

Contribution à la modélisation des réseaux complexes

A. Lachgar

6 février 2018

Remerciements

gggggggggggggggggggg

Résumé

La science du réseau complexe est un domaine de recherche fondamental pour modéliser les réseaux artificiels et naturels dans notre monde réel. La découverte des propriétés universelles communs, presque entre tous les réseaux réels, tel que la propriété petit-monde et la distribution libre-échelle, a révolutionné la façon d'étudier, de modéliser et de traiter ces réseaux. Un réseau complexe est un réseau d'interactions entre entités d'où l'émergence des propriétés à grande échelle.

L'objectif de cette thèse est de donner quelques contributions au domaine, en première lieu, nous présentons l'état de l'art nécessaire aux lecteurs, puis nous analysons le modèle de Barabási et Albert en s'appuyant sur un nouveau modèle ayant le complément de la probabilité du premier modèle. Aussi nous étudions les réseaux libre-échelle non corrélés, en basant sur des étapes et des hypothèses simples, nous obtenons les expressions explicites du nombre des nœuds à une distance donnée d'un nœud arbitraire, profitant de la forme de l'expression obtenu, nous déduisons l'expression explicite de plus court chemin. Après nous traitons le modèle petit-monde de Newman et Watts en basant sur la transformation de groupe de renormalisation, nous commençons par établir une formule plus précise de la fonction universelle déjà trouvé par Newman, Moore et Watts, puis nous montrons que celle-ci n'est pas toujours vrai, cependant il y a une saturation de raccourcis et une nouvelle fonction universelle qui sont apparaît, ainsi que le variable de cette nouvelle fonction est différents de l'ancien, nous en déduisons que l'émergence de la propriété petit-monde dans ce modèle est spectaculaire. En fin nous proposons une méthode afin de prédire le type des transitions de phases au voisinage de point critique, cette méthode s'appuyant sur deux

paramètres, le premier est l'exposant de la distribution d'amas au voisinage de point critique, le deuxième est l'exposant de la distribution d'amas avec lesquels les amas se choisissant, nous obtenons que, au voisinage de point critique le type de transition de phase dépend seulement au premier paramètre.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Table des figures	xi
Introduction	1
1 Notions et préliminaire	5
1.1 Les réseaux complexes	5
1.1.1 Définition	5
1.1.2 Différents types des Réseaux complexes	6
1.2 Les réseaux complexes, la physique moderne et l'unification	11
1.3 La théorie des graphes	12
1.3.1 Bref historique	13
1.3.2 L'expérience de Milgram	14
1.3.3 Représentation d'un graphe	14
1.4 Caractéristiques des réseaux complexes	16
1.4.1 Plus court chemin	17
1.4.2 Coefficient de regroupement (Clustering)	18
1.4.3 Distribution des degrés	19
1.4.4 Degré de corrélation	20
1.4.5 Mesures de la centralité	21

TABLE DES MATIÈRES

1.5	Propriétés des réseaux réels	23
1.5.1	La propriété petit-monde	23
1.5.2	La distribution de degré libre-échelle	24
1.5.3	Structure communautaire	25
1.6	Les modèles théoriques les plus connus	27
1.6.1	Réseau aléatoire d'Erdős-Rényi	27
1.6.2	Le modèle petit-monde de Watts-Strogatz	29
1.6.3	Le modèle libre-échelle de Barabási-Albert	32
2	Les réseaux en croissances et l'attachement préférentielle	35
2.1	Introduction	35
2.2	Les processus dynamiques : théorie et simulation	37
2.2.1	Introduction	37
2.2.2	Équation maîtresse	38
2.2.3	Modélisation et simulations numériques	39
2.3	L'évolution dynamique et l'attachement préférentielle dans les réseaux réels	40
2.3.1	L'évolution dynamique	40
2.3.2	L'attachement préférentielle et le mécanisme "rich get richer"	41
2.4	Attachement préférentielle sans l'effet "rich get richer"	42
2.4.1	Le modèle	42
2.4.2	Distribution de degrés en utilisant l'équation maîtresse	43
2.4.3	Comparaison au niveau microscopique avec le modèle de BA	46
2.5	conclusion	50
3	Structure des réseaux libre-échelle non corrélé : couches et plus court che- min	51
3.1	Introduction	51
3.2	Les réseaux libre-échelle non corrélé	52
3.3	Les anciens études sur les couches et le plus court chemin	54
3.3.1	Les couches	54

TABLE DES MATIÈRES

3.3.2	Plus court chemin	54
3.4	Structure des couches dans les réseaux libre-échelle non corrélés	55
3.4.1	L'étude théorique	55
3.4.2	Comparaison avec les données réels	61
3.5	Plus court chemin dans les réseaux libre-échelle non corrélés	61
3.5.1	L'étude théorique	61
3.6	conclusion	64
4	Émergence de la propriété petit-monde dans le modèle petit-monde	67
4.1	Introduction	67
4.2	La théorie de groupe de renormalisation et transition de phase	68
4.3	Plus court chemin et transition de phase dans le modèle NW : ancien contribution et la notre	69
4.3.1	Ancien contribution	69
4.3.2	Notre contribution	70
4.4	Structure de réseau NW : couche et plus court chemin	72
4.4.1	Les couches aléatoires et régulières	72
4.4.2	Plus court chemin	83
4.5	Émergence spectaculaire vers la propriété petit-monde	88
4.5.1	Échoué de l'ancien fonction universelle et la saturation des raccourcis	88
4.5.2	La nouvelle fonction universelle	89
4.6	Conclusion	92
5	Une nouvelle approche pour prédire les transitions de phases dans le phénomène de percolation	93
5.1	Introduction	93
5.2	Transition de phase	94
5.3	Percolation	95
5.4	Percolation explosive	95
5.4.1	Percolation explosive dans le processus d'Achlioptas	97

TABLE DES MATIÈRES

5.4.2	Percolation explosive sous d'autres modèle	99
5.5	Percolation au voisinage de point critique : approche théorique et simulation	101
5.5.1	Introduction	101
5.5.2	Approche théorique	104
5.6	Conclusion	111
Conclusion		113
Bibliographie		115

Table des figures

1.1	Représentation de quelques types des réseaux composés par des nœuds et des arêtes.	6
1.2	Nous avons ici un affichage hyperbolique de blogs en utilisant à la fois les ensembles de données WWE et ICWSM 2007 (http://datamining.typepad.com/).	7
1.3	Un réseau modulaire est illustré au moyen du protéome humain (données obtenues à partir de la base de données DIP : http://dip-doe-mbi.ucla.edu). Les nœuds sont des protéines et des liens indiquent leur interaction physique (protéine-protéine).	8
1.4	Le 'Social Graph' derrière Facebook, graphe des relation d'amis de 500 million personnes, image par Paul Butley, 2010.	9
1.5	La structure de l'Internet au niveau des systèmes autonomes. Les nœuds de cette représentation sont des systèmes autonomes et les bords montrent les itinéraires empruntés par les données qui circulent entre eux. La photo a été créée par Hal Burch et Bill Cheswick en 2009.	10
1.6	Ponts de Königsberg, 1736	13
1.7	Exemple d'un graphe non-orienté et sa matrice d'adjacence M_G avec 5 nœuds et 6 arêtes.	15
1.8	Exemple d'un graphe orienté et sa matrice d'adjacence M_G avec 5 nœuds et 6 arêtes.	15
1.9	Exemple d'un graphe non-orienté et sa liste d'adjacence avec 5 nœuds et 6 arêtes.	16

TABLE DES FIGURES

1.10	Exemple de coefficient de regroupement.	18
1.11	Exemple des réseaux assortative et disassortative.	21
1.12	Quelques exemples des réseaux libre-échelle, (A) Graphique de collaboration d'acteur avec un nombre des nœuds $n = 212250$ et un degré moyen $\langle k \rangle = 28.78$, (B) WWW, $n = 325729$, $\langle k \rangle = 5.46$, (C) Données du réseau électrique, $n = 4941$ et $\langle k \rangle = 2.69$. Les lignes pointillées ont des pentes (A) $\gamma_{actor} = 2.3$, (B) $\gamma_{www} = 2.1$ et (C) $\gamma_{electrique} = 4$	24
1.13	Exemples d'un réseau de communautaire, chaque colleur représente un groupe plus connecté par rapport au reste du réseau.	26
1.14	Les simulations numériques de la seuil de percolation dans le modèle ER en fonction de degré moyen, pour un réseau de taille $n = 10^5$. On observe que le point où la fraction de la composante géante, S , émerge est à $\langle k \rangle = 1$	28
1.15	Illustration de la distribution de degré d'un réseau aléatoire ER de degré moyenne égale 6, les cercles représentent les simulations numériques et la ligne noire représente Eq.1.12.	29
1.16	Représentation schématique de l'évolution du processus de "reconnecter" dans le modèle Watts-Strogatz.	30
1.17	Représentation de la variation de la longueur moyenne du chemin $L(p)$ et du coefficient de regroupement $C(p)$ avec la modification de la probabilité de reconnecter p dans le modèle Watts-Strogatz.	31
1.18	La distribution de degrés du réseau BA en échelle logarithmique, où les cercles sont les simulations numériques et la ligne continue représente la formule théorique, Eq. 1.20. La taille du réseau est $n = 10^6$ et $m = 2$	34
2.1	L'évolution de nombre d'hôtes sur Interent de 1994 à 2013, cette figure obtenues à partir de site : http://facesncups.com/inforev.html	41
2.2	les résultats de simulation (cercles) pour $n = 2 \cdot 10^6$, $m = 2$, $m_0 = 3$, et la solution numérique (ligne continue) pour Eq. (2.7). Dans l'insérer, nous tracerons les mêmes données dans l'échelle log-linéaire.	45

2.3	(a) Évolution de $\langle k_s(t) \rangle$ dans le modèle BA, la ligne continue représente Eq. 2.11. (b) Évolution des fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$, la ligne continue représente Eq. 2.15. Les cercles joints par des lignes pointillées dans les deux cas sont des données de simulation moyennées sur 20 réalisations pour $m = 2, m_0 = 3$	47
2.4	(a) Évolution de $\langle k_s(t) \rangle$ dans notre modèle, la ligne continue représente Eq. 2.18. (b) Évolution des fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$, la ligne continue représente la solution numérique de Eq. 2.18 et Eq. 2.20. Les cercles joints par des lignes pointillées dans les deux cas sont des données de simulation moyennées sur 20 réalisations pour $m = 2, m_0 = 3$	50
3.1	Les corrélations des degrés dans le réseau aléatoire libre-échelle pour différents valeurs de m et de γ . Le nombre de nœuds est $n = 10^4$ et le nombre de réalisations pour chaque simulations est 50.	53
3.2	Illustration du réseau construit. La taille des cercles pleins (nœuds) est le degré-dépend. Le degré maximum de couche ℓ est K_ℓ	55
3.3	Nombre de nœuds dans chaque couche pour différentes valeurs de γ . Les lignes pleines sont Eq. 3.7 et Eq. 3.9. Les symboles sont des simulations d'un réseau de taille $n = 4 \times 10^6$ et une moyenne de 200 réalisation pour chaque point. Les couleurs noir, rouge et bleu se réfèrent respectivement à $m = 8, 4$ et 2.	59
3.4	Proportion de cycles dans les couches par rapport à m . De haut en bas, γ est respectivement 4, 3, 2.6 et 2.2. Nombre de nœuds $n = 4.10^6$, le nombre de points pour chaque simulation est 200.	60

3.5	Comparaison entre les données empiriques (cercle) de quelques réseaux réels et nos équations (ligne continue) : a) Les cercles représentent les couches du réseau d'acteurs Hollywoodien de 2283910 acteurs et de $\gamma = 2.13$ lorsque Kevin Bacon est au centre de réseau et la ligne continue représente l'Eq. 3.7 avec les mêmes valeurs γ et n de réseau Hollywoodien, b) Le même réseau Hollywoodien mais lorsque Samuel L.Jackson est au centre de réseau, c) Les cercles représentent les couches du réseau Digg, la ligne continue représente Eq. 3.7 avec le même exposant γ du réseau sociale Digg ($\gamma = 2.691$) et même sa taille $n = 30398$, d) Les cercles représentent les couches du réseau d'hôtes Gnutella, la ligne continue représente Eq. 3.9 avec le même exposant γ de ce réseau d'hôtes Gnutella ($\gamma = 4.831$) et même sa taille $n = 62586$. Tous les résultats empiriques ont été extraites des sites : " http ://oracleofbacon.org/center.php " et " http ://konect.uni-koblenz.de/networks/ ".	62
3.6	La longueur moyenne du trajet en fonction du nombre de nœuds. Les valeurs de γ de haut en bas sont respectivement 4,3,2.6 et 2.2. Les lignes pleines correspondent à l'équation Eq. 3.12 et à l'équation Eq. 3.13. Chaque simulation est moyennée à plus de 200.	64
4.1	Un réseau petit-monde WS pour $n = 20$, $k = 2$ sans raccourcis.	68
4.2	Illustration des nœuds aléatoires (nœuds noires) qui devient plus proche du nœud arbitraire R , et nœuds réguliers (nœuds blanches) qui restent dans leurs distance initial par rapport au même nœud arbitraire R , le réseau est de taille $n = 20$, $k = 1$ et un seul raccourci.	73
4.3	La transformation GR d'un réseau (a) de $n = 20$ et $k = 2$ vers un réseau (b) de $\acute{n} = 10$ et $\acute{k} = 1$	78

4.4	Fraction des nœuds aléatoires S_{al}/n (noir) et des nœuds réguliers S_r/n (rouge) en fonction de nombre des raccourcis x . Les lignes représentent les fonction $h(x)$ (noir) et $1 - h(x)$ (rouge). Les symboles représentent les simulations numériques d'un réseau de taille $n = 10^4$, avec $k = 1$ (étoile et cercle) et $k = 5$ (carré et triangle). Chaque simulation est moyennée à 200 réalisations.	82
4.5	L'expression universelle $f(x) = \ell/\dot{n}$ en fonction de x pour un réseau de taille $n = 10^6$. La formule de Newman et watts Eq. 4.1 (ligne rouge), Eq. 4.30 (ligne vert), Eq. 4.29 (ligne noir) et les simulations numériques pour $k = 1$ (cercle) et $k = 5$ (carré). L'échelle est linéaire-log dans a) et log-log dans b) . Chaque simulation est moyennée à 100 réalisations.	86
4.6	Fluctuation σ en fonction de x d'un réseau de taille $n = 10^4$ pour différents valeurs de k , $k = 1$ (étoile), $k = 2$ (carré) et $k = 5$ (cercle), le nombre de réalisations est 1000.	87
4.7	La valeur de Δ et ρ en fonction de y pour différent valeurs de n et k : $n = 10^{-3}$ et $k = 1$ (triangle), $n = 10^{-3}$ et $k = 4$ (carré), $n = 10^{-4}$ et $k = 1$ (cercle), $n = 10^{-4}$ et $k = 4$ (étoile). Dans a) le nombre de réalisations pour chaque simulation est 1000 et dans b) le nombre de réalisations pour chaque simulation est 5000.	88
4.8	L'expression universelle de PCC en fonction de y , par Eq.4.34 (ligne continue) et par les simulations numériques pour différents valeurs de n et k , $n = 10^{-6}$ et $k = 20$ (étoile), $n = 10^{-5}$ et $k = 5$ (carré), $n = 10^{-4}$ et $k = 2$ (cercle), $n = 10^{-3}$ et $k = 1$ (triangle), nombre de réalisations pour chaque simulations est 100. En a) l' échelle est linéaire-log et en b) l'échelle est log-log.	90

