ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
“САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”
(СПбГУ)

Образовательная программа бакалавриата “Математика”

Отчет о практике

на тему

Локальная Комбинаторная Формула и класс Эйлера

Выполнил студент 2 курса бакалавриата
группа 21.Б01-мкн
Кукушкин Максим Алексеевич

Научный руководитель:
Профессор, Панина Гаянэ Юрьевна

Санкт-Петербург
2023

Содержание

Введение

В ходе учебной практики мною были изучены различные методы работы с триангулированными расслоениями над симплициальными комплексами и гладкими многообразиями. Были предприняты попытки в получении новых результатов в задаче о перечислении триангулированных расслоений над многогранниками, частные случаи которой изучались в работах [2, 3]. Далее приведён краткий реферат изученного материала и несколько решённых упражнений.

1. Основные определения и известные результаты

Определение 1. *Векторным расслоением ранга* k будем называть тройку $E \xrightarrow{\pi} B$, где E – тотальное пространство, B – база расслоения и π – непрерывное отображение:

- $\forall x \in B\colon \pi^{-1}(x)$ – слой над x – снабжён структурой векторного пространства размерности k
- $\forall x \in B\colon \exists U(x)\colon$ расслоение $\pi^{-1}(U) \to U$ изоморфно тривиальному

Определение 2. Два расслоения $E \xrightarrow{\pi} B, E' \xrightarrow{\pi'} B$ с общей базой *изоморфны*, если есть биекция $\varphi\colon E \to E'$:

- φ – гомеоморфизм
- $\varphi\colon \pi^{-1}(x) \mapsto \pi^{-1}(x)$ – φ действует послойно
- $\varphi|_{\pi^{-1}(x)}$ – изоморфизм векторных пространств

Пример 1. $B \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\pi} B, (x, v) \mapsto x$ – тривиальное расслоение

Замечание. Аналогичным образом вводится понятие расслоения со слоем S^1 с тем отличием, что на каждом слое (гомеоморфном окружности) задано эффективное действие группы $S^1 = \{x\colon |x| = 1, x \in \mathbb{C}\}$.

Замечание. Всякое послойно ориентированное расслоение со слоем окружность происходит из послойно ориентированного векторного расслоения ранга два, и наоборот. В одну сторону это можно увидеть, как сужение в каждом экземпляре плоскости $\mathbb{R}^2$ на каноническую единичную окружность S^1. В обратную (менее строго) – как заклеивание окружности плоскостью.

Определение 3. *Сечением* данного расслоения $E \xrightarrow{\pi} B$ будем называть непрерывное отображение $s\colon B \to E$ такое, что: $\forall x \in B\colon s(x) \in \pi^{-1}(x)$

Замечание. Локально, сечение – это просто график функции, ибо $s\colon U \to U \times \mathbb{R}^k, x \mapsto (x, f(x)), f\colon U \to \mathbb{R}^k$ в некоторой окрестности $U(x)$

Пример 2. У векторного расслоения есть выделенное нулевое сечение $s(x) \equiv 0$, задающее вложение базы в тотальное пространство.

Замечание. Аналогичным образом вводится понятие сечения расслоения со слоем S^1.

Лемма 1. Пусть $E \xrightarrow{\pi} B$ – послойно ориентированное векторное расслоение ранга 2 (над поверхностью). Тогда $\pi \cong$ тривиальному расслоению $\iff \exists$ непрерывное нигде не нулевое сечение s.

Лемма 2. Пусть $E \xrightarrow{\pi} B$ – послойно ориентированное S^1-расслоение. Тогда $\pi \cong$ тривиальному расслоению $\iff \exists$ глобальное непрерывное сечение s.

Замечание. Для неориентированных расслоений оба утверждения неверны.

Определение 4. У послойно ориентированного расслоения ранга 2 над базой *ориентированная сфера с ручками* есть *Числом Эйлера.* Его можно определить так. Пусть непрерывное сечение s задано на всей базе B. У него конечное число нулей, и можно считать, что все нули трансверсальны. Посчитаем число нулей, с учётом ориентации. Это и есть число Эйлера $e \in \mathbb{Z}$

Замечание. У неориентированного расслоения тоже есть число Эйлера, но оно принадлежит $\mathbb{Z}2\mathbb{Z}$. Определение аналогично

Теорема 1. *Определение класса Эйлера корректно: он не зависит от выбора сечения.*

Теорема 2. *Два ориентированных расслоения над базой* ориентированная сфера с ручками *изоморфны тогда и только тогда, когда у них совпадают числа Эйлера.*

Замечание. На самом деле, число Эйлера – это представитель *класса Эйлера* $e \in H^2(B, \mathbb{Z})$

2. Некоторые из решённых упражнений

Предложение 1. *Рассмотрим тривиальное расслоение $S^2 \times \mathbb{R}^2$ и профакторизуем его по отношению $(x, v) \sim (-x, -v)$. Полученное расслоение имеет ненулевой класс Эйлера, и следовательно, нетривиально.*

