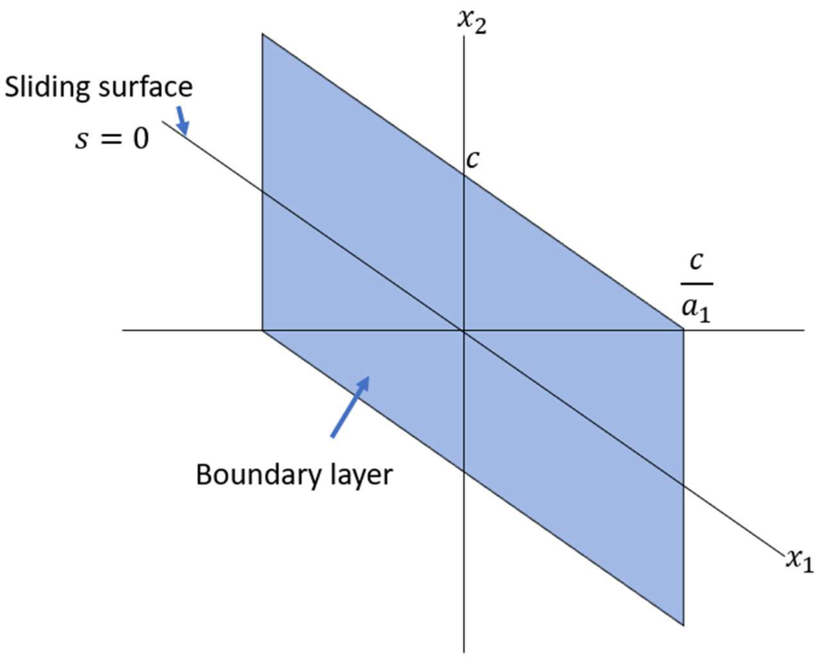
슬라이딩 모드 제어(Sliding Mode Control)

앞서 쿼드로터에 대한 움직임에 대해 정의하였는데, XY – axis 움직임의 경우 롤, 피치 움직임을 통해 유도할 수 있었다. 또한 쿼드로터가 안정적으로 자세를 유지하며 비행하기위해 PID 자세 제어기를 구성하였었다. 하지만 쿼드로터는 외란에 민감한 시스템이고 PID제어 역시 외란 요소를 고려하지 않기 때문에 불안정해질 수 있다. 이에 Robust 제어 기법중 하나인 슬라이딩 모드 제어기를 설계하고 성능을 확인하고자 한다.



슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 평면(sliding surface or manifold)을 정의하고 시스템이 어떤 불확실성에 의해 정의한 슬라이딩 평면 위에서 벗어나지 않도록 움직임을 제어하기 때문에 불확실성 - Uncertainty (선형화, 외란)이 어느정도 존재해도 제어 성능과 안정성을 보장해주는 방법이다.

불확실성의 종류로 Matched and Unmatched Uncertainty 두가지가 있는데, 시스템 제어입력을 통해서 상태변수의 Uncertainty를 다룰 수 있다면 Matched 아니라면 Unmatched이다.

또한 전통적인 슬라이딩 모드제어 기법은 불확실성 Matched일 때 좋은 성능을 보인다.

쿼드로터의 롤 움직임을 제어하기 위해 시스템의 상태는 다음과 같이 가정한다.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, x_1 = \emptyset,\ \mathrm{x}_2 = \dot{\emptyset}$$

이는 시스템의 불확실성을 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{x}_2 = h(x) + g(x)u$$

$$h(x),\ g(x) : unknown\ nonlinear\ function$$

시스템의 움직임을 슬라이딩 평면에 제한하는 제어 법칙을 설계하기 위해 시스템의 상태 변수로 구성된 슬라이딩 평면은 s=0에서 정의(origin에서 안정하기 위해)되고 해당 평면에서 유한시간내에 수렴함을 알 수 있다.

$$s = a_1x_1 + x_2 = a_1x_1 + \dot{x}_1 \rightarrow\ e^{-at} = x(t)$$

s의 변화율은 다음과 같이 표현할 수 있고 불확실성 즉 시스템을 몰라도 위와 같이 비선형의 크기를 알고 있다면 그보다 더 큰 제어입력으로 상쇄시켜줄 수 있음을 확인할 수 있다.

$$\dot{s} = a_1x_2 + h(x) + g(x)u$$

$$abs\left(\frac{a_1x_2 + h(x)}{g(x)}\right) \le \rho(x)$$

$$\rho(x){:}\ upper\ bound\ (some\ known\ function)$$

또한 정의한 s는 Lyapunov function을 이용해 안정도 분석이 가능하다.

$$Take\ V = \frac{1}{2}s^2 \rightarrow\ \dot{V} = s\dot{s} \rightarrow s\big(a_1\dot{x}_1 + h(x)\big) + g(x)su \le g(x)|s|\rho(x) + g(x)su$$

$$u = -\beta\,\mathrm{sgn}(s)\,, \qquad \beta \ge \rho(x) + \beta_0$$

$$if\ V(x) > 0\ \ and\ \ \dot{V} < 0, asymptotically\ stable\ at\ origin$$

앞서 유도된 쿼드로터의 선형시스템을 사용하고 P제어기로 구성된 Position Controller로부터 필요한 자세 목표각을 도출하여 안정적으로 Tracking하기 위해 슬라이딩 모드 제어기를 구성한다.

