

Traitement Numérique du Signal Déterministe

(2008-2009) - FIP 2A

CHRISTOPHE DOIGNON

Maître de Conférences HdR

Université Louis Pasteur de Strasbourg
Bureau C418 - ENSPS, Pôle API
Boulevard Brant, 67412 Illkirch, France

☎ 03 90 24 43 41

courriel : christophe.doignon@ensps.u-strasbg.fr



Table des matières

Bibliographie	5
1 Rappels de Première Année	7
1.1 Introduction	8
1.2 Représentation des Signaux Déterministes	11
1.2.1 Fonction signe	11
1.2.2 Fonction échelon (unité)	11
1.2.3 Fonction rectangle	12
1.2.4 Fonction triangle	12
1.2.5 Fonction sinus cardinal	13
1.2.6 Impulsion unité (distribution de Dirac)	13
1.2.7 Fonction "peigne de Dirac" (fonction d'échantillonnage)	14
1.3 Energie et Puissance	15
1.3.1 Energie d'un signal	15
1.3.2 Puissance moyenne d'un signal	15
1.4 Classification des signaux	15
1.4.1 Signaux à énergie finie	15
1.4.2 Signaux à puissance moyenne finie	16
1.4.3 Causalité	16
1.4.4 Parité	16
1.5 Produit de convolution	17
1.6 Transformations fréquentielles	18
1.6.1 Transformée de Fourier	18
1.6.2 Théorème de Plancherel	20
1.6.3 Transformée de Laplace	20
1.7 Série de Fourier	21
1.8 Corrélation et densités spectrales	23
1.8.1 Signaux à énergie finie	23
1.8.2 Signaux à puissance moyenne finie	23
1.8.3 Densités spectrales	24
1.8.4 Théorème de Parseval	24
1.9 Filtrage analogique	25
1.9.1 Introduction	25
1.9.2 Filtres stables physiquement réalisables	26
1.9.3 Fréquence de coupure et bande passante	26
1.9.4 Transformations de fréquences	27
1.9.5 Synthèse des filtres analogiques	27
1.10 Exercices	43

2	Echantillonnage/Quantification	47
2.1	Introduction	48
2.2	Echantillonnage	48
2.2.1	Principe	48
2.3	Transformées d'un signal échantillonné	52
2.3.1	Transformée de Laplace	52
2.3.2	Transformée en z	52
2.3.3	Transformée en z inverse	54
2.3.4	Equations aux différences	55
2.3.5	Transformée de Fourier discrète (TFD)	55
2.3.6	Convolution discrète	56
2.4	Energie et puissance d'un signal numérique	58
2.5	Quantification	58
2.5.1	Principe et caractéristiques de la conversion	58
2.5.2	Structures d'un CNA	62
2.5.3	Structures d'un CAN	64
2.6	Corrélation numérique	66
2.7	Exercices	68
3	Filtrage numérique	71
3.1	Introduction	72
3.2	Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)	78
3.2.1	Synthèse par la méthode des fenêtres	80
3.2.2	Méthode de l'échantillonnage fréquentiel	85
3.3	Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)	86
3.3.1	Méthode de l'Invariance Impulsionnelle	86
3.3.2	Synthèse par la Transformation bilinéaire	87
3.4	Exercices	89

Bibliographie

- [1] B. Picinbono, *Théorie des signaux et des systèmes*, 1989, 260 pages, Dunod Université. ISBN 2-04-018837-1.
- [2] F. de Coulon, *Théorie et traitement des signaux*, Dunod, Paris, 1985.
- [3] J. Max et J.-L. Lacoume, *Méthodes et techniques de traitement du signal et application aux mesures physiques*, Masson, Paris, 1996.
- [4] J.-P. Delmas, *Eléments de théorie du signal : les signaux déterministes*, Ellipses, Paris, 1991.
- [5] M. Labarrère, J.-P. Krief et B. Gimonet, *Le filtrage analogique*, Cépaduès éditions, Toulouse, 1982.
- [6] P. Duvaut, *Traitement du signal : concepts et applications*, Hermès, Paris, 1991.
- [7] J. Wade, *Codage et traitement du signal*, Masson, Paris, 1991.
- [8] S. Wilson, *Digital modulation and coding*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [9] M. Kunt, *Traitement numériques des signaux*, Dunod, Paris, 1991.
- [10] M. Bellanger, *Traitement numériques des signaux*, Masson, Paris, 1991.
- [11] R. Boite et H. Leich, *Les filtres numériques*, Masson, Paris, 1990.
- [12] T. Parks et C. Burros, *Digital filter Design*, John Wiley & Sons, 1987.
- [13] K. Castleman, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1996.
- [14] A. Bovik, *Handbook of Image and Video Processing*, Academic Press, 2000.

Chapitre 1

Rappels de Première Année



Joseph Fourier (21 mars 1768 à Auxerre - 16 mai 1830 à Paris) est un mathématicien et physicien français connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier. Il a été instruit par les Bénédictins à l'Ecole militaire d'Auxerre. Il était destiné à l'état monastique, mais il préféra s'adonner aux sciences. Il a participé à la Révolution, manquant de peu de se faire guillotiner durant la Terreur, il a été sauvé de justesse par la chute de Robespierre. Il intègre l'Ecole Normale Supérieure, où il aura comme professeur entre autres Joseph-Louis Lagrange. Fourier est connu pour sa théorie analytique de la chaleur (1822). C'est à Grenoble qu'il conduit ses expériences sur la propagation de la chaleur qui lui permettront de modéliser l'évolution de la température au travers de séries trigonométriques. Ces travaux qui apportent une grande amélioration à la modélisation mathématique de phénomènes ont contribué aux fondements de la thermodynamique.

1.1 Introduction

Le Traitement du Signal (TdS) est une discipline indispensable que tout ingénieur doit connaître. L'amélioration des performances des systèmes au cours des trente dernières années est due, pour une grande part, à l'application des techniques de traitement du signal. C'est le cas notamment en imagerie médicale, en téléphonie et télécommunication. Un système d'imagerie échographique par ultra-sons, l'IRM ou encore les RADAR actuels sont des inventions dont les performances (en termes de précision et de rapidité) sont sans commune mesure avec les premiers prototypes apparus. Les structures matérielles sont sensiblement les mêmes, mais les techniques de traitement de signal faisant appel à des traitements numériques sophistiqués ont été intégrées pour permettre d'extraire de l'écho sonore ou de l'image reconstituée une quantité plus grande d'informations. Les implications en ce qui concerne un diagnostic médical, la surveillance d'une zone aérienne ou sous-marine ou encore la localisation de pannes sont immédiates. L'objectif du traitement du signal apparaît alors comme un outil mathématique employé pour extraire un maximum d'informations utiles sur un signal perturbé par du bruit. Les signaux utiles sont souvent perturbés par des signaux parasites (le bruit) qui les masquent parfois complètement. Pour atténuer, sinon supprimer ce bruit il faut en connaître les caractéristiques ainsi que celles du signal utile. C'est pourquoi le traitement du signal est une discipline très mathématique. Les techniques utilisées peuvent être appliquées à un signal analogique (continu) mais compte tenu de leur complexité, un traitement numérique s'impose presque toujours. Il est rendu possible grâce à la puissance des circuits de calculs et des ordinateurs modernes.

En ce qui concerne ce cours, nous allons tout d'abord fournir quelques rappels par le biais d'exercices se rapportant aux notions vues en première année. La plupart des notions sont fournies dans ce document, mais toutes ne pourront pas être traitées de nouveau. Il s'agit essentiellement de revoir brièvement la représentation des signaux déterministes, les théorèmes fondamentaux en traitement du signal et du filtrage analogique linéaire. **Le chapitre I est donc plus un document de rappel qu'un support de cours en présence des étudiants.** Nous aborderons alors le traitement numérique du signal, en commençant par les processus d'acquisition (Chapitre 2) puis en présentant les outils employés dans ce cas pour terminer sur l'étude du comportement des signaux numériques et du filtrage numérique de ces signaux (Chapitre 3).

Signal : Support de l'information transmise de sa source à sa destination. En fonction de la nature du support, on parle par exemple de :

- signal électrique (téléphonie),
- onde électromagnétique (télécommunication),
- onde acoustique (sonar),
- onde lumineuse (fibre optique),
- signal binaire (ordinateur).

On parle également de signal de mesure, de commande, de signaux vidéo, audio,

etc...en fonction de la nature de l'information transmise.

Théorie du signal : C'est la description mathématique des signaux quelque soit leur nature et quelque soit le support physique. L'objectif est d'établir une représentation d'un signal en fonction du temps ou de l'espace contenant une information à stocker, à transformer, à transmettre ou à recevoir. La théorie du signal ne préjuge pas de la nature physique du signal.

Bruit : Toute perturbation superposée à un signal et gênant la perception de ce signal.

Traitement du signal : A l'aide d'une formulation mathématique adéquate, le traitement du signal à pour principales fonctions de (voir Fig. 1.1) :

- **Filtrer** : éliminer d'un signal des composantes indésirables,
- **Détecter** : Extraire une composante utile d'un signal et/ou du bruit de fond qui lui est superposé,
- **Analyser** : Isoler les composantes et les caractéristiques essentielles d'un signal pour mieux en comprendre la nature,
- **Mesurer** : Estimer la valeur d'une grandeur caractéristique associée au signal.
- **Régénérer** Redonner à un signal qui a été distordu sa forme initiale.
- **Identifier** : Classer un signal observé.
- **Synthétiser** : Créer un signal de forme appropriée.
- **Moduler** : Modifier les caractéristiques d'un signal pour l'adapter à une voie de transmission ou un support d'enregistrement.
- **Codage** : Traduire le signal en langage numérique, réduire les redondances d'informations et lutter contre l'influence du bruit.

Domaine d'application

- Télécommunications,
- Téléphonie,
- Radar,
- Sonar,
- Traitement d'images,
- Astronomie,
- Géophysique,
- Automatique,
-

Dans les télécommunications : que ce soit dans le domaine de la téléphonie ou dans le transfert de données numériques terrestre ou via satellite, la compression des données est primordiale pour exploiter au mieux la bande passante disponible, et minimiser les pertes. La suppression d'échos est un autre domaine d'application.

En audio : on cherche à améliorer les techniques d'enregistrement et de compression pour obtenir la plus grande qualité sonore possible. Les techniques de correction d'écho permettent de réduire les effets de réflexions acoustiques dans la pièce. Le traitement du son s'est largement amélioré grâce aux ordinateurs. La synthèse sonore permet en outre de créer des sons artificiels ou de recréer les sons d'instruments naturels. Elle a été à l'origine de nombreux bouleversements en musique.

L'analyse des échos permet d'obtenir des informations sur le milieu sur lequel les ondes se sont réfléchies. Cette technique est exploitée dans le domaine de l'imagerie radar ou sonar. En géophysique, en analysant les réflexions d'ondes acoustiques, on peut déterminer l'épaisseur et la nature des strates du sous-sol. Cette technique est utilisée dans le domaine de la prospection minière et dans la prédiction des tremblements de terre.

En imagerie : on trouve des applications dans le domaine médical (reconstruction tomographique, imagerie par résonance magnétique - IRM), dans le spatial (traitement de photos satellites ou d'images radar). Ce domaine inclut aussi les techniques de reconnaissance de formes et de compressions.

Le traitement de séquences vidéo concerne la compression, la restauration, la réalisation d'effets spéciaux, l'extraction de descripteurs (reconnaissance de formes et textures, suivi de mouvements, caractérisation etc.) afin de produire des annotations automatiques dans une perspective de bases de données (recherche par le contenu).

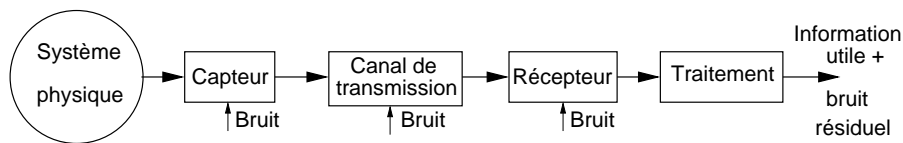


FIGURE 1.1 – Synoptique d'une chaîne classique de traitements d'un signal.

1.2 Représentation des Signaux Déterministes

Les signaux déterministes renferment une information dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique (au contraire des signaux aléatoires/stochastiques).

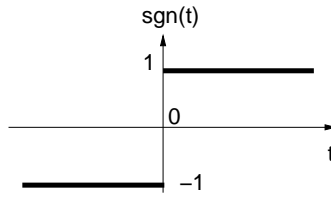
Nous présentons dans cette section quelques fonctions mathématiques ainsi que leurs propriétés, supports de signaux élémentaires et utilisées tout au long du cours de traitement du signal.

1.2.1 Fonction signe

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ a & \text{si } t = 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

avec a quelconque (par convention $a = 0$). On a alors :

$$\text{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad \forall t \neq 0. \quad (1.2)$$

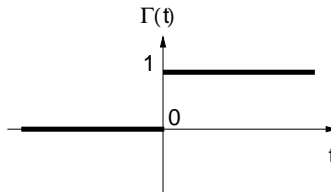


1.2.2 Fonction échelon (unité)

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \\ a & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

avec a quelconque (par convention $a = 1/2$). On a alors :

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{sgn}(t) \quad \forall t. \quad (1.4)$$

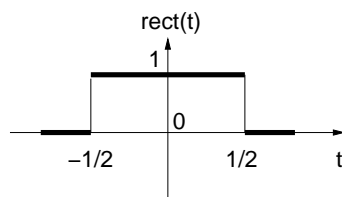


1.2.3 Fonction rectangle

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| > 1/2 \\ 1 & \text{si } |t| < 1/2 \\ a & \text{si } |t| = 1/2 \end{cases} \quad (1.5)$$

avec a quelconque (par convention $a = 1/2$). On a alors :

$$\text{rect}(t) = \Gamma(t + 1/2) - \Gamma(t - 1/2) \quad (1.6)$$



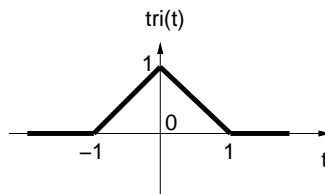
Propriété : la fonction $\text{rect}(t)$ est normalisée, car la surface (sous la courbe) est unitaire.

Question 1 : Tracer la fonction (porte) $A \text{rect}(\frac{t-\tau}{T})$.

Question 2 : Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}(t) dt$.

1.2.4 Fonction triangle

$$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \quad (1.7)$$



La fonction triangle est elle aussi normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tri}(t) dt = 1$.

1.2.5 Fonction sinus cardinal

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (1.8)$$

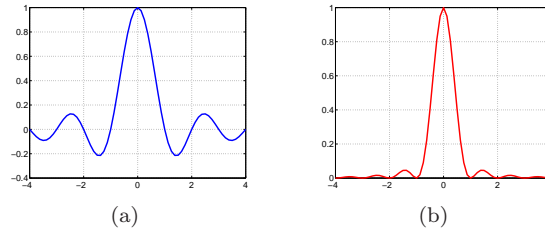


FIGURE 1.2 – (a) fonction $\text{sinc}(t)$. (b) fonction $\text{sinc}(t)^2$.

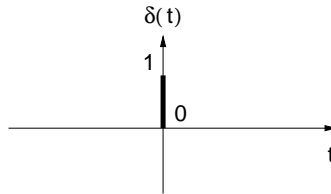
La fonction sinus cardinal est elle aussi normalisée : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(t) dt = 1$.
D'autre part, on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = 1$.

1.2.6 Impulsion unité (distribution de Dirac)

Mathématiquement, c'est une fonction (distribution) définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) , \quad (1.9)$$

quelle que soit la fonction $f(t)$.



Remarque : sur la figure ci-dessus, 1 correspond à l'aire sous la courbe, pas à la hauteur qui est ∞ . La fonction de Dirac est normalisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 . \quad (1.10)$$

D'autre part, on a :

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases} = \Gamma(t) \quad (1.11)$$

On dit que $\Gamma(t)$ est la primitive de $\delta(t)$ ou bien que $\delta(t)$ est la dérivée de $\Gamma(t)$ (au sens des distributions). L'impulsion de Dirac est un signal non réalisable. Physiquement, on a coutume de modéliser une impulsion de Dirac par un signal rectangle (porte) dont la largeur tend vers 0 et l'amplitude tend vers l'infini.

L'impulsion de Dirac est égale à la limite de nombreuses familles de fonctions, ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \delta(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Propriétés de la fonction de Dirac

1. $\delta(t) = 0$ si $t \neq 0$,
2. $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$ et $f(t) \delta(t - T) = f(T) \delta(t - T)$,
3. $\delta(k t) = \frac{1}{|k|} \delta(t)$.

Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est simplement définie comme étant la réponse d'un système physique dont l'entrée est une impulsion de Dirac. Elle permet de caractériser les systèmes linéaires dans le domaine temporel.

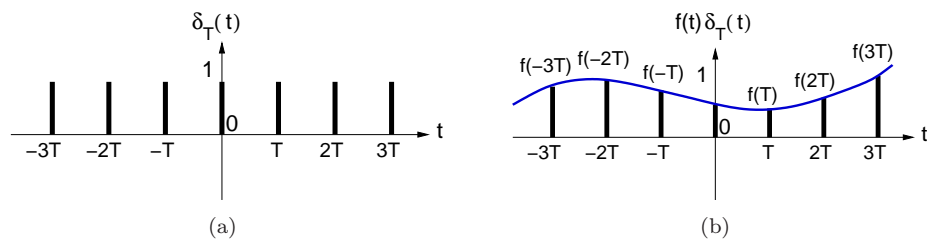
1.2.7 Fonction "peigne de Dirac" (fonction d'échantillonnage)

La fonction $\delta_T(t)$ est définie par :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT). \quad (1.13)$$

Cette fonction est appelée "fonction d'échantillonnage" car selon la propriété 2 (voir ci-dessus) on a, pour tout signal $f(t)$:

$$f(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} f(kT) \delta(t - kT). \quad (1.14)$$



Cela revient à ne retenir que les valeurs de la fonction continue $f(t)$ aux instants d'échantillonnage, à savoir $T, 2T, 3T \dots$

1.3 Energie et Puissance

1.3.1 Energie d'un signal

Soit $x(t)$ un signal quelconque (fonction complexe),

– L'énergie sur $[t_1, t_2]$ est définie par :

$$\mathcal{W}_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt . \quad (1.15)$$

où la notation $|x(t)|^2$ signifie $x(t) x^*(t)$.

1.3.2 Puissance moyenne d'un signal

Soit $x(t)$ un signal quelconque (fonction complexe),

– La puissance moyenne sur $[t_1, t_2]$ est définie par :

$$\mathcal{P}_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt . \quad (1.16)$$

Cas particulier des signaux périodiques de période T_0

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x_p(t - kT_0) , \quad (1.17)$$

où $x_p(t)$ est le signal sur une période T_0 , alors la puissance moyenne sur une période est égale à :

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_p(t)|^2 dt . \quad (1.18)$$

1.4 Classification des signaux

1.4.1 Signaux à énergie finie

Un signal $x(t)$ est dit à énergie finie s'il est de carré sommable, c'est-à-dire si

$$\mathcal{W}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty . \quad (1.19)$$

Ce qui implique que $\mathcal{P}_x = 0$.

1.4.2 Signaux à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ est dit à puissance moyenne finie si

$$\mathcal{P}_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.20)$$

Cas des signaux périodiques de période T :

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (1.21)$$

Si $\mathcal{P}_x \neq 0$, alors $\mathcal{W}_x = \infty$ (signal à énergie totale infinie).

Exemple : Calculer la puissance moyenne du signal réel et sinusoïdal représenté par la fonction $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$.

1.4.3 Causalité

Un signal $x(t)$ est dit causal ssi $x(t) = 0, \forall t < 0$.

Un signal $x(t)$ est dit anti-causal ssi $x(t) = 0, \forall t > 0$.

Remarque : Dans le cas d'un filtre que l'on veut réaliser en temps réel, il va de soit que sa réponse ne peut être que postérieure à l'excitation. C'est pourquoi, on imposera que sa réponse impulsionnelle soit causale.

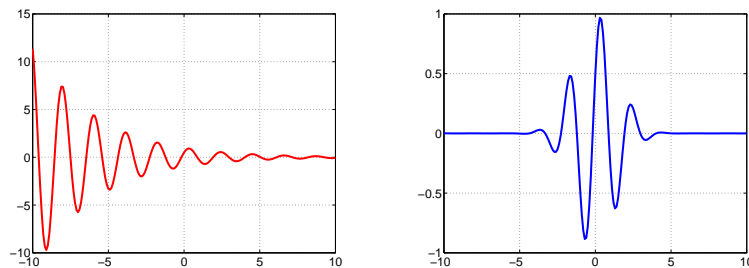
1.4.4 Parité

Un signal $x(t)$ est pair si $x(t) = x(-t)$ ou impair si $x(t) = -x(-t)$.

Tout signal réel $x(t)$ est la somme d'un signal pair $x_p(t)$ et d'un signal impair $x_i(t)$: $x(t) = x_p(t) + x_i(t)$ où $x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$ et $x_i(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$.

Exemples :

- Quelle est la parité des signaux $x(t) = e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \phi)$ (sinusoïde atténuée) (gauche) et $x(t) = e^{-\alpha t^2} \sin(\omega t + \phi)$ (droite) représentés ci-dessous pour les valeurs $\alpha = 0.25$, $\phi = \pi/6$ et $\omega = 3$ rad/s :

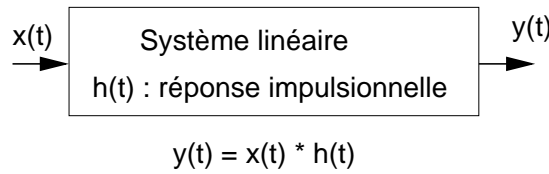


1.5 Produit de convolution

On appelle produit de convolution entre deux fonctions $x(t)$ et $h(t)$, l'opération \star (notée également \otimes) définie par :

$$(x \star h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1.22)$$

Si la réponse impulsionnelle d'un système linéaire (comme un filtre, par exemple) est représentée par la fonction $h(t)$, la sortie du signal $y(t)$ s'obtient comme le produit de convolution de l'entrée $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$.



La convolution est l'effet que produit un instrument de mesure qui donne d'un phénomène physique non pas une réponse nette, mais un peu floue. L'image d'un point dans un instrument d'optique n'est jamais réellement un point mais une tâche. Dans le domaine électronique, on retrouve le même phénomène : une impulsion infiniment brève appliquée à l'entrée d'un amplificateur ne donne jamais en sortie une impulsion brève, mais un signal de durée non nulle (d'autant plus étroite que la bande-passante de l'appareil est plus élevée).

Le produit de convolution représente l'évolution de la valeur de l'aire contenue sous le produit des deux fonctions en fonction du temps. Il exprime la quantité de recouvrement de la fonction $x(t)$ lorsqu'on la déplace sur la fonction $h(t)$.

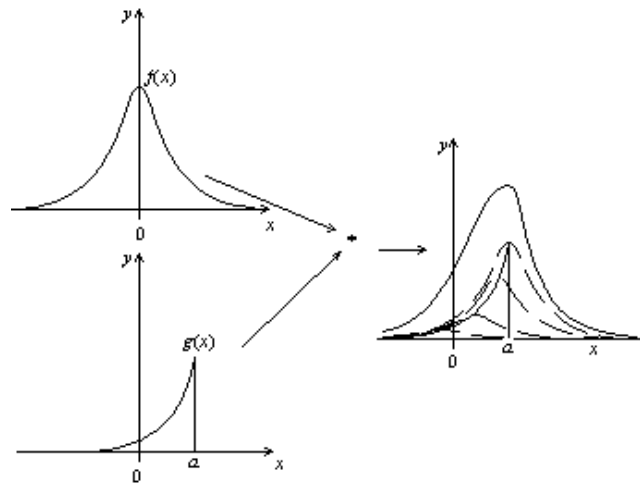


FIGURE 1.3 – Interprétation du produit de convolution entre $f(t)$ et $g(t)$.