TABLE DES FIGURES

5.1	Une démonstration de percolation sur une grille à deux dimensions pour différents valeurs de p . Sous le seuil de percolation le système est composé de petites grappes, après un certain point critique p_c une grappe étendue et occupe la grille.	96
5.2	Comparaison entre la percolation aléatoire et PA. (A) Percolation ER classique, où les liens sont ajoutés au hasard dans le réseau. (B) Percolation PA, où à chaque étape deux liens sont en compétition pour être établis. (C) Paramètre d'ordre : la taille relative de la composante géante par rapport au nombre des liens ajoutés normalisés par la taille du système.	98
5.3	La distribution d'amas selon deux méthodes différentes de choisir les liens dans le même réseau, où l'exposant de la distribution d'amas dans le réseau est $\gamma = 2.5$, la première méthode est aléatoire comme le processus ER (cercles verts), la deuxième est par le processus Achlioptas [172] (carrés bleus). La ligne pointillée a pour but de montrer l'exposant $\gamma = 2.5$. La taille du réseau est $n = 10^6$, chaque simulation est moyennée à n réalisations.	103
5.4	Fraction de la composante géante S en fonction de la densité des liens $\langle k \rangle$ pour différents valeurs de γ , les couleurs de gauche à droite représentent respectivement les simulations numériques pour $\gamma = 2, 2.5, 3, 4$, les lignes noires représentent la solution numérique de l'Eq. 5.9. Le nombre des nœuds est $n = 10^5$	106
5.5	Estimation de point critique par les simulations numériques (cercles) et par Eq. 5.12 (ligne). Les valeurs de γ de haut en bas sont respectivement 4, 3, 2.5, 2. Chaque simulation est moyennée à 500 réalisations.	107

Introduction

Un réseau complexe est un grand nombre des nœuds liés entre eux selon des topologies de connexion spécifiques. Les réseaux complexes sont omniprésents dans le monde naturel et artificiel, cette compréhension est liée aux développements technologiques des 60 dernières années, en effet, la plupart des réseaux réels peuvent être représentés par des réseaux complexes, on peut distinguer plusieurs types de réseaux dans les différents domaines, tels que le domaine social, technologique, biologique, physique, etc. Par exemple, un système qui se compose de différents types de molécules qui s'affectent les unes aux autres par des réactions enzymatiques [1], l'Internet relie un grand nombre de serveurs et d'ordinateurs dans le monde entier échantonnant constamment des quantités énormes de paquets d'informations [2], le World Wide Web est un réseau virtuel de sites Web liés avec des hyperliens [3], et les réseaux alimentaires relient également, via des relations trophiques, un grand nombre d'espèces interdépendantes [4,5]. Bien que l'existence de ces réseaux dans divers domaines était connue depuis longtemps, les physiciens n'ont commencé à s'y intéresser que depuis la découverte de certains lois universels communs à différents systèmes réels. Parmi ces lois universels les plus importantes on cite : la distribution de degrés libre-échelle¹, la propriété petit-monde et la valeur élevée de coefficient de regroupement (Clustering). Afin de bien comprendre les comportements de ces réseaux et établir les lois qui les gouvernent, les physiciens, les mathématiciens et les informaticiens se consacrent à développer des modèles théoriques et des techniques permettant de découvrir et d'analyser les propriétés de ces réseaux qui sont presque partout. Il semble que le début du troisième millénaire va connaître une nouvelle

1. Libre-échelle signifie qu'il n'y a pas une valeur de degré caractéristique dans le réseau, mais plutôt une distribution des degrés qui suit une loi de puissance.

révolution emportée par les principes des réseaux complexes.

Il est évident que la physique statistique est l'outil adéquat pour étudier les systèmes ayant un grand nombre d'éléments en interaction. En effet, elle a développé au cours du temps un ensemble de théories et d'outils mathématiques permettant, à partir des comportements microscopiques, de comprendre l'émergence des caractéristiques macroscopiques et d'étudier systématiquement la topologie de ces grands réseaux complexes. En outre la physique statistique est le cadre théorique le plus perfectionné pour étudier les problèmes de transitions de phases et les points critiques, ce qui est incontournable dans l'étude des systèmes complexes.

Ce travail de recherche entreprend quelques contributions à la modélisation des réseaux complexes, en abordant quelques problèmes concernant la dynamique de la croissance dans le modèle de Barabási-Albert (BA) [3], la structure des réseaux libre-échelle, l'émergence de la propriété petit-monde dans le modèle de Newman-Watts [6], et la caractérisation des transitions de phases dans le phénomène de percolation.

De façon plus détaillée, cette thèse est divisée en cinq chapitres. Le premier commence par définir et mettre en évidence l'importance de notre cadre de recherche (réseaux complexes), et se termine par un état de l'art de certaines techniques et concepts fondamentaux pertinents de la physique statistique et de la théorie des graphes. Le deuxième chapitre consiste au début à donner la notion du réseau en croissance et de l'attachement préférentiel, puis à proposer un simple modèle en utilisant le complément de la probabilité utilisée dans le modèle BA, enfin de développer le calcul de la valeur moyenne de degré sélectionné à chaque instant et leur fluctuation dans notre modèle et celui de BA, afin de faire une comparaison au niveau microscopique entre les deux et de vérifier si la distribution de degrés en loi de puissance reste en l'absence du mécanisme "rich get richer". Le troisième chapitre a pour but de donner l'expression explicite de la structure des couches dans les réseaux libre-échelle non corrélés, puis celle de plus court chemin, en suggérant que le plus court chemin correspond à la distance à laquelle la couche est maximale. Ainsi qu'une comparaison avec les anciens

travaux théoriques et avec les données réels. Le quatrième chapitre contient une étude détaillée sur le modèle introduit par Newman-Watts en utilisant la transformation de groupe de renormalisation en espace réel, les résultats obtenus sont très intéressants et nous donnent une perspective plus claire sur l'émergence vers la propriété petit-monde dans ce modèle, on trouve à partir d'une prédiction purement théorique² qu'en fonction d'un certain paramètre il y a une émergence spectaculaire vers la phase petit-monde, aussi la disparition de la fonction universelle usuelle et l'apparaître d'une autre nouvelle fonction universelle est liée à ce paramètre, on déduit alors que cette émergence n'est pas ordinaire mais de nature spectaculaire. Le dernier chapitre est consacré au problème de transition de phase dans le phénomène de percolation, qui est un problème pas encore bien compris et le plus urgent à résoudre dans la physique des systèmes désordonnés. Sous la proposition que les lois au point critique sont toujours lois de puissance on a établi une formule théorique avec laquelle on détermine les conditions pour que la transition de phase sera de première ou de deuxième ordre, indépendamment de mécanismes microscopiques de l'évolution de système, autrement dit on a étudié le phénomène de percolation au voisinage de point critique en démontrant théoriquement les conditions nécessaires pour obtenir une transition de première ordre ou de deuxième ordre.

Il convient de signaler que dans tous les quatre derniers chapitres on a développé un grand nombre de programmes par Fortran, basant dans la plus part de temps sur la méthode de Monte Carlo et parfois sur les méthodes d'analyse numérique, ces programmes sont souvent pour vérifier nos équations théoriques ou parfois pour confirmer les idées qu'on a proposé. En outre, à cause de la nécessité d'atteindre une grande taille du réseau, parfois plus de 10^7 , et un grand nombre de réalisations, on a fait beaucoup des efforts afin d'optimiser nos programmes.

2. C'est-à-dire que cette idée est une conclusion qui revient directement de nos équations théoriques et pas d'une manière intellectuelle ou empirique.

Chapitre 1

Notions et préliminaire

Dans le présent chapitre, on présente l'importance de notre domaine de recherche de façon très générale puis on introduit des termes et des concepts qui seront utilisés tout au long de cette thèse : réseaux complexe, théorie des graphes, distribution de degrés, etc.

1.1 Les réseaux complexes

1.1.1 Définition

Un réseau est tout simplement une collection de points réunis sous forme de paires, les points sont appelés nœuds ou noeuds et les lignes sont appelées liens ou bords. Le mot complexe est en général le résultat de l'évolution décentralisée et non planifiée dans ces réseaux (Fig. 1.1). De nombreux objets d'intérêt dans les sciences physiques, biologiques et sociales peuvent être considérés comme des réseaux complexes, cette nouvelle façon de penser souvent conduit à des nouvelles et utiles idées. Alors un réseau est une représentation simplifiée qui réduit un système à une structure abstraite capturant uniquement les bases des modèles de connexion, les nœuds et les liens d'un réseau peuvent être accompagnés avec des informations supplémentaires pour capturer plus de détails sur le système, même qu'il y a un inconvénient de perte des informations dans le processus de réduction d'un système complet à une représentation du réseau, mais il présente également des grands avantages.

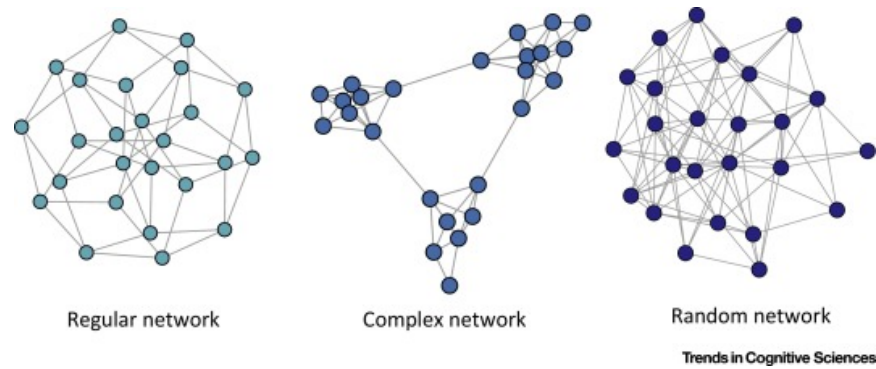


FIGURE 1.1 – Représentation de quelques types des réseaux composés par des nœuds et des arêtes.

1.1.2 Différents types des Réseaux complexes

L'étude des réseaux complexes a été inspiré par le désir de comprendre les différents systèmes réels, allant des réseaux de communications aux réseaux écologiques. Les bases de données empiriques disponibles pour l'étude couvrent plusieurs disciplines, en générale, ils se divisent en quatre grands catégories : Réseaux Technologique, Réseaux Biologiques, Réseaux Sociales et Réseaux d'Informations.

Réseaux Technologique

Les réseaux technologiques sont des réseaux artificiels, qui ont grandi au cours du siècle dernier et qui constituent un grand partie de notre société moderne, comme les réseaux électriques, réseaux téléphoniques, réseaux de transports, etc [7–10]. L'Internet est un parmi les exemples les plus connus et les plus largement étudiés des réseaux technologiques (voir Fig. 1.2), on peut le définir comme un réseau de données informatiques dans lequel les nœuds sont des ordinateurs et les liens sont des connexions de données physiques entre eux, tels que des câbles à fibres optiques ou des lignes téléphoniques [2, 11]. Il est curieux que, bien que l'Internet est un réseau artificiel, nous ne connaissons pas exactement sa structure, nos meilleures données actuelles sur sa structure proviennent d'études expérimentales.

Il existe un certain nombre d'excellentes raisons pratiques pour être intéressé à étudier la structure du réseau d'Internet, la fonction d'Internet consiste à transporter des données

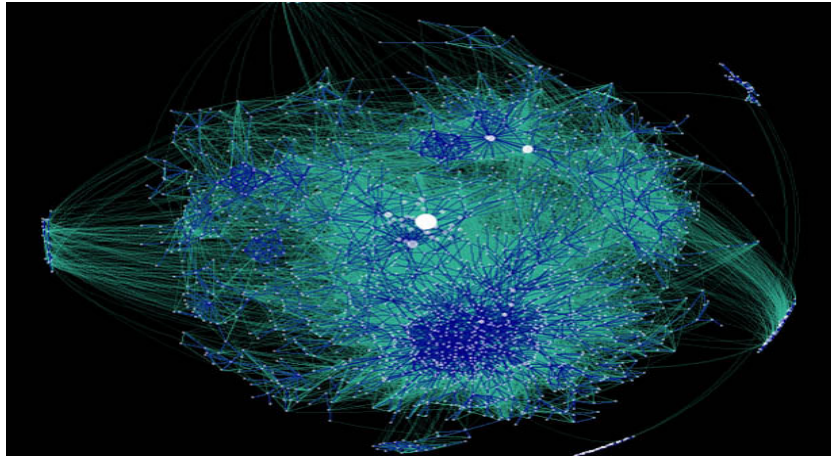


FIGURE 1.2 – Nous avons ici un affichage hyperbolique de blogs en utilisant à la fois les ensembles de données WWE et ICWSM 2007 (<http://datamining.typepad.com/>).

entre des ordinateurs dans différentes parties du monde, ce qui se fait en divisant les données en pièces ou en paquets et en les transportant du nœud vers nœud sur le réseau jusqu'à ce qu'ils atteignent leur destination, sans aucun doute, la structure du réseau affectera la manière dont il accomplit efficacement cette fonction et si nous connaissons la structure du réseau, nous pouvons aborder de nombreuses questions et problèmes de pertinence pratique.

Réseaux Biologiques

Une autre classe des réseaux les plus étudiées dans la littérature est celle des réseaux biologiques. Cette classe contient une grande variété de réseaux naturels. Les corps soit humain ou animal contient un grand nombre de réseaux, dont certains se produisent dans l'espace réel, tels que le système nerveux. Ces réseaux ont été étudiés depuis longtemps [12]. Une autre classe de réseau, ce sont les réseaux d'interactions gène-gène, gène-gène et protéines-protéines [13], ainsi que les réseaux d'interactions entre les espèces dans les écosystèmes, comme la prédation ou la coopération.

La structure de ces réseaux se diffère selon chaque cas. Par exemple, les réseaux métaboliques sont des réseaux de protéines interagissant les uns avec les autres à l'intérieur de la cellule Fig. 1.3, il s'agit d'un réseau dirigé, car chaque protéine peut catalyser ou réprimer la création d'autres protéines, ce qui n'implique pas nécessairement le processus inverse. La structure

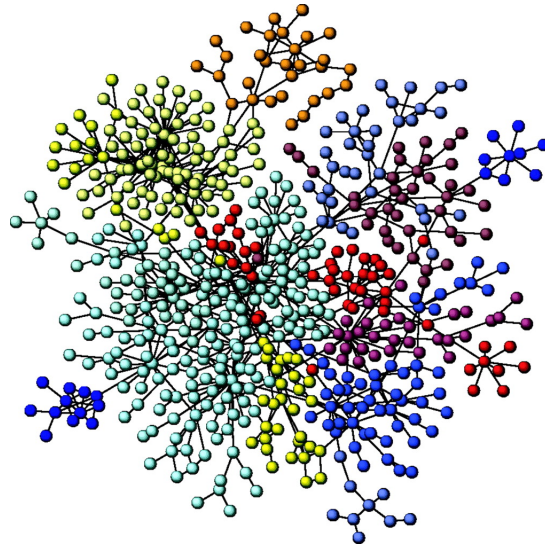


FIGURE 1.3 – Un réseau modulaire est illustré au moyen du protéome humain (données obtenues à partir de la base de données DIP : <http://dip-doe-mbi.ucla.edu>). Les nœuds sont des protéines et des liens indiquent leur interaction physique (protéine-protéine).

à grande échelle des réseaux métaboliques a été étudiée pour de nombreuses espèces, il a été trouvé que ces réseaux ont une distribution des degrés libre-échelle [1]. De plus, il a été observé que le diamètre du réseau est très petit et presque indépendant de la taille du réseau, cette indépendance s'explique par que certain classe de réseaux libre-échelle est Ultra-small [14–16], d'une autre coté notre résultats du troisième chapitre renforcent cette explication et indiquent que la dépendance du diamètre avec la taille N est très faible.

Dans les réseaux génétiques, les nœuds représentent des gènes, et les liens sont dirigés et représentent l'influence d'un gène sur un autre, le réseau *E. coli* est un des réseaux génétiques qui est bien étudiés dans la littérature [17].

Réseaux Sociales

Un réseau social est un ensemble de nœuds, où ces nœuds se représente par des personnes (individus ou groupes sociaux) et les liens par une relation qui peuvent être de parenté, amitié, statut, etc [18], cette diversité des liens est une chose apprécier dans l'étude des réseaux sociaux, car il existe de nombreuses définitions possibles d'un tel réseau et la définition particulière que l'on utilisera dépendra des questions auxquelles on est intéressé à répondre.

Tel que les réseaux d'amitiés entre les individus [19, 20], les relations d'affaires entre les entreprises [21]. La société offre une grande variété d'organisations de groupes possibles : les familles, les milieux de travail et d'amitié, les villages, les villes, les nations. La diffusion d'Internet a également conduit à la création de groupes virtuels, en direct sur le Web, comme Facebook qui reliant presque tout notre monde entier (voir Fig. 1.4).