쿼드로터의 롤 피치 요에 대한 방정식은 외란 요소를 고려하고 이때 각각의 입력은 다음과 같이 정의된다.

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{C}\begin{bmatrix} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{xx}}}\boldsymbol{\tau_\phi} + \boldsymbol{d_\phi} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{yy}}}\boldsymbol{\tau_\theta} + \boldsymbol{d_\theta} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{I_{zz}}}\boldsymbol{\tau_\varphi} + \boldsymbol{d_\varphi} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau_\phi} \\ \boldsymbol{\tau_\theta} \\ \boldsymbol{\tau_\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}\begin{bmatrix} \boldsymbol{u_\phi} \\ \boldsymbol{u_\theta} \\ \boldsymbol{u_\psi} \end{bmatrix}, \qquad d{:}\ disturbance$$

각 입력은 서로 독립적이므로 각각 제어기 설계도 가능하다. 여기서는 Roll에 대한 부분만 표현하고 목표각을 tracking하기 위해 상태 변수는 다음과 같이 표현한다.

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset - \emptyset_d \\ \dot{\emptyset} - 0 \end{pmatrix},\ \ \dot{e} = \begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\emptyset} - 0 \\ \ddot{\emptyset} \end{pmatrix}$$

이에대한 슬라이딩 평면은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$s = ae_1 + e_2$$

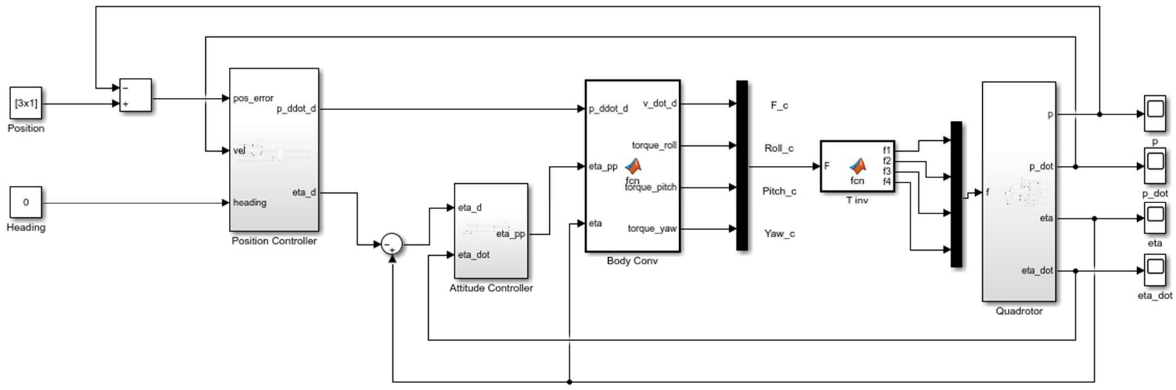
여기서 a는 앞에서 Exp 함수의 변수로 Convergence rate(수렴율)이다.

$$\dot{s} = a\dot{e}_1 + \dot{e}_2 = ae_2 + u_{\eta} + d_{\eta}$$

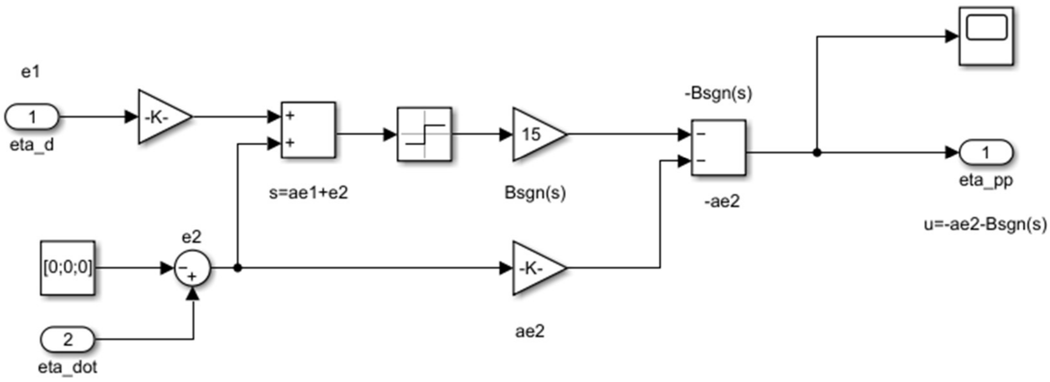
$s = 0 \rightarrow \dot{s} = 0$이므로 제어입력에 외란 요소를 상쇄시켜주기 위한 switching term을 추가하여 $u_{\eta} = -ae_2 - \beta\, sgn(s)$와 같이 나타낼 수 있고 제어기는 s=0이 아닐 때에만 사용되므로 다음과 같이 정의된다.