Доказательство. Обозначим $\rho\colon S^2 \times \mathbb{R}^2 \to S^2, (x, v) \mapsto x$ – тривиальное векторное расслоение ранга 2.
Поскольку склейка $(x, v) \sim (x, -v)$ линейна, она индуцирует новое расслоение $\pi\colon {}^{S^2 \times \mathbb{R}^2}/_{\sim} \to {}^{S^2}/_{\sim} = \mathbb{RP}^2$. Заметим, что наша база – проективная плоскость – неориентированная поверхность. Значит $H^2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}) = 0$, а потому класс Эйлера мы будем искать в качестве элемента $H^2(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Вспомним, что класс Эйлера можно считать как число нулей (в нашем случае, по модулю 2) произвольного непрерывного сечения $s\colon \mathbb{RP}^2 \to {}^{S^2 \times \mathbb{R}^2}/_{\sim}$. Представим сферу как $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ и построим сначала $\tilde{s}\colon S^2 \to S^2 \times \mathbb{R}^2$ как график ортогональной проекции $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2, f\colon x \mapsto pr(x), f(x_1, x_2, x_3) := (x_1, x_2, 0) \sim (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. То есть $\tilde{s}(x) := (x, f(x))$.
В силу нечётности функции f отображение $\tilde{s}$ уважает отношение эквивалентности $\sim$, т.е. индуцирует корректно определённое непрерывное сечение $s\colon {}^{S^2}/_{\sim} \to {}^{S^2 \times \mathbb{R}^2}/_{\sim}, s(\overline{x}) := \overline{\tilde{s}(x)}$. Нули f – в точности северный и южный полюсы сферы $N = (0, 0, 1), S = (0, 0, -1)$. Но после факторизации $\overline{N} = \overline{S}$, и следовательно s имеет ровно один ноль $\overline{N} = \overline{S}$. Таким образом, $e(\pi) = 1$ и полученное сечение нетривиально. $\square$

Замечание. Нетрудно видеть, что данное доказательство обобщается на случай произвольной размерности. Действительно, для $S^n \times \mathbb{R}^n \to S^n$ достаточно взять

$$f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := (x_1, \ldots, x_n, 0)$$

.

Предложение 2. *Класс эйлера касательного расслоения к тору равен 0.*

Доказательство. Пускай $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M, TM \xrightarrow{\pi} M, \pi(x,v) := x,$ где $v \in T_x M$ – касательное расслоение к тору $T^2 := M$.
Как мы знаем, класс эйлера $e(TM, \pi, M) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ послойно ориентированного касательного расслоения над ориентированной замкнутой поверхностью с ручками совпадает с её эйлеровой характеристикой, т.е. $e(TM, \pi, M) = \chi(M) = |V| - |E| + |F| = 0$.
Можно, однако, увидеть это напрямую. Выбрать непрерывное сечение $s\colon M \to TM$ означает отметить в каждом слое $\pi^{-1}(x)$ по точке непрерывным образом. Иными словами, необходимо задать на поверхности гладкое векторное поле. Один из способов сделать это таков: расслоить тор на окружности (например, параллели) и взять в каждой точке по вектору скорости данной параллели.
Другой способ реализовать ту же идею: представить поверхность как $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Тогда достаточно придумать векторное поле V на $\mathbb{R}^2$, инвариантное относительно сдвигов. Подойдёт, в частности, произвольное постоянное поле $V(p) := (a,b) \in \mathbb{R}^2 \, \forall p \in \mathbb{R}^{\not=}$.
Так или иначе, получаем всюду ненулевое непрерывное сечение s. Значит, наше расслоение тривиально и, следовательно, $e(\pi) = 0$. □

Замечание. Попробуем подойти к этому факту с алгебраической точки зрения. Дело в том, что тор $T^2 = S^1 \times S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ является группой Ли (не вдаваясь в тонкости определений, это означает, что на торе, как гладком многообразии, задано действие группы, причём умножение – гладкое).

Предложение 3. *Касательное расслоение к группе Ли всегда тривиально.*

Доказательство. Действительно, пусть $M^n = G$ – группа Ли, $\pi\colon E \to G$. $\pi \cong G \times \mathbb{R}^n \iff$ в $\forall$ слое можно задать базис, непрерывно зависящий от точки.
Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в $T_{\mathbf{1}}M$, где $\mathbf{1}$ – единица группы G. Пускай кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ на поверхности реализуют данные касательные вектора: $e_i = [\alpha_i]$. Подействовав элементом g на все точки карты, зададим базис касательного пространства в точке $g \in M = G$ по правилу $g(e_i) := [g \cdot \alpha]$ □

Следствие 1. *Касательное расслоение TS^3 к группе кватернионов S^3 тривиально. В частности, его класс Эйлера равен нулю.*

Замечание. Как мы уже говорили, $\pi \cong B \times \mathbb{R}^n \Rightarrow e(B, E, \pi) = 0$. Обратное, к сожалению, верно далеко не всегда. Бывают такие нетривиальные расслоения, чей класс Эйлера равен нулю.