FIGURE 1.4 – Le 'Social Graph' derrière Facebook, graphe des relation d'amis de 500 million personnes, image par Paul Butley, 2010.

Bien avant que l'Internet commence à jouer un rôle dans la vie de plusieurs personnes, les sociologues et d'autres chercheurs des sciences humaines ont examiné la structure des groupes de personnes. Dans la plupart des cas, des groupes relativement petits ont été considérés, nécessairement parce que l'analyse de grands groupes n'était souvent pas possible. Une contribution importante à l'analyse des réseaux sociaux est venue de Jacob Moreno qui a introduit des sociogrammes dans les années 1930. Un sociogramme peut être considéré comme une représentation graphique d'un réseau : les personnes sont représentées par des points (appelés nœuds) et leurs relations par des lignes reliant ces points (appelés arêtes). L'analyse des réseaux sociaux a été importante pour le développement ultérieur de la théorie des graphes, par exemple en ce qui concerne l'introduction de mesures pour identifier l'importance des personnes ou des groupes. Par exemple, une personne ayant de nombreuses connexions avec d'autres personnes peut être considérée comme relativement importante. De même, une personne au centre d'un réseau semble être plus influente que quelqu'un au bord. Ce que la théorie des graphes nous fournit, ce sont les outils pour décrire formellement ce

que nous voulons dire relativement important ou avoir plus d'influence. En outre, en utilisant la théorie des graphes, nous pouvons facilement proposer des solutions de rechange pour décrire l'importance des personnes. Ainsi que l'existence de ces outils a également facilité la précision des déclarations concernant le poste ou le rôle que ces personnes ont au sein d'une communauté.

Réseaux d'informations

Les réseaux de citation et le World Wide Web (WWW), comme dans Fig. 1.5, sont un bon exemple des réseaux d'informations, car leur contenues d'informations étant stockée dans les nœuds, c'est pour cette raison que l'on utilise le terme réseau d'informations. Parfois on rencontre une certaine confusion à propos de réseau WWW et le réseau d'Internet. Dans la WWW, les nœuds sont les pages HTML, et les bords représentent les liens entre les pages, par contre dans l'Internet, les liens correspondent aux câbles physiques entre les ordinateurs. Alors le WWW est virtuelle et Internet est physique.

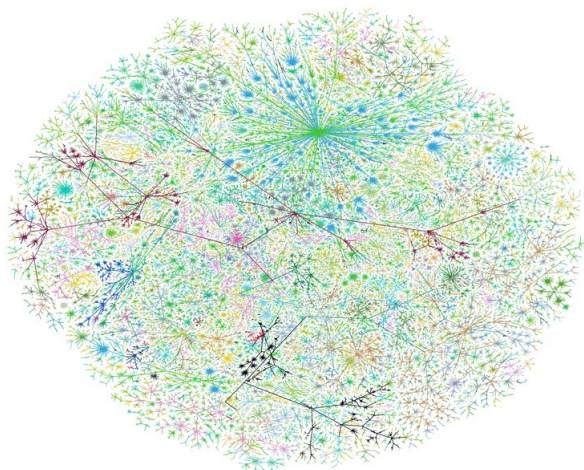


FIGURE 1.5 – La structure de l'Internet au niveau des systèmes autonomes. Les nœuds de cette représentation sont des systèmes autonomes et les bords montrent les itinéraires empruntés par les données qui circulent entre eux. La photo a été créée par Hal Burch et Bill Cheswick en 2009.

1.2 Les réseaux complexes, la physique moderne et l'unification

La physique explique les phénomènes de la nature en les réduisant à une interaction de lois fondamentales simples. Cette méthode plutôt réussie semble rencontrer certaines difficultés lorsqu'il s'agit des systèmes complexes en général et des réseaux complexes en particulier. Dans ces derniers il reste peu clair s'il existe des lois universelles uniques expliquant une variété de similitudes structurelles et dynamiques trouvées dans de nombreux réseaux réels différents [22–25]. En revanche, l'unification des lois universelles qui paraissaient jusqu'alors complètement séparés sont d'une origine commune ? c'est ce que les physiciens théoriques rêvent de la découvrir. Une telle unification va être, sans doute, un grand pas dans notre compréhension de la nature. En outre, l'existence de cette belle idée au cœur de l'unification montre le pouvoir mystérieux que les êtres humains peuvent découvrir derrière les apparences de la nature [26].

Le réseau causal représentant la structure à grande échelle de l'espace-temps dans notre univers accéléré est un graphe de loi de puissance avec un regroupement fort, similaire à de nombreux réseaux complexes tels que les réseaux Internet, sociaux ou biologiques [22]. Cette similitude structurelle est une conséquence de l'équivalence asymptotique entre la dynamique de croissance à grande échelle des réseaux complexes et des réseaux causaux. Par conséquent, un intérêt croissant est adressé à l'étude de la gravité quantique à partir de la théorie de l'information et de la perspective des réseaux complexes [27, 28].

Récemment, des relations intrigantes entre les propriétés des réseaux de communication quantique avec des topologies de réseau et la physique statistique ont été rapportées. Sur la base des concepts classiques de percolation [29], il a été montré que ces réseaux quantiques peuvent présenter une transition de phase de percolation d'enchevêtrement [30, 31]. L'avancement rapide de la technologie de l'information quantique a suscité un intérêt considérable pour les propriétés dynamiques des réseaux quantiques formés par les systèmes élémentaires, tels que les qubits, en raison de leur rôle privilégié dans la communication quantique et le calcul quantique [32–34].

Une autre domaine de recherche en relation avec les sciences des réseaux et notamment aux réseaux complexes. La science générale des réseaux et de ses diverses applications a une pertinence significative pour les praticiens de l'intelligence artificiel IA. Par exemple, la compréhension de la structure d'Internet et du World Wide Web sera importante pour l'orientation de la direction de l'intelligent, l'équilibrage de charge, la recherche de toutes sortes et le déploiement d'agents¹ intelligents qui assistent les utilisateurs dans leurs tâches réseau. La réflexion en réseau sera également fondamentale pour développer des algorithmes décentralisés efficaces pour les réseaux de calcul, de communication et de détection de plus en plus distribués et liés, ainsi que des méthodes de sécurité efficaces pour ces systèmes de plus en plus vulnérables. Ce sont tous des domaines dans lesquels la recherche sur l'IA et l'apprentissage automatique ont joué et joueront un rôle majeur [35–37].

1.3 La théorie des graphes

En terme générale, un réseau se décrit comme un graphique dont les nœuds (sommets) identifient les éléments du système et les liens de connexion (arêtes) représente la présence d'une relation ou d'une interaction entre ces éléments. Avec un tel niveau de généralité, il est facile de percevoir qu'un large éventail de systèmes peuvent être abordés dans le cadre de la théorie du graphe. Alors nous fournissons ici un bref historique et quelques notations de base nécessaires dans la théorie de graphe pour décrire les réseaux. Le cadre naturel pour une description mathématique rigoureuse des réseaux se trouve dans la théorie des graphes, mais il faut noter que la théorie des graphes consiste une branche des mathématiques vastes et compliquées et nous ne sommes pas dans l'état de fournir une présentation formelle et complète de celui-ci. Cependant notre but dans ce chapitre d'introduction est de fournir seulement quelques notions utiles pour décrire les réseaux dans le reste de cette thèse. Pour les lecteurs intéressés à poursuivre l'étude de la théorie des graphes en plus de taille

1. Un agent est un terme important en IA qui désigne une entité capable d'interagir avec son environnement.

pourraient regarder les livres [38, 39].

1.3.1 Bref historique

En plus de la topologie, Euler est devenue le père de la théorie des graphes quand il a résolu, en 1736, un problème célèbre sous le nom "*le problème du pont de Königsberg*", la question était de savoir s'il était possible de visiter les quatre quartiers de la ville séparés les uns des autres par un bras de rivière, en passant exactement une fois par chaque pont et en revenant à son point de départ (voir Fig. 1.6). Afin de trouver une solution de ce

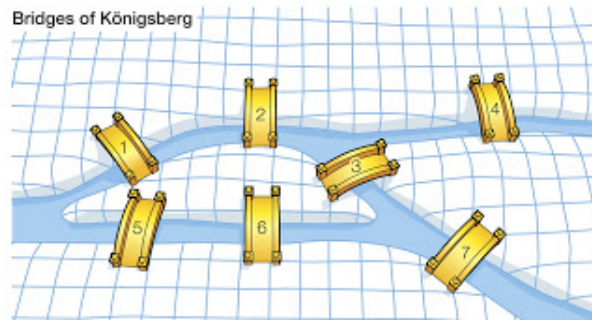


FIGURE 1.6 – Ponts de Königsberg, 1736

problème Euler a remplacé chaque zone de terrain par un point et chaque pont par une ligne joignant les points correspondants, produisant ainsi un "*graphique*". Ainsi il a montré que le problème est insoluble et que le graphique de cette ville ne peut pas être parcouru d'une certaine manière.

En 1847 Kirchhoff a développé la théorie des arbres afin de résoudre le système d'équations linéaires simultanées qui donnent le courant dans chaque branche et autour de chaque circuit d'un réseau électrique. Bien qu'un physicien, il a pensé comme un mathématicien lorsqu'il a remplacé un réseau électrique par sa structure combinatoire correspondante constituée uniquement de points et de lignes sans indication du type d'élément électrique représenté par des lignes individuelles. Dans les années 1960, deux mathématiciens, Paul Erdős et Alfred Rényi (ER), ont introduit une nouvelle idée ingénieuse, ils ont combiné les concepts de la théorie graphique avec les outils de la théorie des probabilités, cela permettant d'envisager des familles de graphiques plutôt que des graphiques spécifiques.

1.3.2 L'expérience de Milgram

En 1967, Stanley Milgram a effectué une expérience intéressante. Dans sa première expérience, Milgram a demandé à des personnes choisies au hasard au Nebraska d'envoyer des lettres à une personne cible éloignée à Boston. Les participants ne pouvaient passer que les lettres (à la main) aux connaissances personnelles qu'ils pensaient pouvoir atteindre la cible, soit directement, soit via un finalement atteint leur destination. Mais dans les expériences ultérieures, Milgram a réussi à augmenter le taux de réussite à 95%, pour plus de détails (voir [40, 41]). La conclusion principale de cette expérience de Milgram était que la plupart des gens sur notre planète n'est séparé que par six autres personnes en moyen. Cette idée de Milgram a été reprise encore une fois en 2001 par Duncan Watts et ses collègues en utilisant un message électronique qui devait être livré à des expéditeurs autour de monde, étonnamment, Watts a constaté que le nombre moyen d'intermédiaires était 6. Pour plus de détails et une analyse statistique beaucoup plus étendue des données par rapport à l'analyse de Milgram, voir Dodds et al [42].

1.3.3 Représentation d'un graphe

Comme dans toute abstraction mathématique, lorsque nous décrivons un système en tant que graphique, nous décidons de rejeter plusieurs des particularités particulières des phénomènes réels et de nous concentrer uniquement sur quelques caractéristiques d'intérêt. En particulier, un graphique est essentiellement un moyen de coder une relation, liens physiques, interactions, etc, entre les éléments d'un système. Les éléments du système identifient l'ensemble V (ensemble des nœuds) et les relations entre ceux de l'ensemble E (ensemble des arêtes). Le graphique indiqué comme $G(V, E)$ peut être présenté en traçant les nœuds en tant que points et les bords comme lignes entre eux.

Parmi les façons de représentation basant sur cette définition on peut citer la matrice d'adjacence et la liste adjacence :

La matrice d'adjacence

Un graphe est représenté fréquemment par une matrice d'adjacence, $M_{i,j}$, qui est une matrice dans laquelle chaque ligne et chaque colonne représente un nœud du graphique. Dans un graphe non-dirigé l'élément $M_{i,j} = 1$ si un lien existe entre le i^{eme} et j^{eme} nœud sinon $M_{i,j} = 0$ (voir Fig. 1.7), ainsi que la matrice sera en général asymétrique et les éléments diagonales ne sont pas nécessairement 0.

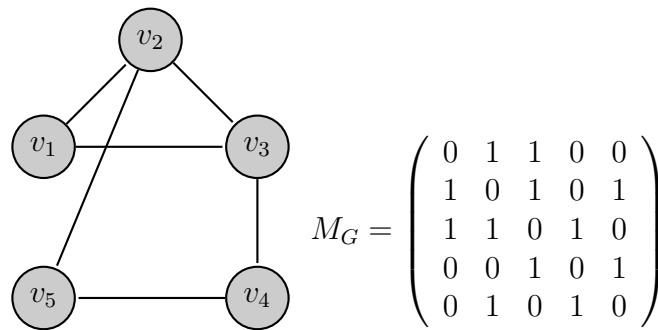


FIGURE 1.7 – Exemple d'un graphe non-orienté et sa matrice d'adjacence M_G avec 5 nœuds et 6 arêtes.

Un graphique orienté est un graphique où les bords sont dirigés, c'est-à-dire que chaque bord est une paire de nœuds ordonnée avec (i,j) désignant un bord (flèche) qui commence au nœud i et se termine au nœud j Fig. 1.8.

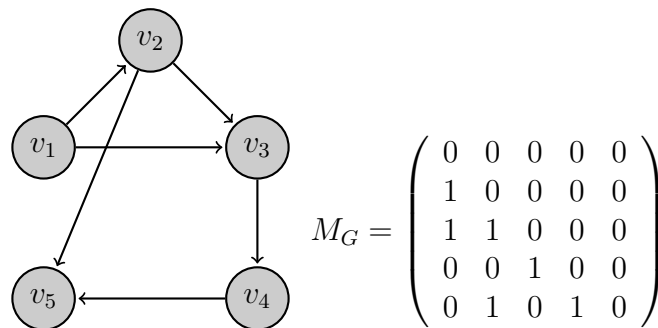


FIGURE 1.8 – Exemple d'un graphe orienté et sa matrice d'adjacence M_G avec 5 nœuds et 6 arêtes.

La liste d'adjacence

Le format de liste d'adjacence est utile pour les graphiques sans données associées à des noeuds ou des bords et à des noeuds qui peuvent être représentés de manière significative sous la forme de chaînes, il se compose de lignes avec des étiquettes de noeud, la première étiquette dans une ligne est le noeud source, d'autres étiquettes dans la ligne sont considérées comme des noeuds cibles et sont ajoutées au graphique avec un bord entre le noeud source et le noeud cible.

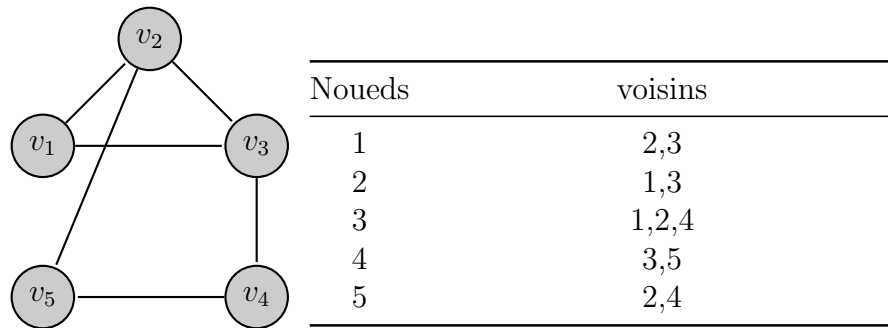


FIGURE 1.9 – Exemple d'un graphe non-orienté et sa liste d'adjacence avec 5 nœuds et 6 arêtes.

En règle générale, les matrices sont généralement utilisées pour les tableaux denses et les listes d'adjacence pour les tableaux dispersés. La raison est que les matrices consomment moins d'espace pour les tableaux denses et les listes d'adjacence consomment moins d'espace pour les tableaux dispersés. Cependant, l'espace n'est qu'une considération, d'autres facteurs doivent également être pris en compte.

