Maciej Krzywda,
Inżynieria Obliczeniowa, IMiIP
Metoda Elementów Skończonych
nr albumu: 293102

Sprawozdanie 1

Tytuł projektu:

Implementacja i zastosowanie Metody Elementów Skończonych do rozwiązania problemów 2D z wykorzystaniem języka JAVA.

- Część Teoretyczna

Metoda Elementów Skończonych (Finite Element Method) - jedna z podstawowych metod obliczeń inżynierskich wspieranych komputerowo.

Metoda elementów skończonych – w dużym uproszczeniu jest odwzorowaniem kształtu geometrii poprzez nałożenie siatki obliczeniowej, na bazie której przeprowadzana została analiza, i dzięki temu w badanej konstrukcji otrzymujemy następujące, przykładowe wartości: naprężenia,odkształcenia, siły i przemieszczenia.

W przypadku obliczeń cieplnych są to rozkłady temperatur, w przypadku obliczeń przepływowych są to rozkłady wektorów prędkości i ciśnień.

Ogólno przyjęty tok postępowania podczas stosowania MES:

Etap pierwszy to przygotowanie geometrii, czyli jej uproszczenie, usunięcie niepotrzebnych detali i elementów.
Etap drugi to przypisanie właściwości fizycznych oraz utworzenie siatki obliczeniowej.
Etap trzeci to otoczenie pracy czyli przypisanie warunków brzegowych; w ich skład wchodzą obciążenia i utwierdzenia.
Etap czwarty to obliczenia przy użyciu odpowiedniego rozwiązania opisującego zachodzące zjawisko fizyczne.

Podstawowymi etapami rozwiązania problemu przy pomocy MES są:

1. Dyskretyzacja, czyli podział obszaru na mniejsze elementy (tzw. elementy skończone). Elementy mają wspólne węzły

(punkty) i w sumie aproksymują kształt ośrodka.

2. Dla każdego elementu wyznaczane są wielomiany - tzw. funkcje kształtu. Wyznacza się je w taki sposób, aby zachować warunek ciągłości szukanej wartości na granicach elementów. Przy ich pomocy wyznacza się szukaną niewiadomą w dowolnym punkcie elementu skończonego (znając jej wartości w węzłach elementu).

3. Minimalizacja funkcjonału odpowiadającego danemu równaniu różniczkowemu. Operacja ta może zostać wykonana bezpośrednio lub poprzez obliczenie układu równań algebraicznych. W drugim przypadku liczba równań jest równa liczbie niewiadomych. W przypadku pola temperatury liczba niewiadomych jest równa liczbie węzłów. Jeśli niewiadomą jest wektor, to liczba niewiadomych jest iloczynem wszystkich węzłów oraz liczby niewiadomych w każdym z nich.

Metoda elementów skończonych jest obecnie podstawowym narzędziem wykorzystywanym przez wielu inżynierów do rozwiązywania obliczeniowych zadań oraz przeprowadzania badań opierających się na przepływie ciepła, przepływie cieczy, na prężeniach , odkształceniach, symulacji odkształceń i wiele innych.

Metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną i stosowanie jej wymaga teoretycznej wiedzy.

Główna idea polega na zamianie modelu ciągłego na model dyskretny. Dyskretny model jest oparty na ograniczonej liczbie węzłów, które przedstawione są za pomocą ograniczonej liczbie elementów skończonych.

Do zaimplementowania programu zostało wykorzystane równanie Fouriera dla procesów cieplnych:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x(t)\frac{\partial t}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y(t)\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z(t)\frac{\partial t}{\partial z}\right)+Q=0$$

Rozwiązanie tego równania sprowadza się do zadania polegającego na poszukiwaniu minimum takiego funkcjonału, dla którego równanie to jest równaniem Eulera. Przyjmujemy, że materiał jest izotropowy. Według rachunku wariacyjnego funkcjonał taki będzie miał postać:

$$J = \int_V \left(\frac{k(t)}{2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Qt \right) dV$$

Funkcja t(x, y, z) musi spełniać określone warunki brzegowe na powierzchni rozpatrywanego obszaru. W przedstawionym problemie został wykorzystany warunek brzegowy według prawa konwekcji. Funkcjonał znajdujący się wyżej rozszerzamy o całkę w postać :

$$\int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS + \int_S qtdS$$

Gdzie: S – powierzchnia na której zadane są warunki brzegowe.

