



TÉLÉCOMMUNICATIONS

Séquence 5 - Projet

Impact d'un canal de propagation sélectif en fréquence et introduction à l'égalisation

Auteurs :

Mahmoud LAANAIYA

Mohamed Hamza KADRI

Table des matières

1	Introduction	3
2	Impact d'un canal de propagation multitrajets	5
2.1	Étude théorique	5
2.2	Implantation sous Matlab	9
2.2.1	Chaîne de transmission sans canal	9
2.2.2	Chaîne de transmission avec la partie filtrage réalisée par le canal de propagation mais sans introduction de bruit	9
2.2.3	Chaîne de transmission complète avec le filtrage canal et l'ajout de bruit . .	12
3	Égalisation ZFE	13
3.1	Présentation de l'égalisation ZFE	13
3.2	Étude à réaliser	14
3.2.1	Étude théorique	14
3.2.2	Simulation	15
4	Références	19

Table des figures

1	Chaîne de transmission passe-bas équivalente à une chaîne de transmission BPSK)	3
2	Exemple de transmission en ligne de vue directe (canal non sélectif en fréquence) : transmission fixe de la TV numérique par satellite.)	3
3	Exemple de transmission avec multitrajets (canal sélectif en fréquence) : transmission de la TV numérique par voie terrestre.)	4
4	Chaîne de transmission avec égalisation.	4
5	Canal multi trajets.	5
6	Le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 1110010.	6
7	Diagramme de l'Oeil.	7
8	La fonction $z(t)$	9
9	Diagramme de l'Oeil.	10
10	La fonction $g(t)$	10
11	Constellations.	11
12	Comparaison entre TEB théorique et TEB simulé.	12
13	Comparaison entre TEB avec et sans canal.	13
14	$H_c(f)$	15
15	$H_c(f)H_{eg}(f)$	16
16	Les filtres sur une seule figure.	16
17	Réponse impulsionnelle de la chaîne de transmission échantillonnée à N_s avec égalisation.	17
18	Réponse impulsionnelle de la chaîne de transmission échantillonnée à N_s sans égalisation.	17
19	Constellations avec égalisation.	18
20	Constellations sans égalisation.	18
21	Comparaison TEB avec et sans égalisation.	19

1 Introduction

Soit la chaîne de transmission présentée dans la figure 1. Elle représente la chaîne passe-bas équivalente associée à une transmission BPSK sur canal AWGN : $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal modulé sur porteuse, $h_c(t)$ représente la réponse impulsionnelle du canal passe-bas équivalent et $n_e(t)$ l'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de propagation.

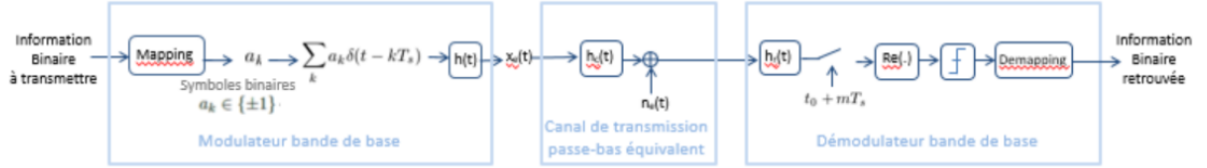


FIGURE 1 – Chaîne de transmission passe-bas équivalente à une chaîne de transmission BPSK)

Il est possible de trouver des instants d'échantillonnage, $t_0 + mT_s$, sans interférences entre symboles si la chaîne de transmission présente une réponse impulsionnelle globale $g(t) = h(t)h_c(t)h_r(t)$ qui permette de respecter le critère de Nyquist. Il est simple de trouver des filtres d'émission et de réception qui permettent de respecter ce critère : par exemple deux filtres de réponse impulsionnelles rectangulaires de même durée T_s ou bien deux filtres de réponse impulsionnelles en racine de cosinus surélevé de même roll off. En présence d'un canal de propagation non sélectif en fréquence, c'est-à-dire présentant une réponse en fréquence de module constant sur la bande du filtre de Nyquist réalisé par le filtre d'émission et le filtre de réception, le critère de Nyquist reste conservé. C'est le cas, par exemple, pour une transmission satellite fixe.

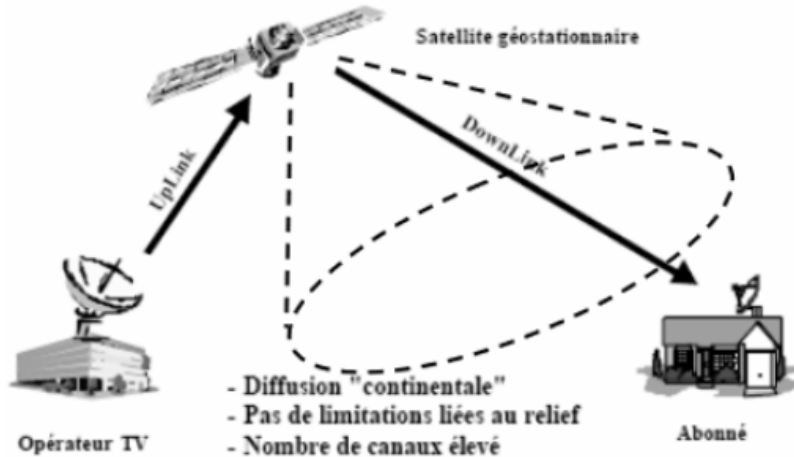


FIGURE 2 – Exemple de transmission en ligne de vue directe (canal non sélectif en fréquence) : transmission fixe de la TV numérique par satellite.)

Il peut néanmoins arriver que l'hypothèse de non sélectivité en fréquence du canal ne soit plus vérifiée, par exemple lors de transmissions à trajets multiples : transmissions WiFi, TNT, transmissions avec les mobiles, communications acoustiques sous marine.

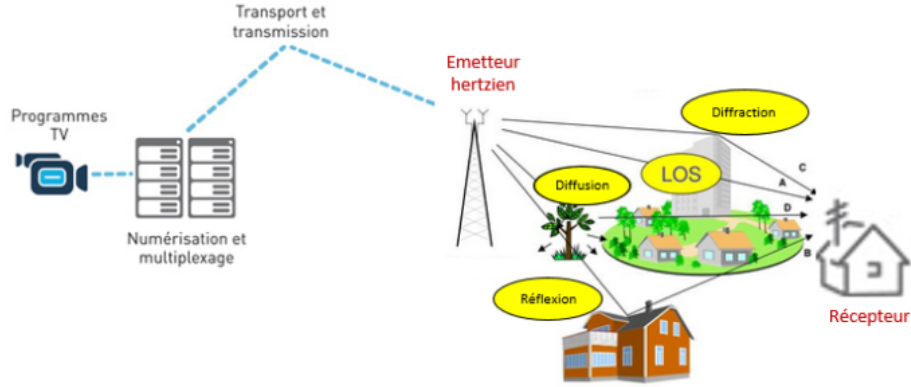


FIGURE 3 – Exemple de transmission avec multitrajets (canal sélectif en fréquence) : transmission de la TV numérique par voie terrestre.)

Dans un tel contexte, une solution possible pour supprimer les interférences introduites par le canal de propagation, est de placer un filtre supplémentaire au niveau du récepteur appelé égaliseur : voir figure 4. Le critère de Nyquist reste respecté entre $h(t)$ et $h_r(t)$, tandis que l'égaliseur est là pour corriger les imperfections introduites par le canal de propagation.

