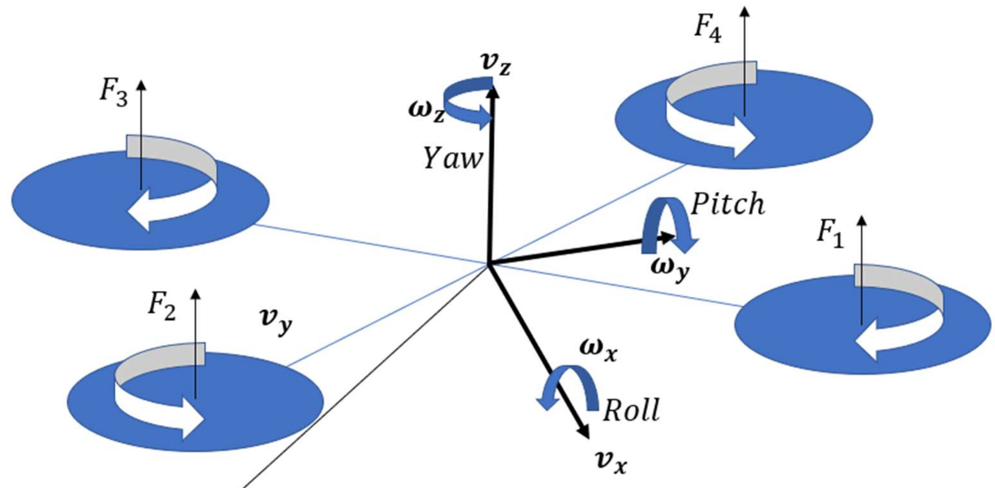
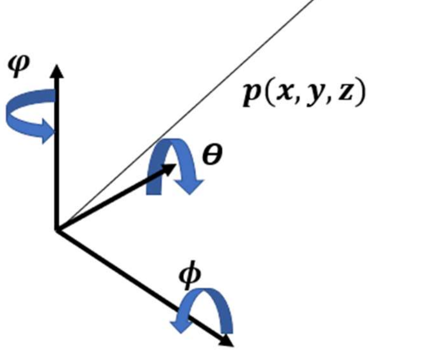
쿼드콥터 동역학 모델링

김명균 작성

참조 - Lim, Jeonggeun. "Autonomous target following and monitoring with collision avoidance based on an Lidar on a multi-copter"





	F_1	F_2	F_3	F_4
$Right$	↑↑	↑	↑	↑↑
$Forward$	↑	↑	↑↑	↑↑
$Clockwise$	↑	↑↑	↑	↑↑

Operation & Control Input

$$\boldsymbol{Throttle\ F_T = F_1 + F_2 + F_3 + F_4}$$

$$\boldsymbol{Roll\ \tau_\phi = \frac{L}{\sqrt{2}}(F_1 - F_2 - F_3 + F_4)}$$

$$\boldsymbol{Pitch\ \tau_\theta = \frac{L}{\sqrt{2}}(-F_1 - F_2 + F_3 + F_4)}$$

$$\boldsymbol{Yaw\ \tau_\psi = \tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4}$$

$$\boldsymbol{F_i = b_p\Omega_i^2, \tau_i = d_p\Omega_i^2, b_p = thrust\ factor, d_p = drag\ factor}$$

관성좌표계

-쿼드콥터의 위치: $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad \boldsymbol{z}]^{\boldsymbol{T}}$

-쿼드콥터의 오일러 각: $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\phi} \quad \boldsymbol{\theta} \quad \boldsymbol{\varphi}]^{\boldsymbol{T}}$

바디좌표계

-쿼드콥터의 선속도: $\boldsymbol{v} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$

-쿼드콥터의 각속도: $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$

$\boldsymbol{L}$ 은 쿼드콥터의 중력 중심으로부터 rotor까지의 거리

X-type의 쿼드콥터 이므로 롤 피치 축을 따라 rotor까지의 거리는 $\frac{L}{\sqrt{2}}$

$\boldsymbol{F}$ 와 $\boldsymbol{\tau}$ 기체의 제어를 위한 힘과 모멘트이고 $\boldsymbol{T}$는 쿼드콥터 4개 로터의 Thrust와 기체의 제어입력과의 관계를 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} F_T \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{L}{\sqrt{2}} & -\frac{L}{\sqrt{2}} & -\frac{L}{\sqrt{2}} & +\frac{L}{\sqrt{2}} \\ -\frac{L}{\sqrt{2}} & -\frac{L}{\sqrt{2}} & \frac{L}{\sqrt{2}} & \frac{L}{\sqrt{2}} \\ A & -A & A & -A \end{bmatrix}, for\ convenience\ A = \frac{d_p \Omega^2}{F}$$

1. **Kinematics**

관성 좌표계와 기체 좌표계의 관계

바디 좌표계에 대한 쿼드콥터의 선속도는 관성 좌표계에 대해서 다음처럼 표현할 수 있다.

$$\dot{p} = Rv$$

이를 미분하면

$$\ddot{p} = \dot{R}v + R\dot{v}$$

관성 좌표계에 대한 쿼드콥터의 오일러 각은 바디 좌표계에 대해서 다음처럼 표현할 수 있다.

$$\omega = C\dot{\eta}$$

이를 미분하면

$$\dot{\omega} = \dot{C}\dot{\eta} + C\ddot{\eta}$$

Rotation matrix의 회전 변환 순서는 Z-Y-X 변환을 따르고 관성 좌표계에 대해 기체 좌표계를 회전 변환하는 행렬이다.