1.4 Caractéristiques des réseaux complexes

On croit que ne comprend pas encore les réseaux de manière appropriée. Par exemple, si les données (par exemple, la matrice d'adjacence) d'un grand graphique sont données et que vous n'êtes pas autorisé à visualiser le réseau, il semble assez complexe de dire simplement quelles sont les propriétés du réseau. Alors la caractérisation de ces réseaux oblige d'ajouter

d'autres caractéristiques supplémentaires, tant que, Plus court chemin, Clustering, etc.

1.4.1 Plus court chemin

Le plus court chemin entre deux nœuds d'un graphique est mesurée comme la longueur de trajet la plus courte parmi eux. Une mesure statistique globale de la distance entre les nœuds peut alors être exprimée comme la longueur de chemin moyenne la plus courte parmi tous les couples possibles de nœuds du réseau, mathématiquement on peut le définir par la forme suivante

$$l = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} d_{i,j}, \quad (1.1)$$

avec d_{ij} est la distance la plus courte du nœud i au nœud j et n est le nombre total de nœuds dans le réseau. Sachant que la distance entre deux nœuds s'ils ne peuvent être atteints l'un par l'autre est 0 et la distance d'un nœud à lui-même est également 0.

Dans de nombreux réseaux à grande échelle, la distance moyenne entre les nœuds est très faible par rapport à la taille de graphique, ce phénomène connu sous le nom la propriété *petit-monde*. Cette propriété a été popularisé dans le contexte sociologique où il est parfois appelé *six degrés de séparation* [40].

L'importance de cette propriété se représente en son rôle important dans le transport et la communication au sein d'un réseau. Supposons qu'il soit nécessaire d'envoyer un paquet de données d'un ordinateur à un autre via Internet : la géodésique fournit un chemin optimal, car on pourrait obtenir un transfert rapide et enregistrer les ressources de système [43]. Pour une telle raison, les chemins les plus courts ont également joué un rôle important dans la caractérisation de la structure interne d'un graphique [18, 44, 45].

Les ensembles de données massifs du réseau s'accumulent à un rythme énorme dans des champs variés [46]. En utilisant la mesure moyenne de longueur de plus court chemin, les réseaux de petit-monde peuvent être considérés comme des systèmes à la fois efficaces à l'échelle mondiale et locale [47]. Nous utilisons souvent la longueur de plus court chemin comme mesure de l'efficacité du réseau, et cette mesure d'efficacité nous permet de donner une analyse quantitative précise de l'efficacité du flux d'information dans les réseaux, ainsi que

le calcul de longueur de plus court chemin a également été utilisé pour estimer la précision des approximations analytiques de la dynamique sur les réseaux [48], en examinant l'apparition de la synchronisation [49] et en évaluant la résilience des réseaux de communication aux attaques et aux échecs [50].

1.4.2 Coefficient de regroupement (Clustering)

En plus de l'effet du petit monde un haut niveau de regroupement s'en accompagne dans de nombreux réseaux sociaux et dans de nombreux autres réseaux ont montré cette tendance telle que le réseau mondial [51], les réseaux de transport [52] et les réseaux métaboliques [53, 54]. Le concept de regroupement d'un graphique se réfère à la tendance observée dans de nombreux réseaux naturels à former des cliques au voisinage d'un nœud donné, cette propriété appelé également la transitivité dans le contexte de la sociologie [44]. Le coefficient de regroupement peut être considéré comme la fraction de paires de nœuds avec un nœud commun ou équivalent comme la probabilité moyenne que deux nœuds voisins ont un nœud commun, c'est peut-être la manière la plus utile de définir le coefficient de regroupement. En notation mathématique :

$$C = \frac{3 \times (\text{Nombre de triangles})}{(\text{Nombre de triples connectés})}. \quad (1.2)$$

Le facteur 3 dans le numérateur compense le fait que chaque triangle complet de trois nœuds contribue à trois triples connectés, l'un centré sur chacun des trois nœuds et assure que $0 \leq C \leq 1$.

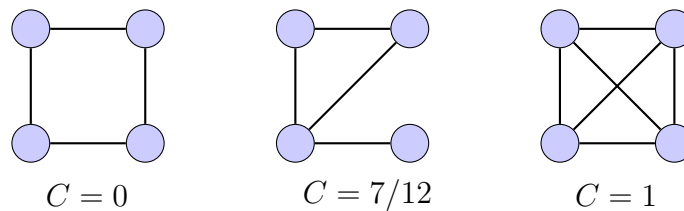


FIGURE 1.10 – Exemple de coefficient de regroupement.

Une autre définition du coefficient de regroupement, également largement utilisé, a été donnée par Watts et Strogatz [55], qui a proposé de définir une valeur locale

$$C_i = \frac{(\text{Nombre de triangles connectés au nœud } i)}{(\text{Nombre de triples centrés sur le nœud } i)}. \quad (1.3)$$

Dans le cas où le nœud a le degré 0 ou 1, nous mettons $C_i = 0$. Ensuite, le coefficient de regroupement pour l'ensemble du réseau est la moyenne

$$C = \frac{1}{n} \sum_i C_i. \quad (1.4)$$

Le coefficient de regroupement mesure la densité des triangles dans un réseau. Une généralisation évidente a été envisagée à propos de la densité des boucles plus longues de trois, boucles de longueur quatre et plus. Un certain nombre d'auteurs ont examiné ces coefficients de regroupement d'ordre supérieur [56–59], bien qu'il n'y ait jusqu'à présent aucune théorie propre qui sépare les contributions indépendantes des différents ordres l'un de l'autre.

1.4.3 Distribution des degrés

La propriété la plus importante qui caractérise une structure de réseau est la distribution de degré $P(k)$, définie comme la probabilité qu'un nœud choisi uniformément au hasard ait un degré k ou, de manière équivalente, la fraction de nœuds dans le graphique ayant le degré k . Si le graphe est dirigé, le degré du nœud comporte deux composantes : le nombre de liens sortants k^{out} (appelé "out-degree") et le nombre de liens entrants k^{in} (appelé "in-degree"). Le degré total est alors défini comme $k = k^{out} + k^{in}$.

Un réseau ordinaire a une séquence de degré simple parce que tous les nœuds ont le même nombre de bords, et donc une forme de distribution de degré contient une seule pointe forte. En outre dans le cas limitant d'un réseau complètement aléatoire, la séquence de degré obéit à la distribution de Poisson qui diminue exponentiellement, loin de la valeur moyenne

$\langle k \rangle$. En raison de ce déclin exponentiel, la probabilité de trouver un nœud avec k bord devient négligeable pour $k \gg \langle k \rangle$. Au cours des dernières années, de nombreux résultats empiriques ont montré que pour la plupart des réseaux réels à grande échelle, la distribution de degré s'écarte de manière significative de la distribution de Poisson.

En particulier, pour un certain nombre de réseaux, la distribution du degré peut être mieux décrite par une loi de puissance de la forme $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Cette distribution de la loi de puissance diminue progressivement permet de créer quelques nœuds de très grande importance. Étant donné que ces lois de puissance sont libres de toute échelle caractéristique, pour cette raison un tel réseau avec une distribution de puissance est appelé un réseau libre-échelle.

1.4.4 Degré de corrélation

Un grand nombre de réseaux réels sont corrélés en sens que la probabilité qu'un nœud de degré k soit connecté à un autre nœud de degré, disons k' , dépend de k . Dans ces cas, il est nécessaire d'introduire la probabilité conditionnelle $P(k'|k)$, étant défini comme la probabilité qu'un lien d'un nœud de degré k connecte à un nœud de degré k' [60]. Bien que les corrélations de degré soient formellement caractérisées par $P(k'|k)$, l'évaluation directe de la probabilité conditionnelle donne des résultats extrêmement bruyants pour la plupart des réseaux réels en raison de leur taille finie N . Ce problème peut être surmonté en définissant le degré moyen de voisins les plus proches d'un nœud i comme

$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in N_i} k_j, \quad (1.5)$$

où la somme s'exécute sur les nœuds appartenant à N_i qui signifie l'ensemble des premiers voisins de i . on peut calculer le degré moyen des voisins les plus proches des nœuds avec le degré k , noté $k_{nn}(k)$, obtenant une expression qui intègre implicitement la dépendance de k . Une telle quantité peut, en effet, être exprimée en termes de probabilité conditionnelle

comme

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k' \setminus k). \quad (1.6)$$

S'il n'y a pas de corrélations de degré, l'équation Eq.1.6 donne $k_{nn}(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$, c'est-à-dire que $k_{nn}(k)$ est indépendant de k [45].

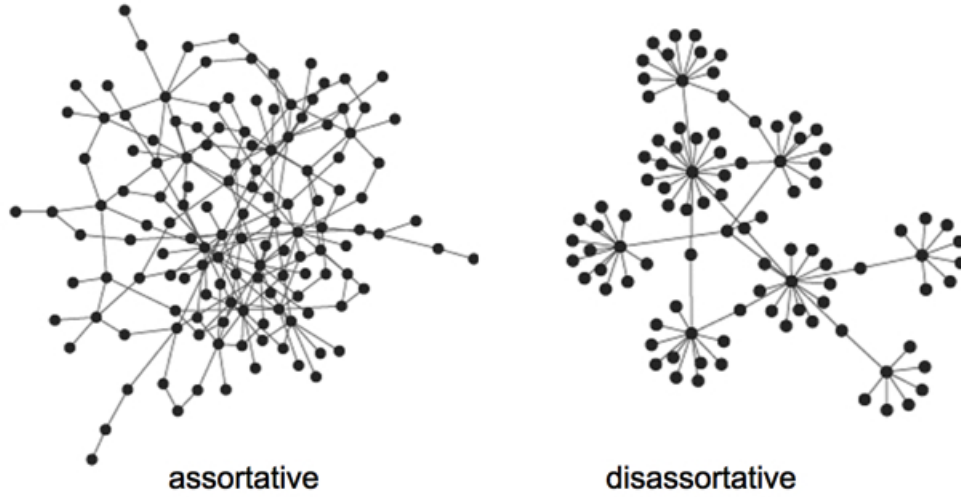


FIGURE 1.11 – Exemple des réseaux assortative et disassortative.

Selon l'équation Eq.1.6 on peut distinguer deux différents types des réseaux, si les nœuds de haut degré dans un réseau associent préférentiellement avec d'autres nœuds à haut degré on dit que le réseau est assortative, et s'ils préfèrent s'attacher à ceux à faible degré on dit que le réseau est disassortative (voir Fig. 1.11). Les deux situations sont observées dans certains réseaux, mais le cas du assortative est particulièrement intéressant, car le degré est lui-même une propriété de la topologie des graphes, alors les corrélations de degré peuvent donner lieu à des effets de structure de réseau intéressants [56, 61].

1.4.5 Mesures de la centralité

L'identification de nœuds importants dans les réseaux est un problème intéressant qui a suscité beaucoup d'attention, surtout dans le contexte des réseaux de communication.

Par exemple, la communication entre un groupe d'humains forme un réseau de communication [62]. Les sciences sociales à la fin des années 1940 ont développé des mesures théoriques pour détecter des nœuds importants dans les réseaux. Une classe importante de ces mesures est basée sur le concept de centralité [63, 64] qui tente intuitivement d'identifier les nœuds qui sont au centre de la communication au sein du réseau parmi tous les nœuds. Il existe deux types fondamentalement différents de mesures de centralité [65]. Le premier type de mesures évalue la centralité de chaque nœud dans un réseau et s'appelle des mesures de centralité des points où le mot "point" se réfère à un nœud ou un nœud. Le second type s'appelle les mesures de centralité des graphiques car il attribue une valeur de centralité à l'ensemble du réseau. Parmi les paramètre du mesure de centralité on cite :

i) Centralité d'intégration (Betweenness) :

L'importance d'un nœud dans un réseau dépend de nombreux facteurs. Un site Web peut être important en raison de son contenu, d'un routeur en raison de sa capacité, d'un métabolite dû à sa fonction biochimique, etc. Bien sûr, toutes ces propriétés dépendent de la nature du réseau étudié et peuvent avoir très peu à faire avec la structure graphique du réseau. L'une des définitions les plus acceptées de centralité est basée sur les chemins de comptage traversant un nœud pour chaque nœud, i , dans le réseau, on compte le nombre de chemins de "routage" vers tous les autres nœuds passant par i est compté, et ce nombre détermine la centralité i . La sélection la plus courante ne prend que les chemins les plus courts en tant que chemins de routage. Cela conduit à la définition suivante : la centralité de l'interférence d'un nœud, i , équivaut au nombre de chemins les plus courts entre toutes les paires de nœuds dans le réseau qui l'entoure, c'est-à-dire,

$$C_B(i) = \sum_{l \neq j} \frac{\sigma_{lj}(i)}{\sigma_{lj}}, \quad (1.7)$$

avec σ_{lj} indique le nombre de plus court chemin de l à j , et $\sigma_{lj}(i)$ indique le nombre de plus court chemin de l à j passant par i .

ii) La proximité de la centralité :

La proximité de centralité tente de mesurer la proximité d'un nœud avec d'autres nœuds du réseau. Ceci se fait en termes de distance de communication mesurée par le nombre d'arêtes entre deux nœuds si connecté par le chemin le plus court.

$$C_C(i) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n d_{ji}}, \quad (1.8)$$

d_{ji} est le plus court chemin entre le nœud j et i .

En ce qui concerne la centralité de la proximité, les gens se réfèrent généralement à sa forme normalisée qui représente la longueur moyenne des chemins les plus courts au lieu de leur somme. Il est généralement donné par la formule précédente multipliée par $n - 1$. Pour les larges réseaux de très grand nombre de nœuds on écrit :

$$C_C(i) = \frac{n}{\sum_{j=1}^n d_{ji}}. \quad (1.9)$$

1.5 Propriétés des réseaux réels

1.5.1 La propriété petit-monde

La propriété petit monde se réfère au fait que dans plusieurs réseaux, peut-être la plupart des réseaux à grande échelle, la distance moyenne entre les nœuds est très faible par rapport à la taille des graphiques. La distance entre deux nœuds d'un graphe est mesurée comme la plus petite longueur de chemin entre eux. Une mesure statistique globale de la distance entre les nœuds peut alors être exprimée comme la longueur de trajet moyenne la plus courte parmi tous les couples possibles de nœuds dans le réseau. Nous avons discuté dans la Section 1.3 l'expérience passante de Stanley Milgram dans les années 1960, dans laquelle on a trouvé que le nombre d'étapes qu'une personne cible obtenu une lettre d'un titulaire initial, via le réseau social, est environ six en moyenne. L'expérience de Milgram est une démonstration simple, magnifique et puissante de l'effet de petit-monde.

L'effet petit-monde a des implications évidentes pour la dynamique des processus qui se

déroulent sur les réseaux. Par exemple, si l'on considère la diffusion de l'information, ou encore tout autre chose, à travers un réseau, l'effet petit-monde implique que cette propagation sera rapide sur la plupart des réseaux réels. Cela affecte le nombre de "sauts" qu'un paquet doit faire pour passer d'un ordinateur à l'autre sur Internet, le nombre de jambes d'un voyage pour un voyageur aérien ou en train, le temps qu'il faut pour qu'une maladie se propage dans une population, et ainsi de suite. L'effet petit-monde sous-tend également certains jeux de société bien connus, en particulier le calcul des nombres d'Erdős [66] et de Bacon.

1.5.2 La distribution de degré libre-échelle

La distribution des degrés libre-échelle qu'on appelle également la loi de puissance a suscité un intérêt particulier au cours des dernières années pour ses propriétés mathématiques, ce qui entraîne parfois des conséquences physiques surprenantes et son apparence dans une diversité des réseaux naturels et artificiels, voir quelques exemples dans la Fig. 1.12.

