (y_B - y_A)) \quad (29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{k} \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) t (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt = -\frac{1}{k} \int_0^L t d \sin(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}) - \frac{\sigma_A}{k} I_2 \\
&= -\frac{1}{k} (L \sin \varphi_B - (y_B - y_A)) + \frac{\sigma_A}{k^2} ((\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) + \sigma_A (x_B - x_A)) \quad (30)
\end{aligned}$$

(22)-ից հետևում է.

$$\frac{\partial x_B}{\partial k} = -\frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{2k} (L \cos \varphi_B - (x_B - x_A)) - \frac{\sigma_A}{2k^2} ((\cos \varphi_B - \cos \varphi_A) + \sigma_A (y_B - y_A)) \quad (31)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial k} = \frac{1}{2} I_4 = \frac{1}{2k} (L \sin \varphi_B - (y_B - y_A)) - \frac{\sigma_A}{2k^2} ((\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) + \sigma_A (x_B - x_A)) \quad (32)$$

Զախակողմյան կլոտոիդի համար սկզբնական կետի կորությունը և երկարությունը չեն փոխվում, եթե շրջանագծի կորությունը փոխվում է: Շրջանակի կորությունը նշանակելով σ, ինչպես նախկինում, հաշվի առնելով (18)-ը և (22)-ը, և ֆիքսելով σ_A-ն, ստանում ենք .

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = \frac{\partial x_B}{\partial k} \cdot \frac{1}{L} \quad (33)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = \frac{\partial y_B}{\partial k} \cdot \frac{1}{L} \quad (34)$$

Դիտարկենք շրջանագծի σ կորության փոփոխության ազդեցությունը աջակողմյան կլոտոիդի վրա: Սկզբնական և ծայրակետերի, ինչպես նաև երկարության համար պահպանում ենք A, B և L նշումները:

$$x_B = \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) dt$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = - \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \times \left(t - \frac{t^2}{2L} \right) dt = -I_1 + \frac{1}{2L} I_3 \quad (35)$$

$$y_B = \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) dt$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \times \left(t - \frac{t^2}{2L} \right) dt = I_2 + \frac{1}{2L} I_4 \quad (36)$$

Երբ I_1, I_2, I_3, I_4 -ը փոխարինում ենք (27)-(30)-ից (35) և (36)-ում՝ աջակողմյան կլոտոփիղի համար դրանց արժեքները տեղադրելով, պետք է հիշենք, որ $\sigma_A = \sigma$ և $k = (\sigma_B - \sigma)/L$:

(35) և (36) բանաձևերը կարող են օգտագործվել աջ կլոտոփիղի ցանկացած ներքին C կետի կոռորդինատների ածանցյալները հաշվարկելու համար՝ հիմսվելով շրջանագծի կորության վրա, x_B -ի փոխարեն փոխարինելով x_C -ն և y_C -ն, (27)-(30)-ում y_B -ն, φ_C -ն φ_B -ի փոխարեն, իսկ L-ը՝ կլոտոփիղի երկարությունը սկզբնական A կետից մինչև այս C կետը: Սակայն, (35) և (36) բանաձևերում L-ը ամբողջ աջ կլոտոփիղի երկարությունն է A կետից մինչև B կետը:

Ավելին, (18) և (19)-ից հետևում է.

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \sigma} = \frac{L}{2} \quad (37)$$

Այստեղ σ -ն շրջանագծի կորությունն է, φ_β -ն անկյունն է կլոտոփիղի ծայրակետում OX առանցքի շոշափողի հետ, և L-ը՝ նրա երկարությունը:

(37) բանաձևը կիրառելի է և՝ ձախ, և՝ աջ կլոտոփիղի համար:

Այժմ մենք ունենք այն ամենը, ինչ մեզ անհրաժեշտ է հիմսական փոփոխականների նկատմամբ նորմալ տեղաշարժերի (միջանկյալ փոփոխականների) մասնակի ածանցյալների հաշվարկին անցնելու համար:

5. Ըստ նորմալների տեղափոխումների ածանցյալի հաշվումը

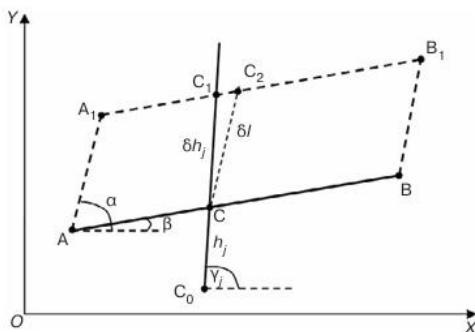
Այսպիսով, հաստատվել է, որ նույնիսկ կլոտոփոխների առկայության դեպքում, եթե մեկ առաջնային փոփոխական փոխվում է, բոլոր սփլայնային ձևափոխությունները վերածվում են տեղափոխությունների և պտույտների: Եկեք քայլ առ քայլ քննարկենք, թե ինչպես հաշվարկել նորմալային տեղաշարժերի ածանցյալները առաջնային փոփոխականների նկատմամբ՝ առանց համապատասխան վերլուծական կախվածությունների:

5.1. Ածանցյալներ ուղիղ գծի երկարությամբ

Եթե ուղիղ գծի երկարությունը փոխվում է δl -ով, սփլայնի հաջորդ մասը տեղաշարժվում է փոփոխված գծի ուղղությամբ: Այս ուղղությունը որոշվում է OX առանցքի հետ ուղղի կազմած α անկյունով (Նկ. 7): յ-րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժի համար գործում է հետևյալ բանաձևը՝

$$\frac{\partial h_j}{\partial l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta)} \quad (38)$$

որտեղ β -ն սփլայնի տարրին տարված շոշափողի (Նկար 7-ում AB գիծը) և OX առանցքի հետ կազմած անկյունն է (այն ուղիղ է՝ յ-րդ նորմալի հետ հատման կետում), γ_j -ն նորմալի (Նկար 7-ում C_0C_1) անկյունն է OX առանցքի հետ: Նկար 7-ում C կետը նորմալի և սփլայնի հատման կետի սկզբնական դիրքն է: Այն համապատասխանում է միջանկյալ h_j փոփոխականի արժեքին: δl -ի վրա α անկյունով որոշվող ուղղությամբ տեղափոխման դեպքում AB-ն դառնում է A_1B_1 , C կետը՝ C_2 , իսկ նորմալի սփլայնի հետ հատման կետը՝ C_1 : Տեղաշարժի h_j -ն ստանում է $\delta h_j = CC_1$ աճ:



Նկ. 7 Տեղափոխման դեպքում մասնակի ածանցյալներ

(38) բանաձևը բխում է սինուսների թեորեմից, եթե այն կիրառվի C_1CC_2 եռանկյան մեջ: Այն ճիշտ է բոլոր նորմալների համար, որոնք հատում են սփլայնը փոփոխական գծի ծայրից աջ:

5.2. Շրջանային աղեղի երկարության նկատմամբ ածանցյալներ

Եթե շրջանային աղեղի երկարությունը փոխվում է δL -ով, սփլայնի ամբողջ հաջորդող մասը (սկսած աղեղի B ծայրակետից) տեղաշարժվում է δL -ով B կետում շրջանագծի շոշափողի ուղղությամբ: Այս ուղղությունը որոշվում է OX առանցքի նկատմամբ շոշափողի կազմած α անկյունով: Բացի այդ, սպլայնի աջ մասը պտտվում է $\delta\alpha = \sigma\delta L$ անկյան տակ B կետի շուրջ, որտեղ σ -ն շրջանագծի կորությունն է: Տեղաշարժը հաշվի է առնվում նույն կերպ, ինչպես ուղիղ գծի երկարությունը փոխելիս: [3]-ում ներկայացված և հիմնավորված է (30) բանաձևը՝ j -րդ նորմալի երկայնքով շրջագծի աղեղի նկատմամբ տեղաշարժի ածանցյալը հաշվարկելու համար: Մեր նշանակումների մեջ այն ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial h_j}{\partial L} = \frac{\sin(\alpha - \beta) + [(x_c - x_B) \cos \beta + (y_c - y_B) \sin \beta] \sigma}{\sin(\gamma_j - \beta)} \quad (39)$$