$$sgn(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < -1 \end{cases}$$

전체 구성도



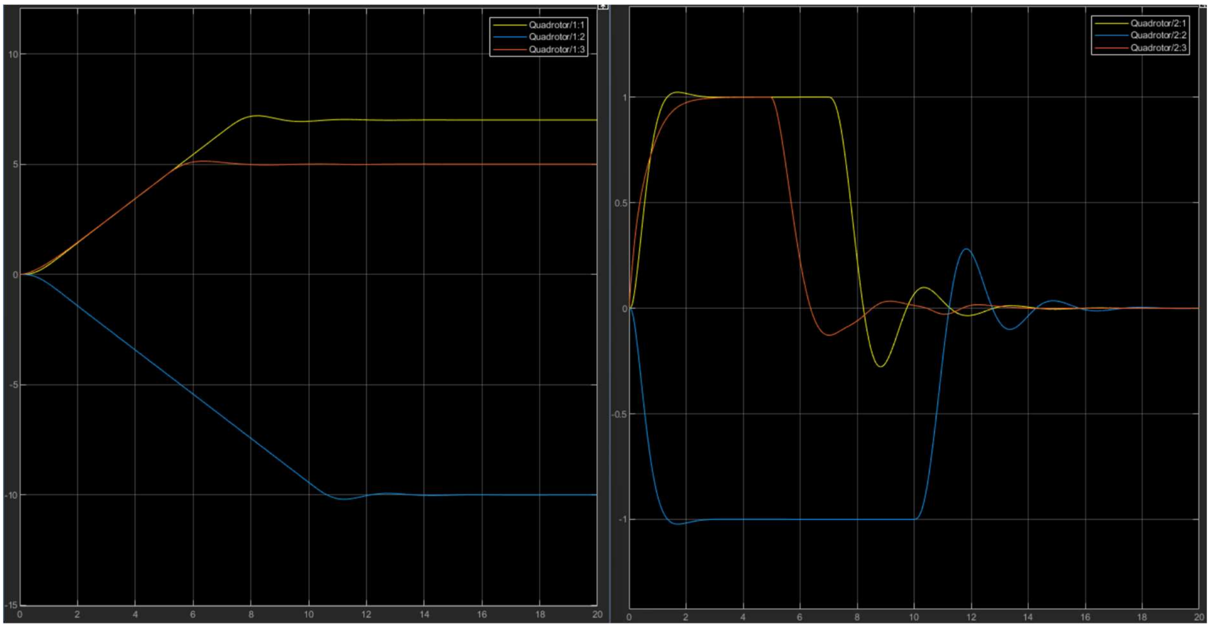
슬라이딩 모드 제어기 구성



Simulation

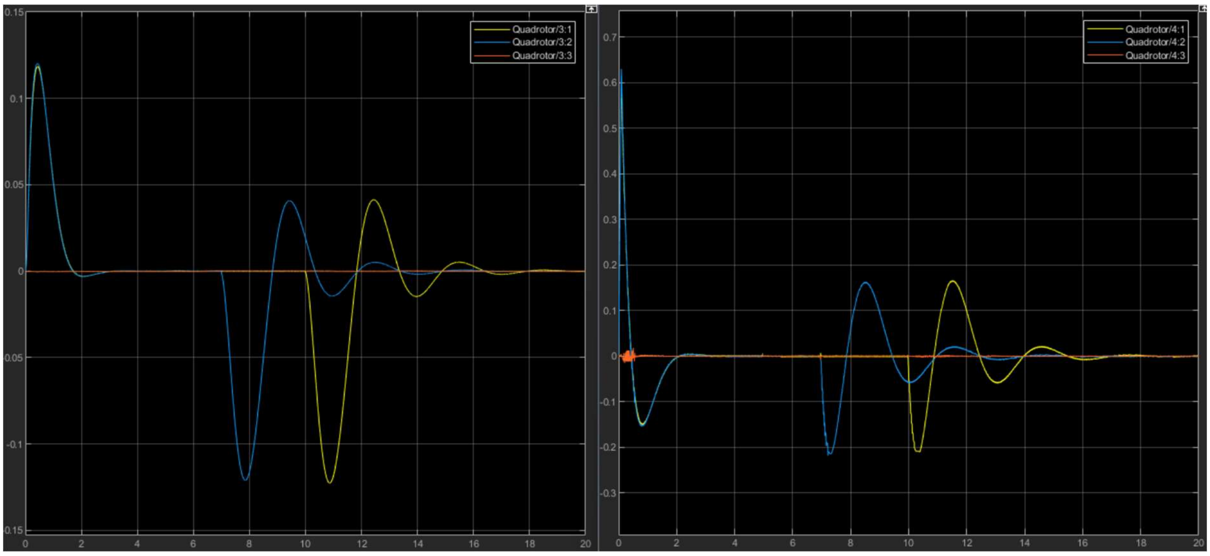
제어입력: Position(7, -10, 5), Heading(0 rad)