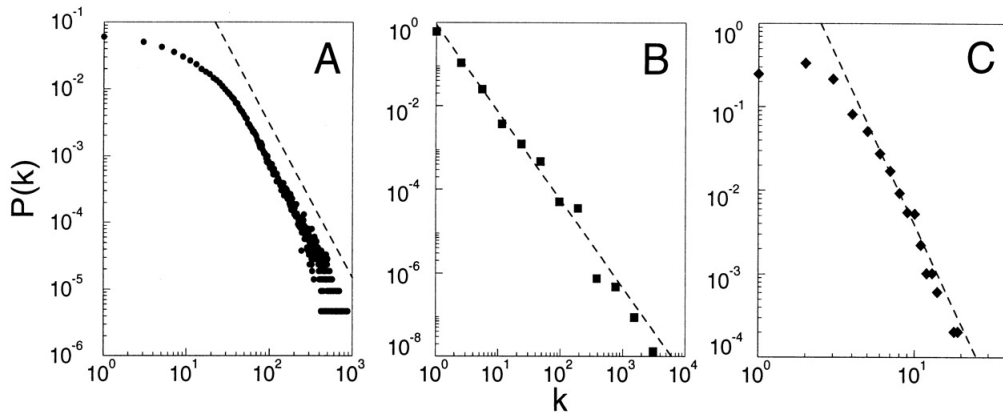


FIGURE 1.12 – Quelques exemples des réseaux libre-échelle, (A) Graphique de collaboration d'acteur avec un nombre des nœuds $n = 212250$ et un degré moyen $\langle k \rangle = 28.78$, (B) WWW, $n = 325729$, $\langle k \rangle = 5.46$, (C) Données du réseau électrique, $n = 4941$ et $\langle k \rangle = 2.69$. Les lignes pointillées ont des pentes (A) $\gamma_{actor} = 2.3$, (B) $\gamma_{www} = 2.1$ et (C) $\gamma_{electrique} = 4$.

Les distributions de la loi de puissance se produisent dans une gamme des réseaux extraordinairement diversifiée, tels que, les populations des villes [67, 68], la taille des tremblements

de terre [69], des cratères de lune [70], la fréquence d'utilisation des mots dans n'importe quelle langue humaine [71, 72], la fréquence de l'apparition de noms personnels dans la plupart des cultures [73], le nombre de documents scientifiques écrits [74], le nombre de citations reçues par les documents [75], le nombre de visites sur les pages Web [76] Les ventes de livres, les enregistrements musicaux et presque tous les autres produits de marque [77], le nombre d'espèces dans les genres biologiques [78], les revenus annuels des personnes [79], les collecteurs de réseaux quantiques complexes [80] et une foule d'autres réseaux sont toutes suivies des distributions des loi de puissances.

Mathématiquement, une quantité x obéit à une loi de puissance s'elle est tirée d'une distribution de probabilité

$$P(x) \propto x^{-\gamma} \quad (1.10)$$

Avec γ est un paramètre constant de la distribution connue sous le nom d'exposant, empiriquement cet exposant se situe généralement dans l'intervalle $2 < \gamma < 3$, bien qu'il existe des exceptions occasionnelles.

1.5.3 Structure communautaire

La société offre une grande variété d'organisations de groupes possibles : les familles, les milieux de travail et d'amitié, les villages, les villes, les nations (voir un exemple Fig. 1.13). La diffusion d'Internet a également conduit à la création de groupes virtuels, en direct sur le Web, ainsi que, ces communautés se produisent également dans de nombreux systèmes en réseau, de la biologie, de l'informatique, de l'ingénierie, de l'économie, de la politique, etc. Par exemple dans le graphique du World Wide Web peuvent correspondre à des groupes de pages portant sur les mêmes sujets ou des sujets connexes [81, 82]. Dans les réseaux d'interactions protéines-protéines, les communautés sont susceptibles de regrouper des protéines ayant la même fonction spécifique dans la cellule [83, 84].

Les communautés peuvent avoir des applications concrètes. Clustering des clients Web

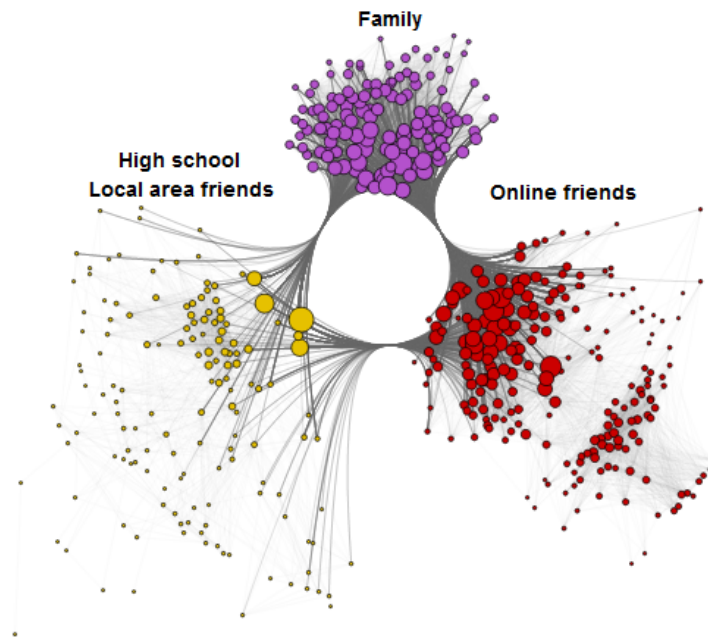


FIGURE 1.13 – Exemples d’un réseau de communautaire, chaque colleur représente un groupe plus connecté par rapport au reste du réseau.

qui ont des intérêts similaires et qui sont géographiquement proches l’un de l’autre peuvent améliorer la performance des services fournis sur le WWW, en ce sens que chaque groupe de clients pourrait être desservi par un serveur miroir dédié [85]. Les réseaux auto-configurés formés par des nœuds de communication agissant dans la même région et en changeant rapidement n’ont généralement pas de tables de routage centralisées qui spécifient comment les nœuds doivent communiquer avec d’autres nœuds. Alors Le regroupement des nœuds en clusters permet de générer des tables de routage compactes alors que le choix des chemins de communication est encore efficace [86].

La détection communautaire est également importante pour d’autres raisons. L’identification des modules et de leurs limites permet une classification des nœuds, en fonction de leur position structurelle dans les modules. Donc, les nœuds avec une position centrale dans leurs grappes partagent un grand nombre de bords avec les autres partenaires du groupe, ce qui est une caractéristique importante de contrôle et de stabilité au sein du groupe, en outre, Les nœuds situés aux frontières entre les modules jouent un rôle important de médiation et mènent les relations et les échanges entre les différentes communautés [87].

1.6 Les modèles théoriques les plus connus

De façon générale on peut distinguer trois modèles des réseaux : aléatoire, de petit monde et le modèle libre-échelle. Ces modèles se caractérisent chacun par la manière dont les réseaux sont créés et par plusieurs statistiques résultantes, telles que la distribution des degrés, la longueur moyenne entre les paires de nœuds et le coefficient de Clustering.

1.6.1 Réseau aléatoire d'Erdős-Rényi

Un réseau aléatoire est créé en spécifiant que chaque paire de nœuds est connecté par un lien avec une probabilité uniforme p . Ce tel réseau a été étudié d'un point de vue mathématique pure par Erdős et Rényi (ER) [88–90], il est souvent désigné par son nom mathématique $G(n, m)$, avec n est le nombre de nœuds et m le nombre de liens. Dans la limite du grand n , bon nombre des propriétés moyennes de l'ensemble des réseaux aléatoires ont été exprimées analytiquement de façon parfait et élégant.

Les graphiques aléatoires ER sont les mieux étudiés parmi les modèles graphiques, les propriétés structurelles des celles-ci varient en fonction de p montrant notamment un changement dramatique à une probabilité critique $p_c = \frac{1}{n}$, correspondant à un degré moyen critique $\langle k \rangle_c = 1$. Erdős et Rényi ont prouvé que :

- Si $p < p_c$, presque avec certitude lorsque n tend à l'infini, le graphique n'a pas de composante de taille supérieure à $(\ln(n))$.
- Si $p = p_c$, presque certainement le composant le plus important a la taille de $n^{\frac{2}{3}}$.
- Si $p > p_c$, le graphique a un composant de taille de l'ordre n et aucun autre composant n'a plus de taille supérieure à $(\ln(n))$.

La transition au p_c présente les caractéristiques typiques d'une transition de phase de deuxième ordre. En particulier, s'on considère la taille de la composante la plus importante comme paramètre d'ordre, la transition tombe dans la même classe d'universalité que celle des transitions de percolation de champ moyen (voir Fig. 1.14). Erdős et Rényi ont étudié la distribution du degré minimum et maximum dans le graphe aléatoire, mais la distribution de

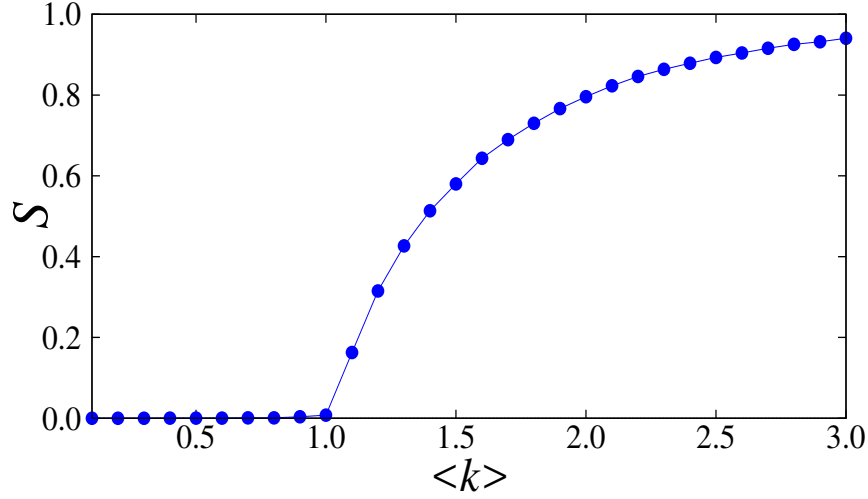


FIGURE 1.14 – Les simulations numériques de la seuil de percolation dans le modèle ER en fonction de degré moyen, pour un réseau de taille $n = 10^5$. On observe que le point où la fraction de la composante géante, S , émerge est à $\langle k \rangle = 1$.

degrés complet a été obtenue plus tard par Bollobás [91]. La probabilité qu'un nœud possède le degré k est la distribution binomiale :

$$P(k) = C_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-1-k} \quad (1.11)$$

Pour n très grand, la répartition du degré est bien approchée par une distribution de Poisson :

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (1.12)$$

Le coefficient de regroupement, C , est une quantité très simple à calculer pour le graphe aléatoire de Poisson, rappelons qu'il est défini comme la probabilité que deux voisins du réseau d'un nœud soient également voisins les uns des autres. Dans un graphique aléatoire, la probabilité que les deux nœuds soient voisins est égale à $p = \frac{\langle k \rangle}{(n-1)}$. Par conséquent :

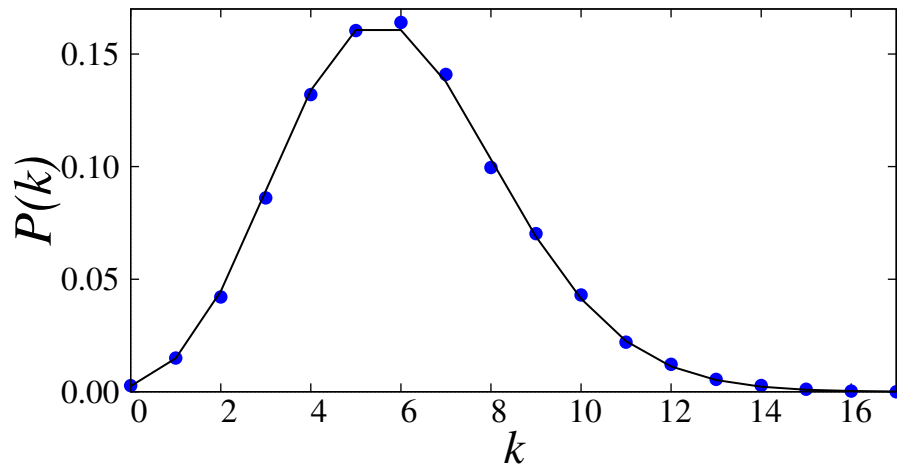


FIGURE 1.15 – Illustration de la distribution de degré d'un réseau aléatoire ER de degré moyenne égale 6, les cercles représentent les simulations numériques et la ligne noire représente Eq.1.12.

$$C = \frac{\langle k \rangle}{(n-1)} \quad (1.13)$$

Cette valeur de Clustering qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini est l'un des nombreux aspects dans lesquels le graphique aléatoire diffère fortement de la plupart des réseaux réels, dont beaucoup ont des coefficients de regroupement assez élevés.

1.6.2 Le modèle petit-monde de Watts-Strogatz

Le réseau aléatoire ER reproduit très bien l'observation concernant la longueur de chemin moyenne relativement petite, mais le coefficient de regroupement (Clustering) dans ce réseau est très faibles par rapport à ceux observés dans les systèmes réels, ainsi que la distribution des degrés est déferent de celle du réseau réel. En 1998 Watts et Strogatz [92] ont proposé un modèle qui reproduit deux propriétés parmi celles mentionnées précédemment de manière simple.

Les modèles de petit-monde peuvent être construits sur des réseaux de n'importe quelle dimension ou topologie, mais le cas le mieux étudié est l'unidimensionnel. Soit n le nombre de nœuds et k soit un nombre pair, le modèle Watt-Strogatz commence par la construction suivante (voir Fi.1.16) :

- Placez tous les noeuds en cercle ;
- Connectez chaque nœud à ses premiers k voisins les plus proches ;
- Avec une probabilité p en prenant chaque lien du réseau et on le reconnecte.

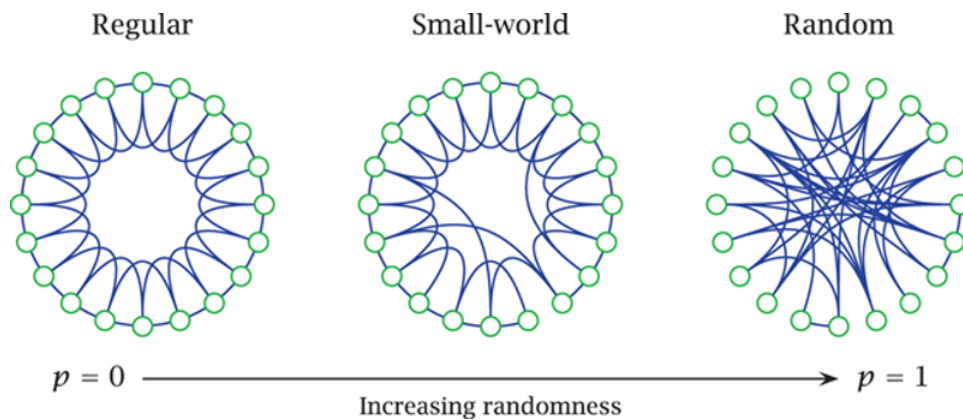


FIGURE 1.16 – Représentation schématique de l'évolution du processus de "reconnecter" dans le modèle Watts-Strogatz.

Ce modèle peut être justifié en disant que la plupart des gens sont amis avec leurs voisins immédiats, par exemple les voisins de la même rue ou des collègues du même bureau. D'autre part, beaucoup des gens ont quelques amis qui sont à grande distance, alors de certains manière sont également amis avec quelques personnes qui sont loin. Les propriétés structurelles du modèle sont quantifiées par la longueur de chemin caractéristique $L(p)$ et le coefficient de regroupement $C(p)$ en tant que fonctions de la probabilité de reconnecter p . La longueur de chemin caractéristique L est définie comme la valeur moyenne de nombre d'arêtes dans le chemin le plus court entre deux nœuds.

Nous savons que le réseau ordinaire à $p = 0$ est un grand monde en grappe, où L se développe linéairement avec n , tandis que le graphique aléatoire à $p = 1$ est un petit monde faiblement regroupé où L ne se développe que logarithmiquement avec n .