Այստեղ L -ը շրջանային աղեղի երկարությունն է, α -ն՝ B վերջնակետում դրա նկատմամբ շոշափողի անկյունը, x_c -ն և y_c -ն՝ սփլայնի հատման կետի և j -րդ նորմալի կոորդինատներն են, β -ն՝ C կետում սպլայնի նկատմամբ շոշափողի անկյունը OX առանցքի հետ, իսկ γ_j -ն՝ OX առանցքի նկատմամբ նորմալի անկյունը: Այս բանաձևը հաշվի է առնում թե՝ տեղափոխությունը, թե՝ պտույտը: Այն ճիշտ է շրջանային աղեղի վերջնակետից աջ գտնվող սփլայնը հատող ցանկացած նորմալի համար:

5.3. Կլոտոիդի աղեղի երկարության նկատմամբ ածանցյալներ

Կլոտոիդի երկարության փոփոխության հետ մեկտեղ, սփլայնի հաջորդ մասը տեղաշարժվում և պտտվում է կլոտոիդի աղեղի B վերջնակետում որպես կենտրոնի շուրջ:

Համապատասխանաբար, կլոտոիդից աջ j -րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժերի ամը ներկայացված է հետևյալ կերպ՝

$$\partial h_j = \partial h_j^s + \partial h_j^r \quad (40)$$

որտեղ ∂h_j^s – ն j -րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժի աճն է տեղաշարժի ընթացքում:

∂h_j^r -ն j -րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժի աճն է պտտման ընթացքում:

Ե վերջնակետում կոորդինատների փոփոխությունը տեղի է ունենում ∂L -ով շոշափողի տեղաշարժի և կլոտոիդի և պարամետրի փոփոխության պատճառով, որը լրացուցիչ հանգեցնում է նորմալների և կլոտոիդի հատման կետերի կոորդինատների փոփոխության:

∂h_j^s -ն հաշվարկելու համար մենք օգտագործում ենք (24) և (25) բանաձևերը, որոնք տալիս են կլոտոիդի աղեղի ծայրակետի ∂x_B և ∂y_B կոորդինատների աճը, որը պայմանավորված է ∂L աճով: Հաջորդող բոլոր կետերի կոորդինատները տեղաշարժի ժամանակ նույնպես կստանան նույն աճը: Հատկանշական է, որ այս բանաձևերի առաջին անդամները համապատասխանում են B կետում ∂L -ով շոշափող տեղաշարժին, մինչդեռ երկրորդ անդամները համապատասխանում են կլոտոիդի պարամետրի փոփոխության պատճառով տեղաշարժին՝ պահպանելով կորությունը դրա սկզբնակետում և վերջնակետում: Եթե նշանակենք OX առանցքի երկայնքով ∂x_B -ով ∂x_{jx} -ով և OY առանցքի երկայնքով ∂y_B -ով ∂y_{jy} -ով տեղաշարժի պատճառով առաջացած h_j^s աճը, ապա $\partial h_j^s = \partial h_{jx} + \partial h_{jy}$:

(38) բանաձևում ∂h_{jx} -ը հաշվարկելու համար ∂l -ը փոխարինեք ∂x_B -ով և α -ն՝ 0 -ով:

$$\text{Ստանում ենք } \frac{\partial h_{jx}}{\partial x_B} = -\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$$

$$\text{Նմանապես, } \partial h_{jy} \text{-ի համար } \alpha = \pi / 2 \text{ դեպքում } \frac{\partial h_{jy}}{\partial y_B} = \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$$

$$\text{Սրանից հետևում է. } \partial h_j^s = -\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \partial x_B + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \partial y_B \quad (41)$$

$$\frac{\partial h_j^s}{\partial L} = -\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial x_B}{\partial L} + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial y_B}{\partial L} \quad (42)$$