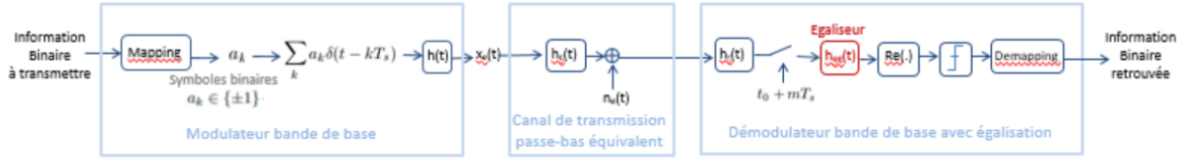


FIGURE 4 – Chaîne de transmission avec égalisation.

L'objectif ici n'est pas de développer la théorie de l'égalisation, bien entendu, mais d'en introduire le concept. Nous allons ajouter un égaliseur fixe (pour canal stationnaire) sous la forme d'un filtre RIF (filtres à réponse impulsionnelle finie) implanté au rythme symbole : l'égaliseur ZFE (Zero Forcing Equalizer). Cet égaliseur propose de déterminer les coefficients le définissant de manière à ce que la chaîne de transmission permettent de continuer à respecter le critère de Nyquist en présence du canal sélectif en fréquence. Cet égaliseur ne se préoccupe que de l'interférence, il ne prend pas en compte le bruit et pourra donc venir l'amplifier sur certaines fréquences. D'autres types d'égaliseurs plus performants existent, bien entendu, fixes ou adaptatifs, selon quel canal est stationnaire ou pas.

2 Impact d'un canal de propagation multitrajets

Soit le chaîne de transmission de la figure 1. On place en émission et en réception deux filtres de même réponse impulsionnelle : fonction porte de largeur T_s et de hauteur égale à 1. Le canal passe-bas équivalent, de réponse impulsionnelle $h_c(t)$ est donné par la figure 5, où $x_e(t)$ représente l'enveloppe complexe associée au signal émis, $y_e(t)$ l'enveloppe complexe associée au signal reçu, α_0 le coefficient d'atténuation sur la ligne de vue directe, α_1 le coefficient d'atténuation sur le trajet réfléchi, τ_0 le retard sur la ligne de vue directe, τ_1 le retard sur le trajet réfléchi. L'enveloppe complexe associée au bruit introduit par le canal de transmission, $n_e(t)$, est ici réelle avec une densité spectrale de puissance égale à N_0 quelle que soit la fréquence.

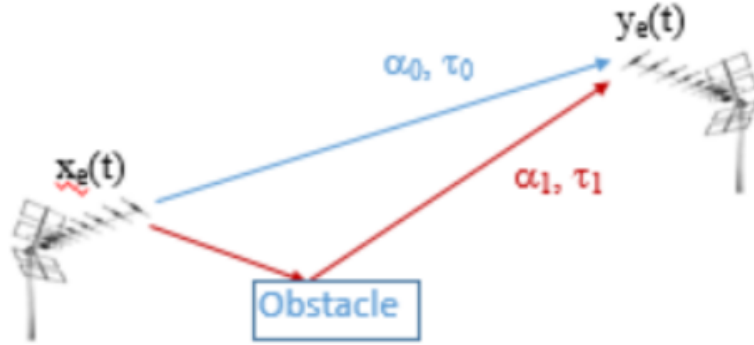


FIGURE 5 – Canal multi trajets.

2.1 Étude théorique

1. Ecrire $y_e(t)$ en fonction de $x_e(t)$ et des paramètres du canal (retards et coefficients d'atténuation).

Réponse :

Rappel

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k x(t - \tau_k) + n(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \delta(t - \tau_k) * x(t) + n(t)$$

$$\text{Ici } N = 2 \text{ donc } y_e(t) = \alpha_0 x_e(t - \tau_0) + \alpha_1 x_e(t - \tau_1)$$

2. En déduire la réponse impulsionnelle $h_c(t)$ du canal passe-bas équivalent.

Réponse :

$$\begin{aligned} \text{On a } y_e(t) &= \alpha_0 x_e(t - \tau_0) + \alpha_1 x_e(t - \tau_1) \\ \text{Donc } y_e(t) &= \alpha_0 \delta(t - \tau_0) * x_e(t) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1) * x_e(t) \\ \text{Donc } y_e(t) &= (\alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)) * x_e(t) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } h_c(t) = \alpha_0 \delta(t - \tau_0) + \alpha_1 \delta(t - \tau_1)$$

3. On prendra $\tau_0 = 0$ (ligne de vue directe), $\tau_1 = \tau_0 + T_s$ (trajet réfléchi), $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_1 = 0,5$. Sans bruit, tracer le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 1110010.

Réponse :

$$\text{On a } g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t), \text{ donc } g(t) = T_s(\Lambda_{T_s}(t) + 0,5\Lambda_{T_s}(t - T_s))$$

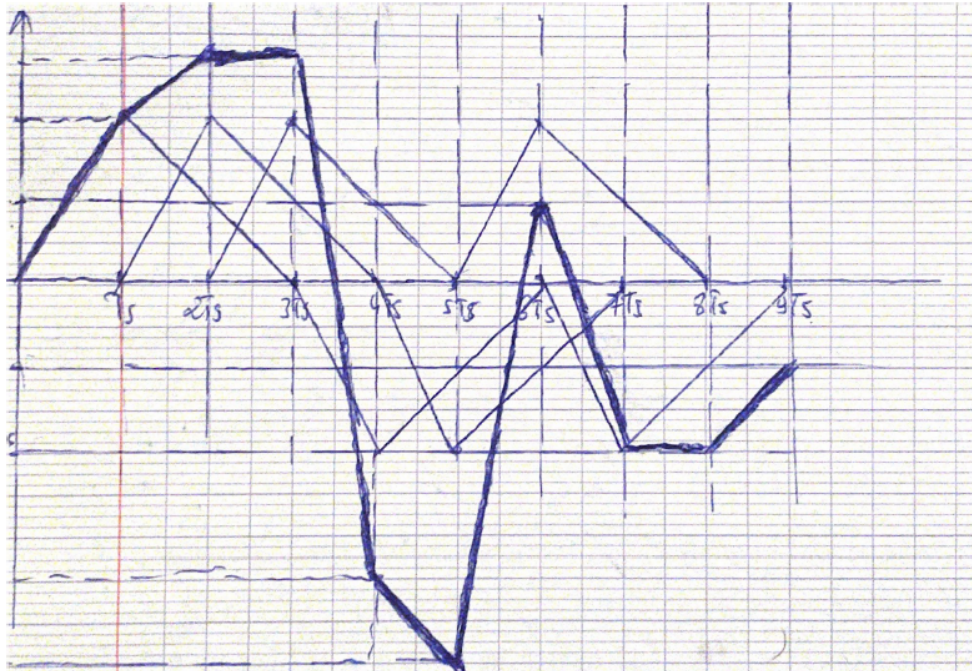


FIGURE 6 – Le signal en sortie du filtre de réception $h_r(t)$ pour la séquence binaire transmise suivante 1110010.

4. Tracer le diagramme de l'oeil sans bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$. Est-il possible de respecter le critère de Nyquist sur cette chaîne de transmission ?