Selon Fig. 1.17 on voit que l'introduction de quelques bords à longue distance entraîne

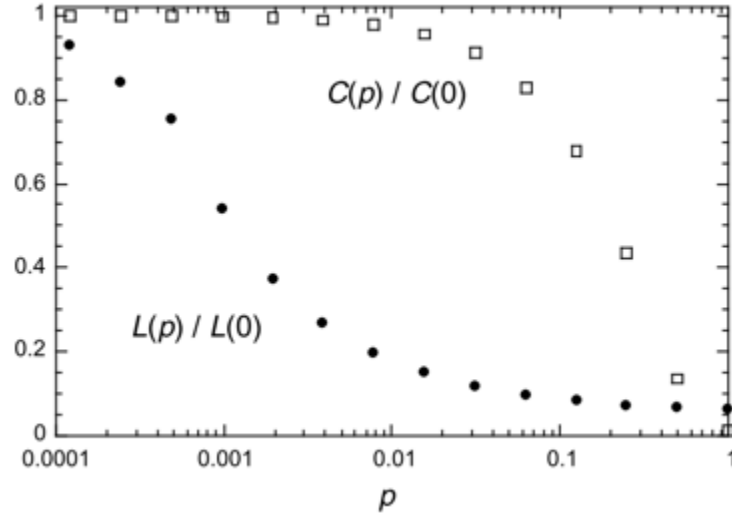


FIGURE 1.17 – Représentation de la variation de la longueur moyenne du chemin $L(p)$ et du coefficient de regroupement $C(p)$ avec la modification de la probabilité de reconnecter p dans le modèle Watts-Strogatz.

une baisse immédiate de $L(p)$, par contre $C(p)$ reste pratiquement inchangé pour les petites p même si $L(p)$ chute rapidement. L'implication importante est que, au niveau local, la mise à l'échelle du petit monde de la distance géodésique moyenne entre les nœuds peut se produire pour les mêmes valeurs de p auxquelles le coefficient de regroupement local du réseau est significatif important.

Le plus court chemin moyen a été montré comme [93, 94]

$$L \sim \frac{n}{k} f(x), \quad (1.14)$$

avec x est le nombre moyen des bords qui se reconnectent dans le réseau et $f(x)$ est une fonction universelle qui a les formes asymptotiques suivantes :

$$f(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \gg 1 \\ \frac{\log 2x}{4x} & \text{si } x \ll 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

Le coefficient de regroupement C est défini par Eq.1.10, que nous reproduisons ici :

$$C = \frac{3 \times (\text{Nombre de triangles})}{(\text{Nombre de triples connectés})}. \quad (1.16)$$

Pour évaluer C , nous devons calculer le nombre de triangles et les triples connectés dans le réseau, alors on va trouver la valeur moyenne de C comme la suite [95] :

$$C = \frac{3(k-1)}{4(k-1) + 8kp + 4kp^2}. \quad (1.17)$$

En ce qui concerne la répartition du degré, lorsque $p = 0$ est une fonction delta positionnée à k , alors que pour $p = 1$ elle est similaire à celle d'un réseau ER. Pour l'intermédiaire p , la répartition du degré est donnée par [96] :

$$P(k) = \sum_{i=0}^{\min(k-m, m)} C_i^m \frac{(pm)^{k-m-i}}{(k-m-i)} e^{pm}. \quad (1.18)$$

1.6.3 Le modèle libre-échelle de Barabási-Albert

Une caractéristique commune du graphique aléatoire ER et des modèles de petit monde de WS est que la distribution de degré du réseau est homogène, avec un pic à une valeur moyenne et une décroissance exponentielle, de tels réseaux s'appellent des réseaux exponentiels. Les inconvénients de ces deux modèles précédents est qu'ils ne tiennent pas compte de deux attributs importants de la plupart des réseaux réels. Premièrement, les réseaux réels sont ouverts et ils sont dynamiquement formés par l'ajout continu de nouveaux nœuds au réseau, par exemple, la WWW génère continuellement de nouvelles pages Web et la littérature de recherche se développe constamment car les nouveaux articles sont en cours de publication. Deuxièmement, le graphique aléatoire ER et le modèle de petit-monde prennent des probabilités uniformes lors de la création de nouvelles arêtes, mais ce n'est pas réaliste non plus.

Une découverte relativement récente et importante dans le domaine des réseaux complexes est l'observation qu'un certain nombre de réseaux complexes à grande échelle, y compris

Internet, WWW et les réseaux métaboliques, sont sans échelle et leurs distributions de connectivité ont une forme de puissance (voir Fig. 1.12).

Nous discutons alors ici d'une classe de modèles dont l'objectif principal est de reproduire les processus de croissance qui se déroulent dans des réseaux réels. Nous nous concentrons principalement sur le modèle de croissance du réseau proposé par Barabási et Albert en 1999 [3], ce modèle repose sur deux hypothèses simples concernant l'évolution du réseau :

- **Croissance** : De nouveaux nœuds sont ajoutés au réseau, chaque nouveau nœud étant connecté à m des nœuds existants.
- **Attachement préférentielle** : Chaque nouveau nœud est connecté aux nœuds existants avec une probabilité proportionnelle à son degré.

De manière plus en détail, considérons un réseau évoluant dans le temps, t , où, à chaque fois, un nouveau nœud est ajouté au réseau et connecté à m des nœuds existants, où la probabilité de se connecter à un nœud existant, i , $\Pi(i)$ est donné par :

$$\Pi(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (1.19)$$

Le nombre des nœuds initial au temps $t = 0$ est généralement supposé être connecté est doit être supérieur à m , mais les détails de sa structure n'ont qu'un faible effet sur le résultat final.

Il existe plusieurs méthodes pour analyser les résultats du modèle Barabási-Albert. La méthode la plus simple est une analyse de champ moyen décrite initialement dans [3]. D'autres méthodes plus rigoureuse d'analyse de ce modèle utilisant des outils de la physique statistique comprennent l'approche de l'équation maîtresse [97] et l'approche de l'équation du taux [98]. La distribution de degré trouvé est décrite par une loi de puissance avec l'exposant -3 , c'est-à-dire que la probabilité de trouver un nœud avec le degré k est proportionnelle à k^{-3} (voir Fig. 1.18). plus précisément l'expression exacte de $P(k)$ est :

$$P(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}. \quad (1.20)$$

L'Eq.1.20 a d'abord été dérivée par Krapivsky et al. [98] et de manière indépendante par Dorogovtsev et al. [99]. Un traitement plus détaillé a ensuite été donné par Bollobas et al. [100], qui clarifie précisément le domaine de validité de la solution et les écarts éventuels par rapport à la valeur attendue de $P(k)$.

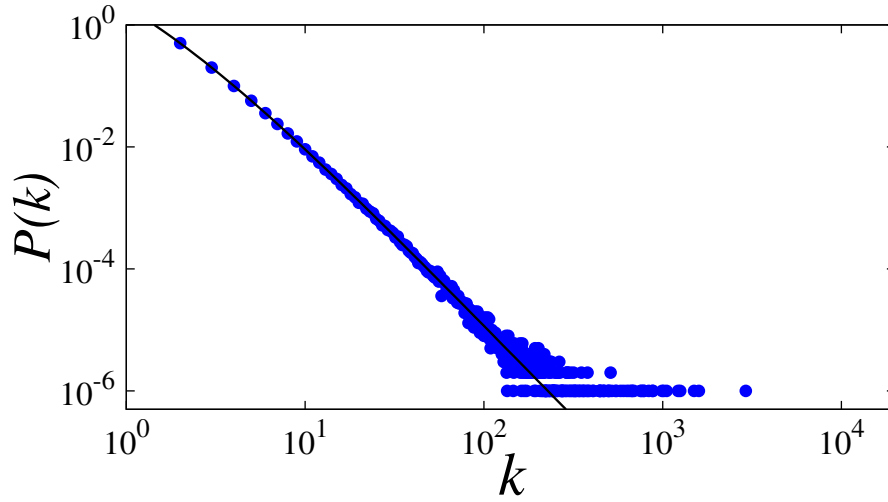


FIGURE 1.18 – La distribution de degrés du réseau BA en échelle logarithmique, où les cercles sont les simulations numériques et la ligne continue représente la formule théorique, Eq. 1.20. La taille du réseau est $n = 10^6$ et $m = 2$.

La distance moyenne dans le modèle BA est plus petite que dans le graphique aléatoire ER. Les résultats analytiques prédisent une correction de double logarithmique qui diminue la dépendance logarithmique $L \sim \frac{\log N}{\log \log N}$ [100]. Le coefficient de regroupement décroît avec la taille du système comme $C \sim N^{-0,75}$. Il s'agit d'une décroissance plus lente que celle observée pour les graphes aléatoires, $C \sim N^{-1}$, mais il est encore différent du comportement dans les modèles du petit monde, où C est une constante indépendante de la taille du réseau N .

Chapitre 2

Les réseaux en croissances et l'attachement préférentielle

Malgré de nombreux efforts, la théorie cohérente des réseaux en évolution manque encore un principe général prédisant la topologie d'un réseau formé. Dans le but de comprendre la formation et l'évolution des réseaux complexes, de nombreux modèles ont été introduits pour étudier les processus microscopiques impliqués dans la structure du réseau qui en résulte. Dans ce contexte, on introduit ici un modèle de réseau simple et complexe qui augmente avec un mécanisme linéaire d'attachement préférentiel et sans le mécanisme "rich get richer". L'objectif est double : d'abord vérifier si la distribution de degré en loi de puissance reste en l'absence du mécanisme "rich get richer" et, d'autre part, voir pour éventuellement les différences microscopiques entre les réseaux sans échelle et homogènes.

2.1 Introduction

Au cours des dernières années, il existe un intérêt croissant à étudier l'évolution des réseaux complexes et à développer des modèles qui reflètent certaines propriétés des réseaux réels en utilisant les techniques de mécanique statistique, la théorie graphique et les simulations informatiques [3, 101–103]. L'une des propriétés les plus importantes étudié en réseaux est

CHAPITRE 2. LES RÉSEAUX EN CROISSANCES ET L'ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIELLE

la distribution de degrés des nœuds qui est la probabilité $P(k)$ qu'un nœud avoir un degré k . On peut distinguer trois lois principales de la distribution de degrés : loi de Poisson où $P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$, loi de puissance avec $P(k) \approx k^{-\gamma}$ et γ représente le degré d'exposant, et loi exponentiel $P(k) \approx e^{-\frac{k}{c}}$ où c est une constante.

Il semble que, dans la nature, la plupart des réseaux suivent les deux dernières lois de distribution mentionnées ci-dessus. Barabási-Albert (BA) a réinventé le réseau de distribution de degré libre-échelle de Pric en introduisant un modèle simplifié basé à la fois sur la croissance et l'attachement préférentiel. Le réseau libre-échelle est largement observé dans une variété de systèmes tels que des réseaux de citation de publication, de nombreux réseaux sociaux, des réseaux de protéines et de gènes. Cependant, il existe d'autres réseaux réels qui suivent une loi exponentielle, par exemple, le Réseau mondial de transport maritime [104], le réseau nord-américain Power Gridc [105], réseaux neuronaux des *C.elegans* [106] et le réseau de messagerie à l'Université de Rovira i Virgili (ENURV) en Espagne [105].

La loi exponentielle semble être le résultat d'un réseau croissant en ajoutant de nouveaux nœuds et liens aléatoire. D'autre part, la loi de puissance semble apparaître lorsque les nœuds sont ajoutés au réseau un à la fois et sont liés à des nœuds déjà bien connectés. De nombreuses idées sur la formation des réseaux ont été examinées. Par exemple, Barabási, dans son modèle, a affirmé que l'attachement préférentiels et la croissance sont tous les deux nécessaires pour générer un réseau libre-échelle [107]. En réalité, il semble que la croissance n'est pas nécessaire pour un tel objectif [108]. En outre, il est intuitif, que l'attachement préférentiel sans l'effet "rich get richer" ne génère pas un réseau libre-échelle [109]. Krapivsky et al [98] ont étudié la fixation préférentielle non linéaire avec $\Pi(k_i) \propto k_i^\gamma$ et ils ont montré que pour $\gamma < 1$, le mécanisme produit une distribution de degré de loi exponentiel.

2.2 Les processus dynamiques : théorie et simulation

2.2.1 Introduction

Cette section est destinée à donner une brève introduction à la théorie et à la modélisation des processus d'équilibre et non équilibrés sur les réseaux et à définir les approches et techniques de base de la modélisation utilisées dans la théorie des processus dynamiques. En particulier, on définit le formalisme de l'équation maîtresse et on distingue les phénomènes d'équilibre et de non-équilibre. Malheureusement, même si l'équation maîtresse permet une distinction et une catégorisation conceptuelles importantes, sa solution complète n'est pas assez simple même pour des processus dynamiques très simples. Pour cette raison, on présente au lecteur des techniques qu'on va utiliser au long de cette thèse, telles que les approximations déterministes du champ moyen, qui représentent habituellement des approches pour comprendre les caractéristiques fondamentales du processus étudié. On discute également des approches de modélisation basées sur des outils de Monte Carlo qui sont généralement implémentées dans des méthodes de simulation numérique à grande échelle.

Le but de ces différentes méthodes théoriques est de fournir un cadre général pour démontrer comment les interactions microscopiques entre les éléments du système conduisent à des phénomènes coopératifs et des propriétés émergentes des processus dynamiques. Cette stratégie, allant de l'interaction microscopique aux phénomènes collectifs émergents, a ses racines dans la méthodologie de la physique statistique et la dynamique de la population, et est actuellement considérée comme un paradigme général pour combler l'écart entre les propriétés locales et les propriétés à grande échelle des systèmes complexes. Il est important de souligner que cette présentation est une grandement abrégée d'un énorme domaine de recherche et ne fait que rayonner la surface de la théorie statistique des processus dynamiques. Les lecteurs intéressés qui veulent plonger dans les subtilités mathématiques et formelles du sujet devraient se référer à des manuels classiques tels que ceux de Ma (1985), Chandler

(1987), Huang (1987) et Balescu (1997).

2.2.2 Équation maîtresse

Le nom "équation maîtresse" a été inventé à l'origine par Nordsieck, Lamb et Uhlenbeck [110] dans leur étude du modèle Furry des averses de pluie cosmiques [111]. Peu de temps auparavant, Feller a appliqué une équation de la même structure à la croissance des populations [112] et Delbrück à des réactions chimiques auto-catalytiques bien mélangées [113]. Pour plus des détails vous pouvez voir ces références [114–116].

Deux schémas de modélisation principaux sont adoptés pour traiter les processus dynamiques sur les réseaux. Dans le premier, nous identifions chaque nœud du réseau avec un seul individu ou élément du système. Dans le second cas, nous considérons les entités dynamiques telles que les personnes, les paquets d'information, l'énergie ou la matière circulant dans un réseau dont les nœuds identifient les endroits où transitent les entités dynamiques. Dans les deux cas, cependant, la description dynamique du système peut être obtenue en introduisant pour chaque nœud i la notion de variable correspondante σ_i caractérisant son état dynamique. Si chaque nœud représente un seul individu, la variable σ_i peut décrire un attribut particulier de l'individu. Sans perdre de généralité, nous pouvons énumérer tous les états possibles $\sigma_i = 1, 2, \dots, m$ pour chaque nœud, et la connaissance de la variable d'état de tous les nœuds du réseau définit donc l'état microscopique de l'ensemble du système. Alors on peut désigner une configuration particulière du réseau à l'instant t par l'ensemble $\sigma(t) = [\sigma_1(t), \sigma_2(t), \sigma_3(t), \dots, \sigma_N(t)]$, où l'indice $i = 1, \dots, N$ parcourt tous les nœuds du réseau de taille N .

L'évolution dynamique du système est simplement donnée par la dynamique de la configuration $\sigma(t)$ dans l'espace des phases du système, définie par toutes les configurations possibles. Le processus dynamique est décrit par les transitions d'un état σ^a vers une autre état σ^b . En général, il est impossible de suivre la dynamique microscopique des systèmes à grande échelle en raison du grand nombre de variables et de la nature stochastique de la plupart des phénomènes. Pour cette raison, la description dynamique de base du système repose sur

l'approche de l'équation maîtresse (EM) que nous allons brièvement introduire.

L'approche EM se concentre sur l'étude de la probabilité $P(\sigma, t)$ de trouver le système à l'instant t dans une configuration donnée σ . Cette probabilité doit être normalisée, $\sum_{\sigma} P(\sigma, t) = 1$, et fournit une description probabiliste du système qui donne les informations les plus pertinentes

$$\frac{\partial P(\sigma, t)}{\partial t} = \sum_{\sigma'} [P(\sigma', t)W(\sigma' \rightarrow \sigma) - P(\sigma, t)W(\sigma \rightarrow \sigma')], \quad (2.1)$$

où la somme s'exécute sur toutes les configurations possibles σ et les termes $W(\sigma' \rightarrow \sigma)$ représentent les taux de transition de la configuration σ' vers la configuration σ en raison de la dynamique microscopique du système.