$\frac{\partial x_B}{\partial L}$ և $\frac{\partial y_B}{\partial L}$ – ի ածանցյալները համապատասխանում են (24) և (25) բանաձևերին,

որոնցում, $\frac{\partial x_B}{\partial k}$, $\frac{\partial y_B}{\partial k}$ -ը, համապատասխանաբար, պետք է փոխարինվեն (31) և (32)

բանաձևերից ստացված իրենց արտահայտություններով: Կլոտոնիդի ներսում նորմալներով հատման կետերի համար, (39)-ում, (23) և (24)-ի փոխարեն, մենք պետք է օգտագործենք հետևյալ արտահայտությունները՝

$$\frac{\partial x_C}{\partial L} = - \frac{\partial x_C}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2} \quad \text{և} \quad \frac{\partial y_C}{\partial L} = - \frac{\partial y_C}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2}$$

և ածանցյալները՝ $\frac{\partial x_C}{\partial k}, \frac{\partial y_C}{\partial k}$ հաշվարկվում են (30) և (31) բանաձևերով՝ x_B, y_B -ի փոխարեն x_C, y_C -ով: φ_B -ի փոխարեն φ_C -ով, իսկ L -ի փոխարեն՝ կլոտոնիդի երկարությունը սկզբնակետից մինչև B վերջնակետը:

∂h_j^r -ն հաշվարկելու համար մենք պետք է հաշվի առնենք կլոտոնիդի B -ի վերջնակետի շուրջ սփլայնի հաջորդ մասի պտույտը $\partial \varphi_B$ անկյան տակ: [3]-ում ստացվել է բանաձև յ-րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժերի ածանցյալների հաշվարկման համար պտտման անկյան նկատմամբ, որը մեր նշանակումների մեջ ունի հետևյալ տեսքը.

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial \varphi_B} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$$

Հաշվի առնելով, որ (26) բանաձևի համաձայն՝ $\frac{\partial \varphi_B}{\partial L} = (\sigma_B + \sigma_A)/2$, ստանում ենք.

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial L} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{(\sigma_B + \sigma_A)}{2} \quad (43)$$

Այստեղ x_C -ն և y_C -ն սփլայնի հատման կետի կոորդինատներն են յ-րդ նորմալի հետ, β -ն C կետում սփլայնին տարված շոշափողի և OX առանցքի կազմած անկյունն է, γ_j -ն նորմալի անկյունն է OX առանցքի հետ, σ_A -ն և σ_B -ն կլուտոնիդի սկզբնակետում և վերջնակետում կորությունն են: Համաձայն (40)-ի, (42) և (43)-ի աջ կողմերի գումարը

տալիս է սփլայնի հաջորդ տեղամասի համար $\frac{\partial h_j}{\partial L}$ ածանցյալը:

5.4. Ածանցյալներ ըստ կորության

Ինչպես արդեն նշվեց, շրջանագծի Ծ կորության փոփոխությունը՝ պահպանելով մյուս բոլոր հիմնական փոփոխականների արժեքները, հանգեցնում է ամենաբարդ սփլայնային ձևափոխության. Ճախ կլոտոիդի պարամետրը փոխվում է, ինչը հանգեցնում է տեղաշարժերի դրա ներսում, սփլայնի աջ մասը տեղաշարժվում և պտտվում է մինչև դրա վերջնակետը, շրջանագծի աղեղի ներսում տեղաշարժեր են տեղի ունենում այն հատող նորմալների երկայնքով, տեղի է ունենում սփլայնի մասի լրացուցիչ տեղաշարժ և պտույտ շրջանային աղեղի վերջնակետից այն կողմ, և վերջապես, աջ կլոտոիդի պարամետրը փոխվում է, ինչը հանգեցնում է սփլայնի մասի տեղաշարժի և պտույտի այդ կլոտոիդի վերջնակետից այն կողմ և տեղաշարժի դրա ներսում:

Նորմալների երկայնքով տեղաշարժերի ածանցյալները կորության երկայնքով կհաշվարկենք հաջորդաբար՝ հատված առ հատված:

Ճախ կլոտոիդի ներսում և մինչև սփլայնի ծայրը j -րդ նորմալի և կլոտոիդի հատման C կետի համար նրա կոորդինատները նշանակենք x_C, y_C , կլոտոիդի աղեղի սկզբից (A կետ) մինչև C կետը եղած հեռավորությունը նշանակենք L_C ; C կետում շոշափողի անկյունը՝ φ_C ; Ճախ կլոտոիդի պարամետրը՝ k₁: Օգտագործենք (31) և (32) բանաձևերը.

$$\frac{\partial x_C}{\partial k_1} = \frac{1}{2k_1} (L_C \cos \varphi_C - (x_C - x_A)) - \frac{\sigma_A}{2k_1^2} ((\cos \varphi_C - \cos \varphi_A) + \sigma_A(y_C - y_A)) \quad (44)$$

$$\frac{\partial y_C}{\partial k_1} = \frac{1}{2k_1} (L_C \sin \varphi_C - (y_C - y_A)) - \frac{\sigma_A}{2k_1^2} ((\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) + \sigma_A(x_C - x_A)) \quad (45)$$

Հստ (33), (34)-ի $\frac{\partial x_C}{\partial \sigma} = \frac{\partial x_C}{\partial k_1} \cdot \frac{1}{L}$ և $\frac{\partial y_C}{\partial \sigma} = \frac{\partial y_C}{\partial k_1} \cdot \frac{1}{L}$, որտեղ L-ը կլոտոիդի AB աղեղի երկարությունն է:

Կոորդինատների աճը (41)-ի համաձայն տալիս է նորմալ տեղաշարժի աճը

$$\partial h_j^s = - \frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \partial x_C + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \partial y_C$$

Զախ կլոտոփիդի ներսում j -րդ նորմալի երկայնքով տեղաշարժի շրջանագծի կորության նկատմամբ համապատասխան ածանցյալի համար ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} = \left(-\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial x_C}{\partial k_1} + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial y_C}{\partial k_1} \right) / L \quad (46)$$

Այստեղ, ինչպես նախկինում, β -ն նորմալի հետ հատման C կետում սփլայնին տարված շոշափողի և OX առանցքի կազմած անկյունն է, և γ_j -ն նորմալի անկյունն է OX առանցքի հետ:

Զախ կլոտոփիդից աջ գտնվող սփլայնը հատող նորմալների համար (44) և (45) բանաձևերը պետք է կիրառվեն Յ վերջնակետի վրա, և արդյունքը պետք է փոխարինվի (46) բանաձևով, որտեղ β և γ_j անկյունները վերաբերվում են համապատասխան նորմալին: Այդ նույն նորմալների համար կլոտոփիդից Յ կետում շոշափողի պտտման պատճառով առաջացող ածանցյալը $\frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma}$ հաշվարկվում է (46)-ի կիրառմամբ և

$\frac{\partial \varphi_B}{\partial \sigma} = \frac{L}{2}$, որը հետևում է (21)-ից: Արդյունքում, նորմալի և ձախ կլոտոփիդից աջ գտնվող սփլայնի հատման կամայական C կետի համար ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{L}{2} \quad (47)$$

Միասին, (46) և (47)-ը տալիս են $\frac{\partial h_j}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma}$ (48)

Բացի վերը նշվածի, շրջանագծի աղեղի ներսում նորմալների հետ հատման կետերի կոորդինատներում փոփոխություններ են տեղի ունենում՝ շրջանագծի կորության փոփոխությունների պատճառով: [1]-ում ստացված (34) բանաձևը՝ շրջանագծի ներսում գտնվող նորմալների նկատմամբ h_j տեղաշարժերի մասնակի ածանցյալները R շառավղի նկատմամբ հաշվարկելու համար, ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\delta h_j}{\delta R} = \frac{\cos(\beta - \alpha) - 1}{\sin(\gamma_j - \beta)}$$