Ostatecznie nasz wzór przyjmuje postać:

$$J = \int_V \left(\frac{k(t)}{2} \left(\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right) - Qt \right) dV + \\ + \int_S \frac{\alpha}{2} (t - t_\infty)^2 dS + \int_S qtdS$$

Następnie dyskretyzacja przedstawionego problemu polega na podzieleniu rozpatrywanego obszaru na elementy i przedstawieniu temperatury wewnątrz elementu, jako funkcji wartości węzłowych zgodnie z zależnością:

$$t = \sum_{i=1}^{n} N_i t_i = \{N\}^T \{t\}$$

Wprowadzając powyższą zależność do funkcjonału otrzymujemy układ równań, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$[H]\{t\}+[C]\frac{\partial}{\partial \tau}\{t\}+\{P\}=0$$

gdzie:

$$[C]=\int_V c\rho\{N\}\{N\}^T\,dV$$

W ogólnym przypadku wartości temperatury w węzłach {t} zależą od czasu. Przyjmując, że wektor {t0} reprezentuje temperatury węzłowe w chwili τ=0, to w przedziale czasu Δτ wektor ten będzie wyznaczony równaniem:

$$\{t\}=\{N_0,N_1\}\begin{Bmatrix}\{t_0\}\\\{t_1\}\end{Bmatrix}$$

w ten sposób uzyskujemy:

$$\left([H]+\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_1\}-\left(\frac{[C]}{\Delta\tau}\right)\{t_0\}+\{P\}=0$$

gdzie:

$$[H] = \int_V k\left(\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial x}\right\}^T + \left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}\left\{\frac{\partial\{N\}}{\partial y}\right\}^T\right)dV + \int_S \alpha\{N\}\{N\}^T dS,$$

$$\{P\} = -\int_S \alpha\{N\}t_\infty dS\ ,$$

$$[C] = \int_V c\rho\{N\}\{N\}^T dV\ .$$

- Wyniki i ich analiza

Siatka MES:

```
Element number: 1
1-5
|  |
2-6
Element number: 2
2-6
|  |
3-7
Element number: 3
3-7
|  |
4-8
Element number: 4
5-9
|  |
6-10
Element number: 5
6-10
|  |
7-11
Element number: 6
7-11
|  |
8-12
Element number: 7
9-13
|  |
10-14
Element number: 8
10-14
|  |
11-15
Element number: 9
11-15
|  |
12-16
```

Test case 2d transient solution - initial data

- 100 – initial temperature
- 500 – simulation time [s],
- 50 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m^{2}K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 4 – N_H,
- 4 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m3].

Max and min temperature in each step

Time[s]	MinTemp[s]	MaxTemp[s]
50	110.038	365.815
100	168.837	502.592
150	242.801	587.373
200	318.615	649.387
250	391.256	700.068
300	459.037	744.063
350	521.586	783.383
400	579.034	818.992
450	631.689	851.431
500	679.908	881.058

`Wyniki które uzyskałem dla Test Case 1:`

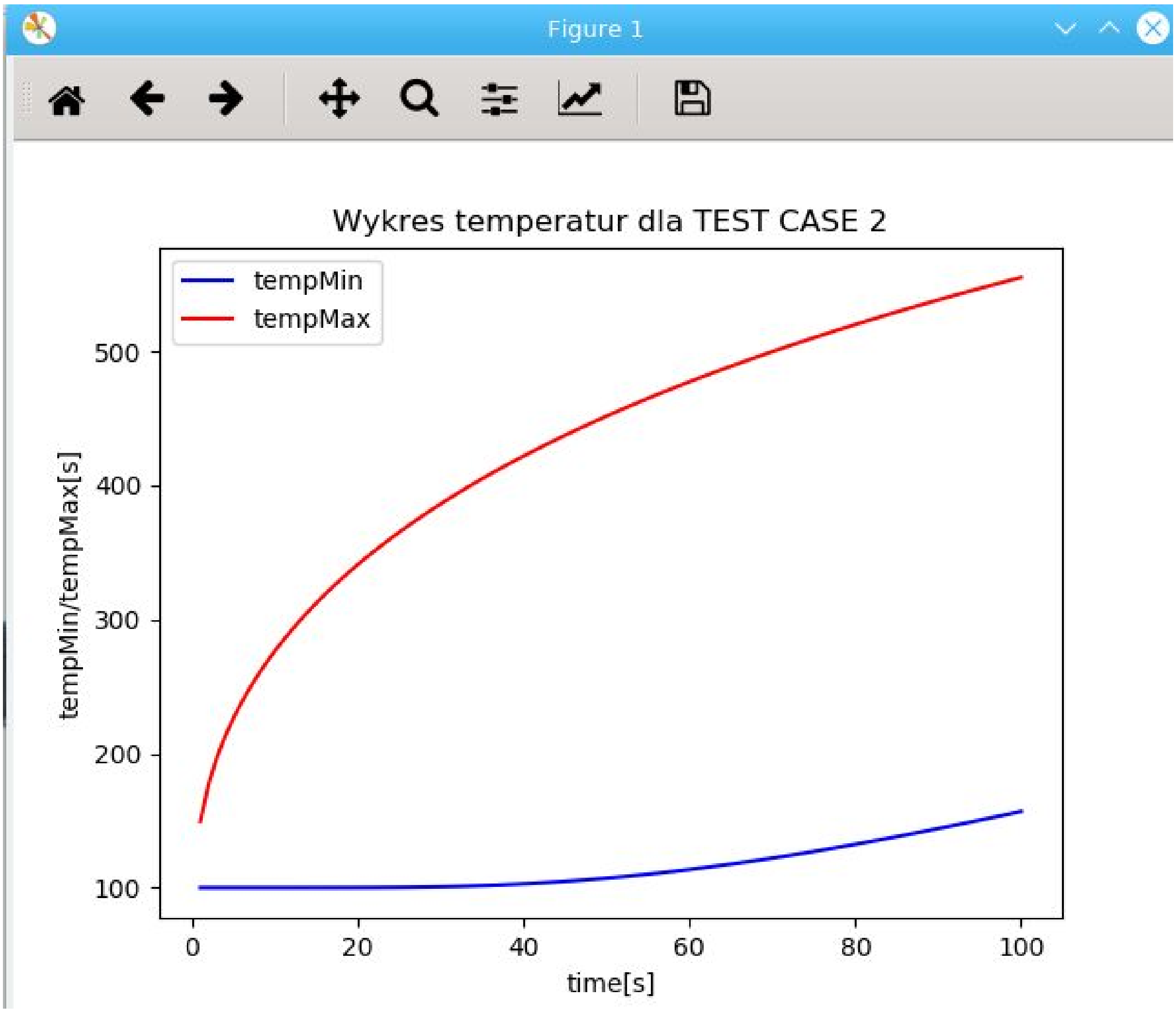
Pierwszą kolumnę stanowi czas symulacji w sekundach, drugą minimalna temperatura w węzłach, a trzecią maksymalną temperaturę w węzłach.