Propriétés

- Le produit de convolution est une opération commutative et distributive par rapport à l'addition.
- La fonction de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution :

$$\delta(t - \tau) \star f(t) = f(t - \tau) \quad (1.23)$$

- Le produit de convolution de deux signaux représentés par leurs fonctions temporelles correspond dans le domaine fréquentiel au produit de leurs transformées de Fourier respectives (Théorème de Plancherel).
- Si $x(t)$ et $y(t)$ sont des signaux causaux, en écrivant les inégalités qu'ils vérifient

$$\begin{cases} x(\tau) = 0 & \forall \tau < 0 \\ y(t - \tau) = 0 & \forall \tau > t \end{cases}$$

on obtient une expression simplifiée et très utile de la convolution :

$$(x \star y)(t) = \int_0^t x(\tau) y(t - \tau) d\tau \quad (1.24)$$

1.6 Transformations fréquentielles

1.6.1 Transformée de Fourier

La représentation temporelle peut être suffisante dans tous les cas où la forme du signal et la nature du traitement restent simples. Dans la réalité, les signaux n'ont pas toujours une forme simple soit en raison de la nature de l'information qu'ils portent, soit en raison du traitement qu'ils doivent subir. L'unique représentation du signal en fonction du temps s'avère insuffisante : elle ne permet plus d'interpréter correctement l'information. Dans de tels cas, la représentation du signal en fonction de la fréquence est très utile.

La transformée de Fourier est un outil mathématique qui permet d'établir une dualité entre deux représentations différentes d'un signal mais complémentaires au niveau de l'interprétation des résultats. Elle effectue le passage du domaine temporel au domaine spectral (fréquentiel). Son résultat est appelé *spectre* d'un signal.

La transformée de Fourier du signal $x(t)$, notée $\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega)$, est définie par :

$$\mathcal{F}[x(t)] = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt, \quad (\omega = 2\pi f) \quad (1.25)$$

Elle existe si $x(t)$ est de classe L_1 ($\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < +\infty$) et si le signal présente un nombre fini de discontinuités.

La transformée de Fourier *inverse* de $X(\omega)$ est le signal $x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$ défini par :

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

$X(\omega)$ est une fonction qui est indépendante du temps. C'est une fonction complexe que l'on peut écrire sous la forme module et phase : $X(\omega) = |X(\omega)| \exp(\phi(\omega))$ ou sous la forme de partie réelle et de partie imaginaire : $X(\omega) = \mathcal{R}e(X(\omega)) + j \mathcal{I}m(X(\omega))$ avec

$$\mathcal{R}e(X(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m(X(\omega)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt . \quad (1.27)$$

On énonce ci-dessous quelques propriétés importantes concernant la transformée de Fourier :

1. La transformée de Fourier est inversible si $x(t)$ est un signal à énergie finie.
2. Linéarité : $\mathcal{F}[a x(t) + b y(t)] = a X(\omega) + b Y(\omega)$
3. Changement d'échelle : $\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X(\frac{\omega}{a})$
4. Translation en temps : $\mathcal{F}[x(t-a)] = X(\omega) e^{-j\omega a}$ (retard, si $a > 0$),
5. Translation en fréquence : $\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$,
6. Dérivation : $\mathcal{F}[\frac{d^n x(t)}{dt^n}] = (j\omega)^n X(\omega)$,
7. Intégration : $X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \mathcal{F}[\frac{dx(t)}{dt}] + 2\pi \bar{x} \delta(\omega)$ où \bar{x} est la valeur moyenne de $x(t)$ ($\bar{x} = \lim_{T_0 \rightarrow +\infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt$),
8. Conjugaison : $\mathcal{F}[x^*(t)] = X^*(-\omega)$,
9. Dualité : $\mathcal{F}[x(t)] = Y(\omega) \rightarrow \mathcal{F}[y(t)] = 2\pi X(-\omega)$,
10. Parité : $x(t) = x_p(t) + x_i(t) \rightarrow X(\omega) = \mathcal{F}[x_p(t)] + \mathcal{F}[x_i(t)]$,
11. Si $x(t)$ est réel, alors $\mathcal{R}e(X(\omega)) = \mathcal{F}[x_p(t)]$ est une fonction réelle et $j \mathcal{I}m(X(\omega)) = \mathcal{F}[x_i(t)]$ est une fonction imaginaire.
12. Si $x(t)$ est réel pair, alors $X(\omega)$ est réel pair.
Si $x(t)$ est réel impair, alors $X(\omega)$ est imaginaire impair.
13. $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$,
14. $\mathcal{F}[1] = 2\pi \delta(\omega)$,

$$15. \mathcal{F}[\delta(t - \tau)] = e^{-j\omega\tau},$$

$$16. \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi \delta(\omega - \omega_0),$$

$$17. \mathcal{F}[\cos(\omega_0 t)] = \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0),$$

Ainsi, la translation temporelle (propriété 4) ne change pas le module de la transformée de Fourier, mais introduit un déphasage sur le spectre complexe. On appelle également cette propriété "*propriété de modulation*".

1.6.2 Théorème de Plancherel

Ce théorème met en exergue la dualité entre temps et fréquence. Il s'énonce ainsi :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution de leurs fonctions temporelles est le produit des transformées de Fourier :

$$\begin{cases} x(t) \star y(t) & \xrightarrow{TF} & X(f) Y(f) \\ x(t) y(t) & \xrightarrow{TF} & \frac{1}{2\pi} X(f) \star Y(f) \end{cases} \quad (1.28)$$

1.6.3 Transformée de Laplace

A l'origine de la transformation de Laplace, on trouve l'idée que, si une fonction $x(t)$ n'est pas sommable en valeur absolue, il est néanmoins intéressant de définir la transformée de Fourier du produit $x(t) e^{-\alpha t}$, du moins si il existe un nombre réel α tel que le produit ci-dessus soit sommable en valeur absolue. Considérons donc une fonction $x(t)$ et un intervalle Σ , tels que pour le réel $\sigma \in \Sigma$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-\alpha t}| dt \quad (1.29)$$

converge. On définit alors la transformée de Laplace *bilatérale* $X(s)$ de $x(t)$:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (1.30)$$

où s est une variable complexe $s = \sigma + j\omega$.

1.7 Série de Fourier

Un signal $x(t)$ peut se décomposer en une somme infinie de fonctions sinusoïdales dépendant du temps qui peut être exprimée par une combinaison linéaire de fonctions exponentielles complexes sur l'intervalle temporel $[0, T_0 = 1/f_0]$:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \forall t \in [0, T_0], \quad (1.31)$$

n étant une valeur entière. Les coefficients de la série de Fourier, c_n , sont indépendants du temps et s'expriment de la manière suivante :

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt, \quad (1.32)$$

Si $x(t)$ est périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$, f_0 représente la fréquence du fondamental et $n f_0$ ($n > 1$) représente la fréquence des différents harmoniques.

Dans un contexte d'étude réduit aux signaux à énergie finie, on introduit ici une bijection entre deux représentations de ces signaux : l'une *temporelle* et l'autre *fréquentielle*. Si ces signaux sont périodiques et donc à énergie infinie sur \mathbb{R} , il n'existe plus de transformée de Fourier au sens des fonctions, mais ces signaux, pourvu qu'ils soient continus, admettent une décomposition en série de Fourier, ce qui nous permet de conserver une représentation fréquentielle aux moyens des coefficients descriptifs de la série.

L'ensemble des valeurs c_n (en général complexes) constitue le spectre du signal ; qui est alors discret. Ces valeurs désignent l'amplitude et la phase des harmoniques (multiples du fondamental). L'exemple type est la fonction sinus qui n'a pas de transformée de Fourier au sens des fonctions, mais qui se décompose aisément (et pour cause) en série (trigonométrique) de Fourier pour obtenir deux coefficients (b_1 et b_{-1}) qui correspondent à deux impulsions Dirac fréquentielles.

Remarques :

– $c_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$ = valeur moyenne de $x(t)$ sur $[0, T_0]$.

– Si $x(t)$ est un signal réel, alors $c_{-n} = c_n^*$.

– Si $x(t)$ est périodique de période T_0 , alors $x(t) = x(t + T_0)$ et

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}, \forall t. \quad (1.33)$$

– On peut décomposer $x(t)$ sous la forme équivalente à (1.31) :

$$x(t) = a_0 + \sum_1^{+\infty} (a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)) \quad (1.34)$$

avec

$$\begin{aligned}
- a_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
- b_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \text{ avec} \\
&\omega_0 = 2\pi f_0.
\end{aligned}$$

$$\text{et } c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \text{ pour } n > 0, \quad c_n = \frac{a_n + jb_n}{2} \text{ pour } n < 0 \text{ et } c_0 = a_0.$$

- Si le signal $x(t)$ est pair, alors les coefficients b_n sont tous nuls. Si le signal $x(t)$ est impair, alors les coefficients a_n sont tous nuls.
- Interprétation : la forme complexe de la décomposition en série de Fourier est la formulation la plus usuelle. Elle fait apparaître des harmoniques de fréquences positives et négatives qui servent mathématiquement à reconstituer l'ensemble du signal. Néanmoins, cette décomposition n'a pas de réalité physique en ce qui concerne la partie associée aux fréquences négatives. Elle est utilisée en traitement du signal car elle permet bien souvent une simplification des calculs.
- On peut montrer que si $x(t)$ de période T_0 est une fonction continue et que sa dérivée première temporelle $x'(t)$ est continue par morceaux, alors la série de Fourier de $x(t)$ converge uniformément vers $x(t)$.
- La notion de spectre d'un signal périodique est bien connue des musiciens : deux instruments jouant la même note fournissent deux signaux de même fréquence ; ils sont identifiables parce que les amplitudes des harmoniques sont différentes. C'est la répartition des amplitudes sur les divers harmoniques qui est caractéristique d'un instrument : c'est son timbre.

1.8 Corrélation et densités spectrales

1.8.1 Signaux à énergie finie

La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour des signaux réels à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Autocorrélation : corrélation entre le signal $x(t)$ et lui-même :

$$\gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t - \tau) dt . \quad (1.35)$$

Intercorrélation : corrélation entre le signal $x(t)$ et le signal $y(t)$:

$$\gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt . \quad (1.36)$$

1.8.2 Signaux à puissance moyenne finie

Pour des signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie, on définit l'autocorrélation par la relation :

$$\gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x^*(t - \tau) dt . \quad (1.37)$$

et de même, on définit la fonction d'intercorrélation par :

$$\gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y^*(t - \tau) dt . \quad (1.38)$$

Propriétés :

- $\gamma_{xx}(\tau)$ et $\gamma_{xy}(\tau)$ sont homogènes à une énergie (énergie croisée entre un signal et un autre retardé) ou à une puissance (deuxième définition).
- $\gamma_{xy}(\tau) = 0$, signifie que les signaux sont totalement décorrelés (signaux orthogonaux),
- $|\gamma_{xy}(\tau)|^2 \leq \gamma_{xx}(\tau) \gamma_{yy}(\tau)$ (inégalité de Schwartz),
- $|\gamma_{xx}(\tau)| \leq \gamma_{xx}(0)$, $\forall \tau$: la fonction d'autocorrélation admet une valeur maximale en $\tau = 0$. Comme la fonction d'autocorrélation sert à mesurer le degré de ressemblance entre un signal et sa version décalée dans le temps, intuitivement, on conçoit que la ressemblance est maximale lorsqu'on compare le signal avec lui-même, i.e., lorsque l'on compare le signal avec sa version non décalée dans le temps.

1.8.3 Densités spectrales

En un mot, il s'agit des transformées de Fourier des fonctions de corrélation que l'on vient d'aborder (appelés aussi relations de Wiener-Khintchine). On définit alors :

Densité interspectrale de puissance :

$$D.S.P.\{x(t)\} = \mathcal{F}[\gamma_{xx}(\tau)] = \Gamma_{xx}(f) . \quad (1.39)$$

Densité spectrale de puissance :

$$D.S.P.\{x(t), y(t)\} = \mathcal{F}[\gamma_{xy}(\tau)] = \Gamma_{xy}(f) . \quad (1.40)$$

1.8.4 Théorème de Parseval

L'identité de Parseval traduit la conservation de l'énergie lors du passage à la transformée de Fourier. On a donc :

$$E = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}_{\text{Domaine temporel}} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df}_{\text{Domaine fréquentiel}} \quad (1.41)$$

Pour les signaux périodiques qui sont à énergie infinie, on calcule dans ce cas la puissance sur une période T_0 . En utilisant le développement en série de Fourier qui existe en vertu de la périodicité, on trouve :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) x^*(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n c_n^* . \quad (1.42)$$

On en déduit le théorème de Parseval pour des signaux périodiques et qui traduit cette fois-ci la conservation de la puissance :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(f) df = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \quad (1.43)$$

1.9 Filtrage analogique

1.9.1 Introduction

Nous allons aborder dans ce chapitre le filtrage des systèmes linéaires continus et invariants dans le temps (stationnaires). Le filtrage consiste à atténuer certains signaux et à en laisser "passer" d'autres. Cette sélection s'opère bien évidemment en fonction des caractéristiques du signal recherchées en sortie. Un filtre modifie (ou filtre) certaines parties d'un signal d'entrée dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. D'après la théorie de Fourier, tout signal réel peut être considéré comme composé d'une somme de signaux sinusoïdaux (en nombre infini si nécessaire) à des fréquences différentes ; le rôle du filtrage est alors de modifier la phase et l'amplitude de ces composantes. Par exemple, agir sur la représentation fréquentielle pour la modifier : le filtre ajoute ou enlève des graves ou des aigus en traitement de la parole, il corrige la réponse en fréquence d'un appareil (microphone, téléphone,...).

Un moyen de caractériser un filtre est sa réponse impulsionnelle $h(t)$, c'est-à-dire le signal en sortie du filtre lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, c'est-à-dire lorsque toutes les fréquences sont présentes à son entrée ($\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$). Un autre moyen de caractériser un filtre est de fournir sa *fonction de transfert* $H(\omega)$, qui peut être obtenue en divisant le spectre fréquentiel du signal de sortie avec celui du signal de l'entrée du filtre

$$y(t) = h(t) \star x(t) \quad \rightarrow \quad Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \quad (1.44)$$

Tout filtre linéaire est entièrement décrit par sa réponse fréquentielle en amplitude $|H(\omega)|$ (le gain) et sa réponse de phase $\arg H(\omega)$

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)| |X(\omega)| \quad \text{et} \quad \arg Y(\omega) = \arg H(\omega) + \arg X(\omega) \quad (1.45)$$

liée à sa réponse impulsionnelle. Du point de vue mathématique, un filtre continu à réponse impulsionnelle infinie peut être décrit en terme d'équations différentielles linéaires. Il est également possible d'exprimer la fonction de transfert du filtre à l'aide de la transformée de Laplace de leur réponse impulsionnelle ; cette méthode permet d'analyser simplement le filtre en considérant les pôles et les zéros de la transformée de Laplace.

Exemple

Soit $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ un signal à l'entrée d'un filtre linéaire continu caractérisé par sa réponse fréquentielle $\{|H(\omega)|, \arg H(\omega)\}$. Quelle est l'expression de la réponse temporelle $y(t)$ en sortie du filtre ?

Rep : $y(t) = |H(\omega_0)| e^{(j\omega_0 t + j \arg H(\omega_0))}$.

1.9.2 Filtres stables physiquement réalisables

Un filtre est physiquement réalisable si sa réponse en fréquence $H(\omega)$ correspond à sa transformée de Laplace pour un signal d'entrée sinusoïdal :

$$H(\omega) = \mathcal{L}[h(t)]_{(s=j\omega)} . \quad (1.46)$$

Il existe plusieurs types de filtres linéaires réalisables :

- Les filtres passe-bas laissent passer les basses fréquences et coupent les hautes,
- Les filtres passe-haut laissent passer les hautes fréquences et coupent les basses,
- Les filtres passe-bande ne laissent passer qu'une bande limitée de fréquences,
- Les filtres coupe-bande, à l'inverse, laissent passer toutes les fréquences, sauf une bande spécifique.

Certains filtres ne sont pas conçus pour arrêter une fréquence, mais pour modifier légèrement le gain à différentes fréquences, comme les égaliseurs. Différentes méthodes de conception de filtres analogiques ont été mises au point, chacune optimisant un point spécifique, comme par exemple des filtres exhibant des caractéristiques particulières :

- Les filtres de Butterworth,
- Les filtres de Tchebyshev,
- Les filtres elliptiques (filtres de Cauer).

La conception des filtres linéaires fait appel à un *gabarit*, qui rassemble les caractéristiques du gain fréquentiel désiré.

1.9.3 Fréquence de coupure et bande passante

La définition générale de la fréquence de coupure d'un filtre de fonction de transfert $H(f)$ (sortie sur l'entrée) est la fréquence f_c telle que :

$$\frac{|H(f_c)|}{\max \{|H(f)|\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} . \quad (1.47)$$

Dans le cas d'un filtre passe-bas, la fonction de transfert est maximale à l'origine, donc :

$$|H(f_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(0)| \Leftrightarrow 20 \log_{10} |H(f_c)| - 20 \log_{10} |H(0)| = -3\text{dB} . \quad (1.48)$$

La bande passante (BP) d'un filtre analogique est l'intervalle $[f_{\text{inf}}, f_{\text{sup}}]$ de fréquences dans lequel le gain $20 \log_{10} |H(\omega)|$ (ici exprimé en décibels) reste supérieur ou égal à une valeur de référence (par exemple -3 dB, correspondant

à une atténuation du gain de $\sqrt{2}$). Ainsi, pour les filtres les plus courants, on a :

- Le filtre passe-bas : $BP = [0, f_{\text{sup}}]$,
- Le filtre passe-haut : $BP = [f_{\text{sup}}, +\infty]$,
- Le filtre passe-bande : $BP = [f_{\text{inf}}, f_{\text{sup}}]$,
- Le filtre coupe-bande : $BP = [0, f_{\text{inf}}] \cup [f_{\text{sup}}, +\infty]$ (appelé aussi filtre *réjecteur de bande*).

1.9.4 Transformations de fréquences

A partir de la connaissance de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas normalisé (de fréquence de coupure unité à -3 dB), on peut construire par transformation du plan complexe et à partir de ce filtre de nouveaux filtres.

- Le filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_c sera donné par la transformation :

$$H(\omega) \longrightarrow H\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right),$$

- Le filtre passe-bande de pulsation de coupures basse ω_l et haute ω_u sera obtenu par :

$$H(\omega) \longrightarrow H\left(\frac{\omega^2 + \omega_l \omega_u}{\omega (\omega_u - \omega_l)}\right),$$

- Le filtre coupe-bande de pulsation de coupures basse ω_l et haute ω_u sera obtenu par :

$$H(\omega) \longrightarrow H\left(\frac{\omega (\omega_u - \omega_l)}{\omega^2 + \omega_l \omega_u}\right),$$

1.9.5 Synthèse des filtres analogiques

Les spécifications qui définissent un gabarit sont les caractéristiques du filtre. On doit préciser :

- le gain du filtre dans la bande passante (≈ 0 dB),
- l'atténuation du filtre en bande occupée (typiquement $30 \text{ dB} \rightarrow 90 \text{ dB}$),
- la fréquence de coupure (une dans le cas d'un passe-bas ou d'un passe-haut et deux dans le cas d'un passe-bande ou d'un coupe-bande),
- la largeur de bande de transition souhaitée qui généralement doit être la plus petite possible,
- les éventuelles oscillations en bande passante et/ou atténuée (typiquement $1 \text{ dB} \rightarrow 0.01 \text{ dB}$).

Les filtres idéaux

Filtre passe-bas idéal

$$H(\omega) = \begin{cases} K e^{-j\omega T} & \text{si } |\omega| < \omega_c = 2 \pi f_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.49)$$

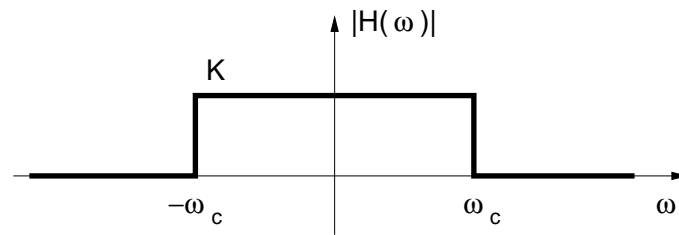


FIGURE 1.4 – Réponse fréquentielle (gain) du filtre passe-bas.

Filtre passe-haut idéal

$$H(\omega) = \begin{cases} K e^{-j\omega T} & \text{si } |\omega| > \omega_c = 2 \pi f_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.50)$$

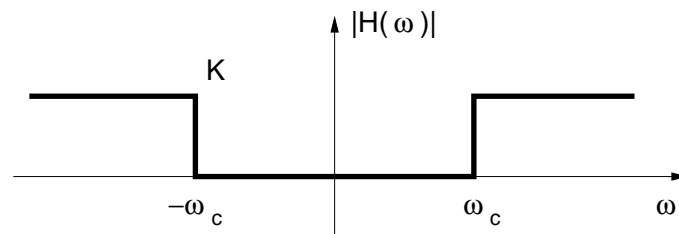


FIGURE 1.5 – Réponse fréquentielle (gain) du filtre passe-haut.

Filtre passe-bande idéal

$$H(\omega) = \begin{cases} K e^{-j\omega T} & \text{si } \omega_l < |\omega| < \omega_u \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.51)$$

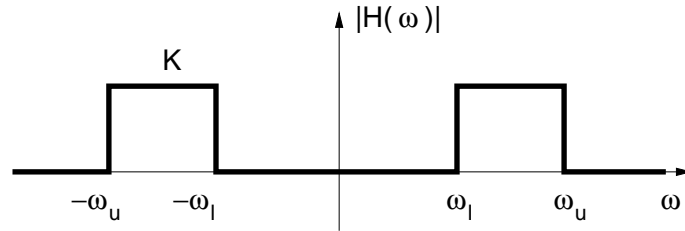


FIGURE 1.6 – Réponse fréquentielle (gain) du filtre passe-bande.

Filtre coupe-bande idéal

$$H(\omega) = \begin{cases} K e^{-j\omega T} & \text{si } |\omega| < \omega_l \text{ ou } |\omega| > \omega_u \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (1.52)$$

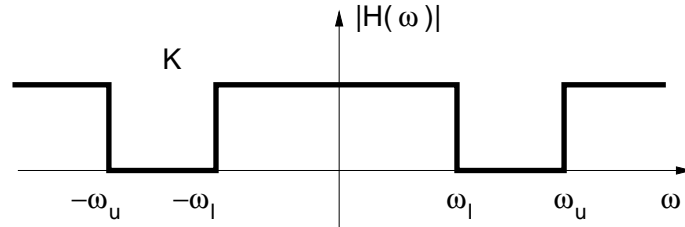


FIGURE 1.7 – Réponse fréquentielle (gain) du filtre coupe-bande.

Les filtres idéaux présentent un déphasage linéaire et ne sont pas physiquement réalisables, car les réponses fréquentielles idéales (ci-dessus) correspondent à une réponse temporelle non-causale. Par exemple, en considérant le filtre passe-bas où $H(\omega) = K e^{-j\omega T} \text{rect}(\frac{\omega}{2\omega_c})$, on a : $h(t) = K \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\frac{\omega_c}{\pi}(t - T))$ représentée ci-dessous :

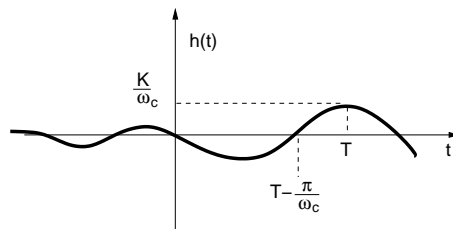


FIGURE 1.8 – Réponse temporelle du filtre passe-bas idéal : une partie du signal n'est pas nulle pour $t < 0$.

