Modelos sencillitos de aprendizaje

Curso Reconocimiento de Patrones

LCC/UNISON

Julio Waissman

Problema de regresión

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$
- $y \in \mathrm{R}$
- Conjunto de aprendizaje $\{(x^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (x^{(M)}, y^{(M)})\}$
- Usar la *matriz de diseño* X y Y

Regresión lineal

La hipótesis de base es:

$$h_\theta(x) = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b$$

- $\theta = (w_1, \ldots, w_n, b) \in (R)^{n+1}$
- $w = (w_1, \ldots, w_n)$ vector de pesos (*weights*) y b el sesgo (*bias*)

Una funcion de pérdida

$$loss(y, \hat{y}) = \frac{1}{2}(y - \hat{y})^2$$

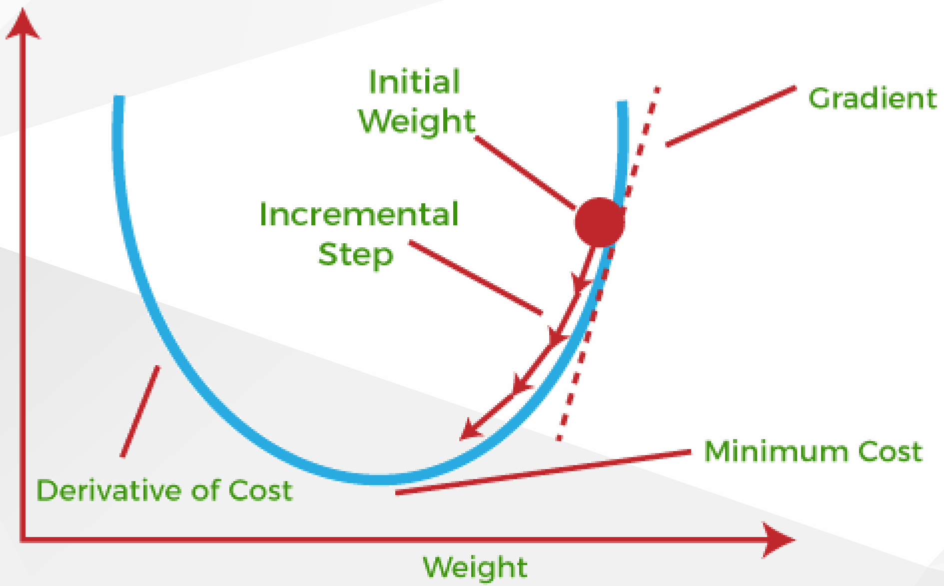
$$\hat{y} = h_\theta(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j + b = x^T w + b$$

El error en muestra

$$E_i(h_\theta) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2}\left(y^{(i)} - (w^T x^{(i)} + b)\right)^2$$

- Se conoce como *Error cuadrado medio* (MSE)
- Se puede resolver en forma analítica
- Vamos a resolverlo en forma numérica

Descenso de gradiente



- [GD en Wikipedia]

El algoritmo de mínimos cuadrados

```python
def grad_desc(w0, b0, X, y, alpha, max_epoch):

  M = y.shape[0]
  w, b = w0.copy(), b0
  e_hist = []
  for _ in range(max_epoch):
    y_est = X @ w0 + b
    e = np.square(y - y_est).mean() / (2 * M)
    dw = -(X.T @ (y - y_est)) / M
    db = -(y - y_est) / M
    w -= alpha * dw
    b -= alpha * db
    e_hist.append(e)
  return w, b, e_hist
```

Algunas preguntas

1. ¿Cuando sirve el modelo de regresión lineal?
2. ¿El MSE es la mejor función de pérdida?
3. ¿Cómo se podría extender a que fuera más útil?

Problema de clasificación binaria

- $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^n$
- $y \in \{-1, 1\}$
- Conjunto de aprendizaje $\{(x^{(1)}, y^{(1)}), \ldots, (x^{(M)}, y^{(M)})\}$

Clasificación lineal

La hipótesis de base es:

$$h_\theta(x) = \operatorname{sign}\big(w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n + b\big)$$

- $\theta = (w_1, \ldots, w_n, b) \in (R)^{n+1}$
- $w = (w_1, \ldots, w_n)$ vector de pesos (*weights*) y b el sesgo (*bias*)

La funcion de pérdida mas simple

$$loss(y, \hat{y}) = [\![y = \hat{y}]\!]$$

$$\hat{y} = h_\theta(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j + b = x^T w + b$$

La operación $[\![p]\!]$ se conoce como *Iverson bracket* y es la función indicadora.