$$R = R_Z(\psi)R_Y(\theta)R_X(\phi)$$

관성 좌표계에서 오일러 각의 각속도는 바디 좌표계에 대한 관계식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R_Z(\varphi)R_Y(\theta)R_X(\phi)\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + R_Z(\varphi)\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R_Z(\varphi)R_Y(\theta)\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega_x}\\ \boldsymbol{\omega_y}\\ \boldsymbol{\omega_z}\end{bmatrix} = \boldsymbol{R_X^T(\phi)R_Y^T(\theta)}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}\end{bmatrix} + \boldsymbol{R_X^T(\phi)}\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\phi}}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega_x}\\ \boldsymbol{\omega_y}\\ \boldsymbol{\omega_z}\end{bmatrix} = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{\phi}}\\ \dot{\boldsymbol{\theta}}\\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}\end{bmatrix}$$

이때, 바디 좌표계의 경우 회전에 의해 계속 변화하고 있으므로 오일러 각 변화량의 적분을 통해 오일러 각을 구해야 하고, **C**는 바디 좌표계의 각속도 벡터와 관성좌표계의 오일러 각 둘 사이의 관계를 나타내는 행렬이다.

2. Dynamics

기체의 병진운동은 뉴턴법칙을 적용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$m\left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}\right) = -\boldsymbol{F} + m\boldsymbol{R^T g}$$

$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$는 바디 프레임과 중력중심이 일치하지 않을 때 Coriolis effects를 발생시키는 구심력 일치 한다면 low angular velocity, low linear velocity에서는 무시할 수 있고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\dot{v}_x\\ \dot{v}_y\\ \dot{v}_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_z v_y - \omega_y v_z\\ \omega_x v_z - \omega_z v_x\\ \omega_y v_x - \omega_x v_y\end{bmatrix} + \frac{1}{m}\begin{bmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}gsin\theta\\ -gcos\theta sin\phi\\ -gcos\theta cos\phi\end{bmatrix}, F_x = F_y = 0, F_z = F_T$$

기체의 회전운동은 뉴턴법칙을 적용하여 다음과 같이 표현할 수 있는데

$$\boldsymbol{I}\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{I\omega} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{M_G}$$

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix}I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{bmatrix}, \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\tau_\phi\\ \tau_\theta\\ \tau_\psi\end{bmatrix}, \boldsymbol{M_G} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J_r \Omega_r}, \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}, \boldsymbol{\Omega_r} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \boldsymbol{\Omega_1 - \Omega_2 + \Omega_3 - \Omega_4}\end{bmatrix}$$

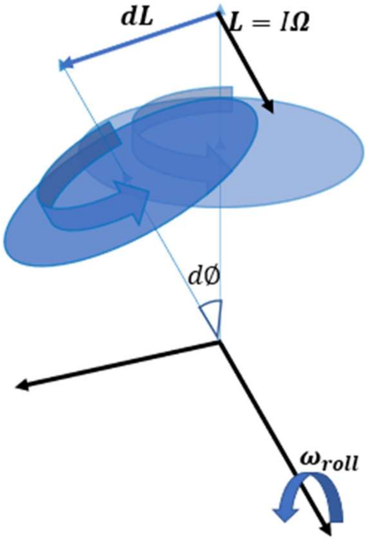
여기서 $\boldsymbol{M_G}$ 는 Gyroscopic effect, $\boldsymbol{J_r}$ 는 Inertia of rotor $\boldsymbol{\Omega_r}$ 는 angular velocity of rotor이고 앞선 회전운동에 대한 수식을 Coriolis effects에 의해 다시 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

이 방정식은 다음과 같이 전개되고 바디 좌표계에서 정리된다.

$$\begin{bmatrix}I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\omega}_x\\ \dot{\omega}_y\\ \dot{\omega}_z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}I_{xx} & 0 & 0\\ 0 & I_{yy} & 0\\ 0 & 0 & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tau_\phi\\ \tau_\theta\\ \tau_\psi\end{bmatrix} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{J_r \Omega_r}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{x}} = \left(\frac{\boldsymbol{I_{yy} - I_{zz}}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\right)\boldsymbol{\omega_y \omega_z} - \frac{\boldsymbol{J_r}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\boldsymbol{\omega_y \Omega_r} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\boldsymbol{\tau_\phi}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{y}} = \left(\frac{\boldsymbol{I_{yy} - I_{zz}}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\right)\boldsymbol{\omega_z \omega_x} + \frac{\boldsymbol{J_r}}{\boldsymbol{I_{yy}}}\boldsymbol{\omega_x \Omega_r} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{yy}}}\boldsymbol{\tau_\theta}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{z}} = \left(\frac{\boldsymbol{I_{yy} - I_{zz}}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\right)\boldsymbol{\omega_x \omega_y} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{zz}}}\boldsymbol{\tau_\psi}$$

Gyroscopic effect



$$\frac{dL}{L} \approx d\emptyset \;\rightarrow \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \omega_{roll}$$

$$\frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \omega_{roll}$$

$$M_G = J\Omega \times \omega_{roll}$$

$$M = \tau_{roll}$$

$$I\frac{d\dot{\eta}}{dt} = M + M_G$$

M is roll axis torque
M_G is Gyroscopic effect

$$I\frac{d\dot{\eta}}{dt} = M + M_G = I\left(\frac{d\omega_{roll}}{dt} + \Omega \times \omega_{roll}\right)$$