Il s'ensuit que les filtres qui vont pouvoir être réellement synthétisés n'ont pas de réponse fréquentielle correspondant à la fonction porte, mais pourront s'en rapprocher. Des caractéristiques qui exhibent ces différences plus ou moins fortes vis-à-vis de la fonction porte sont principalement les ondulations dans la bande passante et dans la bande atténuée ainsi que la largeur de la transition. Les filtres que l'on réalise sur les signaux continus (c'est-à-dire non échantillonnés) sont composés de résistances, de capacités, de self-inductances et d'amplificateurs opérationnels. De tels filtres réalisent entre les représentations temporelles $e(t)$ (l'entrée) et $s(t)$ (la sortie du filtre) une relation intégr-différentielle linéaire à coefficients constants. Par transformation de Fourier, cette relation conduit à un gain complexe qui est une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes en ω :

$$H(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} . \quad (1.53)$$

Il ne faut pas perdre de vue que la classe des filtres réalisables sur des signaux continus sont ceux qui sont définis par l'équation fractionnelle (1.53). N'importe quelle fonction de transfert de ce type peut être réalisée par une association de quatre fonctions de transfert élémentaires : les filtres passe-bas du premier et du second ordre, les filtres passe-haut du premier et du second ordre.

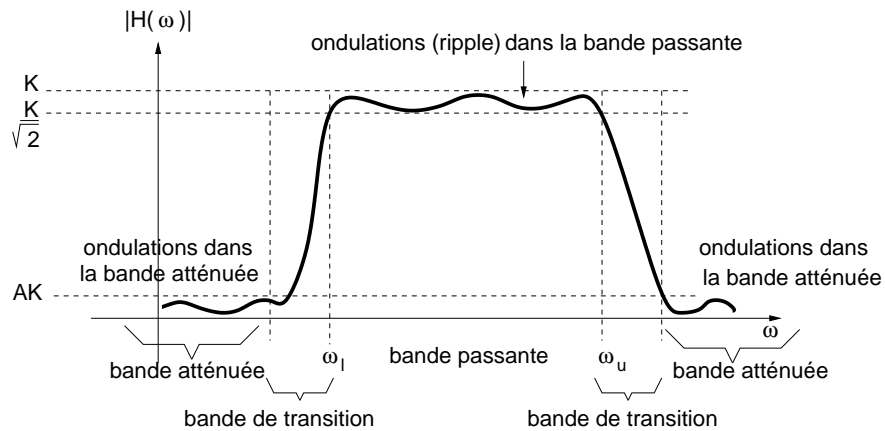


FIGURE 1.9 – Définitions et exemple de réponse fréquentielle d'un filtre réel.

Les filtres réalisables classiques

Plusieurs paramètres vont caractériser les gabarits des filtres réels classiques. Il s'agit de la sélectivité k qui représente un rapport de fréquences (ou de pulsations) caractérisant la bande passante, la pulsation centrale qui est la moyenne géométrique ω_0 des pulsations de coupures ou la largeur de bande relative B_0 .

Filtre passe-bas réel

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T} \text{ (ordre 1) ; Sélectivité : } k = \frac{\omega_l}{\omega_u} \quad (0 < k < 1) \quad (1.54)$$

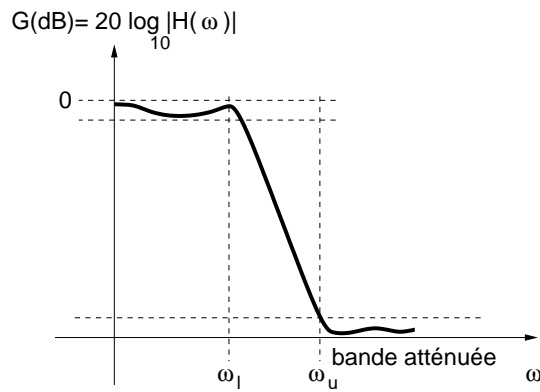


FIGURE 1.10 – Réponse fréquentielle (gain en dB) d'un filtre passe-bas réel caractérisé par la sélectivité k .

Filtre passe-haut réel

$$H(\omega) = \frac{j\omega T}{1 + j\omega T} \text{ (ordre 1) ; Sélectivité : } k = \frac{\omega_l}{\omega_u} \quad (0 < k < 1) \quad (1.55)$$

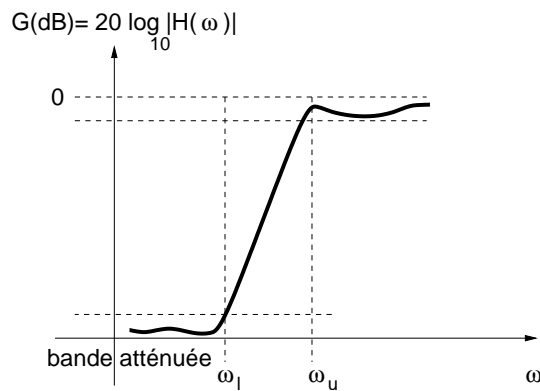


FIGURE 1.11 – Réponse fréquentielle (gain en dB) d'un filtre passe-haut réel caractérisé par la sélectivité k .

Filtre passe-bande réel

$$\text{Sélectivité : } k = \frac{\omega_{l+} - \omega_{u-}}{\omega_{u+} - \omega_{l-}} \quad (0 < k < 1) \quad (1.56)$$

$$\text{Pulsation centrale : } \omega_0 = \sqrt{\omega_{l+} \omega_{u-}} \quad (1.57)$$

$$\text{Largeur de bande relative : } B_0 = \frac{\omega_{l+} - \omega_{u-}}{\omega_0} \quad (1.58)$$

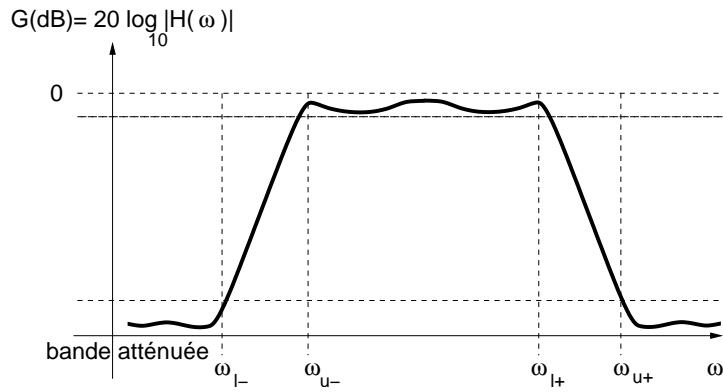


FIGURE 1.12 – Réponse fréquentielle (gain en dB) d'un filtre passe-bande réel caractérisé par k , ω_0 et B_0 .

Filtre coupe-bande réel

$$\text{Sélectivité : } k = \frac{\omega_{l+} - \omega_{u-}}{\omega_{u+} - \omega_{l-}} \quad (0 < k < 1) \quad (1.59)$$

$$\text{Pulsation centrale : } \omega_0 = \sqrt{\omega_{l-} \omega_{u+}} \quad (1.60)$$

$$\text{Largeur de bande relative : } B_0 = \frac{\omega_{u+} - \omega_{l-}}{\omega_0} \quad (1.61)$$

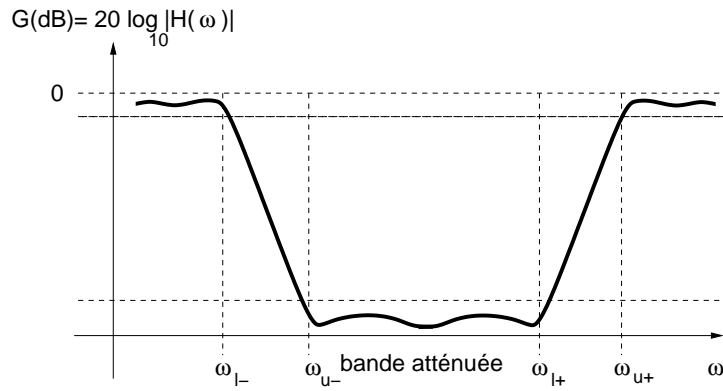


FIGURE 1.13 – Réponse fréquentielle (gain en dB) d'un filtre coupe-bande réel caractérisé par k , ω_0 et B_0 .

Méthode

D'une manière générale, la synthèse d'un filtre analogique requiert la connaissance des caractéristiques fréquentielles que l'on vient de voir dans la section précédente ou la représentation graphique du gain de sa fonction de transfert par le gabarit.

De plus, comme tout filtre linéaire continu vérifie l'équation (1.53), la combinaison de filtres élémentaires peut permettre la réalisation de filtres en cascade, donc de filtres d'ordres supérieurs. La synthèse de tels filtres ne peut pas se faire aisément si on considère l'ensemble des filtres élémentaires un à un. D'une manière générale, on préfère décomposer l'équation (1.53) en deux catégories :

- les filtres polynômiaux, dont le gain de la fonction de transfert est de la forme :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{K_0}{p(\omega)}$$

où $p(\omega)$ est un polynôme.

- les filtres elliptiques.

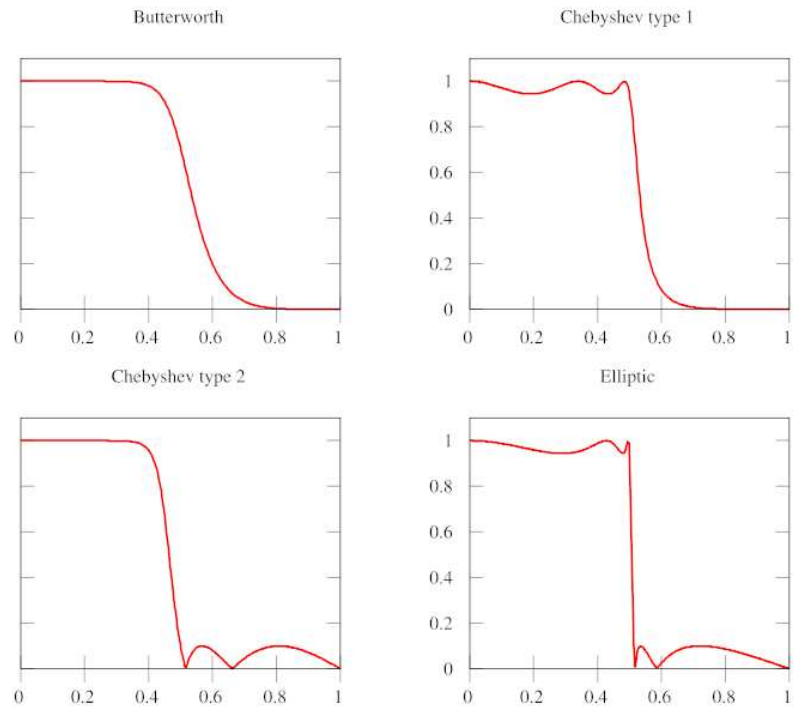


FIGURE 1.14 – Comparaison des principaux filtres analogiques.

Filtres polynômiaux

Filtres de Butterworth La famille des filtres de Butterworth présente les caractéristiques communes suivantes :

- Pas d'ondulation, ni dans la bande passante, ni dans la bande atténuée,
- Atténuation la plus constante possible dans la bande passante (réponse la plus "plate").

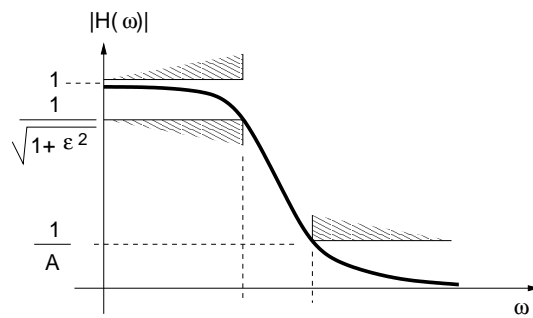


FIGURE 1.15 – Gabarit d'un filtre de Butterworth.

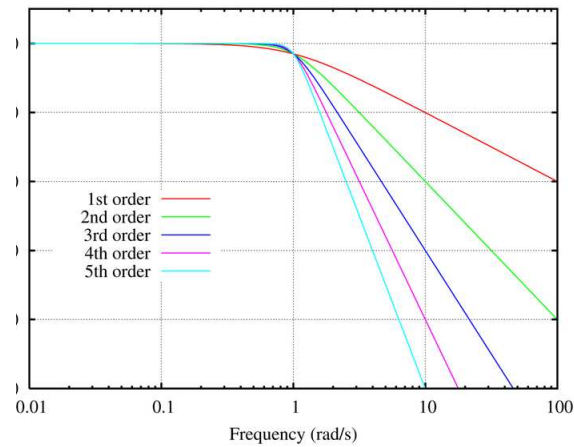


FIGURE 1.16 – Filtres de Butterworth d'ordre 1 à 5.

La forme générale du gain (au carré) d'un filtre de Butterworth d'ordre n est la suivante :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\epsilon \omega/\omega_c)^{2n}} \quad ; \quad n > 0 \quad (1.62)$$

En général, on considère $\epsilon = 1$, ce qui conduit à $20 \log_{10} (1 + \epsilon^2)^{1/2} = 3 \text{ dB}$.

Pour qu'à la fréquence normalisée $\omega_c = 1/k$, on ait une atténuation du gain de $1/A$, on peut montrer qu'il faut vérifier l'inégalité suivante :

$$n \geq \frac{\ln \eta}{\ln k} \quad (1.63)$$

où η est la constante d'atténuation $\eta = \epsilon/\sqrt{A^2 - 1}$. Ceci permet d'obtenir une méthode de détermination de l'ordre (minimum) du filtre.

Génériquement, la transformée de Laplace $H(s)$ d'un filtre de Butterworth est de la forme :

$$H(s) = \frac{K_0}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (1.64)$$

c'est-à-dire constituée de n pôles p_i situés (dans le plan complexe) sur un $1/2$ arc de cercle de rayon $\epsilon^{-1/n}$, c'est-à-dire tels que :

$$p_i = \epsilon^{-\frac{1}{n}} e^{j\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{2i-1}{2n}\right)}$$

et $K_0 = \prod(-p_i) = 1/\epsilon$.

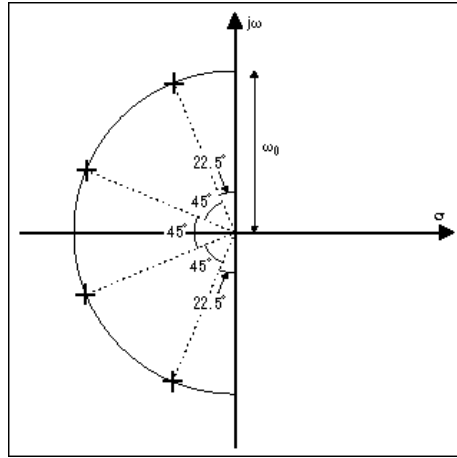


FIGURE 1.17 – Poles d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre 4.

Ci-après sont représentés les gains en fréquence des filtres de Butterworth respectivement d'ordre 8 et d'ordre 20 synthétisés avec Matlab, avec un taux d'ondulations de 3 dB dans la bande passante et de 50 dB dans la bande atténuée. La courbe d'affaiblissement des filtres de Butterworth varie d'une façon monotone, ce qui implique que l'écart entre les spécifications et la courbe de gain dans la bande passante sera toujours minimal à la fréquence de coupure et maximal à l'origine.

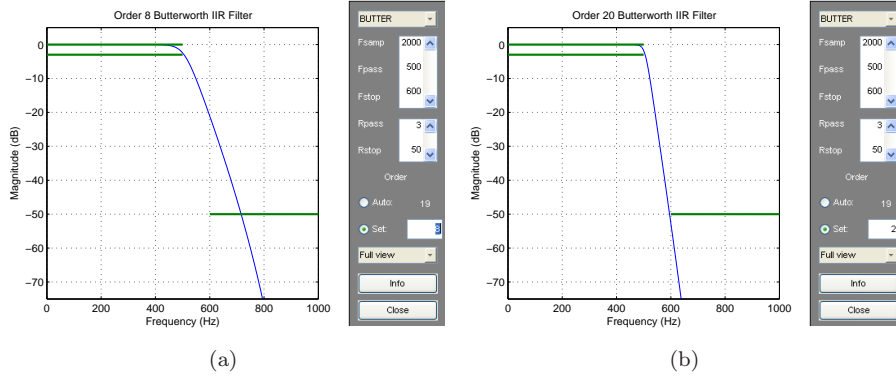


FIGURE 1.18 – Filtres de Butterworth. (a) ordre 8. (b) ordre 20.

Filtres de Bessel Une fonction de transfert ayant une phase rigoureusement linéaire aurait comme fonction de transfert $A e^{-j\omega\tau}$ où τ est le retard infligé au signal d'entrée. Mais ce n'est pas une fonction rationnelle, un tel filtre n'est donc pas réalisable. Les filtres de Bessel sont des filtres dont la fonction de transfert pour un degré donné est la meilleure approximation possible de l'exponentielle précédente. En se limitant au troisième ordre dans le développement de Taylor de l'exponentielle, on a l'approximation suivante de l'exponentielle

$$e^{-j\omega} \approx \frac{1}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 15j\omega + 15} \quad (1.65)$$

La fonction de transfert doit avoir un gain unité pour le continu ($\omega = 0$), d'où la fonction de transfert du filtre de Bessel du troisième ordre :

$$H(\omega) = \frac{15}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 15j\omega + 15} \quad (1.66)$$

On voit que pour une fréquence élevée, le gain tend vers $15/(j\omega)^3$ est 15 fois supérieur à celui du filtre de Butterworth de même degré. Les filtres de Bessel ont une atténuation qui varie au-delà de la fréquence de coupure beaucoup plus lentement que ceux de Butterworth. Pour cette raison, ils sont rarement utilisés sauf lorsque la linéarité de la phase est essentielle.

La famille des filtres de Bessel présente les caractéristiques communes suivantes :

- Pas d'ondulation, ni dans la bande passante, ni dans la bande atténuée,
- Atténuation faible,
- Approxime le mieux possible un retard pur.

La transformée de Laplace $H(s)$ d'un filtre de Bessel est de la forme :

$$H(s) = \frac{K_0}{B_n(s)} \quad ; \quad n > 0, \quad (1.67)$$

où $B_n(s)$ est un polynôme de Bessel d'ordre n . C'est-à-dire, défini de manière

récurrente par :

$$\begin{aligned}
 B_n(s) &= (2n-1) B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \\
 B_0(s) &= 1, \\
 B_1(s) &= s + 1. \\
 \text{et } K_0 &= \frac{2n!}{2^n n!}
 \end{aligned}
 \tag{1.68}$$

Les filtres de Bessel (appelés aussi de Thomson) ne présentent que des pôles et correspondent au cas d'un filtrage à déphasage linéaire. Comme les filtres de Butterworth, les filtres de Bessel demandent des ordres importants pour vérifier des spécifications sur l'affaiblissement, ce qui les rend difficiles à réaliser avec des composants analogiques. La pulsation de coupure ω_c varie avec l'ordre du filtre, et on montre que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_c = K_0^{1/n}. \tag{1.69}$$

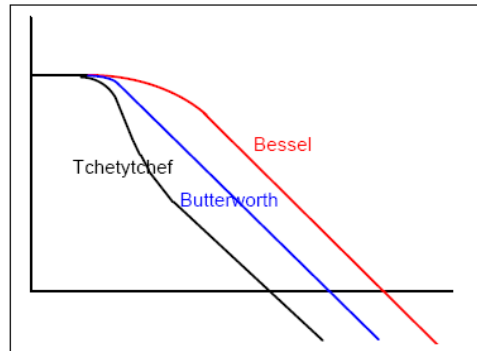


FIGURE 1.19 – Filtre de Bessel, de Butterworth et de Tchebycheff.

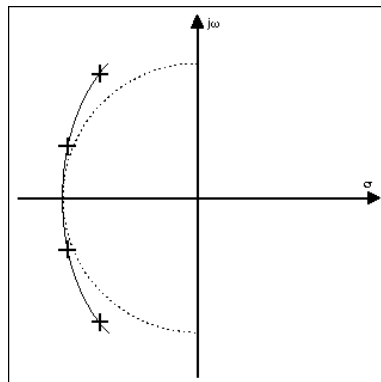


FIGURE 1.20 – Poles d'un filtre passe-bas de Bessel d'ordre 4.

Filtres de Tchebycheff (ou Chebyshev) Les filtres de Chebychev conduisent à une diminution de l'ordre pour les mêmes spécifications que pour les filtres que nous venons de voir. Il en résulte une réalisation plus aisée. Cette famille de filtres est décomposée en deux sous-familles : les filtres de type I qui correspondent à des ondulations uniquement dans la bande passante et les filtres de type II qui, à l'opposé, présentent des ondulations seulement dans la bande atténuée.

Filtres de type I

La famille des filtres de Chebyshev de type I présente les caractéristiques communes suivantes :

- Ondulations dans la bande passante mais pas dans la bande atténuée,
- Filtres optimaux au sens où il n'existe pas d'autres filtres polynômiaux du même ordre avec des performances supérieures ou égales dans la bande passante ET dans la bande atténuée.

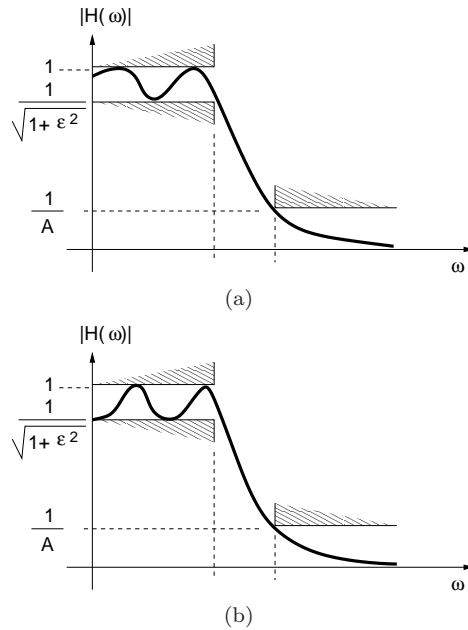


FIGURE 1.21 – Gabarit et filtres de Tchebycheff de type I. (a) ordre impair. (b) ordre pair. La forme des ondulations dans la bande passante dépend de la parité de l'ordre du filtre.

La forme générale du gain fréquentiel (au carré) d'un filtre de Chebyshev de type I est la suivante :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)} \quad ; \quad n > 0 \quad (1.70)$$

n est l'ordre du filtre. ϵ est le taux d'ondulations (*ripple factor*) et caractérise l'amplitude des oscillations dans la bande passante. $T_n(\omega)$ est un polynôme de Chebyshev d'ordre n , qui est défini par

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos(\omega)) & \text{si } |\omega| \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arccosh}(\omega)) & \text{si } |\omega| \geq 1 \end{cases} \quad (1.71)$$

Contrairement à ce qu'il paraît de prime abord, ce sont bien des polynômes. On peut en effet montrer à l'aide de formules trigonométriques classiques que l'on a :

$$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (1.72)$$

avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. Les polynômes de Chebyshev passent par les points caractéristiques suivant $T_n(1) = \pm 1$ et $T_n(0) = \pm 1$ si n est pair, $T_n(0) = 0$ si n est impair. Pour $|x| \leq 1$, $T_n(x)$ oscille n fois entre 1 et -1 (ou, ce qui revient au même, $T_n^2(x)$ présente n extrema entre 0 et 1) tandis que pour $|x| \geq 1$, ces polynômes sont monotones croissants.

