4. Übung

Aufgabe 4.1 Newtonsches Problem

Eines der ersten Probleme der Variationsrechnung wurde von Isaac Newton gestellt und gelöst (ca. 1686). Es handelt sich dabei um die Minimierung des Luftwiderstandes bzw. des Widerstandsbeiwertes der Spitze eines rotationssymmetrischen Körpers in einem Strömungsfeld (Abbildung 1). Die Form der Spitze lässt sich durch den Radius r, den Winkel θ und die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = -\tan\theta\,, \quad r(0) = a \tag{1}$$

beschreiben. Der zu minimierende Widerstandsbeiwert ergibt sich aus dem Integral

$$C_w = 2\int_0^a C_p(\theta)\, r\,\mathrm{d}r \quad \text{mit} \quad C_p(\theta) = \begin{cases} 2\sin^2\theta & \theta \geq 0 \\ 0 & \theta < 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

Die Beziehung für den Koeffizienten $C_p(\theta)$ wurde von Newton hergeleitet und stellt eine gute Approximation für Strömungsprobleme im Überschallbereich dar. In dieser Übung soll die optimale Form der Spitze mit Hilfe der Variationsrechnung gelöst und veranschaulicht werden.

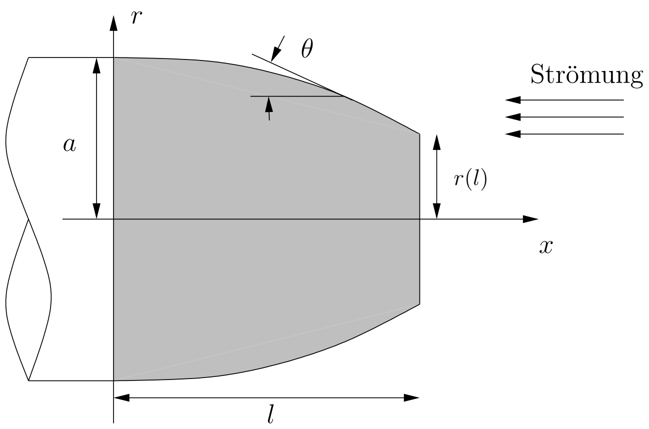

Abbildung 1: Rotationssymmetrische Spitze eines Körpers im Strömungsfeld.

a) Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem in Form des dynamischen Optimierungsproblems

$$\min_{u(\cdot)} \quad \frac{1}{2}r(l)^2 + \int_0^l \frac{ru^3}{1+u^2}\,\mathrm{d}x \tag{3a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = -u\,, \quad r(0) = a \tag{3b}$$

geschrieben werden kann.

b) Stellen Sie die Hamiltonfunktion H und die notwendigen Optimalitätsbedingungen für das Problem (3) auf. Zeigen Sie unter der Annahme $r(l) \neq 0$, dass $u(l) = 1$ und $H = -\frac{r(x)}{2} = \mathit{konst.}$ gilt.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Optimalitätsbedingungen, dass r und u durch die folgenden nichtlinearen impliziten Gleichungen

$$\frac{r}{r(l)} = \frac{(1+u^2)^2}{4u^3}\,, \quad \frac{l-x}{r(l)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4u^4} + \frac{1}{u^2} - \frac{7}{4} + \log u\right) \tag{4}$$

bestimmt sind.

Aufgabe 4.2

Im Folgenden sollen die Gleichungen (4) mit Hilfe von MATLAB und der Funktion `fsolve` aus der Optimization Toolbox auf einem Diskretisierungsgitter

$$x^0 = 0 < x^1 < \cdots < x^N = 1 \tag{5}$$

numerisch gelöst werden, um das Profil $r^k \approx r(x^k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$ der Körperspitze zu approximieren.

a) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, dass unter Vorgabe von $r(0) = a$ die Größen $r(l)$ und $u_0 = u(0)$ aus den Gleichungen

$$\frac{r}{r(l)} = \frac{(1+u_0^2)^2}{4u_0^3}\,, \quad \frac{l}{r(l)} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4u_0^4} + \frac{1}{u_0^2} - \frac{7}{4} + \log u_0\right) \tag{6}$$

bestimmt. Verwenden Sie dazu die Funktion `fsolve` aus der Optimization Toolbox mit geeigneten Startwerten.

b) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das für jeden Diskretisierungspunkt x^k, $k = 0, 1, \ldots, N$ die Größen r^k und u^k durch Lösung der Gleichungen (4) bestimmt. Verwenden Sie dafür `fsolve` und geeignete Startwerte.

c) Stellen Sie die Form der Spitze für verschiedene Werte von a und l grafisch dar und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 4.3 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

Ein Anwendungsgebiet für die Riccati-Differentialgleichung ist die sogenannte Zwei-Freiheitsgrade-Regelungsstruktur (2FHG), die in der Praxis häufig zum Entwurf von Folgeregelungen eingesetzt wird, siehe Abbildung 2. Die Idee der 2FHG-Struktur ist die Entkopplung von Führungs- und Störungsverhalten, indem eine Steuertrajektorie $\boldsymbol{u}_\mathrm{S}(t)$ auf das System geschaltet wird, die das System im nominellen Fall exakt auf einer gewünschten Zustandstrajektorie $\boldsymbol{x}_\mathrm{S}(t)$ führt. Die Regelung stabilisiert das System entlang von $\boldsymbol{x}_\mathrm{S}(t)$ und ist für die Ausregelung von Modellfehlern und Störungen zuständig.

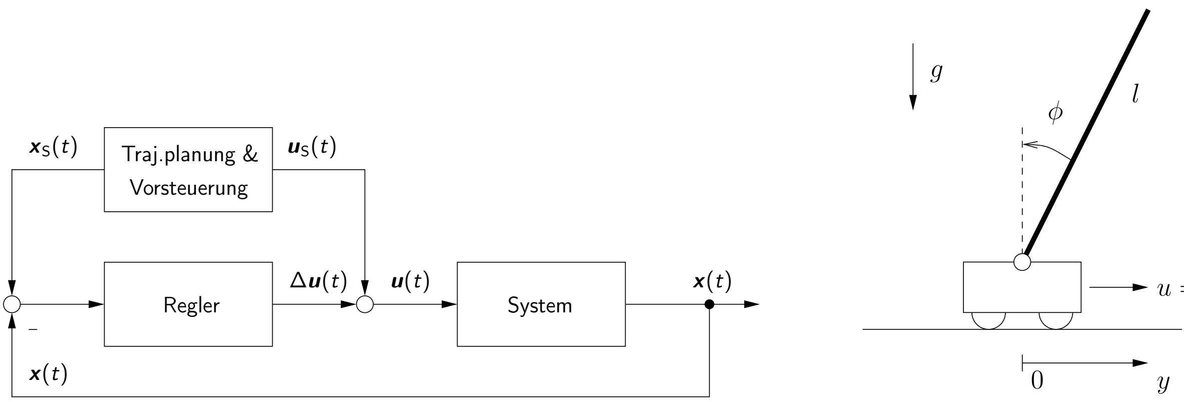

Abbildung 2: Regelungsstruktur mit zwei Freiheitsgraden und Aufbau des Pendels.

Beim 2FHG-Entwurf kann das betrachtete System $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ um die Referenztrajektorie linearisiert werden, was zu einem linearen zeitvarianten System

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)\Delta\boldsymbol{u} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}(t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_\mathrm{S}(t),\boldsymbol{u}_\mathrm{S}(t)}, \quad \boldsymbol{B}(t) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{x}_\mathrm{S}(t),\boldsymbol{u}_\mathrm{S}(t)} \tag{7}$$

mit $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mathrm{S}$ und $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_\mathrm{S}$ führt, das für den Reglerentwurf herangezogen werden kann. Die Riccati-Differentialgleichung kann an dieser Stelle verwendet werden, um ein optimales Rückführgesetz der Form

$$\Delta\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{K}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\mathrm{T}\boldsymbol{P}(t) \tag{8}$$

zu berechnen.

Im Folgenden soll dieses Vorgehen und die Lösung der Riccati-Differentialgleichung am Besipiel des in Abbildung 2 dargestellten Einfachpendels demonstriert werden. Ein einfaches nichtlineares Modell für die Wagenposition y und den Pendelwinkel ϕ ist

$$\ddot{y} = u\,, \quad \ddot{\phi} = \frac{3}{2l}\left(g\sin(\phi) - \cos(\phi)u\right) \tag{9}$$

mit der Erdbeschleunigung g und der Pendellänge l. Als Eingang u dient die Beschleunigung des Wagens $\ddot{y}$.

a) Die betrachtete Folgeregelungsaufgabe ist das Aufschwingen des Pendels aus der unteren in die obere (invertierte) Ruhelage, d.h.

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0\,, & \dot{y}(0) &= 0 \\ \phi(0) &= -\pi\,, & \dot{\phi}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} y(t_f) &= 0\,, & \dot{y}(t_f) &= 0 \\ \phi(t_f) &= 0\,, & \dot{\phi}(t_f) &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Eine mögliche Steuertrajektorie zum Aufschwingen eines Pendels mit der Länge $l = 1\,\mathrm{m}$ in der Zeit $t_f = 2\,\mathrm{s}$ ist

$$u_\mathrm{S}(t) = \sum_{i=1}^{5} c_i t^i\,, \quad t \in [0, t_f] \tag{11}$$

mit dem Koeffizientenvektor $\boldsymbol{c} = [-135.128,\ 625.696,\ -888.598,\ 497.538,\ -96.3861]^{\mathsf{T}}$ (ohne Einheiten), auf dessen Herleitung hier nicht näher eingegangen werden soll. Veranschaulichen Sie die Aufschwingbewegung des Pendels, indem Sie die zugehörigen Zustandstrajektorien $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}(t)$ mit

$$\boldsymbol{x} = [y, \dot{y}, \phi, \dot{\phi}]^{\mathsf{T}} \tag{12}$$

durch Integration der Bewegungsgleichungen (9) bestimmen.

b) Um zusätzlich zu der Steuerung (11) eine optimale Regelung zu entwerfen, wird das nichtlineare Modell (9) um die Solltrajektorien $\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}(t)$ und $\boldsymbol{u}_{\mathrm{S}}(t)$ linearisiert. Berechnen Sie das lineare zeitvariante Modell (7) für das Pendel. Zur Auslegung des Riccati-Reglers wird das zu minimierende Kostenfunktional

$$J(\Delta u) = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}(t_f)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \Delta\boldsymbol{x}(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x}(t) + R\Delta u(t)^2\,\mathrm{d}t\,, \tag{13}$$

mit den Diagonalmatrizen $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ und $R = 0.01$ angesetzt. Der Eingang wird also im Vergleich zu den Zuständen eher gering bestraft, was einer schnellen Reglerauslegung entspricht.

Die Lösung der Riccati-Differentialgleichung muss numerisch erfolgen, um die Matrix $\boldsymbol{P}(t)$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, t_f]$ zu erhalten. Das optimale Rückführgesetz für das Aufschwingen des Pendels ergibt sich nach (8) zu

$$\Delta u(t) = -\boldsymbol{k}(t)^{\mathsf{T}}\Delta\boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{R}\boldsymbol{b}(t)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{P}(t)\left(\boldsymbol{x}_{\mathrm{S}}(t) - \boldsymbol{x}(t)\right)\,. \tag{14}$$

Dabei wird der Einfachheit halber angenommen, dass der komplette Zustand $\boldsymbol{x}$ als Messinformation zur Verfügung steht. Im Sinne der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung ergibt sich die gesamte Stellgröße u als Kombination von Steuerung und Regelung

$$u(t) = u_{\mathrm{S}}(t) + \Delta u(t)\,. \tag{15}$$

Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `pendel` zur Simulation des Pendels und der Regelung.

c) Vergleichen Sie die Trajektorien für das Aufschwingen im offenen Kreis (Simulation mit reiner Steuerung) und im geschlossenen Kreis (Steuerung und Regelung) für verschiedene Startwerte der Zustände $\boldsymbol{x}$, d.h. unterschiedliche Störungen des Anfangszustandes. Wann fällt das Pendel bei reiner Steuerung um? Kann das Pendel auch trotz zusätzlicher Regelung umfallen? Wie kann der Vorzeichenwechsel im zeitlichen Verlauf der Reglerverstärkungen $\boldsymbol{k}(t)$ interpretiert werden?