El error en muestra

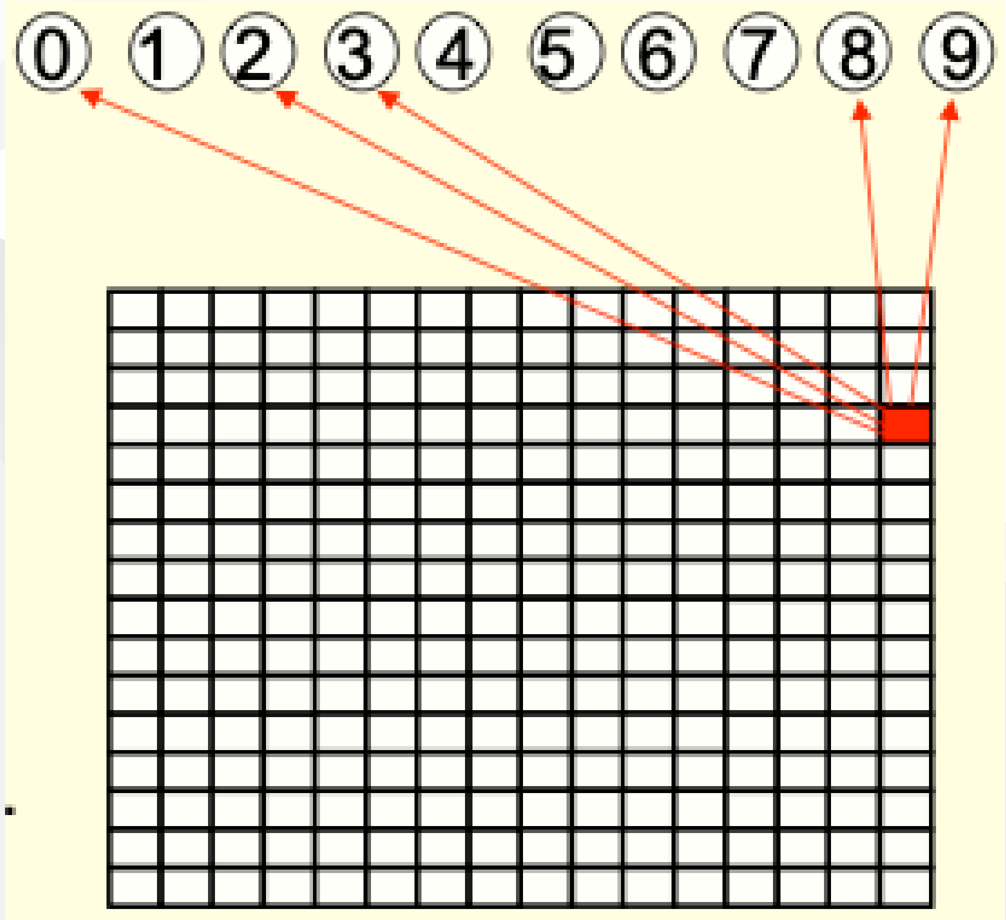
$$E_i(h_\theta) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[\![y^{(i)} - (w^T x^{(i)} + b)]\!]$$

- Se conoce como *0/1 Loss*
- Vamos a resolverlo con el PLA

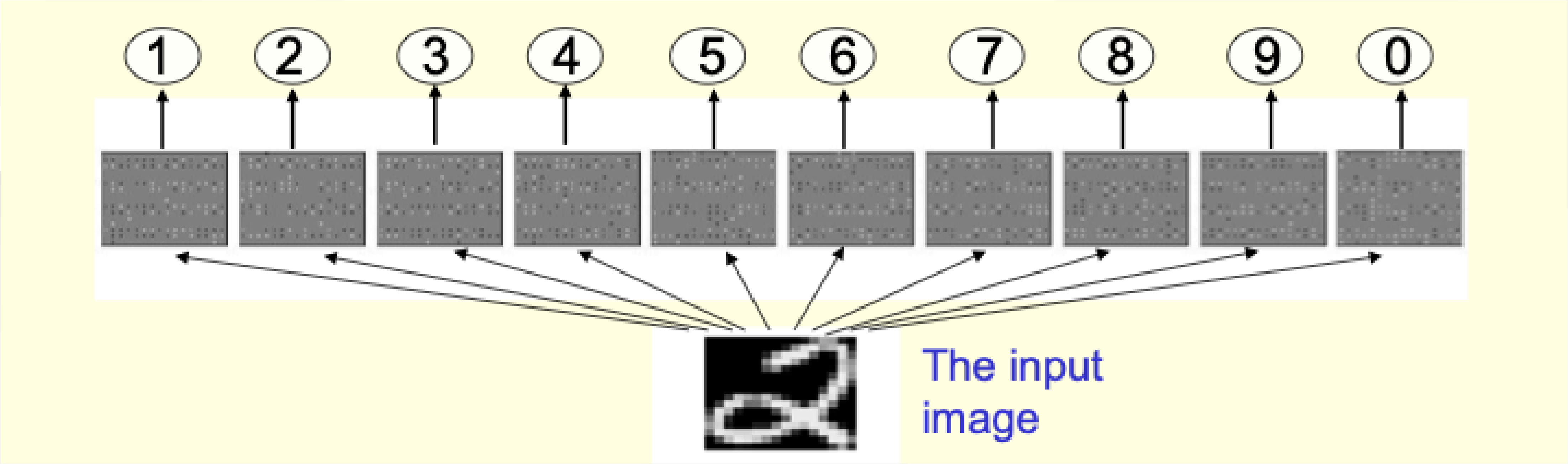
Perceptron Learning Algorithm (PLA)

```python
def pla(x, y, alpha, max_epochs):
  M, n = x.shape
  indicadores = list(range(n))
  w, b = np.random.random((n, )), np.random.random()
  for _ in max_epochs:
    random.shuffle(indicadores)
    for i in indicadores:
      if y[i] != np.sign(x[i,:] @ w + b):
        w += alpha * y[i] * x[i,:]
        b += alpha * y[i]
        break
    else:
      break
  return w, b
```

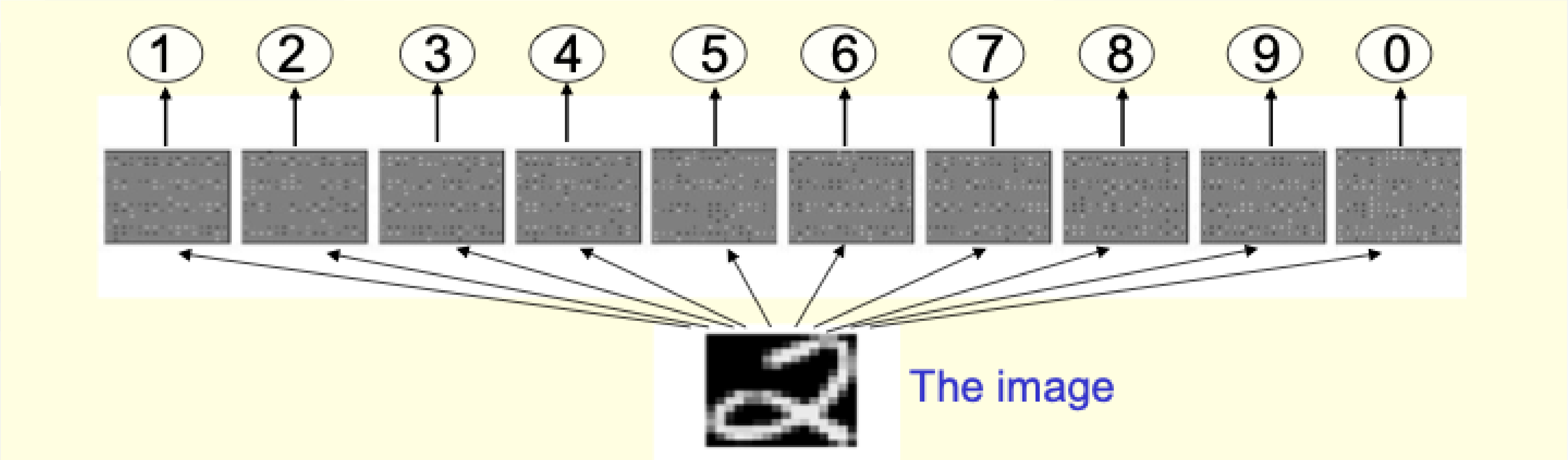
Ejemplo de perceptrón



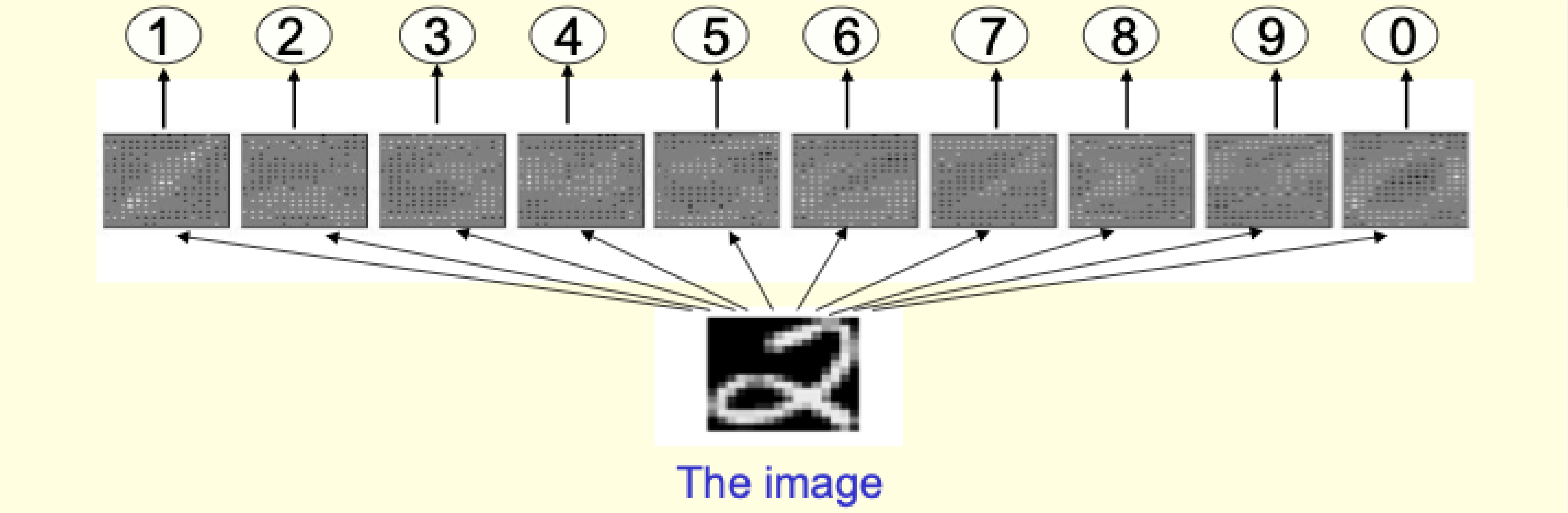
Ejemplo de perceptrón



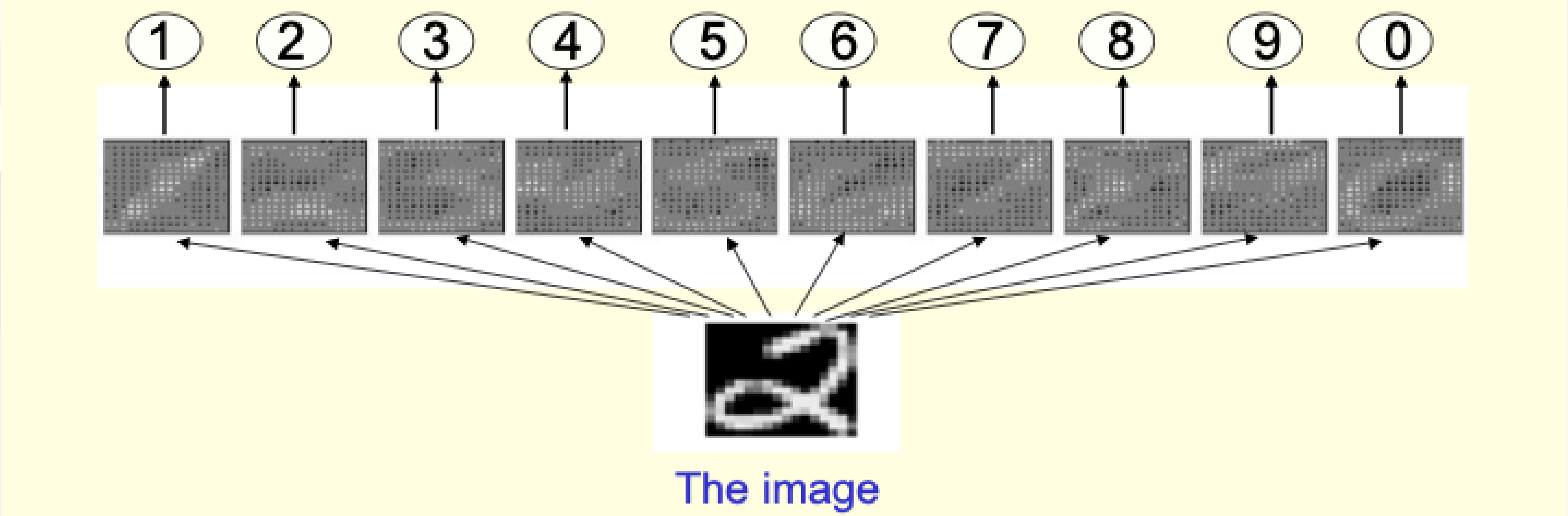
Ejemplo de perceptrón



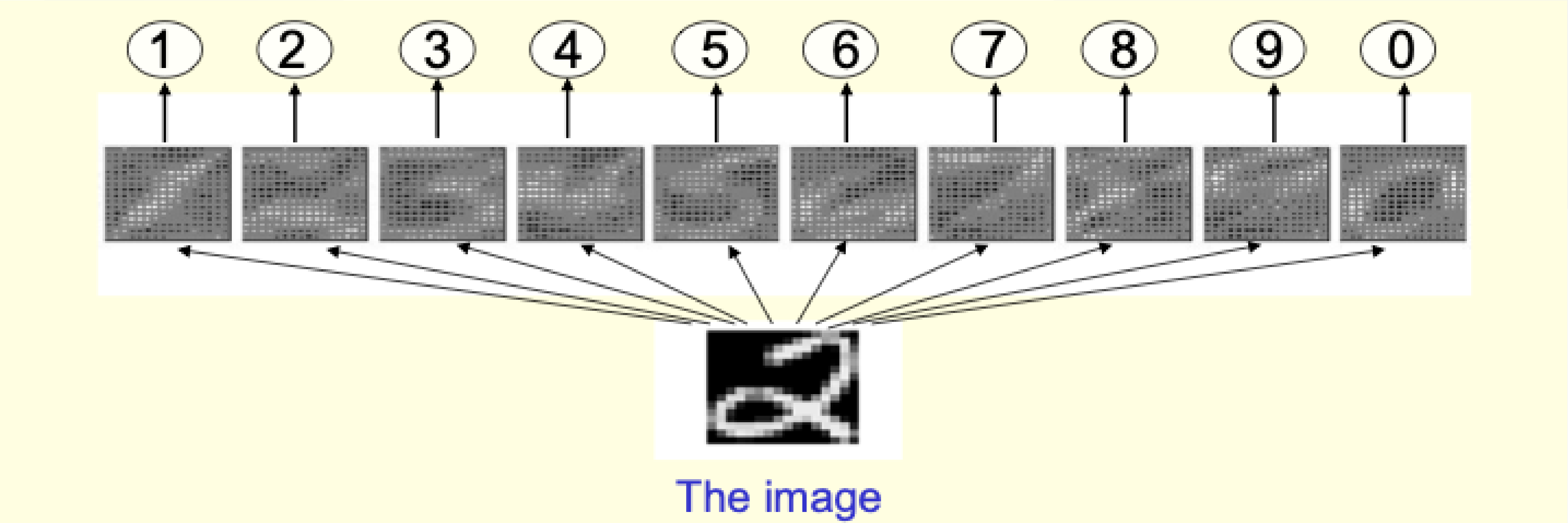
Ejemplo de perceptrón



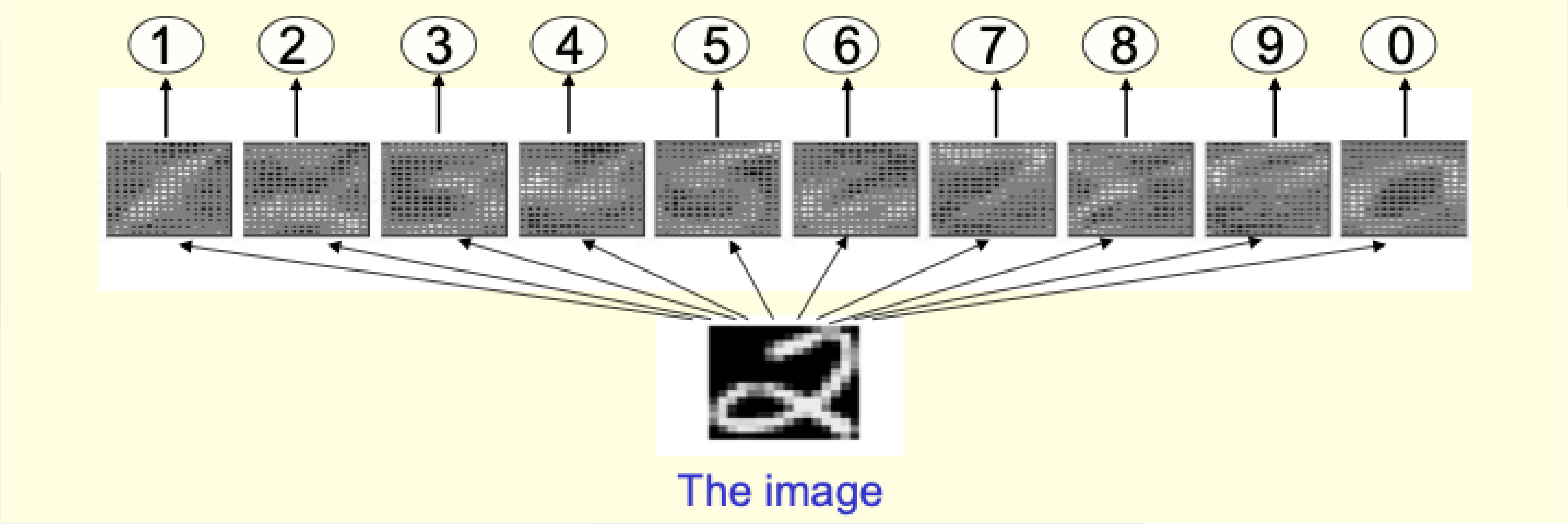
Ejemplo de perceptrón



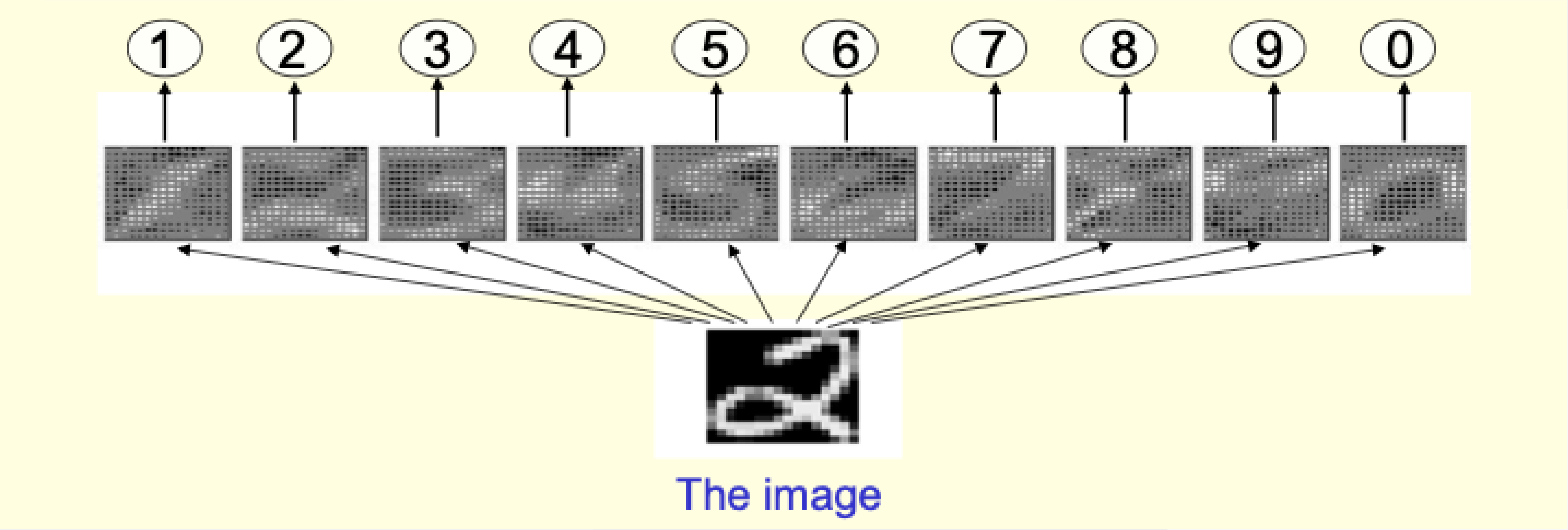
Ejemplo de perceptrón



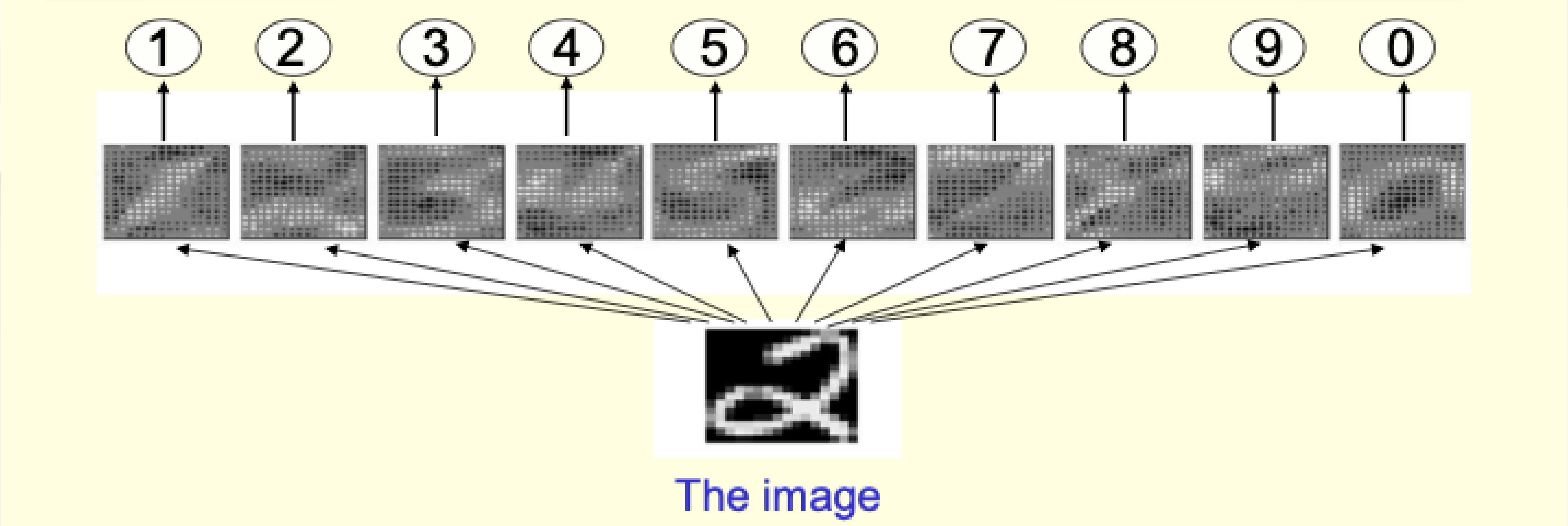
Ejemplo de perceptrón



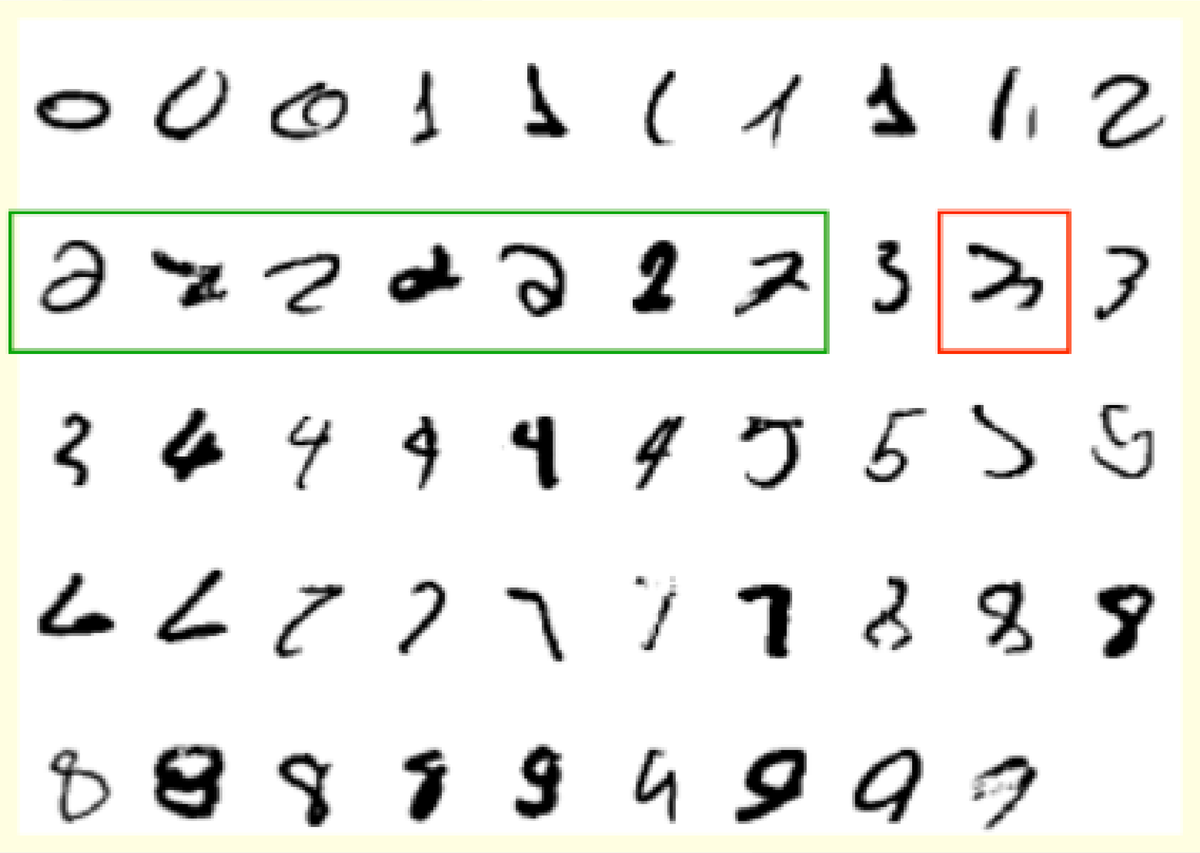
Ejemplo de perceptrón



Ejemplo de perceptrón



Ejemplo de perceptrón



Algunos problemas

- ¿El PLA tiene solución única?
- ¿El PLA asegura convergencia en algún sentido?
- ¿La *0/1 Loss* es la mejor función de costo?

Otra forma de hacer clasificación

¿Y si convertimos el problema de clasificación en un problema de regresión?

$$\Pr[y = 1|x;\theta] = g_\theta(x) \in [0,1]$$

$$h_\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_\theta(x) > u \\ -1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Un problema de regresión (encontrar θ)
- Un problema de clasificación (encontrar el umbral u)