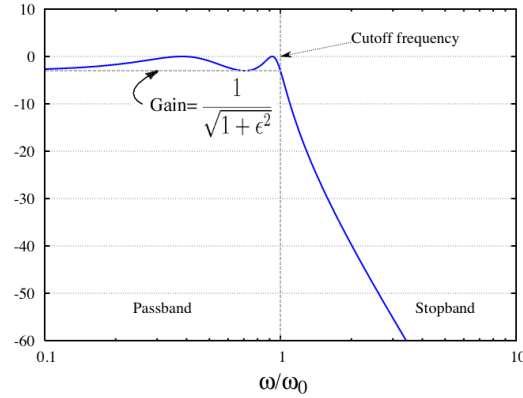


FIGURE 1.22 – Réponse fréquentielle (gain) d'un filtre de Tchebycheff de type I d'ordre 4 pour $\epsilon = 1$.

On peut montrer que l'ordre n du filtre doit être choisi tel que :

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{1}{\eta} + \sqrt{\frac{1}{\eta^2} - 1} \right)}{\ln \left(\frac{1}{k} + \sqrt{\frac{1}{k^2} - 1} \right)} \quad (1.73)$$

où k est la sélectivité du filtre (et correspond à la largeur de la bande de transition) et η est la constante d'atténuation $\eta = \epsilon / \sqrt{A^2 - 1}$.

Génériquement, la transformée de Laplace $H(s)$ d'un filtre de Chebyshev I est de la forme :

$$H(s) = \frac{K_0}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad (1.74)$$

c'est-à-dire constituée de n pôles p_i situés (dans le plan complexe) sur une $1/2$ ellipse, c'est-à-dire tels que :

$$p_i = \frac{\gamma^{-1} - \gamma}{2} \sin \frac{(2i-1)\pi}{2n} + j \frac{\gamma^{-1} + \gamma}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

et

$$\gamma = \left(\frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad K_0 = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (-p_i) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \prod_{i=1}^n (-p_i) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.75)$$

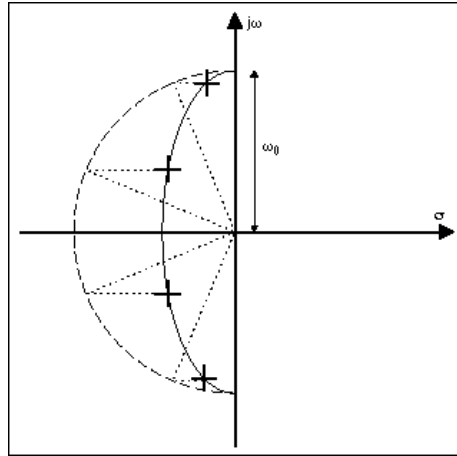


FIGURE 1.23 – Pôles d'un filtre passe-bas de Tchebycheff (tupe I) d'ordre 4.

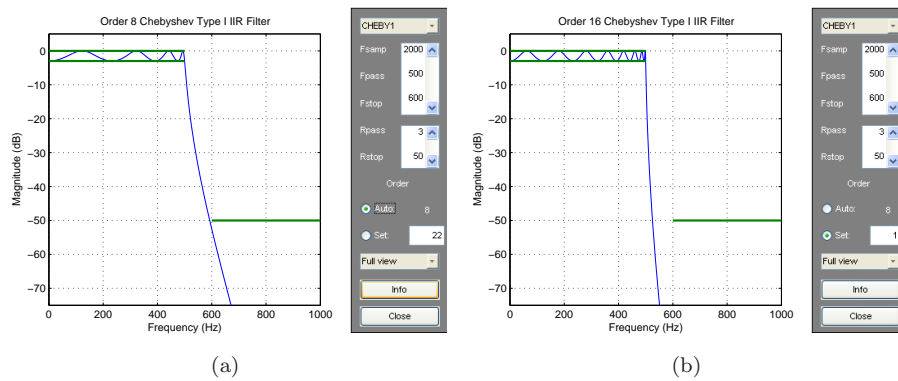


FIGURE 1.24 – Filtres de Tchebycheff de type I. (a) ordre 8. (b) ordre 20.

Filtres de type II (Tchebycheff inverse)

La famille des filtres de Chebyshev de type II présente les caractéristiques communes suivantes :

- Même optimalité que le filtre de Chebyshev de type I,
- Ondulations dans la bande atténuée mais pas dans la bande passante.

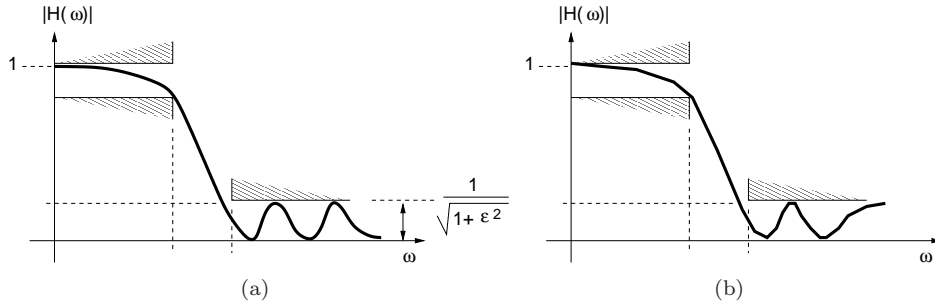


FIGURE 1.25 – Gabarit et filtres de Tchebycheff de type II. (a) ordre impair. (b) ordre pair. La forme des ondulations dans la bande passante dépend de la parité de l'ordre du filtre.

La forme générale du gain fréquentiel (au carré) d'un filtre de Chebyshev de type II d'ordre n est la suivante :

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_n^2(\omega_c/\omega)}} \quad (1.76)$$

où $T_n(\omega)$ est un polynôme de Chebyshev d'ordre n . Dans la bande atténuée, le polynôme de Chebyshev oscillera entre 0 et 1, et donc le gain oscillera entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\epsilon^2}}}$.

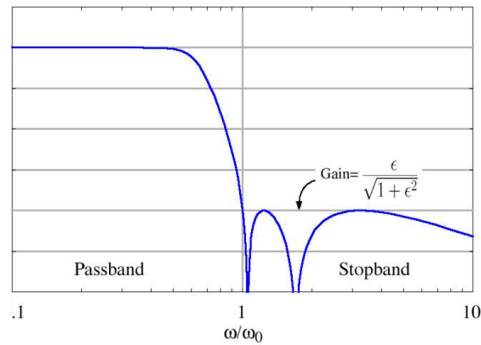


FIGURE 1.26 – Réponse fréquentielle (gain) d'un filtre de Tchebycheff de type II d'ordre 5 pour $\epsilon = 0.01$.

Génériquement, la transformée de Laplace $H(s)$ d'un filtre de Chebyshev II est de la forme :

$$H(s) = \frac{K_0 \prod_{i=1, i \neq (n+1)/2}^n (s - z_i)}{\prod_{k=1}^n (s - p_k)}, \quad (1.77)$$

c'est-à-dire constituée de zéros situés (dans le plan complexe) sur l'axe imaginaire et de n pôles p_i situés sur un $1/2$ cercle de rayon ω_c .

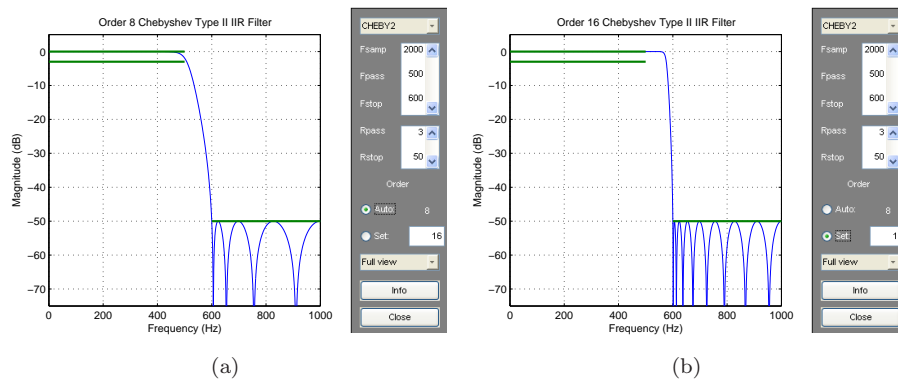
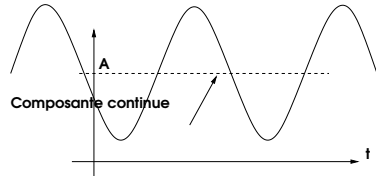


FIGURE 1.27 – Filtres de Tchebycheff de type II. (a) ordre 8. (b) ordre 20.

1.10 Exercices

1. Que représente la composante continue d'un signal ? Calculer la moyenne du signal $x(t) = A + B \sin(2\pi\nu t + \phi)$ illustré ci-dessous



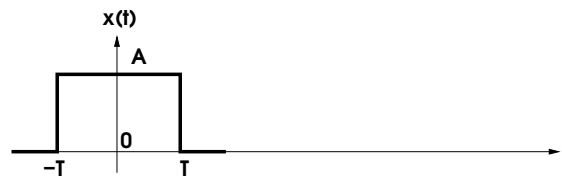
Quel est le lien entre le premier terme de la décomposition en série de Fourier d'un signal $x(t)$ et la valeur moyenne de ce signal ?

Rep :

$$- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (A + B \sin(2\pi\nu t + \phi)) dt = A .$$

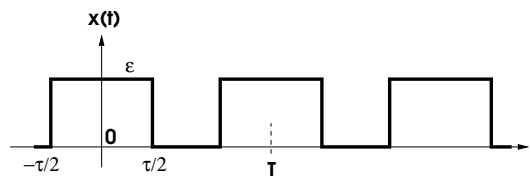
$$- a_0/2 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt .$$

2. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction porte illustrée ci-dessous (et correspondant à la fonction $A \text{ rect}(\frac{t}{2T})$) ?



$$\text{Rep : } X(f) = 2 A T \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} .$$

3. Décomposer en série de Fourier le signal $x(t)$ illustré ci-dessous :



$$\text{Rep : } a_k = \frac{2\varepsilon\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\tau}{T}\right) ; \quad b_k = 0 .$$

4. Montrer que la transformée de Fourier de $\text{sign}(t)$ est $\frac{2}{j\omega}$.

5. Montrer que la transformée de Fourier du signal $x(t) = \exp(-at) \Gamma(t)$ est $X(f) = \frac{1}{a+j2\pi f}$ où a est un réel strictement positif.
6. Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{a}{t^2}$ (a est un réel).
7. Quelle la transformée de Fourier du produit d'un signal périodique par un signal à énergie finie : $z(t) = x(t) y(t)$ avec $x(t) = x(t + T_0)$?

Rep : $Z(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n Y(\omega - \frac{2\pi n}{T_0})$ où les coefficients c_n représentent le spectre du signal $x(t)$ sur une période.

8. Montrer que la fonction de transfert du filtre passe-bas réalisable est une approximation du filtre passe-bas idéal.
9. Quel est le type de filtre qui correspond le mieux au diagramme en gain et en phase (Bode) représenté ci-dessous ? Quelle est la bande passante ?

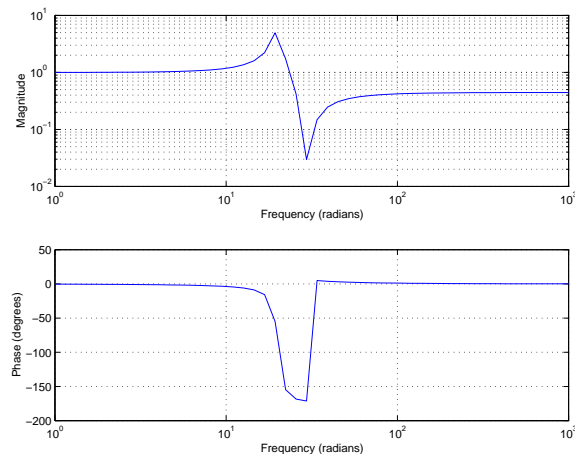


FIGURE 1.28 – Diagramme en gain et phase d'un filtre inconnu.

10. Synthétiser un filtre de Butterworth afin que l'atténuation (A) soit de 40 dB à 2 fois la fréquence de coupure (normalisée) et de 3 dB dans la bande passante (ripple).
11. Déterminer la fonction de transfert $H(\omega)$ d'un filtre dont le gain fréquentiel est illustré ci-dessous. Quelle est la valeur de $|H(+\infty)|$? Quelle est l'allure de la phase ? Quelle est la valeur de la phase en 0 ? Quelle est la valeur maximale de la phase ? A quelle fréquence est-elle atteinte (correspondant à la pulsation centrale) ?

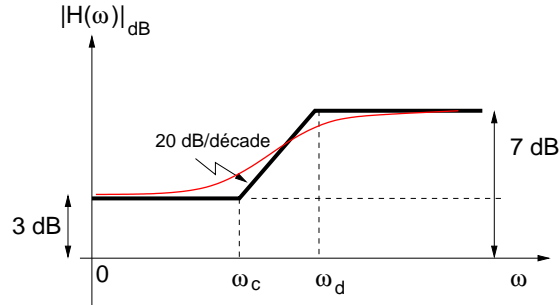


FIGURE 1.29 – Gains fréquentiels (en dB) asymptotiques et réels d'un filtre pour $\omega_c = 6 \text{ rad/s}$.

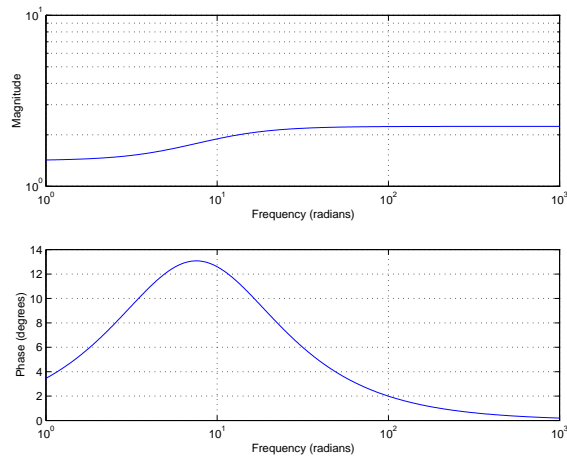


FIGURE 1.30 – Filtre à avance de phase.

12. Déterminer le filtre de Butterworth tel que $20 \log_{10} |H(\omega)|$ s'inscrive dans le gabarit normalisé suivant ($b = -30 \text{ dB}$ et $x_1 = 2$) :

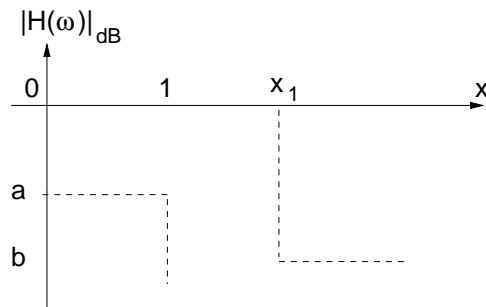


FIGURE 1.31 – Gabarit normalisé $x = \omega/\omega_c$.

1. Soit le signal non-causal y représenté par $y(x) = e^{-|x|/a}$ où $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
Déterminer la transformée de Fourier de y .

2. Soit le signal radar suivant : Il s'agit d'un motif répété avec la période T représenté par un ensemble (salve) de sinusoides de fréquences f_0 et de durée τ . Le motif est codé par le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \text{ rect}(t/T)$.
En s'aidant du produit de convolution, déterminer la transformée de Fourier de ce motif.

3. (a) Développer en série de Fourier, à l'ordre n , la fonction 2π -périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, +\pi[$ par $x(t) = |t|$.

- (b) Représenter graphiquement le spectre fréquentiel approximatif de $x(t)$, pour $n \leq 3$.

Chapitre 2

Echantillonnage/Quantification



Le mathématicien **Claude Elwood Shannon**, né à Gaylord dans le Michigan en 1916, est considéré comme le père de la transmission numérique des informations. Dans son ouvrage le plus célèbre, "Théorie mathématique de la communication", coécrit avec Warren Weaver et publié en 1948, il a défini le bit (acronyme de binary digit) comme unité fondamentale du traitement de l'information. Il s'est particulièrement attaché aux télécommunications numériques et à théoriser la correction d'erreur. Son théorème, connu sous le nom de Shannon-Hartley, établit que la bande passante d'un canal dépend essentiellement de son niveau de bruit et non de sa largeur spectrale. Claude Shannon fut mathématicien aux Bell Labs de 1941 à 1972. Il a également enseigné au Massachusetts Institute of Technology (MIT) de 1956 à 1978. Il contribua par ses travaux au domaine des telecoms, de la théorie des jeux et de l'informatique (entre autres..). Il est avec Turing et Von Neumann un des chercheurs qui contribua le plus à la théorie de l'information au milieu du siècle dernier. Claude Shannon est décédé au mois d'août 2001 à l'âge de 84 ans de la maladie d'Alzheimer.

2.1 Introduction

L'analyse d'un signal continu à l'aide d'un ordinateur nécessite sa discrétisation. Les ordinateurs ne pouvant traiter que des valeurs numériques, une chaîne de conditionnement aura pour fonction de transformer le signal continu en un signal numérique (et inversement). Cela consiste à réaliser les opérations successives suivantes :

- le filtrage analogique en amont pour adapter la bande passante du signal au dispositif d'échantillonnage (filtre anti-repliement),
- l'échantillonnage, qui correspond à la discrétisation temporelle généralement à intervalle régulier : les échantillons,
- la quantification qui discrétise les valeurs prises par les échantillons.

Nous allons par la suite développer les deux derniers points, le premier ayant déjà été traité au chapitre 3 du cours de première année. Nous étudierons également les transformations temps discret-fréquence ainsi que les propriétés spécifiques des signaux numériques.

2.2 Echantillonnage

2.2.1 Principe

L'échantillonnage (*sampling*) consiste à transformer un signal analogique (continu) $x(t)$ en un signal discret, $x^*(t)$, en capturant des valeurs à intervalle de temps régulier (ici le temps est une variable réelle quelconque). C'est une étape nécessaire pour pouvoir enregistrer, analyser et traiter un signal par ordinateur, car celui-ci ne peut traiter que des nombres. Il faut distinguer l'échantillonnage de la quantification, mais ce sont toutes deux des étapes nécessaires à la numérisation d'un signal.

Le signal échantillonné est obtenu par multiplication de ce signal analogique par un train d'impulsions (peigne de Dirac) $\delta_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$ d'aire unité et équi-espacées de la période d'échantillonnage T_e :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \quad (2.1)$$

En vertu de la propriété qui veut que $f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t)$, on a encore :

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (2.2)$$

L'échantillonnage a aussi des conséquences sur le spectre du signal initial $x(t)$. Elles peuvent être mises en évidence de la manière suivante : le signal $\delta_{T_e}(t)$ est périodique et peut donc être développé en série de Fourier. Le résultat en est :

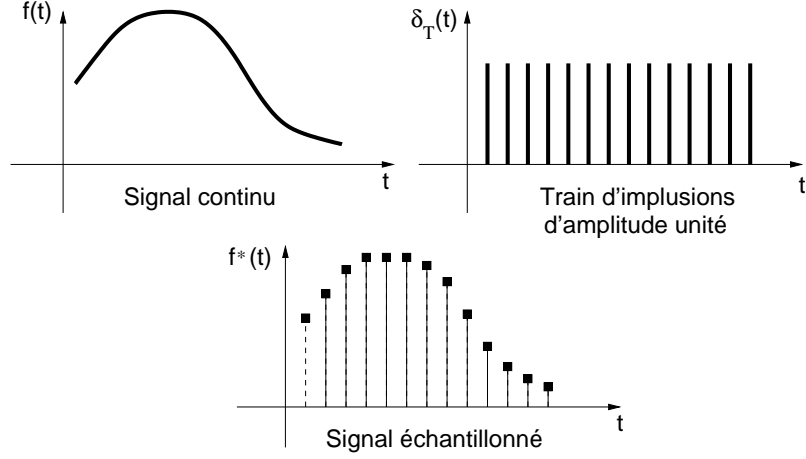


FIGURE 2.1 – Obtention d'un signal échantillonné : multiplication par un train d'impulsions.

$$\delta_{T_e}(t) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j k t / T_e} . \quad (2.3)$$

Le spectre de $\delta_{T_e}(t)$ est donné par

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k / T_e) . \quad (2.4)$$

On voit donc qu'à un train d'impulsions de période T_e dans le domaine temporel correspond un train d'impulsions de période $1/T_e$ dans le domaine fréquentiel. A la multiplication de 2 signaux dans le domaine temporel correspond (à un facteur 2π près) dans le domaine fréquentiel la convolution des spectres de ces 2 signaux. Dès lors, la transformée de Fourier $X^*(\omega)$ du signal échantillonné $x^*(t)$ est donnée par

$$X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes P(\omega) \quad (2.5)$$

Le spectre du signal $\delta_{T_e}(t)$ est lui-même un train d'impulsions espacées de $1/T_e$ sur l'axe des fréquences. La convolution d'un signal avec un train d'impulsions se fait en reproduisant le signal au droit de chacune des impulsions (voir figure 2.1). Le spectre du signal échantillonné est donc donné par

$$X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - 2\pi k / T_e) \quad (2.6)$$

On voit que l'effet de l'échantillonnage est de périodiser le spectre du signal analogique initial, au rythme $1/T_e$, comme cela est illustré sur la figure 2.2. On a donc, pour toute fréquence f :

$$X^*(f + f_e) = X^*(f) \quad (2.7)$$

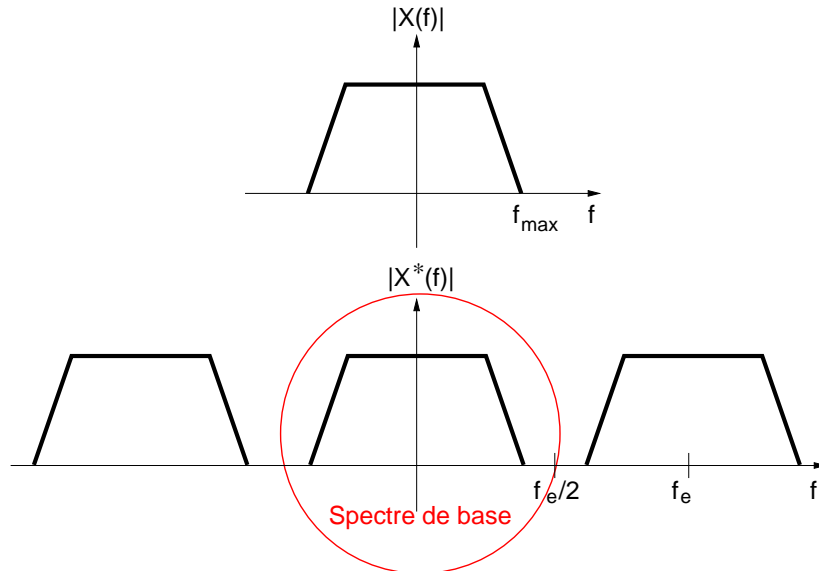


FIGURE 2.2 – Spectre d'un signal échantillonné (cas où $f_{\max} < f_e/2$) : on notera la périodicité fréquentielle.

Du fait que le spectre de $x^*(t)$ est périodique, on a besoin de le connaître uniquement sur une période. On choisit l'intervalle de fréquences $[-f_e/2, +f_e/2]$, qu'on appelle période principale ou spectre de base.

Dans le cas où la fréquence maximale contenue dans le signal à échantillonner f_{\max} est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage f_e , il n'y a pas de recouvrement entre les périodicités spectrales (voir Fig. 2.2). En revanche s'il existe des composantes du signal dont les fréquences sont supérieures à $f_e/2$, on note un recouvrement spectral (*aliasing*) (voir Fig. 2.3). Le spectre du signal obtenu ne correspond plus à celui du signal initial. Il ne sera alors pas possible de reconstruire le signal après traitement numérique.