Max and min temperature in each step

Time[s]	Min Temp[s]	Max Temp[s]
50.0	110.03797627584353	365.8154683350923
100.0	168.83701629178358	502.59171122183506
150.0	242.8008536324447	587.3726650238902
200.0	318.6145959364234	649.3874813298512
250.0	391.2557985002308	700.0684178779047
300.0	459.0369149963901	744.0633412641018
350.0	521.5862908442493	783.3828460480662
400.0	579.0344662587189	818.992183303008
450.0	631.689262574126	851.4310374575704
500.0	679.9076230022682	881.0576290015758

Test case 2d transient solution - initial data

- 100 – initial temperature
- 100 – simulation time [s],
- 1 – simulation step time [s],
- 1200 – ambient temperature [C],
- 300 – alfa [W/m^{2}K],
- 0.100 – H [m],
- 0.100 – B [m],
- 31 – N_H,
- 31 – N_B,
- 700 – specific heat [J/(kg°C)],
- 25 – conductivity [W/(m°C)],
- 7800 – density [kg/m3].



Jak widać wyniki zarówno dla Test Case 1 jak i Test Case 2 wyszy tak samo dobrze jak dla wyników zaprezentowanych przez prowadzącego.

- Wnioski

Przygotowanie implementacji dla Metody Elementów Skonczonczonych pozwoliła lepiej zrozumieć temat poruszany na wykładach oraz na ćwiczeniach projektowych.

Zrozumienie działania MES jako jednej z najbardziej popularnych symulacyjnych metod wspomagania komputerowego dla problemów inżynierskich (u nas problemów 2D) pokazało że wiedza nabyta w trakcie studiów z tematów nieinformatycznych często koreluje się ze sobą.

Trzeba jednak podkreślić, że MES jest metodą przybliżoną, której wyniki zawsze należy podać weryfikacji. Uzyskanie większej dokładności może wymagać zagęszczenia siatki lub zmniejszenia kroku czasowego.

Działania te przekładają się na skomplikowane obliczenia oraz wydłużenie czasu jaki trzeba poświęcić na obliczenie danego zagadnienia dlatego niektóre przypadki rozpatrywane w MES wymagają potężnej mocy obliczeniowej sprzętu i mogą się liczyć nawet po paręnaście tygodni.

Na podstawie przeprowadzonej symulacji dowiedziałem się, jak zmienia się rozkład temperatur w węzłach siatki nałożonej na obiekt w przestrzeni dwuwymiarowej, podczas obróbki termicznej.

- Bibliografia

http://home.agh.edu.pl/~pkustra/MES.html
http://home.agh.edu.pl/~milenin/Dydaktyka/mes.htm
http://www.metal.agh.edu.pl/~banas/wprowadzenie_do_MES.pdf
Andriy Milenin - PODSTAWY METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH ZAGADNIENIA TERMOMECHANICZNE