왼쪽 위치, 오른쪽 속도



노란선 X, 파란선 Y, 주황선 Z

왼쪽 각도, 오른쪽 각속도

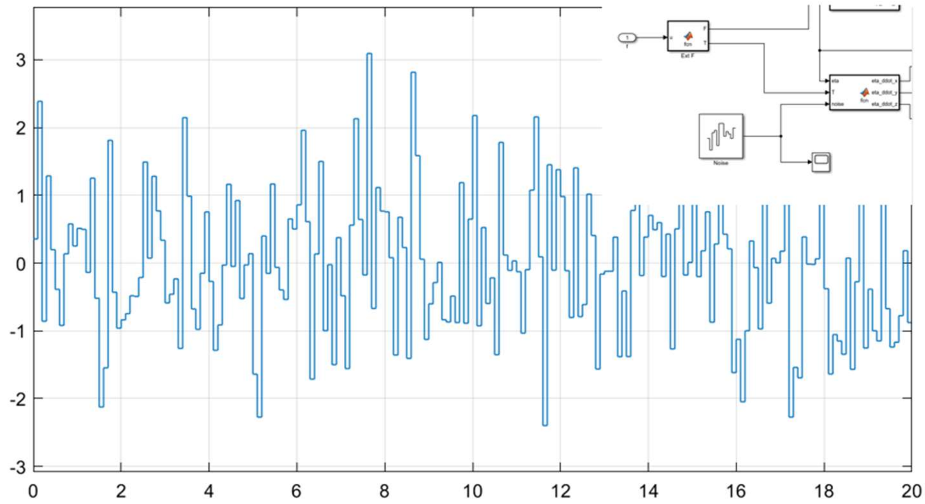


노란선 Roll, 파란선 Pitch, 주황선 Yaw

롤 피치 요에 Disturbance를 가해준 상황 가정

PID제어기와 SMC 비교

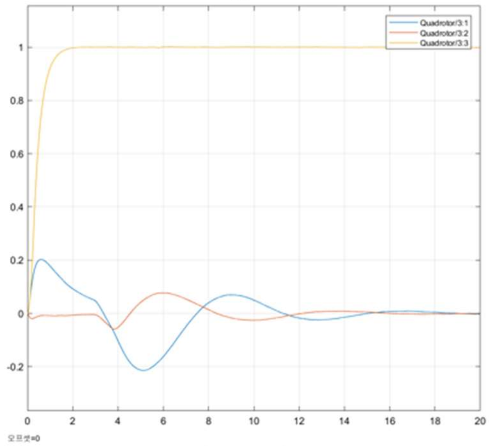
Disturbance



파란선: 롤 주황선: 피치, 노란선: 요

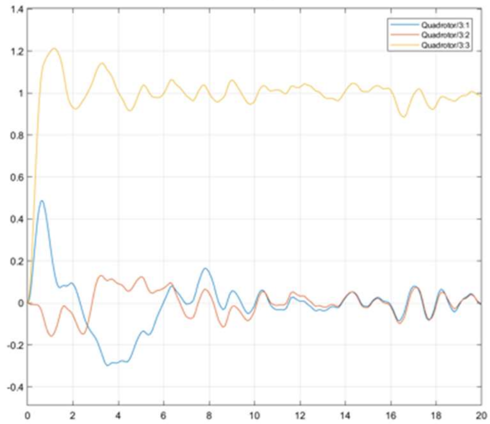
Sliding mode Controller

Angle

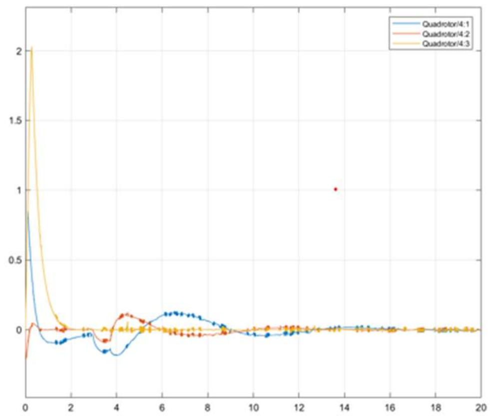


PID Controller

Angle



Angular velocity



Angular velocity