Théorème de Shannon

Pour pouvoir reconstituer, sans perte d'information, un signal continu à partir d'un train d'échantillons de période T_e , il faut que la fréquence d'échantillonnage soit au moins égale au double de la fréquence maximale contenue dans le signal.

Exemple : le téléphone. Le spectre audio est limité à l'intervalle de fréquences $[0 - 2500]$ Hz afin que le signal puisse être reconstitué correctement après être échantillonné à la fréquence $f_e = 6$ KHz.

Le filtre analogique évoqué au début de ce chapitre sert à limiter la fréquence maximale contenue dans le signal continu, avant que celui-ci soit échantillonné, en appliquant un filtre passe-bas appelé filtre anti-repliement (*anti-aliasing filter*).

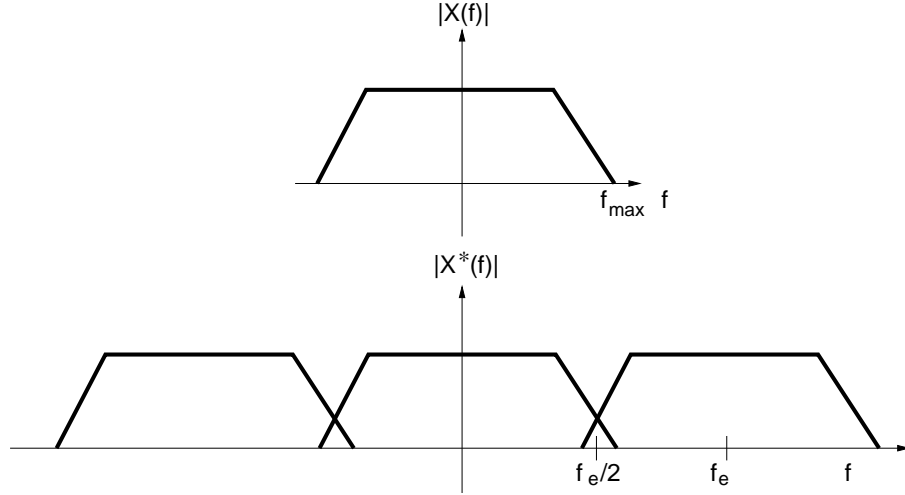


FIGURE 2.3 – Spectre d'un signal échantillonné (cas où $f_{\max} > f_e/2$) : le spectre du signal obtenu ne correspond plus au spectre du signal initial.

Bloquage

La reconstitution (approchée du signal) doit d'autre part ne laisser passer que le spectre de base. C'est dans ce spectre uniquement qu'est contenu l'information utile et d'autre part, il n'est physiquement pas réalisable de reconstituer un signal de spectre périodique infini. Le circuit bloqueur a ce rôle. Le bloqueur d'ordre 0 (car de valeur temporelle constante) maintient la valeur du signal échantillonné durant toute la période d'échantillonnage. C'est un interpolateur d'ordre 0. C'est donc un filtre passe-bas (qu'on supposera idéal) de fonction de transfert de Laplace $B_o(s)$:

$$B_o(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} \quad (2.8)$$

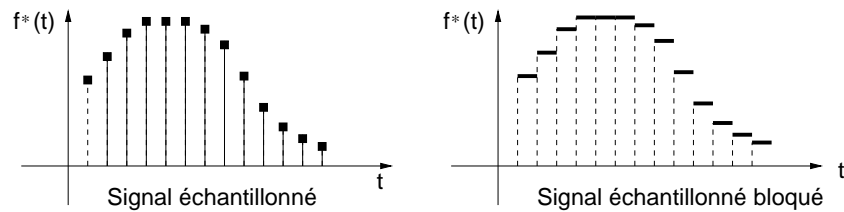


FIGURE 2.4 – Obtention d'un signal échantillonné bloqué : la valeur acquise au moment de la capture de l'échantillon est maintenue durant toute la période d'échantillonnage.

2.3 Transformées d'un signal échantillonné

2.3.1 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace $X^*(s)$ d'un signal échantillonné $x^*(t)$ est définie par

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n T_e) \mathcal{L}[\delta(t - n T_e)] \quad (2.9)$$

Or,

$$\mathcal{L}[\delta(t - n T_e)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t - n T_e) dt, \quad (2.10)$$

on en déduit directement que :

$$X^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n T_e) e^{-n T_e s} \quad (2.11)$$

2.3.2 Transformée en z

La transformée en z est un outil mathématique de traitement du signal, qui est l'équivalent discret de la transformée de Laplace. Elle est utilisée entre autres pour le calcul de filtres numériques à réponse impulsionnelle infinie (RII) ainsi que pour l'étude de la stabilité des filtres numériques. Sa définition mathématique est la suivante : la transformation en z est une application qui transforme une suite $\{x(n)\}$ (définie sur les entiers) en une fonction $X(z)$ d'une variable complexe nommée z , telle que

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n T_e) z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.12)$$

La variable n représente en général le temps discrétisé, la variable complexe z ne représente rien de particulier, il s'agit d'une création purement abstraite. Lorsqu'on analyse le signal $x(n)$, on dit que l'on est dans le domaine temporel, lorsqu'on étudie $X(z)$, le domaine est appelé fréquentiel par analogie avec la transformée de Fourier. Lorsque l'on compare les définitions 2.12 et 2.11, on en déduit que $z = e^{T_e s}$, $z \in \mathbb{C}$.

Le domaine de convergence définit l'existence de la transformée en z . C'est le sous-ensemble de \mathbb{C} dans lequel la série précédente converge. On l'appelle également *couronne de convergence*. La plupart du temps, les expressions des transformées en z utilisées en traitement du signal sont des fractions rationnelles de la variable z . On appelle "pôles" les racines du dénominateur de la transformée et "zéros" les racines de son numérateur. Dans de nombreux calculs, les pôles sont simples. Il est alors possible d'écrire les transformées sous la forme d'une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle. La transformée s'écrit alors sous la forme d'une somme de fractions dont le dénominateur est de degré un dans le cas des fonctions à coefficients complexes et de degré deux dans le cas des fonction à coefficients réels. Ce qui permet de retrouver la plupart des transformées simples.

Exemple : la sinusoïde amortie $x(t) = a^t \cos(\omega_0 t + \varphi) \Gamma(t)$ pour $t \geq 0$, a étant un réel positif inférieur à un. Dans ce cas, $X(z)$ est définie à l'extérieur du disque de rayon $|a|$ et vaut $X(z) = \frac{\cos(\varphi) - az^{-1} \cos(\omega_0 - \varphi)}{1 - 2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$.

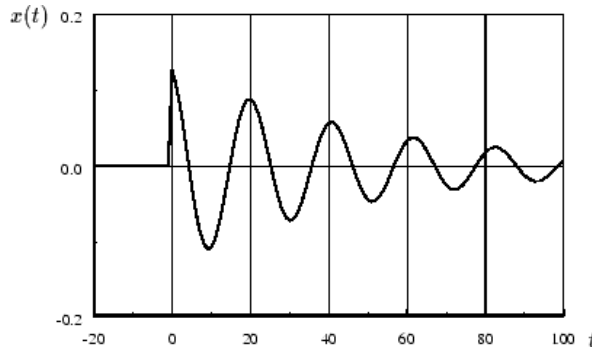


FIGURE 2.5 – Sinusoïde amortie.

La plupart du temps le domaine de convergence de la transformée en z est une couronne qui contient le cercle de rayon 1, les fonctions étudiées tendant souvent vers zéro comme une fonction exponentielle lorsque $t \rightarrow \pm\infty$. Le choix de la variable z^{-1} et non z , est cohérent avec la définition de la transformée de Fourier. Cet opérateur représente le retard d'un échantillon. Il incite souvent à écrire les transformées des signaux causaux (nuls pour les valeurs négatives de t) en fonction de z^{-1} et non de z . Lorsque le signal est non causal (lorsqu'il a des composantes pour $t < 0$), on écrit souvent ces composantes en fonction de la variable z . Cependant, la notion de causalité est contenue dans le domaine de convergence et non dans la formule donnant la transformée en z qui peut s'écrire aussi bien en fonction de la variable z que de la variable z^{-1} .

Propriétés de la transformée en z

- linéarité : $\mathcal{Z}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$, $\forall (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$,
- Théorème du retard : $\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = \mathcal{Z}\{x(t-kT_e)\Gamma(t-kT_e)\} = z^{-k} X(z)$,
- Théorème de l'avance :

$$\mathcal{Z}\{x(n+k)\} = \mathcal{Z}\{x(t+kT_e)\Gamma(t)\} = z^k X(z) - z^k x(0) - z^{k-1} x(1) - \dots - z x(k-1),$$

- Multiplication par n : $\mathcal{Z}\{n x(n)\} = -z \frac{d}{dz} X(z)$,
- Modulation : $\mathcal{Z}\{a^n x(n)\} = X(\frac{z}{a})$.

Cette propriété permet, en multipliant le signal par un signal exponentiel a^n , de modifier la position des pôles et des zéros de sa transformée en z . La valeur du paramètre a découle de la modification particulière

choisie.

- Théorème de la convolution discrète (Théorème de Borel) :

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) x_2(n)\right\} = X_1(z) X_2(z),$$

- Théorème de la valeur initiale (signaux causaux)

$$\lim_{t \rightarrow 0} x^*(t) = \lim_{n \rightarrow 0} x(n) = \lim_{z \rightarrow +\infty} X(z),$$

- Théorème de la valeur finale (signaux causaux)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) X(z),$$

Quelques exemples de transformées en z (signaux causaux)

- $\mathcal{Z}\{\delta(n)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) z^{-k} = 1,$
- $\mathcal{Z}\{\delta(n-l)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k-l) z^{-k} = z^{-l},$

On constate que si la séquence $\delta(n)$ est retardée de l échantillons, sa transformée en z est multipliée par z^{-l} ,

- $\mathcal{Z}\{\Gamma(n)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}$ (suite géométrique de raison z^{-1}),
- $\mathcal{Z}\{n \Gamma(n)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} k z^{-k} = \frac{z}{(z-1)^2},$
- $\mathcal{Z}\{a^n \Gamma(n)\} = \frac{1}{1-a z^{-1}},$
- $\mathcal{Z}\{e^{jn\omega T_e} \Gamma(n)\} = \frac{1}{1-e^{j\omega T_e} z^{-1}},$
- Etant donné que $e^{jn\omega T_e} = \cos n\omega T_e + j \sin n\omega T_e$, on en déduit immédiatement que :

$$\mathcal{Z}\{\cos n\omega T_e \Gamma(n)\} = \frac{1 - \cos \omega T_e z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega T_e z^{-1} + z^{-2}},$$

$$\mathcal{Z}\{\sin n\omega T_e \Gamma(n)\} = \frac{\sin \omega T_e z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega T_e z^{-1} + z^{-2}}.$$

2.3.3 Transformée en z inverse

Il s'agit de retrouver les valeurs aux instants d'échantillonnage $x(nT_e)$ à partir de la transformée en z , $X(z)$. La transformée en z inverse est donnée par l'expression :

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (2.13)$$

où C est un chemin fermé parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et appartenant entièrement au domaine de convergence (chemin entourant tous les pôles de $F(z)$). En pratique, ce calcul s'effectue souvent à l'aide du théorème des résidus et la formule devient dans le cas d'un signal causal :

$$x(n) = \sum_{z_i = \text{pôles de } X(z)} \text{Res}\{z^{n-1} X(z)\}_{z=z_i} \quad (2.14)$$

Exemple : Déterminer la séquence $f(n)$ à partir de la transformée en z de $f(t)$ suivante

$$F(z) = \frac{z(1 - e^{-\alpha T_e})}{(z-1)(z - e^{-\alpha T_e})}$$

2.3.4 Equations aux différences

L'application de la transformée en z à la résolution d'équations linéaires aux différences à coefficients constants est directe à partir du théorème de l'avance. Une équation aux différences (appelée aussi équation aux récurrences) d'ordre n , linéaire à coefficients constants s'exprime sous la forme

$$x(k+n) + a_{n-1}x(k+n-1) + \dots + a_1x(k+1) + a_0x(k) = u(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

Si la suite $\{x(k)\}$ a pour transformée en z , $X(z)$, la suite avancée d'un échantillon $\{x(k+1)\}$ a pour transformée en z , $zX(z) - z x(0)$, et par conséquent on a aussi $\mathcal{Z}\{x(k+2)\} = z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1)$, etc

Finalement, on obtient une forme polynomiale qui permet d'exprimer $X(z)$ en fonction de $U(z)$, la transformée en z de $\{u(n)\}$. Ceci a été rendu possible par le fait que le théorème de l'avance introduit les conditions initiales $x(0)$, $x(1)$,

Exemple : $x(k) - x(k-1) = k$, $k = 0, 1, \dots$ et $x(0) = x_0$.

Solution : (prendre l'avance)

$$zX(z) - z x_0 - X(z) = \mathcal{Z}\{k+1\} = z \mathcal{Z}\{k\} = z \frac{z}{(z-1)^2}.$$

2.3.5 Transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de Fourier discrète d'un processus à temps discret $\{x(n)\}$ de période N est :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_e) e^{-2j\pi \frac{nk}{N}}. \quad (2.16)$$

Cette transformée est elle-même de période N et de puissance moyenne finie. Elle permet de calculer la transformée de Fourier d'une séquence de longueur finie à l'aide d'un ordinateur, la TF au sens usuel étant dédiée à des signaux continus supposés de support infini. C'est pourquoi dans sa définition apparaît un pas d'échantillonnage en fréquence $\frac{k}{N}$. L'intérêt pratique de la TFD vient de ce qu'il existe des algorithmes qui permettent de calculer cette transformée avec beaucoup moins de multiplications qu'il n'en faudrait pour calculer la transformée de Fourier usuelle. Le calcul de la TFD nécessite alors $N \log_2(N)$ multiplications alors que le calcul classique en demanderait N^2 . L'utilisation de ces algorithmes

permet donc des calculs rapides de la TFD, d'où son nom de FFT (*Fast Fourier Transform*). On peut donner également la relation exprimant la transformée de Fourier discrète inverse :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2j\pi \frac{nk}{N}}. \quad (2.17)$$

La TFD est une fonction discrète de la fréquence et les fréquences réduites sont les valeurs $\nu_k = \frac{k}{N}$, $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$. Si l'observation du signal échantillonné $x(n)$ est limité à N échantillons (temps d'observation égal à $\frac{N}{f_e}$), le signal observé est représenté par la séquence finie $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1})$. La TFD de celle-ci coïncide avec la transformée du signal original $x(t)$ uniquement aux fréquences multiples de $\Delta\nu = \frac{f_e}{N}$. La valeur $\Delta\nu$ s'appelle la *résolution spectrale* de l'analyse du signal.

De plus, la transformée de Fourier discrète permet d'introduire la notion de *convolution circulaire* (convolution discrète). Etant données deux séquences numériques $\{x(n)\}$ et $\{y(n)\}$ de transformées de Fourier discrètes $X(k)$ et $Y(k)$ respectivement, on recherche la séquence numérique $H(k)$ qui admet pour TFD : $H(k) = X(k) Y(k)$, $\forall k \in \{0, \dots, N-1\}$, calcul qui aboutit à

$$H(k) = \sum_{n \in [N]} x(n) y(k-n). \quad (2.18)$$

que l'on appellera convolution circulaire de $x(n)$ et $y(n)$ où $[N]$ est un intervalle quelconque de taille N .

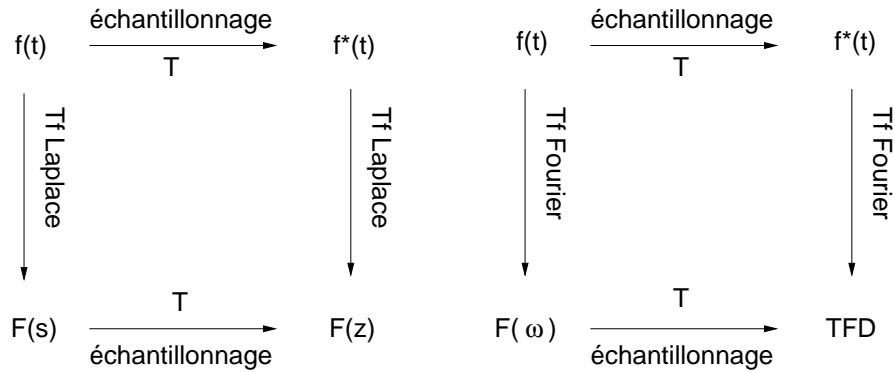


FIGURE 2.6 – Résumé de l'ensemble des transformations.

2.3.6 Convolution discrète

La définition de la convolution circulaire fournie ci-dessus et issue de la TFD correspond bien évidemment au cas où l'intervalle est de taille finie. D'une manière générale et par analogie à la définition (2.19) de la convolution pour des signaux continu, le produit de convolution de deux séquences finies ou infinies $x(n)$ et $y(n)$ est défini par :

$$(x \star y)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y(k-n) . \quad (2.19)$$

Remarques Il est important de bien voir la différence qui existe entre la TF définie par l'intégrale de Fourier, et la transformée de Fourier discrète introduite dans cette section. L'intégrale de Fourier qui fournit la transformée de Fourier requiert la connaissance de la totalité du signal considéré ; de plus, pratiquement, ce n'est pas directement sur le signal $x(t)$ que porte le calcul, mais sur son équivalent numérisé. Le calcul de la TFD introduit donc des erreurs sur le spectre du signal :

- Erreur de repliement de spectre.
Il faut respecter la fréquence d'échantillonnage de Shannon. Pour pouvoir choisir la fréquence d'échantillonnage de manière à respecter le critère de Shannon, il faut connaître préalablement, ne serait-ce que de manière approximative, la fréquence maximale du spectre du signal. Cette connaissance n'est pas toujours acquise dans les différentes situations où l'on est amené à utiliser les techniques du traitement du signal. Pour répondre à cette difficulté, on peut procéder de deux manières :
 1. On filtre le signal au moyen d'un filtre anti-repliement dont la fréquence de coupure est suffisamment élevée pour qu'on puisse espérer que le signal ne possède aucune composante spectrale au-delà de cette fréquence. Puis, on échantillonne le signal suivant le critère de Shannon.
 2. Sans filtrer le signal, on l'échantillonne à une fréquence arbitrairement élevée (autant que possible - sur-échantillonnage), en espérant ainsi respecter le critère de Shannon. Bien entendu, ceci engendre un plus grand nombre d'échantillons à traiter.
- Erreur de troncature temporelle.
Le calcul de la TFD s'effectue sur un horizon fini (taille de $[N]$) du fait de la troncature temporelle à l'aide d'une fenêtre qui se traduit par un étalement du spectre du signal vers les fréquences élevées.
- Erreur due à l'échantillonnage de la transformée de Fourier. Il est nécessaire d'examiner si l'échantillonnage de la transformée de Fourier est correct. Si on a des doutes, il faut diminuer le pas d'échantillonnage soit en échantillonnant le signal moins vite, soit en rajoutant des zéros aux échantillons du signal (technique appelée *zero padding*) : si on ajoute N zéros au calcul de la TFD d'un signal de taille N , la résolution fréquentielle est doublée. De même, si on échantillonne la transformée de Fourier, on périodise le signal temporel. Donc, au lieu d'avoir un signal continu, non périodique, doté d'une TF continue non périodique, on a un signal périodique échantillonné, doté d'une transformée de Fourier périodique et échantillonnée.

2.4 Energie et puissance d'un signal numérique

Par analogie au cas des signaux continus, nous abordons ici les définitions sur l'énergie et la puissance d'un signal numérique.

- Energie : L'énergie moyenne d'un signal numérique représenté par la séquence $\{x(n)\}$ est définie par :

$$\mathcal{W}_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 . \quad (2.20)$$

- La puissance moyenne du signal numérique représenté par la séquence $\{x(n)\}$ sur un intervalle de dimension N est définie par :

$$\mathcal{P}_x(M, M+N-1) = \frac{1}{N} \sum_{k=M}^{M+N-1} |x(k)|^2 . \quad (2.21)$$

- La puissance moyenne totale du signal numérique représenté par la séquence $\{x(n)\}$ est définie par :

$$\mathcal{P}_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{P}_x\left(-\left(\frac{N-1}{2}\right), \frac{N}{2}\right) . \quad (2.22)$$

2.5 Quantification

2.5.1 Principe et caractéristiques de la conversion

La quantification (*quantization*) d'un signal analogique consiste à remplacer l'infinité de valeurs différentes qu'il peut prendre (comme une tension ou une intensité électrique par exemple qui sont des grandeurs macroscopiquement continues) par un nombre fini N_q de valeurs. Si ces dernières sont équidistantes, on parle de quantification linéaire, et la distance qui sépare 2 valeurs consécutives possibles est appelée pas de quantification q .

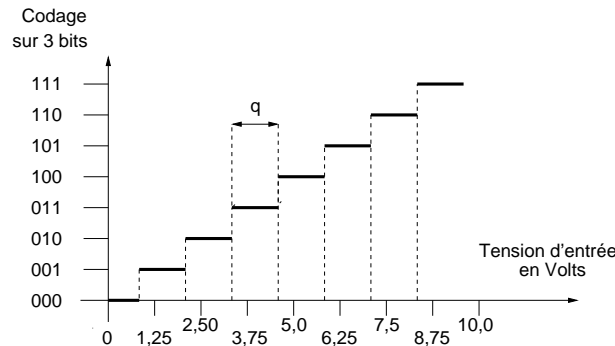


FIGURE 2.7 – Fonction de transfert d'un convertisseur linéaire (CAN).

A chaque instant d'échantillonnage $n T_e$ (n nombre entier), le signal $x(t)$ est remplacé par la valeur la plus proche parmi les valeurs possibles du signal

quantifié. On peut adopter une notation permettant de distinguer d'une part, $x(n) = x_n = x(nT_e) = x^*(t)$, signal échantillonné de $x(t)$, et sa version quantifiée d'autre part, notée souvent x_n .

La quantification des échantillons est effectuée par un Convertisseur Analogique Numérique (CAN ou ADC). Pour mener à bien cette opération, il convient de respecter un certains nombres de règles théoriques et de choisir correctement le CAN (résolution, amplitude, temps de conversion,...). Les transformations doivent être réalisées sans perte d'informations et sans accroître inutilement le nombre de données numériques. Le CAN est précédé d'un bloqueur, qui maintient le signal à une même valeur obtenue au moment de l'échantillonnage. La période d'échantillonnage doit bien sûr être supérieure au temps de conversion, c'est pourquoi celui-ci est une caractéristique essentielle du CAN. Inversement, lorsque le traitement est effectué, on a souvent besoin de revenir au monde analogique pour transmettre des signaux tels que la parole ou les images. C'est la fonction des convertisseurs numérique-analogique qui effectuent l'opération inverse des CAN. Un CAN est caractérisé essentiellement par :

- la résolution (le pas de quantification q), lié à l'intervalle de mesure V (intervalle de valeurs autorisées pour le signal à l'entrée, par exemple $V = 10$ V pour un signal pouvant évoluer entre -5 V et $+5$ V) et au nombre Nq de pas utilisés : $q = V/Nq$.

La résolution d'un CNA est la plus petite variation qui se répercute sur la sortie analogique à la suite d'un changement de l'entrée numérique (égale au poids du bit de poids faible). La résolution peut également être exprimée en pourcentage de la pleine échelle (PE ou *full scale*) :

$$\text{Résolution (\%PE)} = \text{pas de progression} / \text{pleine échelle} . \quad (2.23)$$

En augmentant le nombre de bits, on augmente la résolution. Dans la spécification des fabricants de CNA, la résolution est exprimée par le nombre de bits (typiquement 8, 12 ou 16 bits). Afin de ne perdre aucune information contenue dans les échantillons du signal, il faut choisir correctement le pas de quantification (cf. Théorème de Shannon) sous peine de repliement spectral.

