

### Exercice 1 (*Analyser le spectre de sons réels*)

À faire dans le notebook.

1. Pour les sons 08 à 14, faites comme le cours (cf. représentation fréquentielle d'un son) en localisant une note et en analysant un extrait de 100 ms. Vous pouvez localiser l'extrait avec Audacity et ne pas afficher le son entier pour économiser de la mémoire : affichez uniquement l'extrait et de son spectre (vous pouvez faire un zoom sur les fréquences comprises entre 0 et  $f_s/2$  car les spectres sont symétriques).
2. Ces notes ont une hauteur précise : on parle de fréquence fondamentale  $f_0$  de la note. La fréquence fondamentale est l'inverse de la période, que vous pouvez mesurer sur l'extrait affiché. Sur le spectre, les pics sont localisés aux multiples  $f_n = n f_0$  de  $f_0$ , on peut donc aussi mesurer  $f_0$  sur le spectre. Vous pouvez mesurer ces hauteurs. Pour convertir une fréquence fondamentale en nom de note (en notation anglaise : A pour la, B pour si, C pour do, etc., avec le numéro de l'octave), utilisez la fonction `librosa.core.hz_to_note` du module `librosa` ; par exemple, 440 Hz correspond au La 4 (A4).

### Exercice 2 (*Propriétés de la TFD*)

Montrez mathématiquement les propriétés de la TFD (inverse, symétrie hermitienne, périodicité).

### Exercice 3 (*TFD d'une sinusoïde*)

1. Calculez la TFD de  $x[n] = e^{i2\pi \frac{k_0 n}{N}}$ .
2. En utilisant le résultat précédent, calculez la TFD de  $x[n] = \cos(2\pi \frac{k_0 n}{N})$ . Où sont les pics de cette TFD ? Commentez le comportement des parties réelles et imaginaires de cette TFD.

### Exercice 4 (*Algorithme FFT*)

On suppose que  $N$  est une puissance de 2. Montrez que  $X[k] = X^{(pair)}[k] + e^{-i2\pi \frac{k}{N}} X^{(impair)}[k]$  où  $X^{(pair)}$  est la DFT de  $[x[0], x[2], x[4], \dots] \in \mathbb{C}^{N/2}$  et  $X^{(impair)}$  la DFT de  $[x[1], x[3], x[5], \dots] \in \mathbb{C}^{N/2}$ . Établissez ensuite la complexité en temps et en espace de l'algorithme de FFT.

### Exercice 5 (*Supprimer les rayures sur l'image barbara.png*)

À faire dans le notebook. On procèdera ainsi :

- chargez et affichez l'image  $N \times M$  `barbara.png`
- on veut repérer la période des rayures à enlever
  - extrayez une zone avec des rayures, comme dans l'exemple déjà vu
  - affichez le spectre 2D de cette zone et repérez les fréquences horizontales  $\nu_h$  et verticales  $\nu_v$  des rayures. On rappelle qu'une fréquence d'indice  $k$  a pour valeur  $\frac{k}{N}$  où  $N$  est le nombre de pixels dans la direction en question.
  - calculez ensuite la fréquence oblique correspondante  $\nu = \sqrt{\nu_h^2 + \nu_v^2}$
- calculez le spectre 2D de l'image entière, puis
  - annulez les colonnes correspondant à toutes les fréquences horizontales supérieures à  $\nu$ , et reconstruisez l'image ('np.fft.ifft2' suivi de 'np.real') et affichez-là : que constatez-vous ?
  - recommencez l'étape précédente en annulant les lignes correspondant aux fréquences verti-

- cales supérieures à  $\nu$
- recommencez en annulant à la fois les lignes et les colonnes repérées
- que faudrait-il vraiment faire pour annuler toutes les composantes de fréquence supérieure à  $\nu$  ?

Remarque : n'hésitez pas à prendre des valeurs assez faibles pour  $\nu_h$  et  $\nu_v$  (le début du pic plutôt que le sommet) pour enlever ensuite toute la partie correspondante.

### Exercice 6 (*Repliement fréquentiel.*)

Cet exercice peut être fait entièrement en Python ou à l'aide des logiciels d'édition Audacity et The Gimp (pour certains sous-échantillonnages)

- Affichez les DFT 1D des sons et les DFT 2D des images pour sélectionner les données contenant des fréquences élevées.
- Pour chaque fichier sélectionné, produisez des versions sous-échantillonnées avec et sans repliement spectral
- Affichez côte à côte (ou en superposition dans le cas des sons) : le spectre du fichier original et les spectres des deux versions sous-échantillonnées pour visualiser le repliement
- Comparez les trois versions d'un point de vue perceptif : visuellement pour les images, auditivement pour les sons
- Question subsidiaire : pour exhiber le défaut, créez une nouvelle variante contenant uniquement la partie repliée du spectre puis visualisez l'image obtenu/écoutez le son obtenu.