Les EM et les simulations basées sur des équations maîtresses sont maintenant utilisées dans de nombreux domaines de recherche. Ils sont appliqués dans les contextes de la dynamique de spin [117–120], des réseaux régulateurs de gènes [121–123], de la propagation des maladies [124, 125], de l'homéostasie épidermique [126], et les processus sociaux et économiques [127]. Les processus de file d'attente sont souvent modélisés en termes d'EM, mais dans ce contexte, les équations sont généralement appelées équations de Kolmogorov [128].

2.2.3 Modélisation et simulations numériques

La simulation numérique a commencé dans les années cinquante lorsque les ordinateurs ont été utilisés pour la première fois à des fins pacifiques, en particulier, l'ordinateur MANIAC a commencé en 1952 à Los Alamos. La simulation fournit une approche complémentaire aux méthodes théoriques. Les domaines de la physique où les approches perturbatives sont efficaces (gaz dilués, vibrations dans les solides quasi-harmoniques) ne nécessitent pas de méthodes de simulation. Inversement, la physique des états liquides, où peu de résultats exacts sont connus et où les développements théoriques ne sont pas toujours sous contrôle, a été développée en grande partie par simulation. La première simulation de liquides par la méthode Monte Carlo a été réalisée par Metropolis et al. en 1953.

Dans des modèles plus complexes, même l'approche déterministe pourrait ne pas conduire à des équations résolubles. De plus, ce cadre théorique est intrinsèquement ne prend pas en

compte l'hétérogénéité individuelle ou d'autres fluctuations possibles. L'intégration numérique sur l'ordinateur des équations obtenues ne fournit donc pas une image complète du système. Dans cette situation, des modèles informatiques microscopiques, peuvent être appliqués. Dans ces approches, chaque nœud individuel est supposé être dans l'un des états possibles. A chaque pas de temps, la procédure de mise à jour spécifique au modèle qui dépend de la dynamique microscopique est appliquée à chaque nœud, ce qui modifie son état en fonction de l'état des nœuds voisins ou d'autres règles dynamiques. Notamment, la stochasticité du modèle peut être introduite en utilisant des simulations de Monte Carlo dans lesquelles les taux et les probabilités sont établis dans l'ordinateur avec l'utilisation de générateurs de nombres aléatoires. La perspective microscopique de cette approche est évidente dans le fait que l'on peut suivre la dynamique de chaque élément individuel. De plus, la dynamique de définition se situe au niveau des interactions microscopiques entre les éléments, et les régularités statistiques et les propriétés macroscopiques du système sont étudiées en regardant les quantités globales ou moyennes. L'ordinateur est donc utilisé comme un laboratoire pour étudier des réalités complexes non accessibles mathématiquement ou expérimentalement.

2.3 L'évolution dynamique et l'attachement préférentielle dans les réseaux réels

On commence ce paragraphe en demandant : Pourquoi les hubs et la loi libre-échelle sont-elles absentes dans les réseaux aléatoires ? La réponse a émergé en 1999, mettant en évidence deux hypothèses qui sont apparaît dans les réseaux réels [3]. Nous discutons ensuite de ces hypothèses séparément.

2.3.1 L'évolution dynamique

Le modèle de réseau aléatoire suppose qu'on a un nombre fixe de nœuds, N . Pourtant, dans les réseaux réels, le nombre de nœuds ne cesse de croître grâce à l'ajout de nouveaux nœuds, par exemple, En 1991, le WWW avait un seul nœud, la première page Web construite

par Tim Berners-Lee, le créateur du Web. Aujourd'hui, le Web a plus d'un trillion (10^{12}) de documents, un nombre extraordinaire qui a été atteint grâce à l'ajout continu de nouveaux documents par des millions d'individus et d'institutions (voir Fig. 2.1). Ainsi que le réseau d'acteurs continue de se développer [129]. Par conséquent, si nous souhaitons modéliser ces

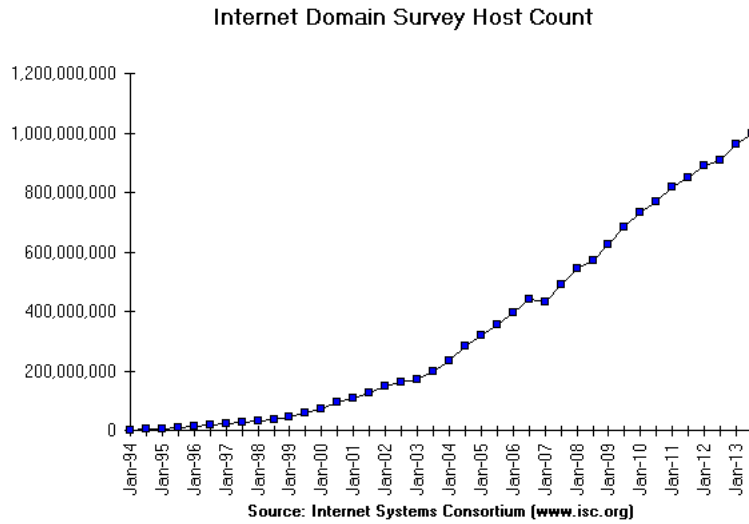


FIGURE 2.1 – L'évolution de nombre d'hôtes sur Interent de 1994 à 2013, cette figure obtenues à partir de site : [http ://facesncups.com/inforev.html](http://facesncups.com/inforev.html)

réseaux, on ne peut pas recourir à un modèle statique. Notre approche de modélisation doit plutôt reconnaître que les réseaux sont le produit d'un processus de croissance constant.

2.3.2 L'attachement préférentielle et le mécanisme "rich get richer"

Le modèle de réseau aléatoire suppose que nous choisissons au hasard les partenaires d'interaction d'un nœud. Pourtant, la plupart des réseaux réels de nouveaux nœuds préfèrent se lier aux nœuds les plus connectés, ce processus appelé attachement préférentiel, par exemple. Nous ne connaissons qu'une infime fraction du trillion ou plus de documents disponibles sur le WWW. Les nœuds que nous connaissons ne sont pas entièrement aléatoires : nous avons tous entendu parler de Google et de YouTube, mais nous rencontrons rarement les milliards de nœuds moins importants qui sont dans le Web. Comme nos connaissances sont

biaisées vers les documents Web les plus populaires, nous sommes plus susceptibles de lier à un nœud de haut niveau qu'à un nœud avec seulement quelques liens [130].

L'ancienneté, cependant, n'est pas suffisante pour expliquer la loi libre-échelle. Hubs nécessitent l'aide de la deuxième loi, l'attachement préférentiel. Parce que les nouveaux nœuds préfèrent se lier aux nœuds les plus connectés, les premiers nœuds avec plus de liens seront sélectionnés plus souvent et croîtront plus rapidement que les autres qui sont plus jeunes et moins connectés. Comme de plus en plus de nœuds arrivent et continuent de choisir les nœuds les plus connectés, les premiers nœuds vont inévitablement se détacher du paquet, acquérant un très grand nombre de liens. Ils vont se transformer en hubs. Ainsi, l'attachement préférentiel induit un phénomène "rich get richer" qui aide les nœuds les plus connectés à devenir plus connectés. Alors ce phénomène "rich get richer" mène naturellement aux lois libre-échelle observées dans les réseaux réels, on va confirmer cette idée dans la section suivante par notre propre travail et par une façon plus rigueur.

2.4 Attachement préférentielle sans l'effet "rich get richer"

2.4.1 Le modèle

À l'instar du modèle BA original, notre réseau évolue selon deux mécanismes : la croissance et l'attachement préférentiel. Les nœuds entrant dans le réseau préfèrent s'attacher à des nœuds de faible degré, alors la probabilité $\Pi(k_i)$ que l'un des liens d'un nouveau nœud se connecte au nœud i dépend de son degré k_i tel que $\Pi(k_i) = C(1 - \frac{k_i}{\sum_j k_j})$. où C est la constante de normalisation.

En ce qui concerne les réseaux sociaux, si nous considérons le degré de nœuds comme décrivant la richesse des gens dans une société capitaliste, nous savons que nous vivons dans un monde où les riches s'enrichissent, mais quelle sorte de société nous aurons s'il n'y a pas de faveur pour les gens riches, et il y a plutôt une subvention continue pour les pauvres ?

Pour mettre en œuvre notre idée, nous commençons par m_0 nœuds, chacun avec m liens.

À chaque pas de temps, nous ajoutons un nouveau nœud avec m arêtes qui lient le nouveau nœud à m différents nœuds déjà présents dans le réseau. La probabilité que le nouveau nœud soit connecté à un nœud i de degré k_i est $\Pi(k_i) = C(1 - \frac{k_i}{\sum_j k_j})$. La constante de normalisation C est déduite de la condition $\sum_{i=1}^t \Pi(k_i) = 1$, qui donne $C = \frac{1}{t+m_0-1}$. t est le temps à laquelle le dernier nœud a été créé et représente également le nombre de nœuds ajoutés au réseau.

2.4.2 Distribution de degrés en utilisant l'équation maîtresse

Notons $N(k, t)$ le nombre de nœuds de degré k à l'instant t . La distribution de degrés à un instant donné t sera écrit $P(k, t) = \frac{N(k, t)}{N(t)}$. Puisque à chaque pas de temps nous ajoutons un nouveau nœud au réseau, nous avons $N = t$. C'est, à tout moment, le nombre total de nœuds est égal au nombre de pas de temps.

Nous écrivons l'attachement préférentiel dans notre modèle comme

$$\Pi(k) = C(1 - \frac{k}{\sum_j k_j}) = C(1 - \frac{k}{2mt + mm_0}) \quad (2.2)$$

le terme $2m$ capture le fait que chaque lien contribue au degré de deux nœuds, et mm_0 capture le fait que au temps initial nous commençons par m_0 nœuds, chacun avec m liens. Notre objectif est de calculer les changements dans le nombre de nœuds de degré k après l'ajout d'un nouveau nœud au réseau. Pour cela, on respecte les deux événements qui modifient $P(k, t)$ suite à l'arrivée d'un nouveau nœud :

- Un nouveau nœud peut être lié à un nœud de degré k , le transformant en un nœud de degré $(k + 1)$, ce qui diminue $P(k, t)$.
- Un nouveau nœud peut être lié à un nœud de degré $(k - 1)$, le transformant en un nœud de degré k , augmentant ainsi $P(k, t)$.

Alors pour ce modèle, l'équation maîtresse peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} (t + 1)P(k, t + 1) = & tP(k, t) + m\Pi(k - 1, t)tP(k - 1, t) \\ & - m\Pi(k, t)tP(k, t) + \delta_{k,m}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où δ est le symbole Kronecker.

L'équation stationnaire correspondante prend la forme suivante :

$$(t+1)P(k) = tP(k) + m\left(1 - \frac{k-1}{2mt + mm_0}\right) \frac{tP(k-1)}{t-1} - m\left(1 - \frac{k}{2mt + mm_0}\right) \frac{tP(k)}{t-1} + \delta_{k,m}, \quad (2.4)$$

pour des temps très grand on peut écrire que $t+1 = t$ et $t-1 = t$, d'où

$$P(k)\left(1 + m\left(1 - \frac{k}{2mt + mm_0}\right)\right) = m\left(1 - \frac{k-1}{2mt + mm_0}\right)P(k-1) + \delta_{k,m}, \quad (2.5)$$

après quelques lignes on obtient facilement que :

$$P(k) = \begin{cases} \frac{2mt - (k-1)}{2t + 2mt - k} P(k-1), & \text{for } k > m, \\ \frac{2t}{2t + 2mt - m}, & \text{for } k = m. \end{cases} \quad (2.6)$$

La relation de récurrence ci-dessus donne la solution suivante :

$$P(k) = \begin{cases} \frac{2t}{2t + 2mt - m} \prod_{j=m+1}^k \left(\frac{2mt - j + 1}{2t + 2mt - j} \right), & \text{for } k > m, \\ \frac{2t}{2t + 2mt - m}, & \text{for } k = m. \end{cases} \quad (2.7)$$

Bien que cette équation ne soit pas fermée, l'estimation numérique de $P(k)$ est simple comme le montre la figure 2.2.

Nous simulons également le réseau avec des tailles allant jusqu'à $n = 2 \times 10^6$, le nombre initial des nœuds est $m_0 = 3$ et $m = 2$. Les résultats de la simulation supportent fortement les résultats analytiques (voir Fig. 2.2).

Nous avons observé dans les simulations que k reste inférieur à 40 pour $t = 2.10^6$, nous

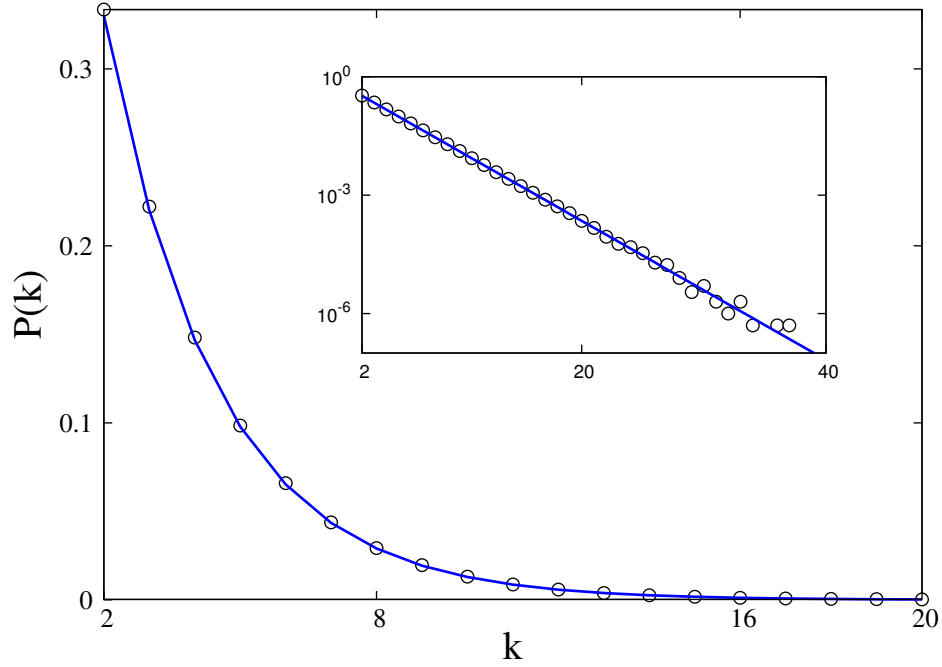


FIGURE 2.2 – les résultats de simulation (cercles) pour $n = 2 \cdot 10^6$, $m = 2$, $m_0 = 3$, et la solution numérique (ligne continue) pour Eq. (2.7). Dans l'insérer, nous tracerons les mêmes données dans l'échelle log-linéaire.

prenons alors $t \gg j$ dans Eq. 2.7 et nous obtenons

$$P(k) \approx \begin{cases} \frac{1}{1+m} \left(\frac{m}{1+m} \right)^{k-m-1}, & \text{for } k > m, \\ \frac{1}{1+m}, & \text{for } k = m. \end{cases} \quad (2.8)$$

Après la normalisation, nous obtenons la distribution des degrés exponentielle $P(k) = Ae^{-A(k-m)}$, avec $A = \log\left(\frac{m+1}{m}\right)$. L'insérer de la figure Fig. 2.2 montre la forme exponentielle de $P(k)$ et l'excellent accord entre les simulations et les résultats théoriques. Ceci confirme clairement que l'attachement préférentiel seul n'est pas suffisant pour produire des réseaux libre-échelle.