- le temps de conversion (temps d'établissement ou *settling time*) : c'est la durée nécessaire aux composants électroniques pour convertir le signal et délivrer dans un registre (ou de manière équivalente, une case mémoire) un nombre entier correspondant à la valeur quantifiée. Pour les CNA, c'est l'intervalle de temps séparant l'instant où l'on présente la données numériques et l'instant où le signal analogique est disponible avec la précision voulue (de l'ordre de qq μs).
- l'erreur de quantification : le processus de quantification entraîne de par sa nature même une erreur. Si l'on appelle ϵ la différence entre la valeur analogique V_{ana} et la valeur numérique $V_{num} = m D_s$, (D_s est la valeur pour un échantillon), on a :

$$m D_s < V_{ana} < (m+1)D_s , \text{ ou encore } V_{num} = V_{ana} + \epsilon , \quad (0 < \epsilon < D_s) . \quad (2.24)$$

Comme les valeurs de ϵ ont toutes la même probabilité, cette erreur vaut 0.5 fois la valeur du bit de poids faible (LSB - *Lowest Significant Bit*) en moyenne. C'est-à-dire la moitié du pas de progression.

Cette erreur est de moyenne nulle et la puissance du bruit de quantification est alors défini comme la variance σ_q du signal $\epsilon(t)$. Sa valeur est obtenue si on considère que le pas de quantification (ou quantum) q est suffisamment faible pour considérer constant le signal entre deux pas d'échantillonnage. On obtient alors facilement sa valeur qui est :

$$\sigma_q^2 = E[\epsilon^2(kT_e)] = \frac{q^2}{12} . \quad (2.25)$$

- la fonction de transfert (CNA) : lorsque l'on présente à un convertisseur un mot de n bits, le CNA délivre un signal V_{ana} telle que :

$$V_{ana} = \{A_n/2 + A_{n-1}/4 + \dots + A_1/(2n)\} V_r \quad (2.26)$$

A_n est le MSB (bit de poids fort ou *Most Significant Bit*) et A_1 est le LSB. V_r étant une tension de référence et A_n l'état (0 ou 1) du bit de rang n . Le pas de quantification est tel que :

$$D_s = V_r/2n \quad , \quad \text{et la valeur pleine échelle : } V_{fs} = (2n - 1) V_r/2n . \quad (2.27)$$

- la tension de décalage (*offset*) : idéalement la tension de sortie d'un convertisseur NA est 0 Volt quand l'entrée numérique est nulle. En pratique, on mesure une petite tension de sortie due à l'erreur de décalage de l'amplificateur opérationnel de sortie. Typiquement, cette erreur est inférieure à 0,05 % PE. La majorité des CNA dont la sortie est une tension possèdent un bouton de réglage qui permet de compenser cette erreur.
- sa linéarité intégrale : c'est l'écart relatif maximum entre la réponse réelle du convertisseur et la droite correspondant à une réponse idéale. Elle est généralement exprimée en pourcentage de la pleine échelle ou en fraction du LSB (voir Fig. 2.8).

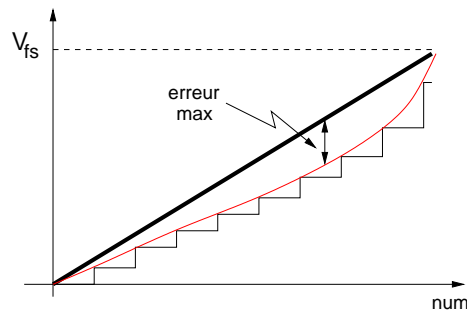


FIGURE 2.8 – Linéarité intégrale d'un convertisseur.

La plupart des CAN ont un fonctionnement basé sur des comparaisons successives entre un signal généré par le convertisseur et le signal à convertir. La précision du codage peut être altérée si entre deux comparaisons successives le signal à convertir varie sensiblement, ce qui est le cas lorsque la bande passante du signal n'est pas négligeable par rapport à la fréquence d'échantillonnage.

Il existe plusieurs structures de fonctionnement des CAN comme la conversion à rampe, la conversion par approximations successives, la conversion flash. Les temps de conversion de ces méthodes sont très différents et dépendent du nombre de composants électroniques. Les grandeurs physiques issues d'un processus informatique sont transformées en tension électrique continue (analogique) proportionnelle. C'est le rôle de la conversion numérique - analogique (CNA ou DAC).

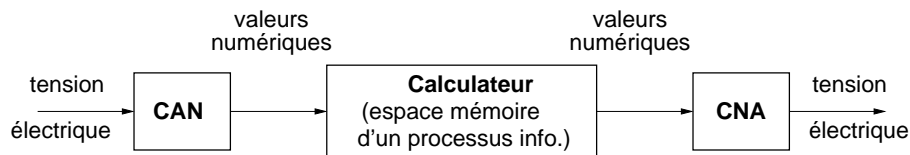


FIGURE 2.9 – Implantation des CAN et CNA auprès d'un calculateur.

Le calculateur, après traitement des données numériques, fournit un signal numérique qui est transformé en un signal analogique dans le temps et en amplitude :

- signal analogique en amplitude : rôle du CNA,
- signal analogique temporel : filtre de reconstruction.

L'instant de présentation des données numériques au convertisseur CNA doit être parfaitement défini dans le temps à l'aide d'un ordre de validation des données. La plupart des signaux de commande nécessaires à la régulation des procédés doivent être analogiques, afin que l'on puisse par exemple contrôler la vitesse d'un moteur à courant continu. Nous voyons donc sur la Fig. 2.9 que les CAN et les CNA jouent le rôle d'interfaces entre un système purement numérique, comme un ordinateur, et le monde extérieur à prédominance analogique.

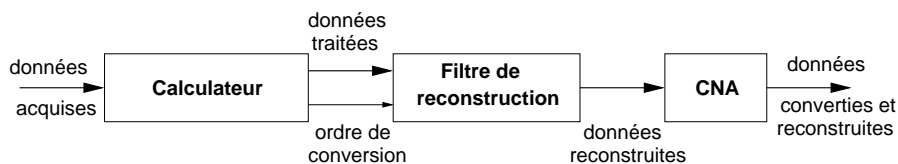


FIGURE 2.10 – Reconstruction des données numériques issues d'un calculateur.

Le filtre de reconstruction du signal peut être effectué par le calculateur (il l'est le plus souvent) (voir Fig. 2.10) et donc avant la conversion numérique-analogique. Il s'agit le plus souvent de "lisser" les données :

$$\boxed{\text{Reconstruction} = \text{Interpolation} + \text{Filtrage passe-bas}} \quad (2.28)$$

Exemple : Convertisseur numérique-analogique 4 bits - 8 Volts (unipolaire).
 Les $2^4 = 16$ nombres binaires différents que l'on peut représenter avec ces 4 bits sont représentés sur la Fig. 2.11.

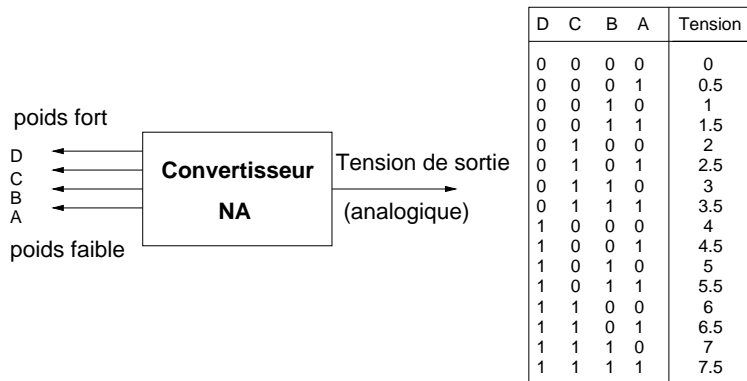


FIGURE 2.11 – Convertisseur NA 4 bits - 8 Volts (unipolaire).

2.5.2 Structures d'un CNA

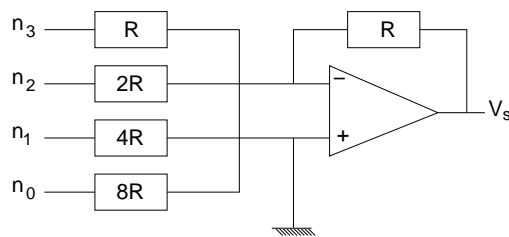


FIGURE 2.12 – CNA à résistances pondérées.

CNA à résistances pondérées

Le CNA à résistances pondérées utilise un amplificateur opérationnel monté en additionneur. Les entrées n_0 à n_3 sont connectées soit à la masse, soit à la tension V_r . La sortie V_s sera donc égale à

$$V_s = -V_r (n_3 + n_2/2 + n_1/4 + n_0/8) . \quad (2.29)$$

L'inconvénient majeur pour ce type de convertisseur, c'est qu'il faut des résistances dont les valeurs doublent à chaque fois, ce qui est difficile voire impossible, dès que le nombre de bits devient important.

CNA R-2R (réseau en échelle)

Ici, la tension de sortie V_s sera égale à :

$$V_s = -V_r (n_3 + n_2/2 + n_1/4 + n_0/8) R_f/2R . \quad (2.30)$$

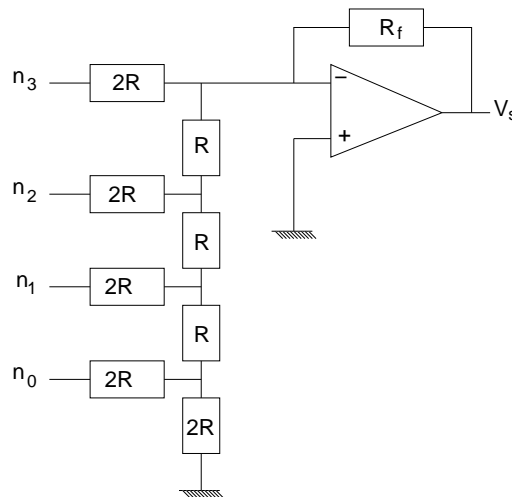


FIGURE 2.13 – CNA à réseau en échelle.

La résistance R peut simplement être obtenue par deux résistances $2R$ disposées en parallèle. Il y a cependant des sources d'erreur :

- le passage du niveau bas (0 V) au niveau haut (V_r) (commutation) des différentes entrées est réalisé par un interrupteur. Chaque entrée ayant son propre interrupteur, les temps de commutation ne sont jamais rigoureusement identiques (pour chaque interrupteur) et il peut apparaître des transitoires sur le signal analogique V_s .
Si, par exemple, on passe d'une valeur 0111 à la valeur immédiatement supérieure 1000 et si les interrupteurs commutent plus rapidement de l'état 1 vers l'état 0 que dans le sens inverse, on aura pendant un temps très court la valeur 0000 correspondant à un signal de sortie nulle. Le seul moyen de supprimer correctement ces perturbations (*glitches*) est de connecter un échantillonneur-bloqueur sur la sortie du convertisseur afin de maintenir le niveau de l'échantillon précédent pendant la transition.
- la linéarité du convertisseur dépend de la précision des résistances du réseau,
- la stabilité de la source de tension de référence V_r . En effet, le bruit dans l'alimentation est un frein à la résolution des convertisseurs. Ainsi, pour un convertisseur 16 bits - 5 V, le bruit de l'alimentation ne doit pas excéder 1/2 LSB, soit $40 \mu\text{V}$ (CNA ou CAN).

2.5.3 Structures d'un CAN

Une caractéristique importante d'un CAN est le temps de conversion. Il est largement supérieur à celui d'un CNA. Un CAN est plus difficile à réaliser qu'un CNA, et il contient souvent un CNA.

CAN à rampe numérique

Un compteur est branché aux entrées d'un CNA et la sortie de celui-ci augmente régulièrement à chaque coup d'horloge. La sortie du CNA est reliée à l'entrée d'un comparateur de tension. Dès que celle-ci est supérieure à la tension d'entrée, le comparateur force un état haut (1) à sa sortie, ce qui bloque le compteur et indique que la conversion est terminée. La valeur du compteur correspond à la valeur numérique attendue en sortie.

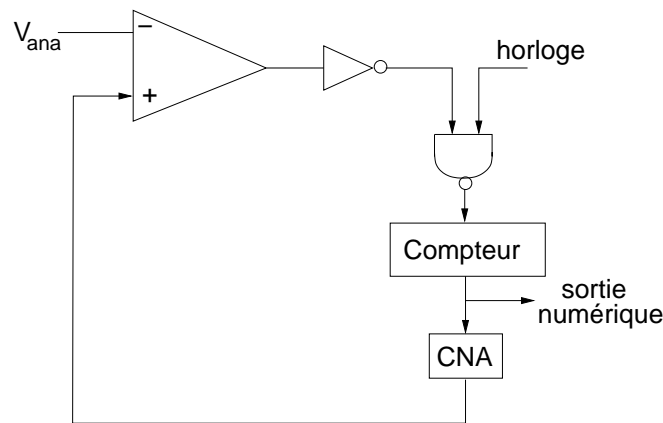


FIGURE 2.14 – Principe du CNA à rampe.

Le problème majeur de ce montage est que le temps de conversion est très long et variable. D'autre part, il faut réinitialiser le compteur à 0 à chaque conversion et la fréquence de l'horloge est limitée par le temps de conversion du CNA. Ainsi, si on dispose d'un convertisseur 12 bits ayant comme tension nominale $V_{ana} = 5$ V. Si l'entrée de celui-ci est mise à 5 V, le temps de conversion est de 4096 fois le temps du cycle de l'horloge, cycle qui est d'autre part limité par la conversion dans le CNA et le comparateur. La formule du temps de conversion peut donc en être déduite :

$$t_{conv} = t_{raz} + 2n/f_{horloge} . \quad (2.31)$$

CAN à rampe numérique avec compteur-décompteur

Ici, le compteur "suit" en permanence la tension d'entrée V_{ana} : si la tension de sortie du CNA est supérieure à la tension d'entrée le compteur décompte, sinon il compte. Il n'est pas nécessaire de réinitialiser le compteur à chaque conversion. Ce convertisseur a un temps de conversion moins grand que le montage précédent (sauf pour la première conversion) mais ce temps de conversion est encore variable.

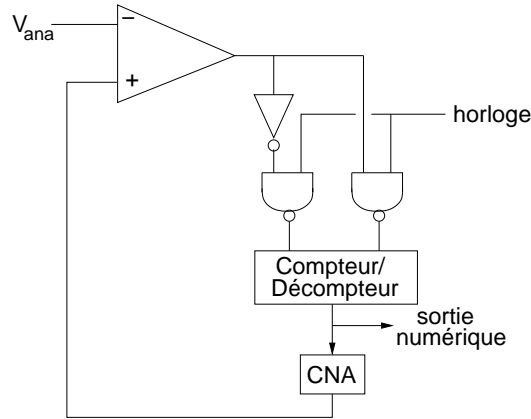


FIGURE 2.15 – Principe du CNA à rampe et compteur/décompteur.

CAN à approximations successives

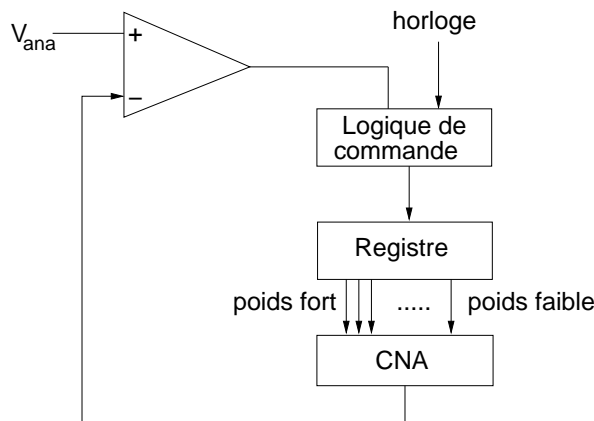


FIGURE 2.16 – Principe du CNA à approximations successives.

Ce type de CAN possède des circuits plus complexes que le CAN à rampe numérique mais le temps de conversion est beaucoup plus court. Une logique de commande modifie le contenu d'un registre bit par bit jusqu'à ce que la donnée qui s'y trouve, soit l'équivalent numérique de la tension analogique V_{ana} (à la sensibilité près du comparateur, et à la précision près du CNA).

Pour un convertisseur n bits, la conversion se fait en n étapes (donc n cycles d'horloge). Si, par exemple, pour un convertisseur 4 bits de résolution 1 V, on souhaite convertir la tension d'entrée analogique $V_{ana} = 10,4$ V. On place tout d'abord le bit de poids fort à 1 (1000). Comme la sortie du CNA est de 8 V et donc inférieure à V_{ana} , on garde le bit de poids fort à 1. On réitère cette opération pour les autres bits du registre :

- $1000 = 8 \text{ V} < V_{ana} \Rightarrow$ bit 3 mis à 1 pour la suite,
- $1100 = 12 \text{ V} > V_{ana} \Rightarrow$ bit 2 mis à 0 pour la suite,
- $1010 = 10 \text{ V} < V_{ana} \Rightarrow$ bit 1 mis à 1 pour la suite,

– $1101 = 11 \text{ V} > V_{ana} \Rightarrow \text{bit } 0 \text{ mis à } 0$

– $\Rightarrow \text{résultat : } 1100 = 10 \text{ V.}$

Sur cet exemple on voit que la conversion par approximations successives délivre une valeur numérique toujours inférieure à l'entrée analogique.

CAN flash (ou parallèle)

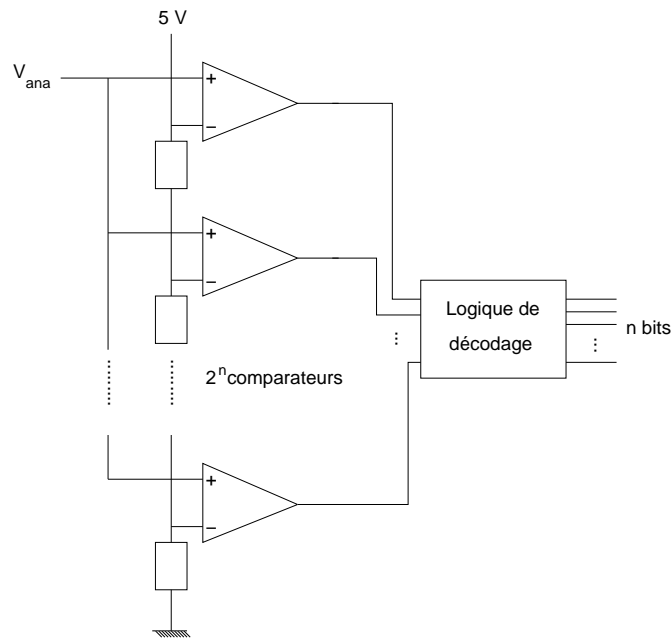


FIGURE 2.17 – Principe du CNA flash.

On compare la tension V_{ana} de l'échantillon aux niveaux de quantification $D_s, 2D_s, \dots, kD_s$ à l'aide de k comparateurs à qui l'on présente simultanément le signal V_{ana} . Sur l'ordre de conversion, tous les comparateurs dont les niveaux de référence sont inférieurs à la valeur V_{ana} basculent à l'état logique 1 et tous les autres restent à l'état bas 0. Un décodeur transforme les signaux présents à la sortie de l'ensemble des comparateurs en un signal numérique parallèle codé en binaire pur. Pour une résolution de n bits, on a besoin de $2n$ comparateurs. L'avantage principal de ce montage de convertisseur est qu'il fonctionne en parallèle ce qui lui confère une grande rapidité.

2.6 Corrélation numérique

On a vu au chapitre 2, les définitions de l'autocorrélation et de l'intercorrélation pour des signaux continus. La corrélation est une mesure énergétique de la similitude de forme et de position entre deux signaux décalés. Pour des signaux discrets à énergie finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Autocorrélation : corrélation entre le signal $x(n)$ et lui-même :

$$\gamma_{xx}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) x^*(n-k) . \quad (2.32)$$

Intercorrélation : corrélation entre le signal discret $x(n)$ et le signal discret $y(n)$:

$$\gamma_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) y^*(n-k) . \quad (2.33)$$

De manière similaire, pour des signaux discrets à puissance moyenne finie, on définit l'autocorrélation et l'intercorrélation de la manière suivante :

Autocorrélation : corrélation entre le signal $x(n)$ et lui-même :

$$\gamma_{xx}(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n) x^*(n-k) . \quad (2.34)$$

Intercorrélation : corrélation entre le signal discret $x(n)$ et le signal discret $y(n)$:

$$\gamma_{xy}(k) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} x(n) y^*(n-k) . \quad (2.35)$$

En pratique, les calculs sont limités à un voisinage fini (un horizon N fini). Il s'agit alors d'une approximation lorsque les séquences $x(n)$ et $y(n)$ correspondent à des réponses impulsionnelles infinies (RII).

2.7 Exercices

1. Calculer la transformée en z de la suite de nombres entiers $\{y(k)\}$ pour $y(k) = 1, 2, 3, 0, 0, \dots, 0, \dots$ pour $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.
2. Démontrer le théorème de l'avance de k périodes.
3. Calculer la transformée en z de $f(t) = t \Gamma(t)$.
4. Calculer la transformée en z de la séquence numérique suivante :
 $g(n+2) - 5g(n+1) + 6g(n) = 1$ pour $n \geq 0$ et avec les conditions initiales
 $g(0) = 2, g(1) = 3$.

5. Quelles sont les transformées en z de :

(a) $x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma(n),$

(b) $x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{3}\right)^n \Gamma(n),$

Rep : $X_1(z) = \frac{z}{z-1/3}$ et $x_2(n) = 4 \left(\frac{1}{6}\right)^n \Gamma(n) \rightarrow X_2(z) = \frac{4z}{z-\frac{1}{6}}.$

6. Quelle est l'énergie du signal $x_1(n)$ défini à la question précédente ?
7. Etant donné la transformée en z suivante :

$$F(z) = \frac{0,792 z^2}{(z-1)(z^2 - 0.416z + 0.208)}$$

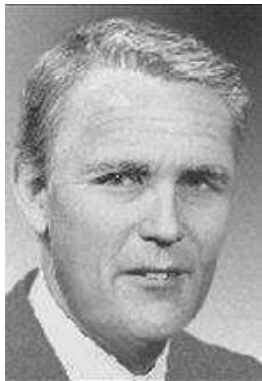
Déterminer la valeur de la séquence $f(kT_e)$ quand $k \rightarrow +\infty$.

8. Pour un convertisseur numérique-analogique 5 bits, quand l'entrée est égale à 10100, la tension de sortie est de 100 mV, calculer la pleine échelle, la résolution (pas de quantification) et la tension de sortie pour une entrée numérique égale à 11101.
9. Soit les caractéristiques suivantes d'un CAN 5 Volts :
résolution 12 bits ; erreur de linéarité pleine échelle 0,03 % PE.
 - (a) Indiquer l'erreur de quantification en volts,
 - (b) Donner l'erreur totale en volts.
10. Calculer la Transformée de Fourier Discrète de la suite comportant $N = 16$ termes tels que :

$$\begin{cases} x(0) &= x(1) = x(2) = x(14) = x(15) = 1 \\ x(n) &= 0 \quad \text{pour } 3 \leq n \leq 13 \end{cases}$$

Chapitre 3

Filtrage numérique



Rudolf Emil Kalman (né le 19 mai 1930) est un mathématicien et un automaticien américain d'origine hongroise, ingénieur en électrotechnique de formation. Il est surtout connu pour sa contribution à l'invention du filtre de Kalman, une technique mathématique de filtrage très utilisée pour extraire un signal à partir de mesures bruitées. Les idées de Kalman sur le filtrage rencontrèrent un certain scepticisme, à tel point qu'il dut publier d'abord ses travaux dans un journal de mécanique (au lieu d'électrotechnique). Il eut plus de succès, cependant, lorsqu'il rencontra Stanley Schmidt au Ames Research Center de la NASA en 1967. Cela mena à l'utilisation des filtres de Kalman pour le programme Apollo.