Այս բանաձևում α -ն և β -ն շրջանագծի աղեղի սկզբնակետում և վերջնակետում տարված շոշափողների կազմած անկյուններն են OX առանցքի հետ, γ_j -ն՝ j -րդ նորմալի անկյունն

Է:Մեր նշումներում, շրջանագծի ներսում գտնվող նորմալների նկատմամբ տեղաշարժերի կորության նկատմամբ ածանցյալի համար ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j^{s1}}{\partial \sigma} = \frac{1 + \cos(\beta - \varphi_B)}{\sin(\gamma_j - \beta) \sigma^2} \quad (49)$$

Արդյունքում, շրջանային աղեղը հատող նորմալների երկայնքով տեղաշարժերի ածանցյալների համար ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^{s1}}{\partial \sigma} \quad (50)$$

Բացի այդ, տեղի է ունենում սփլայնի ամբողջ հաջորդող մասի տեղաշարժ շրջանային աղեղի վերջնակետից (B կետ) և դրա պտույտ՝ այդ կետում կենտրոնով σ կորության փոփոխության պատճառով:

[1]-ից (31), (32) բանաձևերին համապատասխան, շառավղից անցնելով կորության, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = - \frac{\sin \beta - \sin \alpha - (\beta - \alpha) \cos \beta}{\sigma^2} \quad (51)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = - \frac{\cos \alpha - \cos \beta - (\beta - \alpha) \sin \beta}{\sigma^2} \quad (52)$$

Այստեղ α-ն և β-ն համապատասխանաբար շրջանագծի աղեղին սկզբնակետում և վերջնակետում տարված շոշափողների և OX առանցքի հետ կապված անկյուններն են:

Օգտագործենք (41) բանաձևը, որը թույլ է տալիս x և y կոորդինատների երկայնքով տեղաշարժերը վերածել նորմալի երկայնքով տեղաշարժերի, շրջանագծի վերջնակետում տեղաշարժից առաջացող նորմալների երկայնքով տեղաշարժերի ածանցյալների համար ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j^{s2}}{\partial \sigma} = - \frac{\sin \beta_1}{\sin(\gamma_j - \beta_1)} \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \sigma} + \frac{\cos \beta_1}{\sin(\gamma_j - \beta_1)} \cdot \frac{\partial y_B}{\partial \sigma} \quad (53)$$

Այստեղ β_1 -ը j-րդ նորմալի և սփլայնի հատման կետում տարված շոշափողի կազմած անկյունն է OX առանցքի հետ, γ_j -ն՝ այդ նորմալի անկյունն է OX առանցքի հետ:

(51)-ից և (52)-ից $\frac{\partial x_B}{\partial \sigma}$ և $\frac{\partial y_B}{\partial \sigma}$ (53)-ում տեղադրելով և պարզեցնելով, ստանում ենք՝

$$\frac{\partial h_j^{s^2}}{\partial \sigma} = -\frac{\cos(\beta_1 - \alpha) - \cos(\beta_1 - \beta) + (\beta - \alpha) \sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta_1) \sigma^2} \quad (54)$$

Պետք է հաշվի առնել շրջանագծի վերջնակետում գտնվող շոշափողը պտտելու հետևանքները, եթե դրա կորությունը փոխվում է, նույն կերպ, ինչպես արվել է վերևում ձախ կլոտոփիդի վերջնակետում գտնվող շոշափողը պտտելու համար: Համաձայն (43)-ի՝

$$\frac{\partial h_j^{r^2}}{\partial \varphi_B} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$$