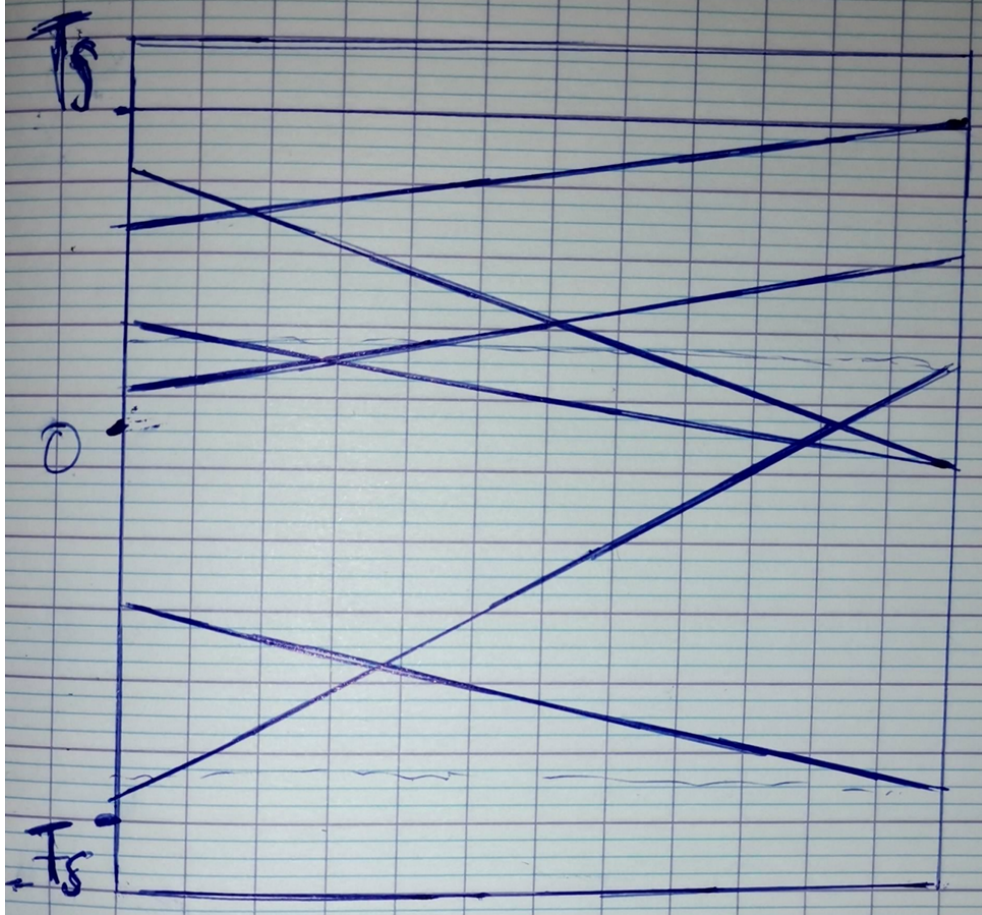


FIGURE 7 – Diagramme de l'Oeil.

5. En supposant que l'on échantillonne à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$ et que l'on utilise un détecteur à seuil pour prendre les décisions avec un seuil à 0 (chaîne de transmission pour canal AWGN), calculer le TEB de la liaison en fonction de T_s et σ_w , σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$

. Réponse :

On a

$$Q(t) = P\left(\frac{\omega_m}{\sigma_w} > t\right)$$

avec P : La fonction définissant la probabilité.

et ω_m : Échantillon de bruit filtré.

et σ_w : La puissance du bruit.

Alors

$$TEB = \frac{Q\left(\frac{g(t_0)}{2\sigma_w}\right) + Q\left(\frac{3g(t_0)}{2\sigma_w}\right)}{2}$$

D'après ce qui précède, pour $t_0 = T_s$, $g(t_0) = T_s$ car $Ts(\Lambda_{T_s}(t_0) + 0,5\Lambda_{T_s}(t_0 - T_s)) = T_s$

Enfin,
$$TEB = \frac{Q(\frac{T_s}{2\sigma_\omega}) + Q(\frac{3T_s}{2\sigma_\omega})}{2}$$

6. Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_ω^2 en fonction de N_0 et de T_s .

Réponse :

On a

$$\sigma_\omega^2 = N_0 \int_{\mathbf{R}} |H_r(f)|^2 df$$

Donc
$$\sigma_\omega^2 = N_0 T_s$$

7. Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s , en fonction de T_s .

Réponse :

$E_s = P_r T_s$, si P_r représente la puissance du signal reçu, $r(t) = \sum_k a_k h_e(tkT_s)$, avec $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ qui représente la forme d'onde reçue. On a donc $P_r = \int_{\mathbf{R}} S_r(f) df$, avec $S_r(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H_e(f)|^2$ et $H_e(f) = H(f)H_c(f)$. On a $h_e(t) = h(t) + \alpha_1 h(t - \tau_1)$

Donc
$$E_s = \int_{\mathbf{R}} |H_e(f)|^2 df = \int_{\mathbf{R}} |h_e(t)|^2 dt = \frac{5T_s}{4} \text{ (Parseval).}$$

8. Dédurre des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0 , rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaîne étudiée.

Réponse :

On a $M = 2$, donc $E_b = E_s = \frac{5T_s}{4}$, et donc

$$TEB = \frac{Q(\sqrt{\frac{E_b}{5N_0}}) + Q(\sqrt{\frac{9E_b}{5N_0}})}{2}$$

2.2 Implantation sous Matlab

2.2.1 Chaîne de transmission sans canal

Pour l'implantation, voir BPSK.m

```
***** Calcul du TEB sans canal *****  
La valeur du TEB sans canal est égale à : 0
```

> Le résultat est bon !

2.2.2 Chaîne de transmission avec la partie filtrage réalisée par le canal de propagation mais sans introduction de bruit

Les résultats simulés sont conformes avec ceux théoriques (Voir Étude théorique).

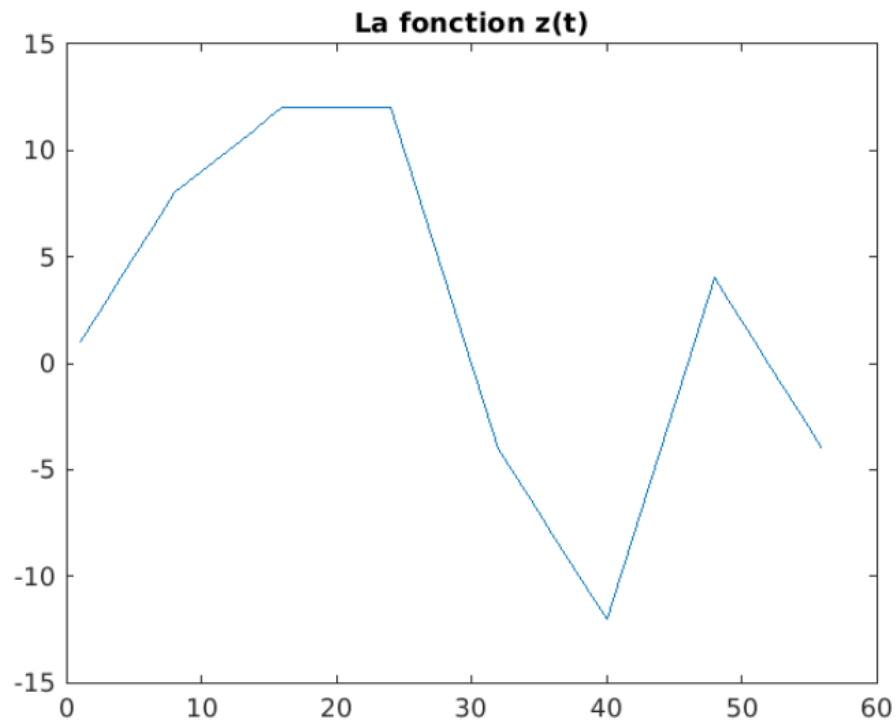


FIGURE 8 – La fonction $z(t)$.

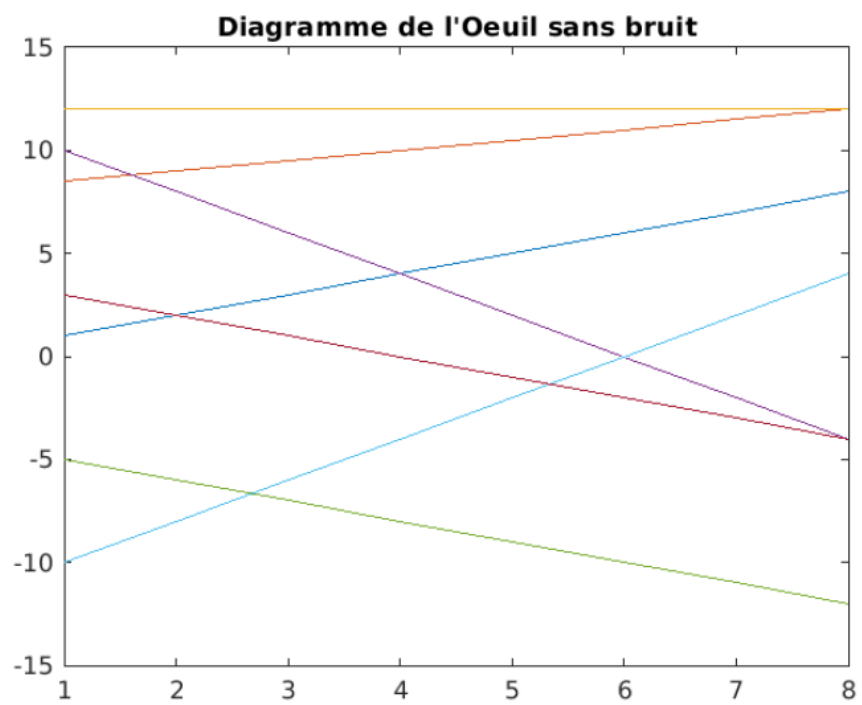


FIGURE 9 – Diagramme de l'Oeil.

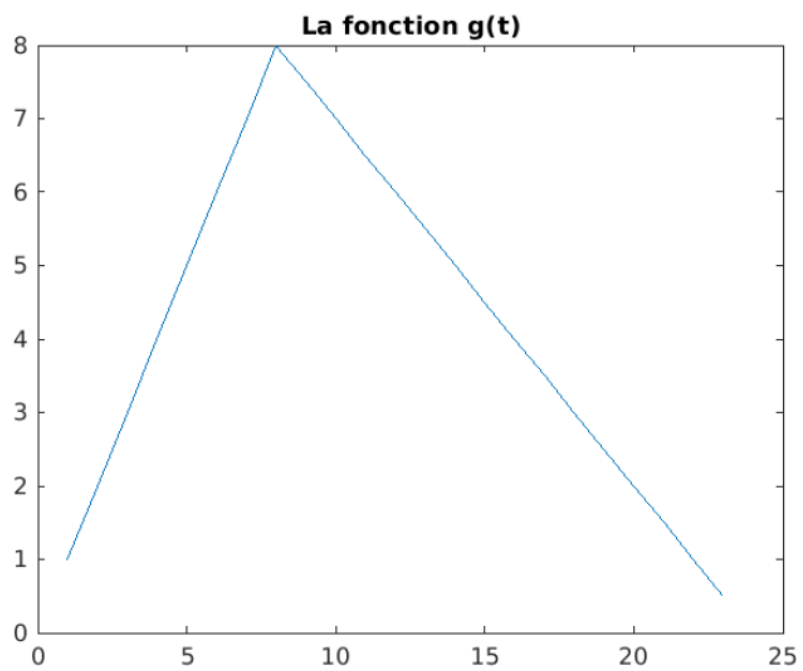


FIGURE 10 – La fonction $g(t)$.

Constellations :

Les constellations sont conformes à ce qu'était prévu. En effet, BPSK est la forme la plus simple du PSK. Elle utilise deux phases qui sont séparées de 180° .

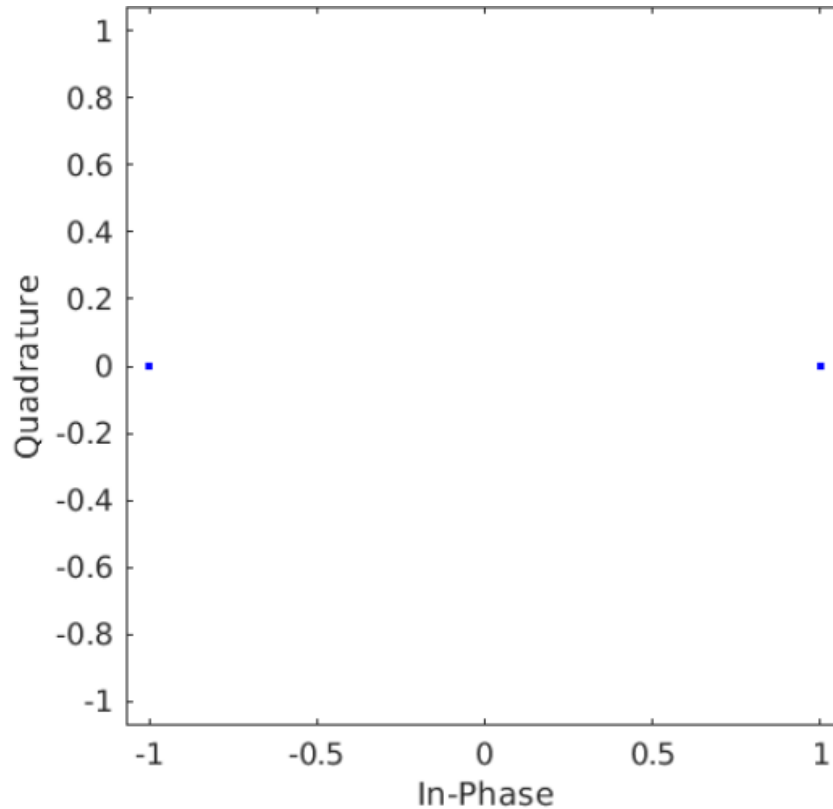


FIGURE 11 – Constellations.

TEB avec canal : Pour des bits bit_1 et $bit_2 \in \{-1, 1\}$

On a toujours $sign(\alpha_0 * bit_1 + \alpha_1 * bit_2) = sign(bit_1)$.

Et donc, après application des filtres, on a les mêmes décisions puisque les signes de y_e restent les mêmes que ceux de x_e .

Enfin, le TEB avec canal doit être nul aussi.

***** Calcul du TEB avec canal *****

La valeur du TEB avec canal est égale à : 0

2.2.3 Chaîne de transmission complète avec le filtrage canal et l'ajout de bruit

On introduit un bruit de densité spectrale de puissance N_0 dans la bande Fe. La variance du bruit à introduire est donc donnée par :

$$\sigma_n^2 = N_0 F_e = \frac{E_s}{\frac{E_b}{N_0}} F_e = \frac{P_x T_s}{\frac{E_b}{N_0}} F_e = \frac{P_x N_s}{\log_2(M) \frac{E_b}{N_0}} F_e$$

où

- E_s représente l'énergie par symbole à l'entrée du récepteur : $E_s = \log_2(M) E_b$, si E_b représente l'énergie binaire à l'entrée du récepteur et M l'ordre de la modulation,
- T_s représente la durée symbole,
- N_s représente le facteur de suréchantillonnage : $T_s = N_s T_e$, $T_e = 1/F_e$ étant la période d'échantillonnage
- P_x représente la puissance du signal à bruite (signal en sortie du modulateur bande de base).

Comparaison entre TEB simulée avec canal et TEB théorique

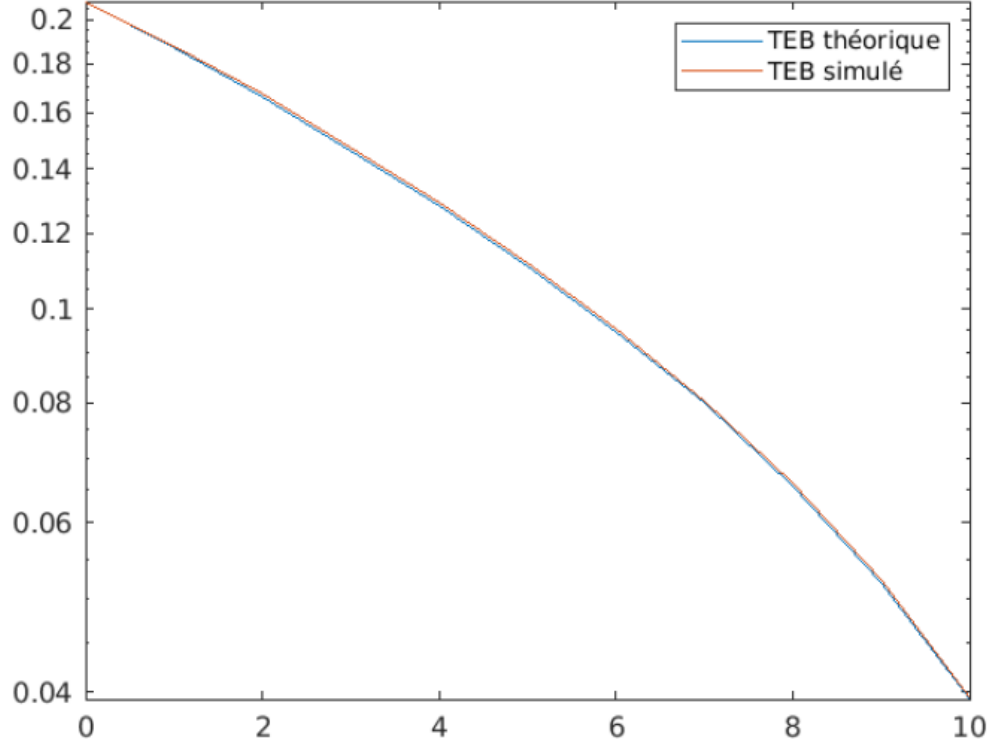


FIGURE 12 – Comparaison entre TEB théorique et TEB simulé.

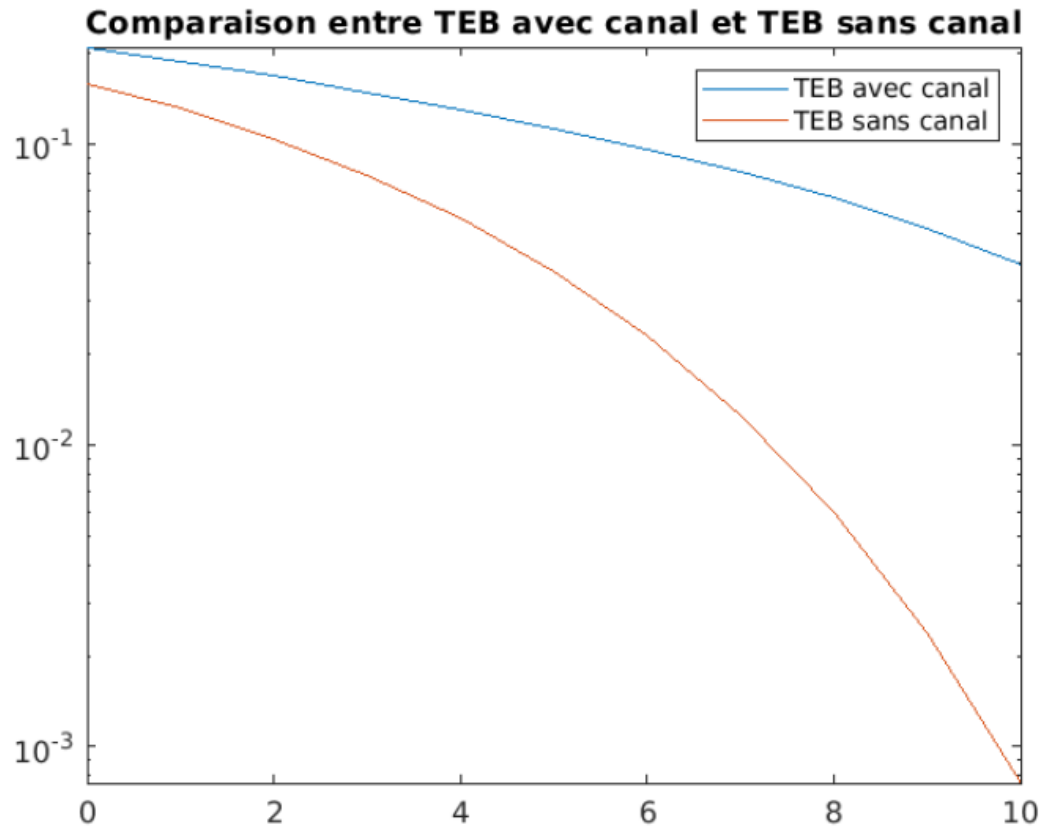


FIGURE 13 – Comparaison entre TEB avec et sans canal.

3 Égalisation ZFE

3.1 Présentation de l'égalisation ZFE

Le principe consiste à déterminer les coefficients définissant le filtre égaliseur (voir figure 4) de manière à ce que la chaîne de transmission permettent de respecter le critère de Nyquist. La sortie de l'égaliseur peut être écrite de la manière suivante :

$$y(t_0 + mT_s) = \sum_{k=0}^N c_k z(t_0 + (m - k)T_s)$$

pour un ordre N , en fonction de son entrée z et des coefficients c_k le définissant en numérique (filtre à réponse impulsionnelle finie : $C = [c_0 \ c_1 \ ... \ c_N]$, avec $c_k = h_{eg}(kT_s)$).

En plaçant un dirac à l'entrée de la chaine de transmission nous allons obtenir, en sortie de l'égaliseur, $y(t) = g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t) * h_{eg}(t)$, échantillonné à $t_0 + mT_s$. Nous souhaitons donc trouver les coefficients c_k de l'égaliseur tels que sa sortie, y , pour un Dirac en entrée de la chaine soit telle que $y(t_0) \neq 0$ et $y(t_0 + pT_s) = 0, \forall p \in Z^*$ (critère de Nyquist).

Nous avons donc à résoudre le système suivant :

$$y(t_0) = c_0 z(t_0) + c_1 z(t_0 - T_s) + c_2 z(t_0 - 2T_s) + ... + c_N z(t_0 - NT_s) \neq 0 (= 1)$$

$$y(t_0 + T_s) = c_0 z(t_0 + T_s) + c_1 z(t_0) + c_2 z(t_0 - T_s) + ... + c_N z(t_0 + (1 - N)T_s) = 0$$

...

$$y(t_0 + NT_s) = c_0 z(t_0 + NT_s) + c_1 z(t_0 + (N - 1)T_s) + c_2 z(t_0 + (N - 2)T_s) + ... + c_N z(t_0) = 0$$

...

$$y(t_0 + KT_s) = c_0 z(t_0 + KT_s) + c_1 z(t_0 + (K - 1)T_s) + c_2 z(t_0 + (K - 2)T_s) + ... + c_N z(t_0 + (K - N)T_s) = 0$$

Soit avec une écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t_0) & z(t_0 - T_s) & z(t_0 - 2T_s) & \dots & z(t_0 - NT_s) \\ z(t_0 + T_s) & z(t_0) & z(t_0 - T_s) & \dots & z(t_0 + (1 - N)T_s) \\ z(t_0 + 2T_s) & z(t_0 + T_s) & z(t_0) & \dots & z(t_0 + (2 - N)T_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z(t_0 + NT_s) & z(t_0 + (N - 1)T_s) & z(t_0 + (N - 2)T_s) & \dots & z(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z(t_0 + KT_s) & z(t_0 + (K - 1)T_s) & z(t_0 + (K - 2)T_s) & \dots & z(t_0 + (K - N)T_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

En considérant $z(t_0 - lT_s) = 0$ pour $l > 0$, on peut encore écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ z(t_0 + T_s) & z(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ z(t_0 + 2T_s) & z(t_0 + T_s) & z(t_0) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z(t_0 + NT_s) & z(t_0 + (N - 1)T_s) & z(t_0 + (N - 2)T_s) & \dots & z(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ z(t_0 + KT_s) & z(t_0 + (K - 1)T_s) & z(t_0 + (K - 2)T_s) & \dots & z(t_0 + (K - N)T_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}$$

Deux cas se présentent alors selon les valeurs respectives de K et N :

- si $K = N$ alors $[Z]$ est une matrice de Toeplitz inversible et les coefficients de l'égaliseur sont donnés par :

$$C = [c_0 \ c_1 \ ... \ c_N] = [Z]^{-1} Y_0$$

où $[Z] = \text{toeplitz}(Z)$, avec Z le vecteur échantillonné à $t_0 + mT_s$ à l'entrée de l'égaliseur, obtenu pour un Dirac placé à l'entrée de la chaine ($Z = [z(t_0) \ z(t_0 + T_s) \ ... \ z(t_0 + NT_s)]$) et $Y_0 = [1 \ 0 \ 0 \ ... \ 0]$.

3.2 Étude à réaliser

3.2.1 Étude théorique

Pour une entrée en Dirac $= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$, on a un mapping de la forme :

$$[a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6] = [1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1]$$

On a $z(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT_s) * g(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$

Donc $z(t_0 + mT_s) = g(t_0 + mT_s - T_s) - g(t_0 + mT_s - 2T_s) - g(t_0 + mT_s - 3T_s) - g(t_0 + mT_s - 4T_s) - g(t_0 + mT_s - 5T_s) - g(t_0 + mT_s - 6T_s)$

Pour $m = 0$, $z(t_0) = g(t_0) - g(0) = T_s$

Pour $m = 1$, $z(t_0 + T_s) = -\frac{T_s}{2}$

Pour $m = 2$, $z(t_0 + 2T_s) = -\frac{3T_s}{2}$

De même pour $m > 2$, $z(t_0 + mT_s) = -\frac{3T_s}{2}$

Enfin on crée notre matrice $[Z] = \text{toeplitz}(Z)$ (On a choisit $N = K$ dans notre cas)

avec $Z = [T_s \quad \frac{T_s}{2} \quad -\frac{3T_s}{2} \quad -\frac{3T_s}{2} \quad -\frac{3T_s}{2} \quad -\frac{3T_s}{2} \quad -\frac{3T_s}{2}]$

3.2.2 Simulation

Sans bruit

Coefs Égaliseur : Par simulation on obtient les mêmes valeurs que celles du théoriques. En effet, on a travaillé dans la partie théorique avec un échantillonnage en T_s , alors que dans la simulation on a travaillé avec un échantillonnage en N_s . Donc les valeurs en simulations sont les mêmes si on remplace T_s par N_s .

Tracés des filtres : On remarque que l'égaliseur se comporte comme un coupeur de bande indésirable. En effet, en hautes fréquences, la chaîne se comporte comme si l'égaliseur n'existe pas, mais en s'approchant de zéro, la chaîne change de comportement dans la présence de l'égaliseur.

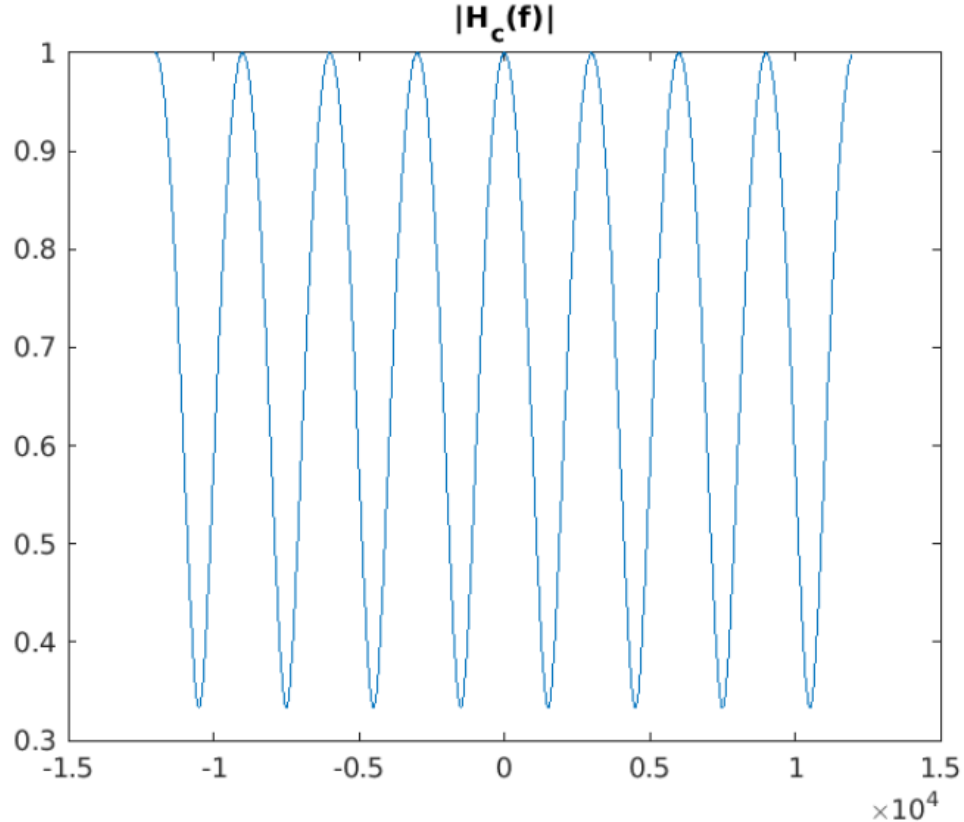


FIGURE 14 – $H_c(f)$.

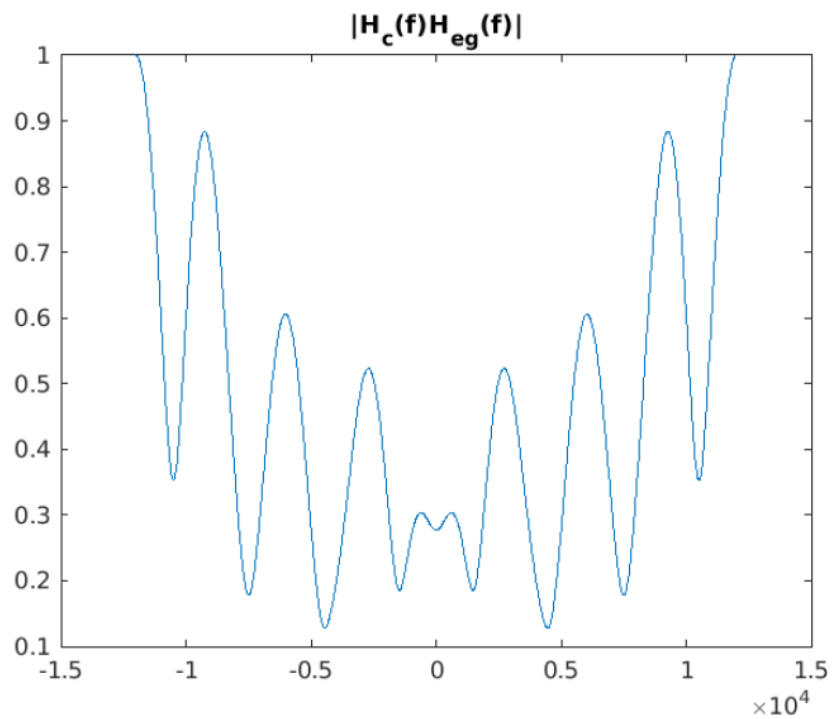


FIGURE 15 – $H_c(f)H_{eg}(f)$.

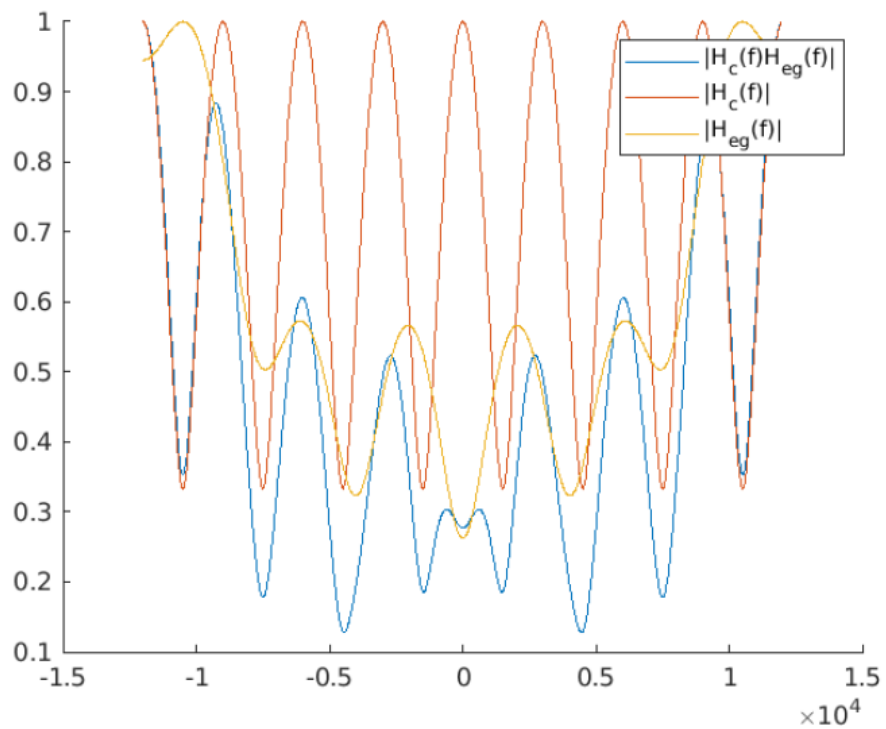


FIGURE 16 – Les filtres sur une seule figure.

Réponse impulsionnelle de la chaine de transmission échantillonnée à N_s avec et sans égalisation :

Voici la différence entre les deux cas :

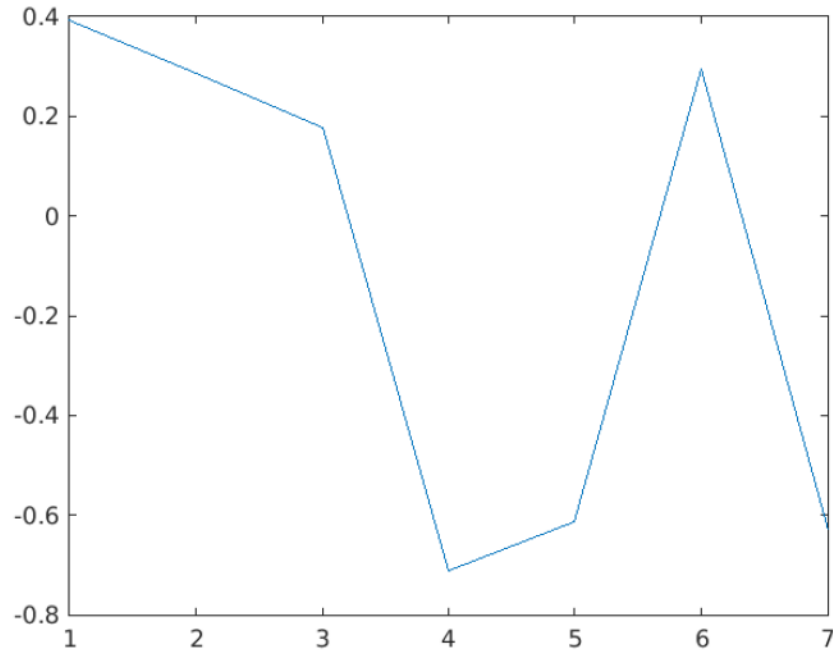


FIGURE 17 – Réponse impulsionnelle de la chaine de transmission échantillonnée à N_s avec égalisation.

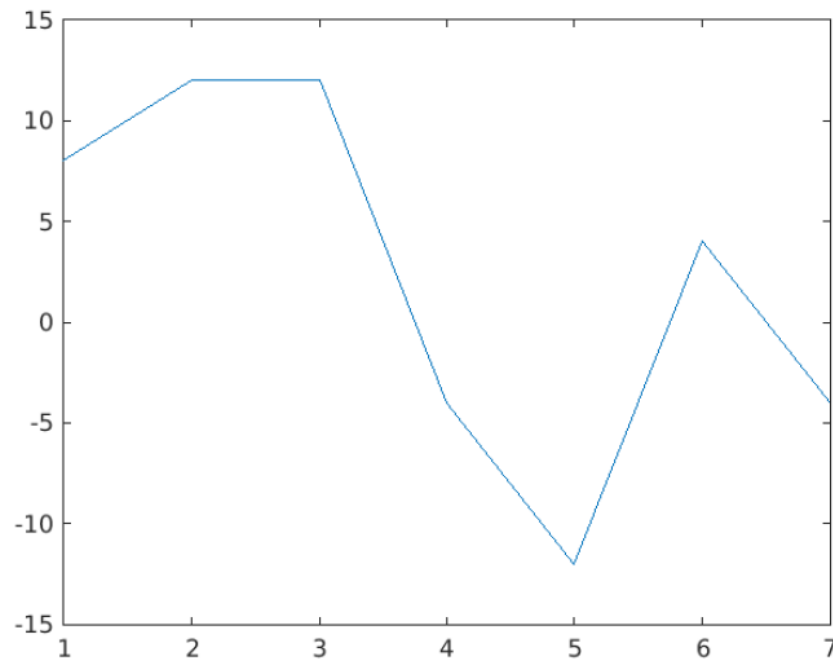


FIGURE 18 – Réponse impulsionnelle de la chaine de transmission échantillonnée à N_s sans égalisation.