3.1 Introduction

Nous allons traiter dans ce chapitre du filtrage linéaire numérique. Un filtre numérique est constitué d'un groupement d'entités logiques (circuits, processus dédiés) astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur, différentiateur,...). Le calcul porte sur une séquence (ou suite) de nombres introduite à son entrée et qui fournit une séquence numérique modifiée, c'est-à-dire filtrée ou traitée, à sa sortie. La plupart des modèles de filtres analogiques (cf. Chapitre 3) peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique.

Un filtre numérique est généralement constitué des éléments suivants :

- un ou plusieurs organes de retard (ce sont des registres à décalage jouant le rôle de mémoires retardées) et pilotés par une horloge,
- des opérateurs arithmétiques (additionneurs et multiplieurs),
- des registres (programmables) fournissant les coefficients de pondération du filtre.

La réalisation concrète d'un filtre numérique consistera en fait à matérialiser l'algorithme de calcul pour la structure retenue. On aura pour cela la possibilité de travailler :

- soit en logique câblée (assemblage d'organes logiques, tels que des portes, mémoires, etc...),
- soit en logique programmée : organisation des opérations autour d'un processeur de traitement du signal (DSP - Digital Signal Processor), ou même, par l'utilisation d'un microprocesseur (micro-ordinateur) standard.

Le champ d'applications du filtrage numérique est très vaste puisqu'il va des télécommunications au traitement de la parole, en passant par des systèmes d'asservissement, les radars et sonars, la prospection sismique, la "HI-FI", etc... C'est surtout, à l'origine, dans les télécommunications que leur usage s'est très vite répandu car à la fois leur capacité de mémoire et la vitesse de traitement se trouvaient adaptées à la plupart des fonctions remplies sous forme numérique : codage-décodage et (dé-)compression d'images (JPEG - Joint Photographic Experts Group), de vidéos (MPEG - Moving Picture Experts Group) et du sons (informatique, télévision numérique), modems, contrôleurs de disque durs, accélérateurs graphique 3D, animation en réalité virtuelle, reconnaissance d'images, suspensions actives d'automobiles, servo-moteurs à commande numérique,....

Dans de nombreuses applications, sont utilisés des DSP dédiés, c'est-à-dire des DSP qui sont directement "programmés" avec un logiciel particulier à la conception (soit en ROM, soit câblé).

Les avantages du filtrage numérique par rapport au filtrage analogiques sont :

- la reproductivité : les caractéristiques de tous les filtres numériques établis sur une même configuration sont rigoureusement identiques,
- la souplesse : la réponse en fréquence peut être très aisément modifiée en changeant les coefficients arithmétiques : le domaine des fréquences de travail est facilement déplacé par modification de la fréquence d'échantil-lonnage,
- la précision : les différentes manipulations étant effectuées sur des nombres, la précision ne dépend, en grande partie, que de celle des CAN et CNA,
- l'association de filtres : la mise en série de filtres numériques ne pose aucun problème d'interaction, tel que celui que l'on rencontre pour l'adaptation des impédances des filtres analogiques,
- la stabilité des caractéristiques : pas de vieillissement des composants dû à l'influence de la température sur les caractéristiques du filtre.

En revanche, les principaux inconvénients sont liés au problème de l'échantillonnage (spectre du signal toujours limité) nécessitant l'utilisation de processeurs ayant une bonne rapidité d'exécution pour pouvoir traiter des signaux ayant une forte "dynamique" (fréquences élevées) en temps réel.

D'une manière générale, les filtres numériques se caractérisent par le traitement entièrement numérique du signal. Typiquement, les filtres numériques sont représentés par :

- la réponse impulsionnelle,
- l'équation aux différences,
- la transformée en z (ou la fonction de transfert en z).

Comme pour le cas continu, le filtrage linéaire se traduit par l'emploi de la convolution. Celle-ci s'exprime en discret par des additions et des multiplications. Quand un filtre numérique est représenté par une suite de nombres qui constitue sa réponse impulsionnelle $h(n)$, au signal à filtrer représenté par la suite numérique $x(n) = x(nT_e)$ correspond en sortie du filtre la suite filtrée $y(n)$ qui s'exprime par l'équation (2.19), c'est-à-dire par

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n - k) . \quad (3.1)$$

Deux cas se présentent alors :

- Ou bien la sommation porte sur un nombre fini de termes, c'est-à-dire que les $h(k)$ sont nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de la variable entière k : c'est le filtre dit à *réponse impulsionnelle finie* (RIF) et en faisant allusion à sa réalisation, on le désigne encore par *non récursif* car il ne nécessite pas de boucle de réaction de la sortie sur l'entrée dans sa mise en oeuvre. Il est à mémoire finie, puisqu'il ne garde le souvenir que d'un signal élémentaire, une impulsion par exemple, que pendant une durée déterminée. Les nombres $h(k)$ sont appelés les coefficients du filtre, qu'ils définissent complètement (Fig. 3.1).
- Ou bien la sommation porte sur un nombre infini de termes, les $h(k)$ ont une infinité de valeurs non nulles : le filtre est alors à *réponse impulsionnelle infinie* (RII), ou encore de type *récursif*, car il faut réaliser sa mémoire par une boucle de réaction de la sortie sur l'entrée. Son fonctionnement est régi par une équation selon laquelle un élément de la suite de sortie $y(n)$ est calculée par la sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée $x(n)$ et d'un certain nombre d'éléments de la suite de sortie lors d'échantillons précédents et suivants (Fig. 3.2).

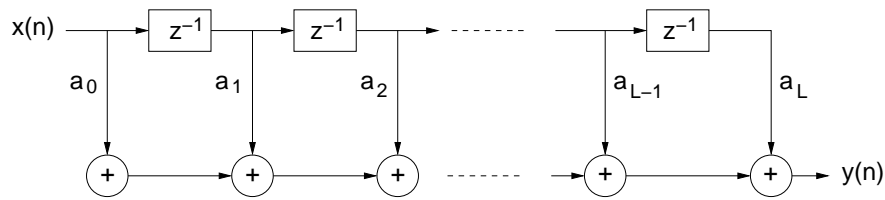


FIGURE 3.1 – Structure directe (ou réalisation transverse) pour un filtre RIF causal.

Par exemple, si L et K sont des entiers, le fonctionnement du filtre peut être défini par l'équation suivante :

$$y(n) = \sum_{l=0}^L a_l x(n-l) - \sum_{k=1}^K b_k y(n-k) . \quad (3.2)$$

Les a_l ($l = 0, 1, \dots, L$) et b_k ($k = 1, 2, \dots, K$) sont les coefficients. Comme pour les filtres analogiques, l'étude de ce type de filtre ne se fait pas en général simplement de manière directe ; il est nécessaire le plus souvent de passer par une transformation, la transformation en z .

Néanmoins, on peut exprimer le critère de stabilité suivant sur les coefficients numériques : *Un filtre est stable ssi sa réponse impulsionnelle est absolument sommable :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty . \quad (3.3)$$

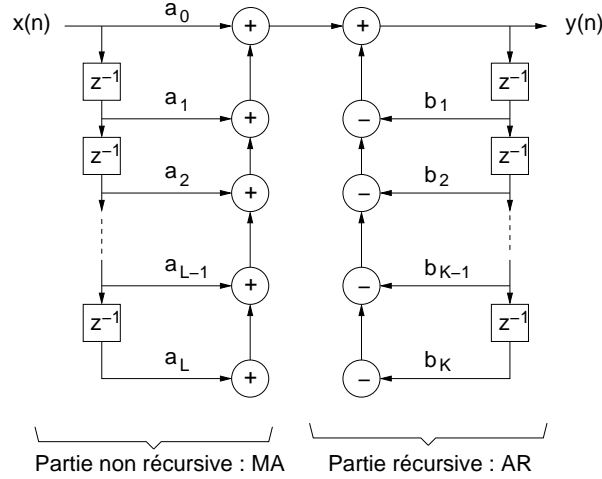


FIGURE 3.2 – Structure (ou réalisation) récursive pour un filtre RII causal : La partie MA (Moving Average) est présente également sur les RIF. La partie AR (Auto-Regressive) n'est présente que sur les RII.

A partir de la fonction de transfert en z

$$H(z) = Y(z)/X(z) = \frac{a_L z^{-L} + \dots + a_1 z^{-1} + a_0}{b_K z^{-K} + \dots + b_1 z^{-1} + 1} \quad (3.4)$$

Un filtre numérique linéaire et causal est stable si et seulement si tous les pôles de $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité (leur module doit être strictement inférieur à 1).

Remarques :

- Un filtre linéaire non causal $h(n)$ peut se décomposer en une partie causale $h_+(n)$ et une partie anti-causale $h_-(n)$: $h(n) = h_+(n) + h_-(n)$. Deux fonctions de transfert $H_+(z)$ et $H_-(z)$ caractérisent alors le filtre. La partie anticausale est stable si tous les pôles de $H_-(z)$ sont à l'extérieur du cercle unité.
- Filtre à minimum de phase : Si tous les zéros de $H(z)$, fonction de transfert en z d'un filtre numérique linéaire causal et stable, sont à l'intérieur du cercle unité, alors le filtre est dit à minimum de phase.
- La présence des pôles est caractéristique des systèmes récurrents. Pour ces systèmes, le domaine de convergence doit être précisé : en effet, de même que pour l'équation aux différences récurrentes associée, la donnée de la fonction de transfert en z ne définit pas un système unique. Ainsi, si la fonction de transfert comporte P modules de pôles différents, il y a $P + 1$ domaines de convergence possibles. Le système n'est stable qu'à condition que le cercle $|z| = 1$ soit inclus dans le domaine de conver-

gence.

Par exemple, dans le cas de deux pôles (p_1 et p_2), il y a trois domaines de convergence possibles (voir la figure 3.3) :

- choix du domaine 1 : $|z| < |p_1|$: système instable,
- choix du domaine 2 : $|p_1| < |z| < |p_2|$: système stable,
- choix du domaine 3 : $|z| > |p_2|$: système instable.

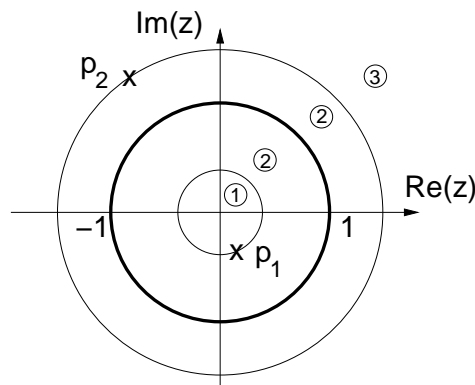


FIGURE 3.3 – Domaines de stabilité et d'instabilité dans le plan en z .

Lorsqu'on doit synthétiser un filtre numérique à partir d'un gabarit analogique donné, le choix se pose entre un filtre récursif ou un filtre non-récursif. Les raisons avancées ci-dessous et les méthodes de synthèse que nous allons examiner pour chacune des deux familles doivent permettre de trancher en faveur de l'une ou de l'autre.

- Les filtres RII nécessitent un volume calculatoire moins important que les filtres RIF,
- Les filtres RIF ont une phase linéaire (temps de propagation constant, quel que soit la fréquence) alors que les RII introduisent de la distorsion de temps de propagation,
- Seuls les filtres RIF travaillent sur un horizon fini. Cela peut être important si les données sont perturbées : un RII sera perturbé pendant une durée importante alors qu'un RIF ne le sera que pendant N échantillons,
- Les RIF sont toujours stables : un RII peut être instable,
- Les RIF ont un bruit d'arrondi faible du fait de leur structure.

En conclusion, si on a besoin d'un filtre à phase linéaire, on utilisera un RIF ; sinon on lui préférera un RII, plus efficace et donnant des ordres de filtres plus faibles à zone de transition équivalente.

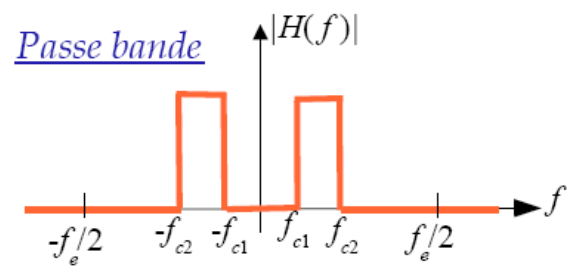
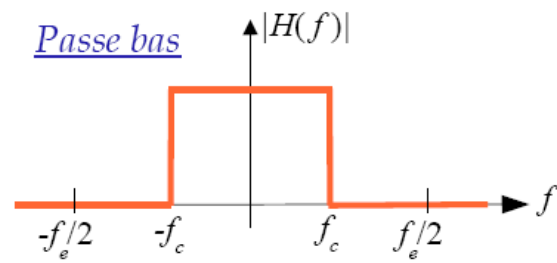


FIGURE 3.4 – Filtrés idéaux usuels.

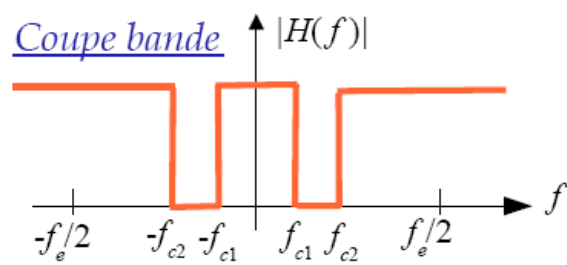
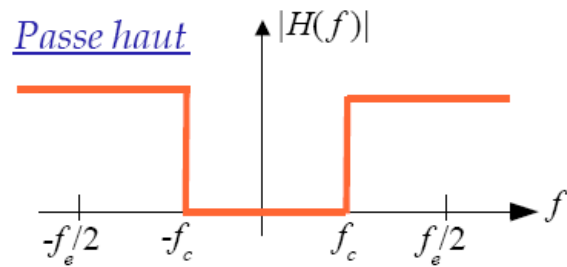


FIGURE 3.5 – Filtrés idéaux usuels.

3.2 Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF)

Cette classe de filtres est à "mémoire finie", c'est-à-dire qu'un filtre RIF détermine sa sortie en fonction d'informations d'entrée d'ancienneté limitée. En s'appuyant sur l'équation aux différences (3.2), les filtres RIF correspondent alors à des équations où les coefficients b_k sont nuls. Les propriétés des filtres RIF vont être mises en évidence sur l'exemple suivant. Soit un signal $x(t)$ représenté par ses échantillons $x(nT_e)$, prélevés à la fréquence $f_e = 1/T_e$, et soit à déterminer l'incidence sur le spectre de ce signal de l'opération qui consiste à remplacer la suite $x(nT_e)$ par la suite $y(nT_e)$ définie par la relation :

$$y(nT_e) = \frac{1}{2} [x(nT_e) + x((n-1)T_e)]$$

Cette suite est aussi celle qui est obtenue par échantillonnage du signal $y(t)$ tel que :

$$y(t) = \frac{1}{2} [x(t) + x(t - T_e)]$$

Si $X(\omega)$ et $Y(\omega)$ désignent les transformées de Fourier des signaux $x(t)$ et $y(t)$, il vient :

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega) (1 + e^{-j\omega T_e})$$

L'opération étudiée correspond à la fonction de transfert $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$ telle que :

$$H(\omega) = e^{-j\omega T_e/2} \cos(\omega T_e/2)$$

C'est une opération de filtrage, appelée filtrage en cosinusoïde, qui conserve la composante continue et élimine la composante à la fréquence $f_e/2$. Dans l'expression de $H(\omega)$, le terme complexe $e^{-j\omega T_e/2}$ caractérise un retard $\tau = T_e/2$ (phase linéaire) qui est le temps de propagation du signal à travers le filtre. La réponse impulsionnelle $h(t)$ qui correspond s'écrit :

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[\delta(t + \frac{T_e}{2}) + \delta(t - \frac{T_e}{2}) \right]$$

La figure 3.6 représente les caractéristiques fréquentielles et temporelles de ce filtre.

Cet exemple a permis de faire apparaître que l'entrée $x(n)$ et la sortie $y(n)$ sont reliées par une équation aux différences avec un nombre fini de coefficients, que la réponse impulsionnelle est symétrique par rapport à l'axe des temps, c'est-à-dire que les coefficients du filtre doivent être symétriques. Deux configurations se présentent alors :

- $N = 2P + 1$: le filtre a un temps de propagation $\tau = P T_e$,
- $N = 2P$: le filtre a comme temps de propagation $\tau = (P - 1/2) T_e$.

D'autre part, la fonction de transfert du filtre s'écrit sous la forme générique :

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k T_e} , \quad (3.5)$$

ou encore exprimée en fonction de la variable z :

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} \quad (3.6)$$

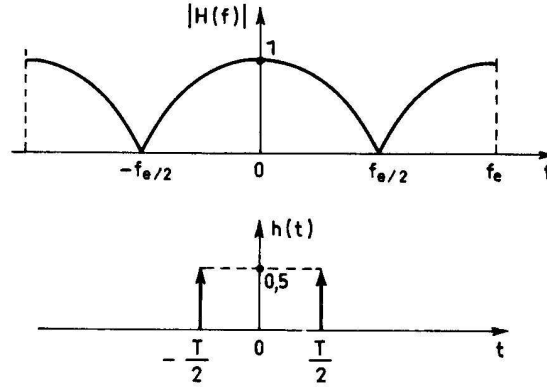


FIGURE 3.6 – Le filtrage en cosinusoïde.

$H(\omega)$ est donc une fonction périodique de période $f_e = 1/T_e$. Les coefficients a_k ($k = 0, 1, \dots, N-1$) constituent le développement en série de Fourier de cette fonction. Si ces coefficients sont symétriques, la fonction de transfert $H(\omega)$ peut se mettre sous la forme d'un produit de deux termes dont l'un est une fonction réelle et l'autre un nombre complexe de module 1 représentant le temps de propagation τ constant et égal à un multiple entier de la demi-période d'échantillonnage. Un tel filtre est dit à phase linéaire.

La transformée en z d'un filtre RIF causal est donnée par

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \text{ (filtre causal).}$$

Pour un filtre RIF à phase linéaire (propriété de symétrie), il vient :

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} \\ &= \pm \sum_{n=0}^{N-1} h(n') z^{-(N-1-n')} \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n') z^{n'} \\ &= \pm z^{-(N-1)} H(1/z) . \end{aligned}$$

On voit donc que si le filtre possède un zéro en $z = z_0$, il en possèdera aussi un en $z = 1/z_0$. Pour une paire de zéros complexes conjugués $z_a = r e^{j\theta}$ et $z_a^* = r e^{-j\theta}$, le filtre aura aussi pour zéros $1/z_a = (1/r) e^{-j\theta}$ et $1/z_a^* = (1/r) e^{j\theta}$. Cette propriété permet par simple examen des zéros de la fonction de transfert de dire

si oui ou non le filtre est à phase linéaire. Par ailleurs, le théorème suivant est également utile pour rendre le cas échéant un filtre à phase linéaire.

Théorème : Si un zéro réel z_0 est remplacé par son inverse $1/z_0$, ou si une paire de zéros complexes conjugués (z_1, z_1^) est remplacée par la paire des inverses $(1/z_1, 1/z_1^*)$, la réponse fréquentielle en amplitude est inchangée, à un facteur constant près. La même propriété s'applique aux pôles (filtre RII).*

De ce fait, les deux filtres de transmittances $H_1(z)$ et $H_2(z)$ données par

$$H_1(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_1^*)}{z^2}$$

$$H_2(z) = \frac{(z - 1/z_1)(z - 1/z_1^*)}{z^2}$$

ont la même réponse en amplitude à une constante près. Aucun des deux n'est cependant à phase linéaire. De même, les trois filtres de transmittances $H_1(z)$, $H_2(z)$ et $H_1(z)H_2(z)$ ont tous trois la même réponse en amplitude à un facteur près, et seul le dernier est à phase linéaire.

3.2.1 Synthèse par la méthode des fenêtres

La problématique est la suivante : à partir d'un gabarit fréquentiel, effectuer la synthèse d'un filtre RIF réalisable, c'est-à-dire déterminer la séquence numérique finie $h(n)$ (à N échantillons) correspondant à sa réponse impulsionnelle.

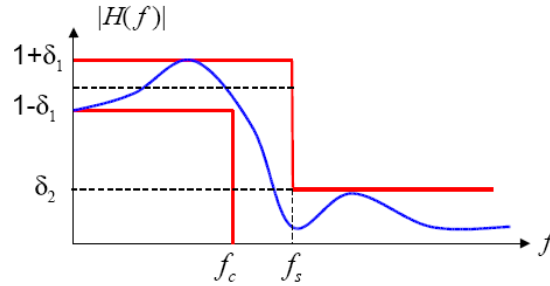


FIGURE 3.7 – Gabarit fréquentiel.

Le gabarit fréquentiel (cf. chapitre 3) est caractérisé par (par exemple) les grandeurs suivantes correspondant à l'illustration ci-dessus (Fig. 3.7). Ce gabarit ne fournit pas d'informations précises sur la phase. On cherchera donc à conserver une phase linéaire correspondant à un temps de propagation du signal dans le filtre ce qui implique que la réponse impulsionnelle soit symétrique :

$$h(n) = h(N - 1 - n) \quad , \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} . \quad (3.7)$$

D'autre part, le spectre d'un filtre numérique étant périodique, nous ne nous intéressons qu'à la bande de base (une seule période). La démarche consiste alors, pour des filtres dont la réponse en fréquence désirée à une forme analytique simple (intégrable), d'appliquer la méthodologie suivante :

- Déterminer la longueur N de la séquence à partir du gabarit réel. Pour cela, on emploie souvent la formule empirique suivante :

$$N = \frac{2}{3} \log_{10} \left[\frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right] \cdot \frac{f_e}{\Delta f} \quad (3.8)$$

Cette estimation particulièrement simple est suffisante dans la plupart des cas rencontrés en pratique. Elle met bien en évidence l'importance relative des paramètres. La bande de transition $\Delta f = f_s - f_c$ est le paramètre le plus sensible ; les ondulations en bande passante et affaiblie ont une contribution secondaire.

- Calculer la réponse temporelle infinie du filtre à réponse en fréquence voulue (gabarit idéal) en utilisant la transformée de Fourier inverse. Cela permet d'obtenir les coefficients en limitant le calcul à N valeurs réparties symétriquement autour de $n = 0$. Deux cas sont à distinguer :

- N impair :

$$\begin{aligned} h(nT_e) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_e}^{\pi/\omega_e} H(\omega) e^{j\omega nT_e} d\omega \\ &= T_e \int_{\frac{-1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} H(f) e^{2jn\pi f T_e} df, \end{aligned}$$

- N pair :

$$\begin{aligned} h(nT_e) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_e}^{\pi/\omega_e} H(\omega) e^{-j\omega/2} e^{j\omega nT_e} d\omega \\ &= T_e \int_{\frac{-1}{2T_e}}^{\frac{1}{2T_e}} H(f) e^{-j\omega/2} e^{2jn\pi f T_e} df. \end{aligned}$$

- On tronque la réponse temporelle trouvée (pour obtenir un RIF) en la multipliant par une fenêtre d'apodisation (de pondération) :

$$h_N(n) = h(n) w(n) \quad (\text{exemple : fenêtre rectangulaire}).$$

- Dans le cas d'un filtre causal, décaler la réponse impulsionnelle $h_N(n)$ pour obtenir une solution causale.
- Vérifier les spécifications obtenues et au besoin modifier les paramètres et recommencer.

Remarques :

- Méthode non optimale (N n'est pas minimale),
- La fenêtre est symétrique, le filtre obtenu est à phase linéaire,
- Les résultats sont approximatifs,
- L'apparition des ondulations est due au choix de la fenêtre de pondération, pas à l'ordre du filtre (due aux lobes secondaires dans le spectre de la fenêtre).

Fenêtre de Bartlett (triangulaire)

$$\begin{cases} w(n) &= \frac{2n}{N-1} & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ &= 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{si } \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ &= 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Fenêtre de Hanning

$$w(n) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right]$$

Fenêtre de Hamming

$$w(n) = \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \right]$$

Fenêtre de Blackman

$$w(n) = \left[0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4n\pi}{N-1}\right) \right]$$

Fenêtre de Kaiser

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - (\frac{2n}{N-1} - 1)^2})}{I_0(\beta)}$$

où I_0 est une fonction de Bessel modifiée, de première espèce, d'ordre 0, s'exprimant par :

$$I_0(x) = 1 + \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \dots \quad (3.9)$$

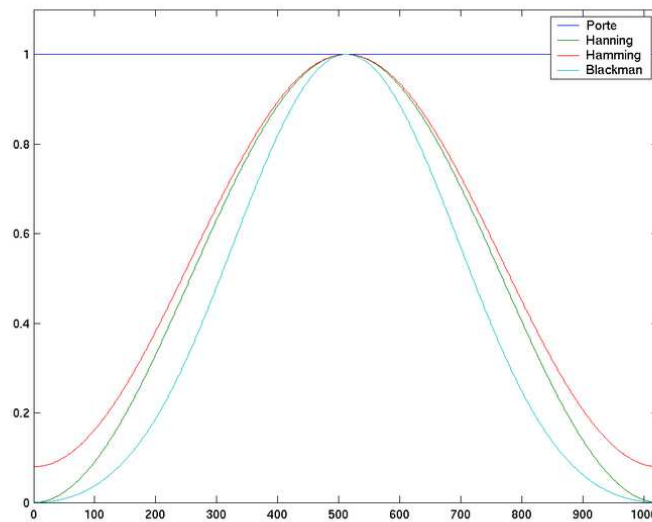


FIGURE 3.8 – Réponses temporelles des fenêtres usuelles de pondération.

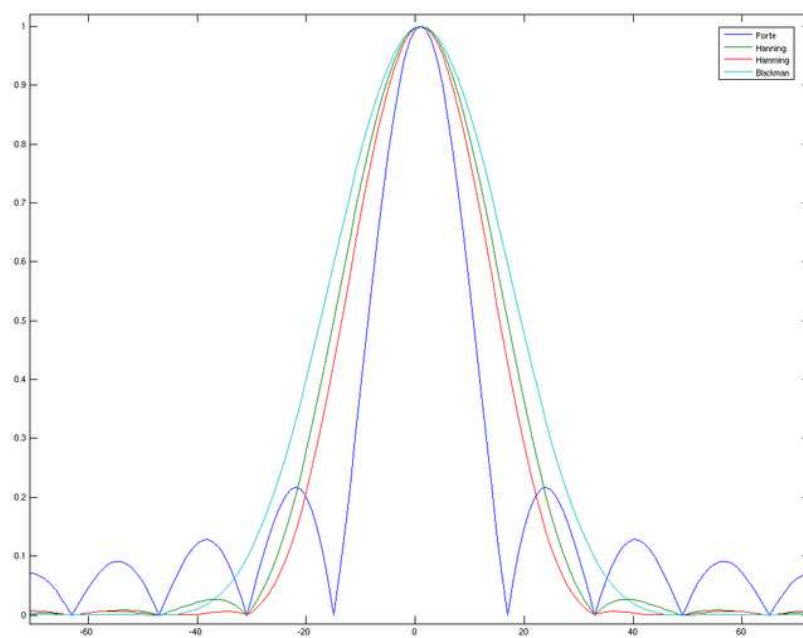


FIGURE 3.9 – Réponses fréquentielles des fenêtres usuelles de pondération.

TABLE 3.1 – Propriétés des fenêtres de pondération

Type de fenêtre	Largeur de transition Δf	Ondulations en bande passante (dB)	Atténuations du 1er lobe secondaire (dB)	Atténuation en bande atténuée (dB)
Rectangle	$1,8/N$	0,7416	13	21
Hanning	$6,2/N$	0,0546	31	44
Hamming	$6,6/N$	0,0194	41	53
Blackman	$11/N$	0,0017	57	74
Kaiser	$5,86/N$ ($\beta = 4, 54$)	0,0274		50
	$8,64/N$ ($\beta = 6, 76$)	0,00275		70
	$11,42/N$ ($\beta = 8, 96$)	0,000275		90

Exemple : Soit à synthétiser par la méthode des fenêtres un filtre RIF d'ordre 5 dont le transfert se rapproche du gabarit donné à la figure 3.10. Par la transformée de Fourier inverse, on obtient la réponse impulsionnelle idéale suivante $h(n)$:

$$\begin{cases} h(0) &= 1/2, \\ h(2n+1) &= 0, \\ h(2n) &= \frac{(-1)^n}{k\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad \forall n \geq 1, \\ h(-n) &= h(n) \end{cases}$$

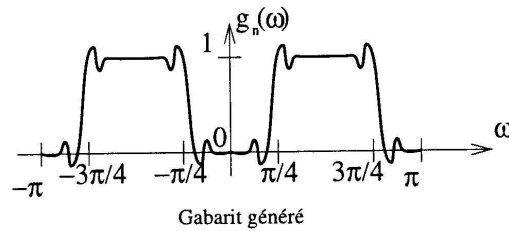
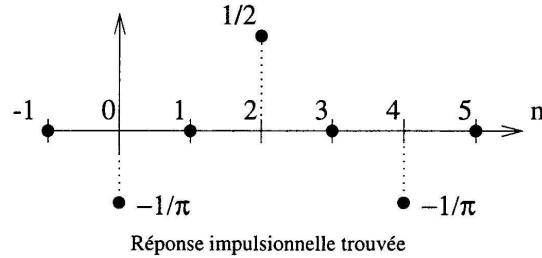
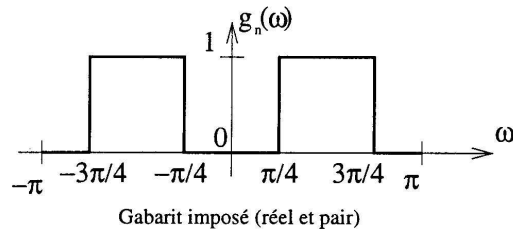


FIGURE 3.10 – Synthèse de filtre RIF par la méthode des fenêtres.

L'axe de symétrie que requiert la linéarité de la phase est placé au rang $(N-1)/2$. Il suffit alors de translater $h(n)$ de cette valeur et de tronquer la réponse infinie pour obtenir le résultat (figure 3.10, en bas). On remarque clairement les défauts de la méthode, liés à la troncature, se traduisant par des ondulations dans les bandes et un élargissement des zones de transition.

3.2.2 Méthode de l'échantillonnage fréquentiel

Lorsqu'une réponse impulsionnelle $h(n)$ est de durée finie N , on sait que l'on peut échantillonner son spectre $H(f)$ (ou $H(\omega)$) en au moins N points sans provoquer de repli dans la bande de base. Dès lors, l'idée assez naturelle qui surgit est de se dire que l'on peut échantillonner $H(f)$ selon le nombre de points voulu. Cette méthode de synthèse emploie la Transformée de Fourier Discrète inverse. Il faut cependant être conscient du fait qu'en toute généralité, la réponse impulsionnelle idéale souhaitée n'est pas de durée limitée.

$$H(k) = H(f)_{f=k/N} \quad , \text{ pour } k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} + 1 \quad (3.10)$$

La transformée de Fourier Discrète inverse fournit $h(n)$:

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2+1} H(k) e^{j2\pi \frac{k}{N} n} \quad (3.11)$$

$$= 0 \quad \text{ailleurs.} \quad (3.12)$$

Cette méthode de synthèse ne garantit que les points fréquentiels $H(k)$. Entre ces points, la valeur de $H(f)$ n'est pas maîtrisée.

La structure de réalisation est alors obtenue par la transformée en z :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \quad (\text{signal causal}) \quad (3.13)$$

$$H(z) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} h(n) z^{-n} . \quad (3.14)$$

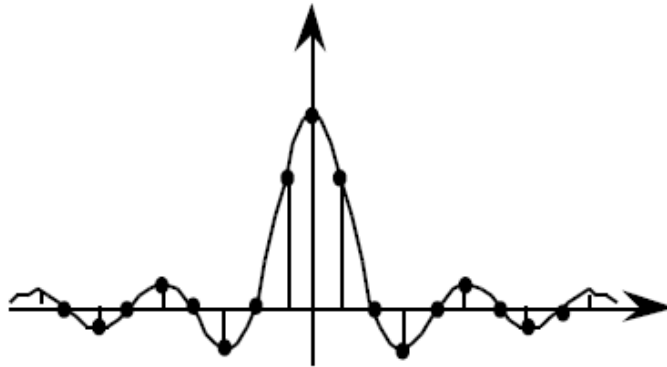


FIGURE 3.11 – Exemple d'échantillonnage de la réponse fréquentielle.

3.3 Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

3.3.1 Méthode de l'Invariance Impulsionnelle

Le principe est basé sur l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle. A partir de la fonction de transfert d'un filtre analogique $H(s)$, on calcule la réponse impulsionnelle $h(t)$ (par la Transformée inverse de Laplace), puis on échantillonne celle-ci, $h^*(t)$: les échantillons obtenus $h(n) = h^*(t)_{t=nT_e}$ forment alors la séquence numérique permettant la réalisation du filtre.

La transformation

$$z = e^{sT_e} \quad (3.15)$$

établit une correspondance entre la bande du plan de Laplace comprise entre $-f_e/2 \leq \text{Im}(s) \leq f_e/2$ et $\text{Re}(s) \leq 0$, et l'intérieur du cercle unité dans le plan en z . La méthode se base sur l'invariance de la réponse impulsionnelle dans la bande limitée considérée. La réponse impulsionnelle d'un filtre récursif étant infinie, il est donc nécessaire de faire l'hypothèse que la Transformée de Fourier de cette dernière est nulle en dehors de la bande $[-f_e/2, f_e/2]$.

Cette hypothèse très restrictive est rarement satisfaite et induit un repliement spectral destructif au niveau de la génération du filtre. On emploie donc généralement cette méthode que pour des signaux à bande limitée et des filtres (uniquement passe-bas et passe-bande) dont la fréquence de coupure reste très inférieure à la fréquence de Shannon.

Exemple : Soit à synthétiser par la méthode de l'invariance impulsionnelle un filtre passe-bas du premier ordre

$$\begin{cases} H(s) &= \frac{1}{1+j\omega\tau} \\ h(t) &= \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \Gamma(t) \end{cases}$$

Si on échantillonne cette réponse impulsionnelle à la fréquence f_e , il vient :

$$h^*(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_e/\tau} \delta(t - kT_e)$$

dont la transformée de Laplace est :

$$H^*(s) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kT_e(s+\frac{1}{\tau})} = \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-T_e(s+\frac{1}{\tau})}}$$

par la transformation de l'invariance impulsionnelle, on obtient la fonction de transfert en z :

$$H(z) \equiv \frac{1}{\tau} \frac{1}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}}$$

Il faut que dans la bande passante, le gain de la fonction de transfert en z soit égal au gain de la fonction de transfert en s , donc puisque pour $s = 0$ on a $z = 1$, il faut multiplier la fonction de transfert en z par $\tau (1 - e^{-T_e/\tau})$ et finalement :

$$H(z) = \frac{(1 - e^{-T_e/\tau})}{1 - e^{-T_e/\tau} z^{-1}}$$

On a tracé sur la figure 3.12 les fonctions de transfert en s et en z du filtre numérique.

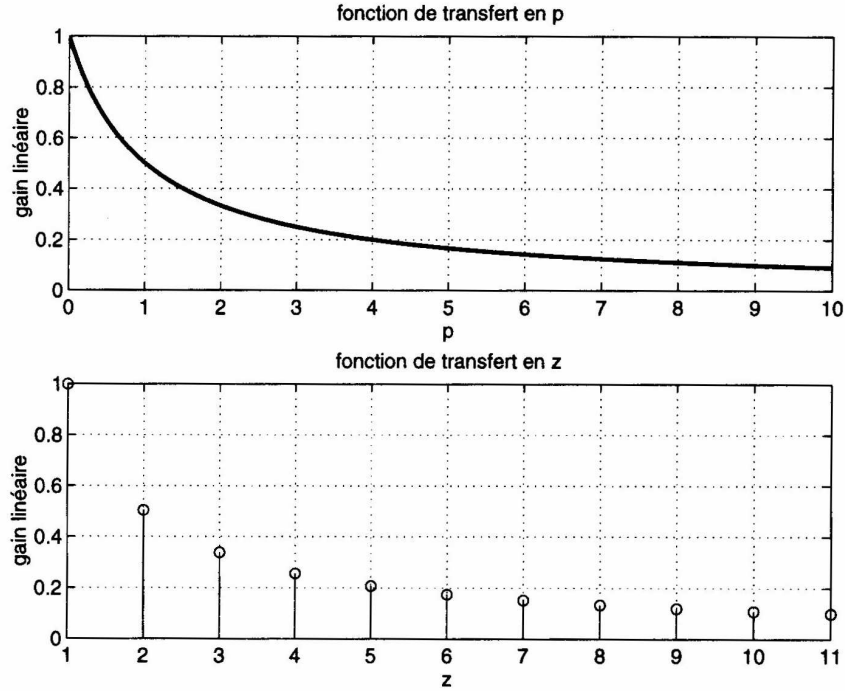


FIGURE 3.12 – Synthèse d'un filtre passe-bas par l'invariance impulsionnelle.

3.3.2 Synthèse par la Transformation bilinéaire

C'est la méthode la plus employée pour synthétiser des filtres récurrents. La transformation bilinéaire (ou TBL) permet d'établir une bijection entre la partie gauche du plan complexe laplacien et l'intérieur du cercle dans le plan z

$$s = \frac{2}{T_e} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad \text{ou inversement :} \quad z = \frac{2/T_e + s}{2/T_e - s} \quad (3.16)$$

On conserve ainsi la stabilité dans le passage du filtre analogique au filtre numérique. Néanmoins, la transformation bilinéaire agit comme une relation non-linéaire entre les fréquences f_a du domaine analogique et les fréquences f_d du domaine numérique. Elle déforme le gabarit lors du changement de plan complexe, et on est obligé d'effectuer une transposition du gabarit numérique au gabarit analogique à l'aide des formules

$$\pi f_a = \frac{1}{T_e} \tan(\pi f_d T_e) \quad \text{ou inversement :} \quad f_d = \frac{1}{\pi T_e} \tan^{-1}(\pi f_a T_e) \quad (3.17)$$

La méthodologie pour la synthèse d'un filtre numérique est la suivante :

- Définir le gabarit du filtre numérique,
- Convertir ce gabarit en un gabarit correspondant au filtre analogique par la relation 3.17,
- Faire la synthèse du filtre analogique (Butterworth, Tchebichev, elliptique,...) pour obtenir la fonction de transfert $H(s)$
- Transformer $H(s)$ en $H(z)$ en utilisant la transformation bilinéaire 3.16.

Exemple : Soit à synthétiser un filtre numérique passe-bande (de centre $f_c = 0.318\text{Hz}$) de fonction de transfert fréquentielle en gain

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + \sqrt{2}\omega_c s + \omega_c^2}$$

On applique la transformation bilinéaire pour $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$ et $T_e = 2 \text{ s}$, on obtient alors la fonction de transfert en z

$$H(z) = \frac{0.0302 (z^2 + 2z + 1)}{z^2 - 1.4514z + 0.5724}$$

à partir de laquelle on peut déterminer immédiatement l'équation aux différences (en passant en z^{-1}).

3.4 Exercices

1. Montrer que la Transformée de Fourier Discrète d'une convolution circulaire des signaux x et h correspond au produit $X(k) H(k)$ des Transformées Discrètes.
2. Etablir la relation de récurrence (équation aux différences) donnant $y(n)$ ainsi que la fonction de transfert $H(z)$ du filtre dont la structure directe est la suivante :

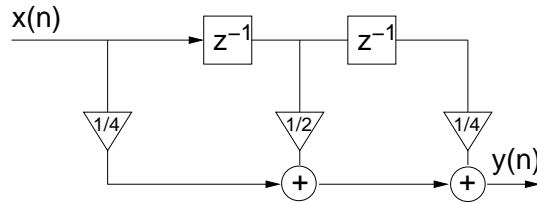


FIGURE 3.13 – Structure directe d'un filtre causal (type RIF).

3. On cherche à synthétiser, par la méthode des fenêtres, un filtre passe-bande de fréquences de coupure f_{min} et f_{max} correspondant aux angles $\theta_{min} = 2\pi f_{min}T_e$ et $\theta_{max} = 2\pi f_{max}T_e$ du cercle unité. Ce filtre aura un gain unité entre les fréquences f_{min} et f_{max} et nul en dehors.
 - (a) Déterminer les coefficients de la réponse impulsionnelle idéal.

Rappel du calcul des coefficients d'un filtre RIF

$$h(n) = T_e \int_{-1/(2T_e)}^{+1/(2T_e)} H(f) e^{2j\pi n f T_e} df$$

- (b) Comparer les valeurs trouvées pour les échantillons de $h(n)$, symétriques quand $N = 11$, $f_e = 8$ kHz, $f_{min} = 1$ kHz et $f_{max} = 2$ kHz avec ceux indiqués ci-dessous et correspondant respectivement à :
 - la multiplication de $h(n)$ par une fenêtre rectangulaire :
 $[0.1004; -0.0000; -0.1674; -0.1471; 0.0862; 0.2311; 0.0862; -0.1471; -0.1674; -0.0000; 0.1004]$
 (commande Matlab : `fir1(10, [0.25 0.5], boxcar(11))'`)
 - la multiplication de $h(n)$ par une fenêtre de Hanning :
 $[0.0109; -0.0000; -0.1359; -0.1792; 0.1306; 0.3753; 0.1306; -0.1792; -0.1359; -0.0000; 0.0109]$
 (commande Matlab : `fir1(10, [0.25 0.5], hanning(11))'`)

Rep : a) $h(n) = \frac{1}{\pi n} \{ \sin[2\pi n f_{max} T_e] - \sin[2\pi n f_{min} T_e] \}$

4. Déterminer :

- (a) la réponse fréquentielle (fonction de transfert),
- (b) la réponse impulsionnelle,

du filtre RIF numérique suivant caractérisé par l'équation aux différences numériques : $y(n) = [x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)]/4$.

Quelle est le temps de propagation d'un signal dans le filtre ?

Rep :

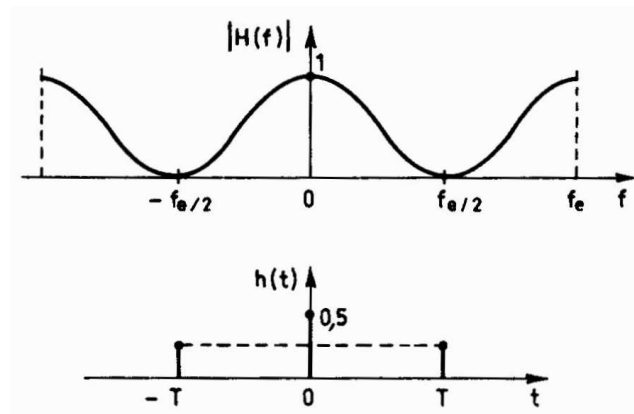


FIGURE 3.14 – Le filtrage en cosinussoïde surélevée.

5. Déterminer, par la méthode de l'échantillonnage fréquentiel, les coefficients de la réponse impulsionnelle du filtre numérique dont la réponse fréquentielle est illustrée sur la figure 3.15 ci-dessous (les coefficients $H(k)$ correspondent aux points noirs). On se limitera à $N = 7$ échantillons.

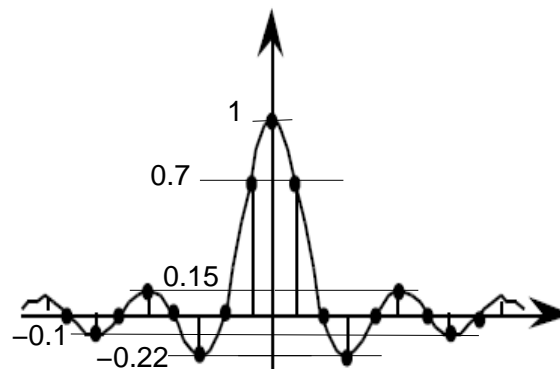


FIGURE 3.15 – Exercice sur l'échantillonnage de la réponse fréquentielle.

6. Montrer que la transformation bilinéaire conserve la stabilité, lors de la transformation du plan complexe $s = \sigma + j \omega$ des systèmes linéaires continus, au plan complexe $z = e^{T_e s}$ des systèmes échantillonnés.
7. En analysant la réalisation suivante, déterminer à quel type de filtre elle correspond et déterminer l'équation aux différences numériques correspondante. Quelle est l'expression de la transmittance $H(z) = Y(z)/X(z)$?

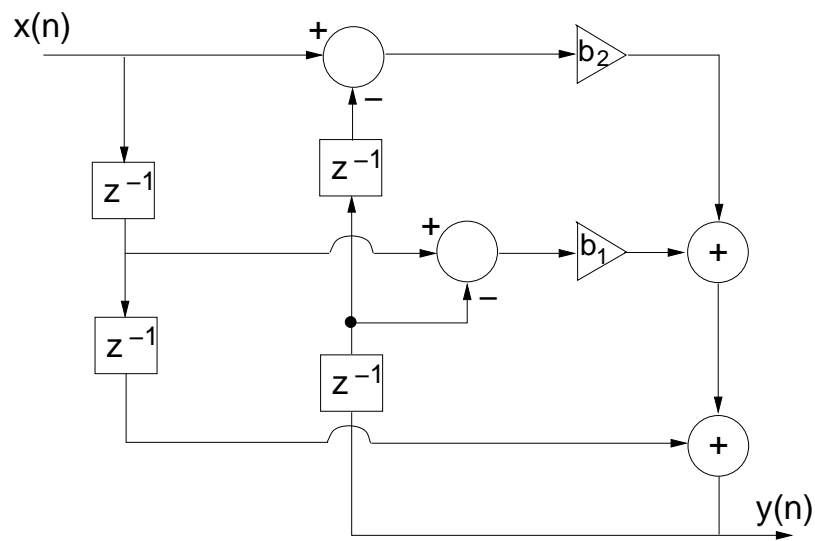


FIGURE 3.16 – Réalisation d'un filtre causal du second ordre.

8. Déterminer l'équation aux différences numériques d'un filtre RII normalisé non causal et dont la réponse impulsionnelle $h(x)$ continue (et symétrique) est $h(x) = C e^{-\alpha|x|}$ et représentée ci-dessous :

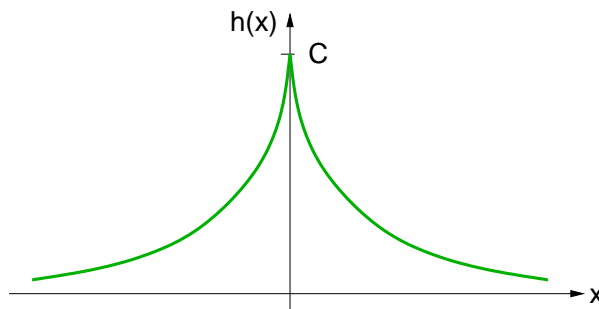


FIGURE 3.17 – Réponse impulsionnelle du filtre 1-D de lissage de Shen-Castan.

avec C et α deux constantes réelles. On prendra $X_e = 1$ comme fréquence (spatiale) d'échantillonnage. On essaiera d'abord d'exprimer la normalisation, puis les transmittances en z des parties causales et anti-causales.