Այստեղ, x_C -ն և y_C -ն սփլայնի հատման կետի կոորդինատներն են j -րդ նորմալի հետ, β -ն այդ C կետում սփլայնին տարված շոշափողի և OX առանցքի կազմած անկյունն է, γ_j -ն՝ նորմալի անկյունն է OX առանցքի հետ, φ_B -ն՝ շրջանագծի աղեղի վերջնակետում տարված շոշափողի կազմած անկյունն է: Հաշվի առնելով, որ B շրջանագծի համար

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial \sigma} = L, \text{որտեղ } L-\text{ը շրջանագծի աղեղի երկարությունն է, ստանում ենք՝$$

$$\frac{\partial h_j^{r^2}}{\partial \varphi_B} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} L \quad (55)$$

(54) և (55) բանաձևերը ճիշտ են նորմալների և սփլայնի հատման բոլոր կետերի համար, ոչ միայն աջ կլոտոփիդի ներսում, այլև մինչև սփլայնի վերջը: Շրջանագծի կորության փոփոխությունների ազդեցությունը աջ կլոտոփիդի վրա նույնպես հաշվի է առնվում:

6. Օբյեկտիվ ֆունկցիայի գրադիենտի հաշվարկ

Օպտիմալացման ալգորիթմի սկզբնական մոտավորությունը սփլայնն է, որը ստացվում է դինամիկ ծրագրավորման մեթոդը իրականացնող առանձին ծրագրի միջոցով [1]: Այս սփլայնն օգտագործվում է նշված տեղորոշման կետերի տեղաշարժերը նորմալների երկայնքով դեպի նախագծային դիրքը (Նկ. 6): Մրանք միջանկյալ փոփոխականների h_j ընթացիկ արժեքներն են: Դրանք որոշելու համար սպլայնի տարրերը հաջորդաբար դիտարկվում են՝ սկսած սկզբնական գծից: Յուրաքանչյուր տարրի (գծի, կլոտոիդի, շրջանագծի) համար պահպում է այն հատող առաջին նորմալի թիվը:

Նորմալների շրջանագծի հետ հատման կետերը որոշելու համար օգտագործվում է [1]-ից (26) բանաձևը: Կլոտոիդի հետ հատումները գտնելու համար օգտագործվում է իտերատիվ ալգորիթմ [19]: Հաջորդը, յուրաքանչյուր հիմսական փոփոխականի՝ x_i -ի համար (տարրերի երկարությունը և շրջանակների կորությունը), հաջորդաբար որոշվում է առաջին նորմալ j_i -ի թիվը, որի տեղաշարժը ազդվում է համապատասխան հիմսական փոփոխականի փոփոխությամբ: Այս նորմայի երկայնքով տեղաշարժը ազդում է համապատասխան առաջնային փոփոխականի փոփոխություններից: Գծերի և շրջանագծերի երկարությունների համար սա հաջորդ տարրը հատող առաջին նորմալի թիվն է: Կլոտոիդի երկարության համար սա այն հատող առաջին նորմալի թիվն է, շրջանագծի կորության համար սա ձախ կլոտոիդը հատող առաջին նորմալի թիվն է: Բոլոր տարրերի վերջնական նորմալի թիվը վերջին ո նորմալի թիվն է:

Սկզբնական նպատակային ֆունկցիայի (19) ածանցյալները հիմսական փոփոխականների նկատմամբ հաշվարկվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$\frac{\partial F(h(x))}{\partial x_i} = \sum_{j=j_i}^n h_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \quad (56)$$

Այստեղ x -ը և h -ը համապատասխանաբար հիմսական և միջանկյալ փոփոխականների վեկտորներն են: Սփլայնի պարամետրերը օպտիմալացնելու համար օգտագործվում են նույն փոփոխված Լագրանժի ֆունկցիան [20–22] և նույն ալգորիթմը [23, 24], ինչպես գծային հատվածներից և շրջանային աղեղներից բաղկացած սփլայնի համար [3]: Դրան

հասնելու համար գրադիենտը հաշվարկելիս (56)-ի աջ կողմին ավելացվում է տուգանային ֆունկցիայի [3] ածանցյալը: