

# ¿El aprendizaje supervisado es posible?

Curso Reconocimiento de Patrones  
LCC/UNISON

Julio Waissman



# Recapitulando

Decimos que  $f \approx h^*$  ssi

$$E_i(h^*) \approx 0$$

y

$$E_o(h^*) \approx E_i(h^*)$$

$$E_i(h^*) \approx 0$$

- Problema de optimización
- Encontrar  $h^*$  equivale a encontrar el vector de parámetros  $\theta^*$  tal que

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{loss}(y^{(i)}, h_{\theta}(x^{(i)}))$$

$$E_o(h^*) \approx E_i(h^*)$$

- Generalización
- Diferencia entre aprendizaje y optimización
- Vamos a usar una noción que parece una broma:

*Aprendizaje Probablemente Aproximadamente Correcto (PAC Learning)*

$$E_o(h^*) \approx E_i(h^*)$$

Hoy vamos a dedicarnos a ver en que sentido es posible que un modelo ajustado por aprendizaje supervisado *generalice*:

# Desigualdad de Hoeffding

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq 2 \exp(-2\epsilon^2)$$

donde  $M$  es el número de datos y  $\epsilon$  la diferencia entre el error en muestra y el error fuera de muestra impuesto.

**Entonces, el planteamiento  $E_o(h^*) \approx E_i(h^*)$  es PAC**

# ¿Algún problema con la desigualdad de Hoeffding?

- Si lanzo una moneda 10 veces, ¿Cual es la probabilidad de obtener águila las 10 veces?
- Si 1000 personas lanzan una moneda 10 veces, ¿Cual es la probabilidad que *alguna* de las personas obtengan águila las 10 veces?

# ¿Esto que significa?

- Supongamos un problema de clasificación binaria con 10 instancias en el conjunto de entrenamiento.
- *Algoritmo de aprendizaje*: clasificar en forma aleatoria.
- ¿Cual es la probabilidad de clasificar bien las 10 instancias?
- ¿Cual es la probabilidad de clasificar bien las 10 instancias en *alguna* iteración, si el algoritmo se entrena con un máximo de 1000 *epoch*?



# Traduciendo

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq \Pr[\bigcup_{h \in \mathcal{H}} |E_o(h) - E_i(h)| \geq \epsilon]$$

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq \sum_{h \in \mathcal{H}} \Pr[|E_o(h) - E_i(h)| \geq \epsilon]$$

# Y el problema de aprendizaje queda como...

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq 2N \exp(-2\epsilon^2 M)$$

donde  $N$  es el número de hipótesis posibles en el conjunto  $\mathcal{H}$ .

# ¿Entonces no es posible el aprendizaje?

Tranquilos, esta es una *cota superior* muy superior, vamos a tratar de hacerla más chiquita.

- Vamos a bosquejar el problema de generalización sólo para la clasificación binaria
- El procedimiento se puede generalizar a regresión pero ya se usa otra caja de herramientas en matemáticas que se sale de los alcances de este curso.

# Clasificación binaria

- $h_{\theta} : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}, \quad h_{\theta} \in \mathcal{H}$
- Una gran cantidad de traslapes entre diferentes hipótesis
- Respecto al conjunto de aprendizaje, muchas hipótesis son iguales

# Dicotomías

- Hipótesis  $h : \mathcal{X} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $h_\theta \in \mathcal{H}$
- Dicotomía  
 $h : \{x^{(1)}, \dots, x^{(M)}\} \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $h_\theta \in \mathcal{H}(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})$
- $|\mathcal{H}| = N$ , muy seguramente infinito
- $|\mathcal{H}(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})| \leq 2^M$

# La función de crecimiento

$$m_{\mathcal{H}}(M) = \max_{x^{(1)}, \dots, x^{(M)} \in \mathcal{X}} |\mathcal{H}(x^{(1)}, \dots, x^{(M)})|$$

- Acotado a  $m_{\mathcal{H}}(M) \leq 2^M$

# Un poco mejor

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq 2m_{\mathcal{H}}(M) \exp(-2\epsilon^2 M)$$

pero todavía no lo suficiente, necesitamos más

# Vamos a acotar dependiendo de $\mathcal{H}$

- ¿Que significa  $\mathcal{H}$ ?
- Ejemplos:
  - Rayos positivos
  - Intervalos positivos
  - Conjuntos convexos
  - Clasificación lineal



# ¿Cual es la idea?

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq 2m_{\mathcal{H}}(M) \exp(-2\epsilon^2 M)$$

- Probar que para un  $\mathcal{H}$  dado,  $m_{\mathcal{H}}(M)$  es polinomial,
- Conforme  $M$  aumente (cantidad de datos en el conjunto de aprendizaje),  $m_{\mathcal{H}}(M)$  crece más lento que lo que  $\exp(-2\epsilon^2 M)$  decrece.
- Entonces, el aprendizaje es posible con el  $\mathcal{H}$  correcto, y un número de datos de entrenamiento suficientemente alto.

# La dimensión VC

$d_{VC}(\mathcal{H})$  es el valor más grande de  $M$  para el cual  $m_{\mathcal{H}}(M) = 2^M$

- Para cualquier conjunto  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(M)}\} \in \mathcal{X}$
- Para cualquier asignación  $f(x) \in \{-1, 1\}$

# El problema del aprendizaje

Si  $d_{VC}(\mathcal{H})$  finito, entonces  $m_{\mathcal{H}}(M)$  es  $\mathcal{O}(M^{d_{VC}})$

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq 4m_{\mathcal{H}}(2M) \exp\left(-\frac{1}{8}\epsilon^2 M\right)$$

**La desigualdad de Vapnik--Chervonenkis**

# ¿Como calcular la $d_{VC}$

- Una posibilidad es con los *grados de libertad*
- No es un calculo correcto, pero es una aproximación que suele ser adecuada
- Cuidado con el conjunto  $\mathcal{H}$

# ¿Y cuantos datos se necesitan para que el aprendizaje exista?

- Vamos a simplificar la desigualdad VC

$$\Pr[|E_o(h^*) - E_i(h^*)| \geq \epsilon] \leq \delta$$

$$\delta \approx M^{d_{VC}} e^{-M}$$

- De tarea vamos a graficar esa simplificación

# La regla de oro para la generalización

$$M \geq 10d_{VC}(\mathcal{H})$$

- ¿Siempre aplica?