5. Übung

Als Beispiel für die numerische Lösung von Optimalsteuerungsproblemen wird die Steuerung eines Binnenschiffes betrachtet. Die Basis dafür ist das folgende nichtlineare Modell, das in [1] hergeleitet wurde:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, & x_1(0) &= 0\\ \dot{x}_2 &= c_1 x_2 + c_2 u\,, & x_2(0) &= 0\\ \dot{x}_3 &= c_3 v|x_3|x_3 + c_4 x_2\,, & x_3(0) &= 0 \end{aligned}\right\}\quad \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\,. \tag{1}$$

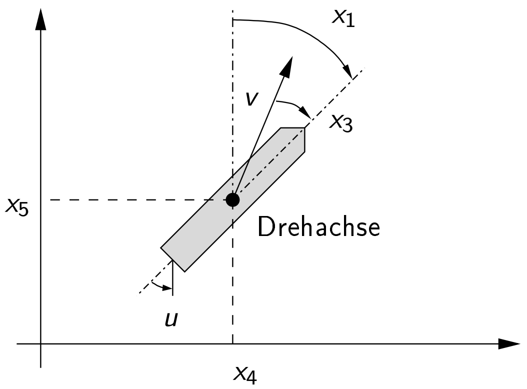
Die Bedeutung der auftretenden Variablen ist aus Abbildung 1 ersichtlich. Die Schiffparameter

$$c_1 = -0.26\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,,\quad c_2 = 0.2\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}\,,\quad c_3 = -1.87\,\frac{1}{\mathrm{rad\,m}}\,,\quad c_4 = 0.6\,\frac{1}{\mathrm{s}} \tag{2}$$

wurden an einem realen Binnenschiff identifiziert. Der Ruderwinkel u sei durch maximale Ausschläge

$$u \in [u^-,\ u^+] \tag{3}$$

begrenzt, für die im Folgenden unterschiedliche Werte betrachtet werden.



x_1 :	Vorauswinkel [rad]
$\dot{x}_1 = x_2$:	Drehgeschwindigkeit [rad/s]
x_3 :	Driftwinkel [rad]
(x_4, x_5) :	Position des Schiffes [m]
u :	Ruderwinkel [rad]
v :	Geschwindigkeit [m/s]

Abbildung 1: Größen zur Beschreibung der Schiffsdynamik.

Aufgabe 5.1 Indirekte Lösung mit Diskretisierungsverfahren

Für die Anwendung des indirekten Diskretisierungs- und Schießverfahrens unter MATLAB wird als Optimalsteuerungsproblem ein Richtungswechsel des Schiffes betrachtet, was im zu minimierenden Kostenfunktional

$$J(u) = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})^\mathsf{T}\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}) + \frac{1}{2}\int_0^{t_\mathrm{f}} \Delta\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x} + ru^2\,\mathrm{d}t\,,\quad \Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mathrm{f}\,,\quad \boldsymbol{x}_\mathrm{f} = \begin{bmatrix}\pi/4\\0\\0\end{bmatrix} \tag{4}$$

berücksichtigt wird. Die Endzeit und die Geschwindigkeit des Schiffes werden zu $t_\mathrm{f} = 15\,\mathrm{s}$ und $v = 3.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ gesetzt. Der Einfachheit halber werden die Gewichtungsmatrizen als Einheitsmatrizen $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ angesetzt, während $r = 0.1$ einer relativ niedrigen Gewichtung des Ruderwinkels u entspricht.

Stellen Sie die Hamilton-Funktion $H(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{\lambda})$ für das Problem auf und leiten Sie daraus die notwendigen Optimalitätsbedingungen ab. Berechnen Sie die optimale Steuerung $u = \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ durch Anwendung von Pontryagins Maximumprinzip und setzen Sie diese in die kanonischen Gleichungen

$$\dot{\boldsymbol{x}} = H_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}), \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda}) \tag{5}$$

ein, welche die Basis für die hier betrachteten Diskretisierungs- und Schießverfahren darstellen.

Lösen Sie die kanonischen Gleichungen (5) mit den Randbedingungen

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_\mathrm{f}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}) - \boldsymbol{x}_\mathrm{f}) \tag{6}$$

mittels der MATLAB-Funktion `bvp4c`, die Zwei-Punkt-Randwertaufgaben mit Hilfe des Kollokationsverfahrens löst (siehe [2, 3] und `help bvp4c` unter MATLAB). Die wichtigsten Übergabeargumente an `bvp4c` sind die rechte Seite der Differentialgleichung (5) und die Randbedingungen (6) in Residuenform. Für die Lösung des Randwertproblems wird eine Startschätzung benötigt, die über die Funktion `bvpinit` erstellt werden kann. Diskretisieren Sie dazu das Zeitintervall $[0, t_\mathrm{f}]$ mit 30 Stützstellen t^k und setzen sie konstante Startwerte für die Zustände $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^\mathsf{T}$ und $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^\mathsf{T}$ an. Berechnen Sie die optimalen Trajektorien für den 45°-Richtungswechsel des Schiffes für verschiedene Beschränkungen des Ruderwinkels $u \in [u^-, u^+]$ mit $u^\pm = \pm 5°$, $\pm 10°$, $\pm 15°$. Stellen Sie außerdem die Fortbewegung des Schiffes auf dem Fluss dar, wobei sich die Position (x_4, x_5) des Schiffes (siehe Abbildung 1) durch Integration der Differentialgleichungen

$$\dot{x}_4 = v \sin(x_1 - x_3), \quad \dot{x}_5 = v \cos(x_1 - x_3), \quad x_4(0) = x_5(0) = 0 \tag{7}$$

ergibt. Untersuchen Sie außerdem den Einfluss der Gewichtungen im Kostenfunktional auf den Verlauf der optimalen Trajektorien.

Aufgabe 5.2 Indirekte Lösung mit Schießverfahren

Beim Schießverfahren werden die kanonischen Gleichungen (5) mit den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ und den noch unbekannten Werten $\boldsymbol{\lambda}(0) = \boldsymbol{\lambda}_0$ integriert. Die sich dadurch ergebende Trajektorie der adjungierten Zustände $\boldsymbol{\lambda}(t; \boldsymbol{\lambda}_0)$ muss die Endbedingungen in (6) erfüllen, was zu der Gleichung

$$\boldsymbol{\lambda}(t_\mathrm{f}; \boldsymbol{\lambda}_0) - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}; \boldsymbol{\lambda}_0) - \boldsymbol{x}_\mathrm{f}) = \boldsymbol{0} \tag{8}$$

in Residuenform führt. Die Endbedingung in Abhängigkeit von $\boldsymbol{\lambda}_0$ wird mit der MATLAB-Funktion `fsolve` aus der Optimization Toolbox gelöst, während die unterlagerte numerische Integration der Differentialgleichungen mit einem ODE-Solver von MATLAB durchgeführt wird.

Für die numerische Integration muss eine hohe Genauigkeit verwendet werden, da die Instabilität der kanonischen Gleichungen zu einer schlechten Konditionierung der numerischen Integration führt. Des Weiteren ist das Schießverfahren recht sensitiv hinsichtlich der Startwerte von $\boldsymbol{\lambda}_0$, die daher nahe genug an der optimalen Lösung liegen müssen.

Überprüfen Sie die oben erhaltenen Ergebnisse mit Hilfe des Schießverfahrens für die Startwerte $\boldsymbol{\lambda}_0 = [-5, -10, 0.1]^\mathsf{T}$. Untersuchen Sie die numerische Sensitivität durch Variation von $\boldsymbol{\lambda}_0$ und unterschiedliche Toleranzgrenzen für die numerische Integration. Lösen Sie des Weiteren die Fälle mit $u^\pm = \pm 10°$ und $u^\pm = \pm 15°$ mit Hilfe des sogenannten Fortsetzungsverfahrens, indem Sie für den (einfach zu lösenden) Fall $u^\pm = \pm 5°$ die Startschätzung $\boldsymbol{\lambda}_0 = \boldsymbol{0}$ ansetzen, anschließend die Schranken sukzessive erhöhen und die vorherigen Lösungen $\boldsymbol{\lambda}_0^*$ als neue Startschätzungen verwenden.

Aufgabe 5.3 Direkte Lösung mit Volldiskretisierung

Beim direkten Lösungsweg wird lediglich die Volldiskretisierung betrachtet, da die Teildiskretisierung in Verbindung mit nichtlinearen Optimierern aufgrund der unterlagerten Integration in der Regel komplizierter ist. Als Erweiterung des Richtungswechsels soll ein Ausweichmanöver betrachtet werden, um z.B. ein entgegenkommendes Schiff zu passieren. Das Schiffmodell (1) wird dazu um die erste Differentialgleichung aus (7) erweitert. Somit ergibt sich das Optimalsteuerungsproblem

$$\min_{u(\cdot)} \quad J(u) = \Delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f})^\mathsf{T}\boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{x}(t_\mathrm{f}) + \frac{1}{2}\int_0^{t_\mathrm{f}} \Delta\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{x} + ru^2\,\mathrm{d}t \tag{9a}$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{x}_1 = x_2\,, \qquad x_1(0) = 0 \tag{9b}$$

$$\dot{x}_2 = c_1x_2 + c_2u\,, \qquad x_2(0) = 0 \tag{9c}$$

$$\dot{x}_3 = c_3v|x_3|x_3 + c_4x_2\,, \qquad x_3(0) = 0 \tag{9d}$$

$$\dot{x}_4 = v\sin(x_1 - x_3)\,, \qquad x_4(0) = 0 \tag{9e}$$

$$u(t) \in [u^-, u^+] \quad \forall t \in [0, t_\mathrm{f}]\ . \tag{9f}$$

Im Kostenfunktional geht die Abweichung $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mathrm{f}$ von der gewünschten Endposition ein. Da das Schiff um eine Strecke von 10 m in x_4-Richtung (d.h. quer zur Fahrtrichtung) ausweichen soll, wird

$$\boldsymbol{x}_\mathrm{f} = [0,\ 0,\ 0,\ 10\,\mathrm{m}]^\mathsf{T} \tag{10}$$

gesetzt. Analog zum Richtungswechsel werden die Gewichtungsmatrizen als Einheitsmatrizen $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ angesetzt, während die Stellgröße mit $r = 0.1$ gewichtet wird.

Berechnen Sie die Volldiskretisierung des Optimalsteuerungsproblems (9) mit Hilfe der Trapezregel. Das resultierende nichtlineare Optimierungsproblem kann dann mit einem herkömmlichen nichtlinearen Optimierer numerisch gelöst werden. Implementieren Sie dazu das diskretisierte Problem mit Hilfe der Modellierungssprache AMPL [4], die über eine eigene Syntax zur Beschreibung von nichtlinearen Optimierungsproblemen verfügt. Die Lösung selbst erfolgt dann beispielsweise mit IPOPT oder MINOS.

Eine Alternative zur eigenen Installation von AMPL ist der Internet-Dienst NEOS (Network Enabled Optimization Server), an den AMPL-Skripte gesendet werden können. NEOS bietet eine Auswahl an Solvern, unter denen ein geeigneter Optimierer ausgewählt werden kann. Die Lösung wird dann entweder über ein Web-Interface ausgegeben oder per Email zugesendet.

Ein Vorteil der Volldiskretisierung ist die einfachere Handhabung von Zustandsbeschränkungen verglichen mit den indirekten Ansätzen. Lösen Sie das Problem mit verschiedenen Beschränkungen, beispielsweise einer Begrenzung des Vorauswinkels x_1 auf 20° und interpretieren Sie die Ergebnisse.

Literatur

[1] R. Bittner, A. Driescher und E.D. Gilles. Drift dynamics modeling for automatic track-keeping of inland vessels. In *10th Saint Petersburg International Conference on Integratted Navigation Systems*, Seiten 218–227, St. Petersburg (Russland), 2003.

[2] J. Kierzenka und L.F. Shampine. A BVP solver based on residual control and theMatlab PSE. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27:299–316, 2001.

[3] L.F. Shampine, J. Kierzenka und M.W. Reichelt. Solving boundary value problems for ordinary differential equations in Matlab with bvp4c. https://de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3819-tutorial-on-solving-bvps-with-bvp4c, 2003.

[4] R. Fourer, D.M. Gay und B.W. Kernighan. *AMPL: A modeling language for mathematical programming*. Duxbury, 2002.