Les constellations obtenues avant et après l'égalisation :

Les constellations sont les mêmes.

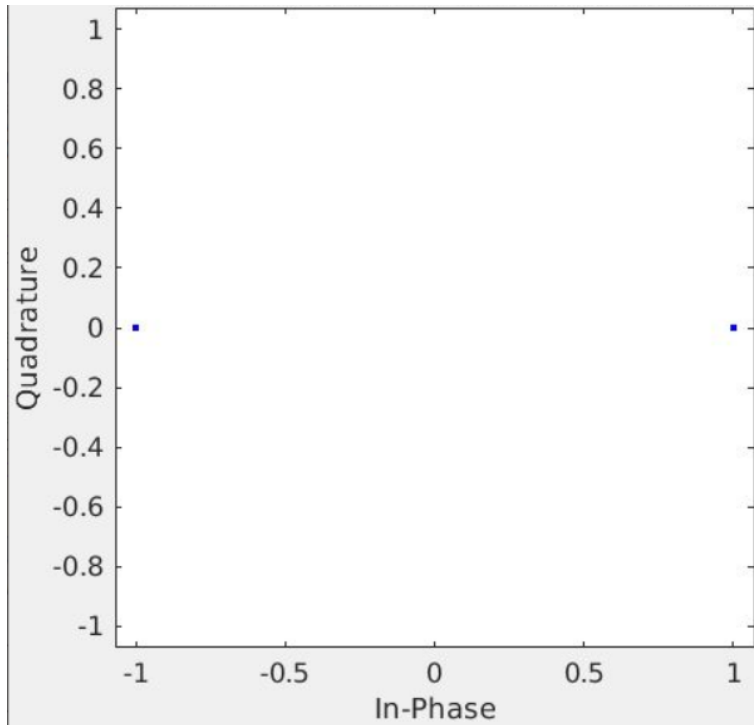


FIGURE 19 – Constellations avec égalisation.

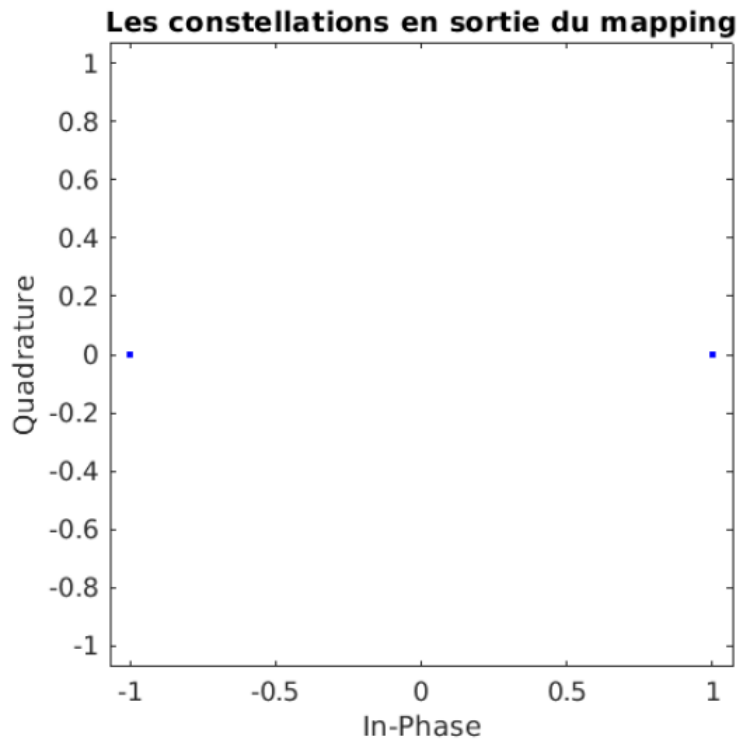


FIGURE 20 – Constellations sans égalisation.

Avec bruit

On remarque que le $TEB_{avecgalisation} < TEB_{sansgalisation}$, d'où on déduit que l'égalisateur améliore l'efficacité en puissance de la chaîne.

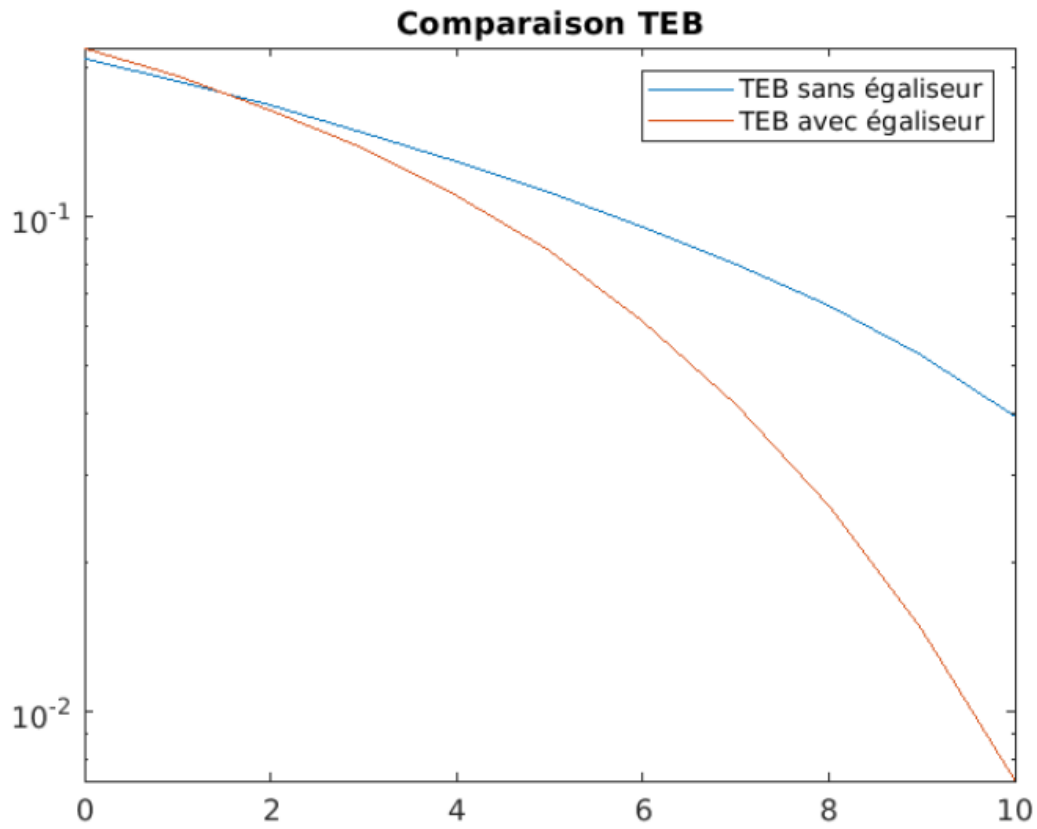


FIGURE 21 – Comparaison TEB avec et sans égalisation.

4 Références

Slides Module Télécommunications, Nathalie THOMAS.