Пример 3. Рассмотрим касательное расслоение $\pi\colon TK \to K$ бутылки Клейна $K = K^2$. Нетрудно убедиться, что $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \ni e(K, TK, \pi) = 0$. Наивный читатель мог бы сказать: и правда, $e(\pi) = \chi(K) = 1 - 2 + 1 = 0$, – и был бы не прав (ведь наша поверхность – неориентируема!).
Поэтому давайте представим K^2 в качестве развёртки на плоскости (точнее, отождествим $K^2 = {}^{[0,1] \times [0,1]}/_{\sim}, (0,y) \sim (1,y), (x,0) \sim (1-x, 1), 0 \le x, y, \le 1)$ и придумаем гладкое векторное поле в $\mathbb{R}^2$, согласованное с данной склейкой. Положим для простоты $V(p) := (0,1) \, \forall p \in \mathbb{R}^2$ – вертикально направленное постоянное в.п. Итак, мы нашли всюду ненулевое непрерывное сечение $s\colon K \to TK$, и значит $e(\pi) = 0$.

При этом расслоение, конечно, нетривиально (ибо тривиальные расслоения – ориентируемы).

В качестве заключительного аккорда изучим одно из самых красивых и геометрически понятных S^1-расслоений.

Пример 4. *Расслоение Хопфа* $S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ (из нечётномерной сферы

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_n)\colon z_i \in \mathbb{C}, |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$$

в комплексное проективное пространство) устроено так: $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto [z_1 : \ldots : z_n]$. Далее для простоты и сохранения геометрической интуиции рассматривается частный случай $n = 1$.

Теорема 3. *Класс Эйлера расслоения Хопфа* $e = -1$.

Доказательство. Введём удобные обозначения, а также напомним об основных геометрических фактах, связанных с исследуемыми объектами. Пусть $p\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1, p(z_1, z_2) := [z_1 : z_2]$.

$$S^3 \subseteq \mathbb{R}^4, S^3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\colon\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} =$$
$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$
$$\mathbb{CP}^1 = {}^{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}/_{\sim}, \text{где } \mathbb{C}^2 \ni a \sim b \in \mathbb{C}^2, \text{если } \exists t : b = ta, pr\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{CP}^1, pr(z_1, z_2) := [z_1 : z_2],$$
$$\mathbb{CP}^1 \cong \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \text{ – одноточечная компактификация комплексной плоскости;}$$
$$\varphi\colon \mathbb{CP}^1 \to \hat{\mathbb{C}}, \varphi([z_1 : z_2]) := \begin{cases} {}^{z_1}/_{z_2}, & z_2 \neq 0 \\ \infty, & z_2 = 0 \end{cases}$$
$$\hat{\mathbb{C}} \cong S^2, \chi_N\colon S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, N \mapsto \infty \text{ – стереографическая проекция.}$$

Поймём для начала, что $e(p) \neq 0$. Предположим противное: пусть существует глобальное непрерывное сечение $s\colon \mathbb{CP}^n \to S^{2n+1}$. В терминах отображений: $p \circ s = id_{\mathbb{CP}^n}$. Применив к соответствующей диаграмме функтор взятия когомологий, получим:

$$\mathbb{Z} \cong H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{p^*} H^{2n}(S^{2n+1}, \mathbb{Z}) = 0 \xrightarrow{s^*} H^{2n}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z},$$

где $s^* \circ p^* = id_{\mathbb{Z}}$. Противоречие (?!).
Займёмся построением *локальных* непрерывных сечений $s_1, s_2\colon \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to S^1$. Воспользовавшись оговорёнными выше отождествлениями, положим:

$$s_1\colon S^2 \setminus \{\infty\} \cong \mathbb{C} \to S^3, s_1(z) := \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}(z, 1) \tag{1}$$

$$s_2\colon S^2 \setminus \{0\} \cong \mathbb{C} \to S^3, s_2(z) := s_1(1/z) := \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}(\frac{|z|}{z}, |z|) \tag{2}$$

Отображения s_1, s_2 непрерывны всюду, кроме своих единственных полюсов в бесконечности и нуле, действуют в единичную трёхмерную сферу и в композиции с проекцией дают тождественное отображение (т.е. бьют в слои). Таким образом, это действительно локальные сечения.
Осталось лишь посчитать индекс одного из них (например, s_2) в его разрывной точке (т.е. в $z_0 = 0$). В качестве контура γ, огибающего полюс $z_0 = 0$, естественно взять

$\gamma = \mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ (единичную окружность в комплексной плоскости). Тогда, в сужении на контур:

$$s_2(z)|_\gamma = \frac{1}{1+1}(\frac{1}{z}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{z}, 1)$$

В свою очередь, $deg_0(\frac{1}{z}) = -1$, а значит $e(p) = -1$. $\square$

Список литературы

[1] Nikolai Mnev, *On local combinatorial formulas for Chern classes of triangulated circle bundle*, J Math Sci **224**, 304-327 (2017)

[2] Nikolai Mnev, *Which Circle Bundles Can Be Triangulated Over* $\partial\Delta^3$, J Math Sci **240**, 551-555 (2019)

[3] Nikolai Mnev, *Minimal Triangulations of Circle Bundles, Circular Permutations, and the Binary Chern Cocycle*, J Math Sci **247**, 696-710 (2020)