2.4.3 Comparaison au niveau microscopique avec le modèle de BA

Nous recherchons les différences entre réseaux hétérogènes et homogènes en comparant notre modèle au modèle BA. La distribution des degrés ne suffit pas à elle seule à caractériser les réseaux. Le calcul d'autres quantités microscopiques peut aider à mieux comprendre leur évolution et leur formation. Il s'avère que le réseau libre-échelle a des nœuds avec un degré important (hubs), tandis que le réseau aléatoire n'a pas de structure apparente. L'évaluation du degré moyen instantané du nœud cible $\langle k_s(t) \rangle$ et de ses fluctuations peut fournir des informations quantitatives sur les nœuds du réseau. En fait, $\langle k_s(t) \rangle$ est en quelque sorte lié au degré moyen instantané des hubs, car lors du choix aléatoire des nœuds, les hubs ont plus de chance d'être sélectionnés.

Dans un premier temps, nous analysons $\langle k_s(t) \rangle$ et $\langle k_s^2(t) \rangle$ dans le réseau BA

$$\langle k_s(t) \rangle = \sum_{t_i=1}^t \Pi(k_i) k_i(t) + m_0 \Pi(k_0) k_0(t), \quad (2.9)$$

où $\Pi(k_i) = \frac{k_i(t)}{2mt + mm_0}$, t_i est le temps à laquelle le nœud i a été créé et $k_0(t)$ est le degré des nœuds initiaux à l'instant t .

$k_i(t)$ est facilement calculé à partir de l'équation d'évolution du degré de champ moyen : $\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = m \Pi(k_i)$, qui donne $k_i(t) = m \left(\frac{2t + m_0}{2t_i + m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$.

En insérant la dernière expression dans l'Eq. 2.9, on obtient

$$\langle k_s(t) \rangle = m \left(\sum_{t_i=1}^t \frac{1}{2t_i + m_0} + 1 \right) \quad (2.10)$$

$$= m \left(\ln(2t + m_0) + \gamma - a + \frac{1}{2(2t + m_0)} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right), \quad (2.11)$$

où γ est la constante d'Euler, et $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{1+m_0}$.

Un bon accord est obtenu comme le montre la figure Fig. 2.3 entre Eq. 2.11 et les résultats de la simulation même pour les premiers instants de l'évolution. $\langle k_s(t) \rangle$ croît indéfiniment

avec le temps et diverge pour un réseau infini ($\infty t \rightarrow \infty$) du fait que, dans les réseaux hétérogènes, les hubs sont plus susceptibles d'être sélectionnés et liés à de nouveaux nœuds. De l'autre côté, le degré moyen du réseau reste fini [131, 132] puisque la majorité des nœuds ont un faible degré et le poids des hubs est faible.

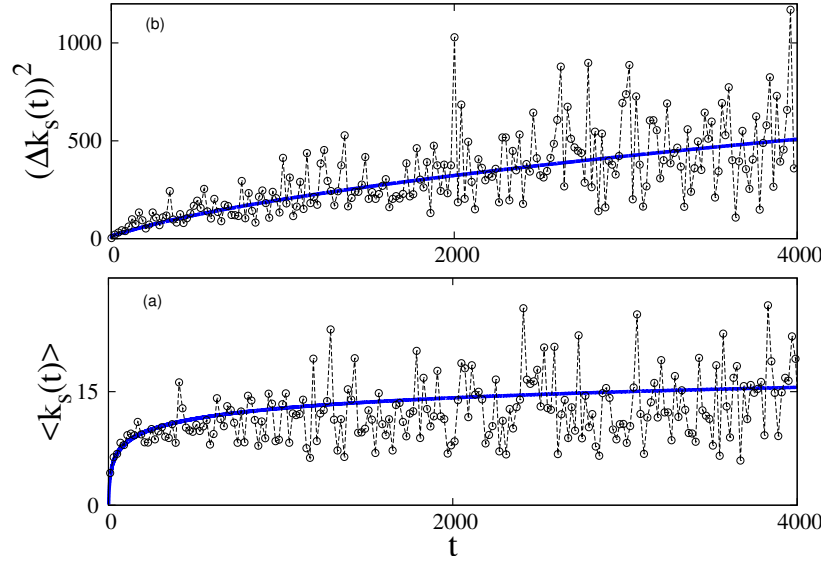


FIGURE 2.3 – (a) Évolution de $\langle k_s(t) \rangle$ dans le modèle BA, la ligne continue représente Eq. 2.11. (b) Évolution des fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$, la ligne continue représente Eq. 2.15. Les cercles joints par des lignes pointillées dans les deux cas sont des données de simulation moyennées sur 20 réalisations pour $m = 2$, $m_0 = 3$.

Le deuxième moment $\langle k_s^2(t) \rangle$ s'écrit

$$\langle k_s^2(t) \rangle = \sum_{t_i=1}^t \Pi(k_i) k_i^2(t) + m_0 \Pi(k_0) k_0^2(t) \quad (2.12)$$

$$\approx m^2 (2t + m_0)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{t_i=1}^t \frac{1}{(2t_i + m_0)^{\frac{3}{2}}} + m_0^{-\frac{1}{2}} \right). \quad (2.13)$$

Pour des grands temps, $\sum_{t_i=1}^t \left(\frac{1}{t_i} \right)^{\frac{3}{2}} = \zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.612$, on obtient

$$\langle k_s^2(t) \rangle \approx m^2 \sqrt{2t} (m_0^{-\frac{1}{2}} + 2.612 - b), \quad (2.14)$$

CHAPITRE 2. LES RÉSEAUX EN CROISSANCES ET L'ATTACHEMENT PRÉFÉRENTIELLE

où $b = 1 + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{1}{(1+m_0)^{\frac{3}{2}}}$.

Fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$ sont donnés par

$$(\Delta k_s(t))^2 \equiv \langle k_s^2(t) \rangle - \langle k_s(t) \rangle^2 \approx m^2 \left[(m_0^{-\frac{1}{2}} + 2.612 - b) \sqrt{2t} - (\ln(2t))^2 \right], \quad (2.15)$$

qui deviennent arbitrairement large lorsque le temps augmente suffisamment.

Les données de simulation selon Eq. 2.15 (voir Fig. 2.3(b)) montrent la tendance croissante des fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$. Cela peut s'expliquer par le fait que le degré maximum dans le réseau $k_{max} \sim \sqrt{t}$ [132] augmente plus vite que $\langle k_s(t) \rangle \sim \ln(t)$ (Eq. 2.11) et la différence entre les deux quantités devient plus grande avec le temps.

Nous passons maintenant à la même analyse dans notre modèle, L'équation d'évolution du champ moyen pour $k_i(t)$ est donnée par

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = m \left(1 - \frac{k_i(t)}{2mt + mm_0} \right) \frac{1}{t + m_0 - 1}, \quad (2.16)$$

La solution a la forme

$$k_i(t) = m \left(\frac{t + m_0 - 1}{2t + m_0} \right)^{\frac{1}{m_0-2}} \left[\left(\frac{t_i + m_0 - 1}{2t_i + m_0} \right)^{-\frac{1}{m_0-2}} - A(t_i) + A(t) \right], \quad (2.17)$$

où $A(t) = \int_1^t \frac{\left(\frac{t' + m_0 - 1}{2t' + m_0} \right)^{-\frac{1}{m_0-2}}}{t' + m_0 - 1} dt'.$

On sait que la valeur moyenne du nœud sélectionné $\langle k_s(t) \rangle$ est sous la forme

$$\langle k_s(t) \rangle = \sum_{t_i=1}^t \Pi(k_i) k_i(t) + m_0 \Pi(k_0) k_0(t), \quad (2.18)$$

en remplaçant Eq. 2.17 dans cette dernière équation on obtenue immédiatement pour tout temps t l'expression de $\langle k_s(t) \rangle$, L'équation résultante est résolue numériquement comme le montre Fig. 2.4.

Pour large temps et en prenant $t \gg m_0$, nous trouvons $A(t) \approx 2^{\frac{1}{m_0-2}} \ln(t)$, $k_i(t) \approx$

$m\left(1 + \ln \frac{t}{t_i}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}
 \langle k_s(t) \rangle &\approx \frac{m}{t} \left(\sum_{t_i=1}^t \ln(t) - \ln(t_i) + 1 \right) \\
 &\approx \frac{m}{t} \left(t \left(\ln(t) + 1 \right) - \left(\sum_{t_i=1}^t \ln(t_i) \right) \right) \\
 &\approx \frac{m}{t} \left(t \left(\ln(t) + 1 \right) - \ln(t!) \right) \\
 &\approx 2m.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Le second moment est obtenu en substituant les expressions correspondantes de $\Pi(k_i)$ et $k_i(t)$ dans Eq. 2.12, nous obtenons pour de large temps

$$\langle k_s^2(t) \rangle \approx \frac{m^2}{t} \left(\sum_{t_i=1}^t \left(\ln\left(\frac{t}{t_i}\right) + 1 \right)^2 \right). \tag{2.20}$$

Faire les approximations $\sum_{t_i=1}^t \ln(t_i) \approx t \ln(t) - t$, et $\sum_{t_i=1}^t \ln(t_i)^2 \approx t \ln(t)^2 - 2t \ln(t) + 2t - 2$, on obtient $\langle k_s^2(t) \rangle \approx 5m^2$. Fluctuations sont

$$(\Delta k_s(t))^2 \equiv \langle k_s^2(t) \rangle - \langle k_s(t) \rangle^2 \approx m^2. \tag{2.21}$$

Cette résultat, ensemble avec $\langle k_s(t) \rangle \approx 2m$, montrent que presque tous les nœuds ont le même degré que celui illustré sur Fig. 2.4. L'homogénéité du réseau peut s'expliquer par le fait que l'attachement préférentiel utilisé ici ne permet pas la formation de hubs, puisqu'il ne permet pas aux riches de s'enrichir, ni d'enrichir les pauvres.

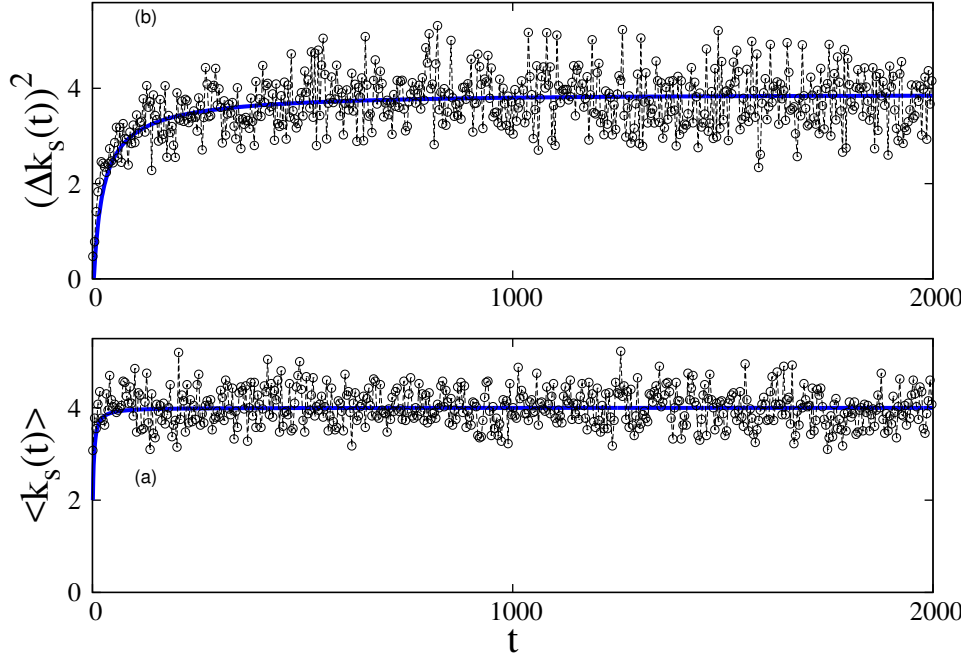


FIGURE 2.4 – (a) Évolution de $\langle k_s(t) \rangle$ dans notre modèle, la ligne continue représente Eq. 2.18. (b) Évolution des fluctuations de $\langle k_s(t) \rangle$, la ligne continue représente la solution numérique de Eq. 2.18 et Eq. 2.20. Les cercles joints par des lignes pointillées dans les deux cas sont des données de simulation moyennées sur 20 réalisations pour $m = 2$, $m_0 = 3$.

2.5 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons commencé de donner quelques idées sur les processus dynamiques, l'attachement préférentielle et le mécanisme "rich get richer" dans les réseaux réels, puis nous avons introduit un simple modèle de réseau complexe avec un critère d'attachement préférentiel et sans effet "rich get richer". Le réseau obtenu est homogène, ce qui démontre le rôle crucial du "rich get richer" dans la topologie du réseau, en outre on a conclu que le fait de donner un traitement préférentiel aux nœuds les moins connectés équivaut à utiliser une probabilité d'attachement aléatoire.

Le Calcul du degré moyen instantané d'un nœud sélectionné et ses fluctuations fournissent plus d'informations que le degré moyen habituel du réseau, en particulier nous avons montré comment le degré moyen de hubs et ses fluctuations divergent avec le temps dans le modèle BA, et restent finis dans notre modèle.

Chapitre 3

Structure des réseaux libre-échelle non corrélé : couches et plus court chemin

L'objectif principal de ce chapitre est vise à prédire quel sera le comportement des systèmes en réseau sur la base des propriétés structurelles mesurées et des règles locales régissant les sommets individuels. Comment, par exemple, la distribution de degrés du réseau affectera-t-elle sa structure et ses propriétés ?

3.1 Introduction

De nombreux réseaux du monde réel qui ont été décrits précédemment, tels que le WWW et les réseaux de collaboration, prennent d'agrandir avec le temps. Par conséquent, il est raisonnable de considérer les graphes de taille croissante et d'étudier la structure de ces réseaux ayant souvent la propriété libre-échelle (voir Section.1.5.2). La communauté scientifique, en s'appuyant sur des idées issues d'une grande variété de disciplines, a fait un excellent départ sur la caractérisation et la modélisation de la structure des réseaux, mais il n 'y pas encore des développements théoriques cruciaux dans ce domaine [56]. Ici

on va envisager ces problèmes en donnant quelques contributions à ces études concernant la structure des réseaux libre-échelle, et en trouvant pour la première fois les expressions explicites des couches, ainsi que, des formules de plus court chemin plus précise de les anciens résultats existent dans la littérature.

3.2 Les réseaux libre-échelle non corrélé

Dans les modèles libre-échelle aléatoires, on suppose généralement qu'il n'y a pas de corrélation entre les degrés des nœuds voisins. C'est-à-dire que la probabilité d'atteindre un nœud en suivant un lien est indépendante du nœud d'où provient le lien. Cependant, dans de nombreux réseaux du monde réel, ce n'est pas le cas. Plusieurs types de corrélations existent, en fonction des propriétés internes des nœuds, les principaux types de corrélations étudiées sont les corrélations degré-degré (voir Section.1.4.4). Mais même que la constrictio de ces réseaux libre-échelle aléatoires se fait au début sans aucun corrélation, cela ne signifie pas que le réseau n'affichera pas des corrélations de degré, c'est-à-dire l'absence des corrélation lors de création des réseaux n'est pas une condition crucial de l'absence de corrélation dans le réseau finale, par exemple la Fig. 3.1 indique que les réseaux libre-échelle aléatoires génèrent des corrélations de degré, allant de l'assortativité à la disassortativité selon la valeur de l'exposant γ^1 , nous observons trois régimes d'échelle distincts :

- i) Régime assortative : $\gamma > 3$
- ii) Régime neutre : $\gamma = 3$
- iii) Régime disassortative : $\gamma < 3$

Produire des corrélations en utilisant un modèle complètement statique est difficile car non seulement le degré d'un nœud, mais aussi sa probabilité de se connecter à chaque voisin doivent être pris en compte. La méthode habituellement utilisée pour générer de tels réseaux consiste à mélanger les liens en utilisant une sorte d'algorithme de type Metropolis² [133].

1. L'exposant γ représente l'exposant de la distribution de degrés, $P(k) \propto k^{-\gamma}$, dans les réseaux libre-échelle

2. Inventé en 1953 par Nicholas Metropolis et ses collaborateurs du laboratoire de Los Alamos, l'algorithme de Metropolis était d'abord destiné à faire calculer par des ordinateurs les équations

Cependant, la négligence de ces corrélations ne s'empêche jamais de trouver des résultats importants qui nous nous aidons à bien modéliser ces réseaux réels et à mieux comprendre leurs structure.

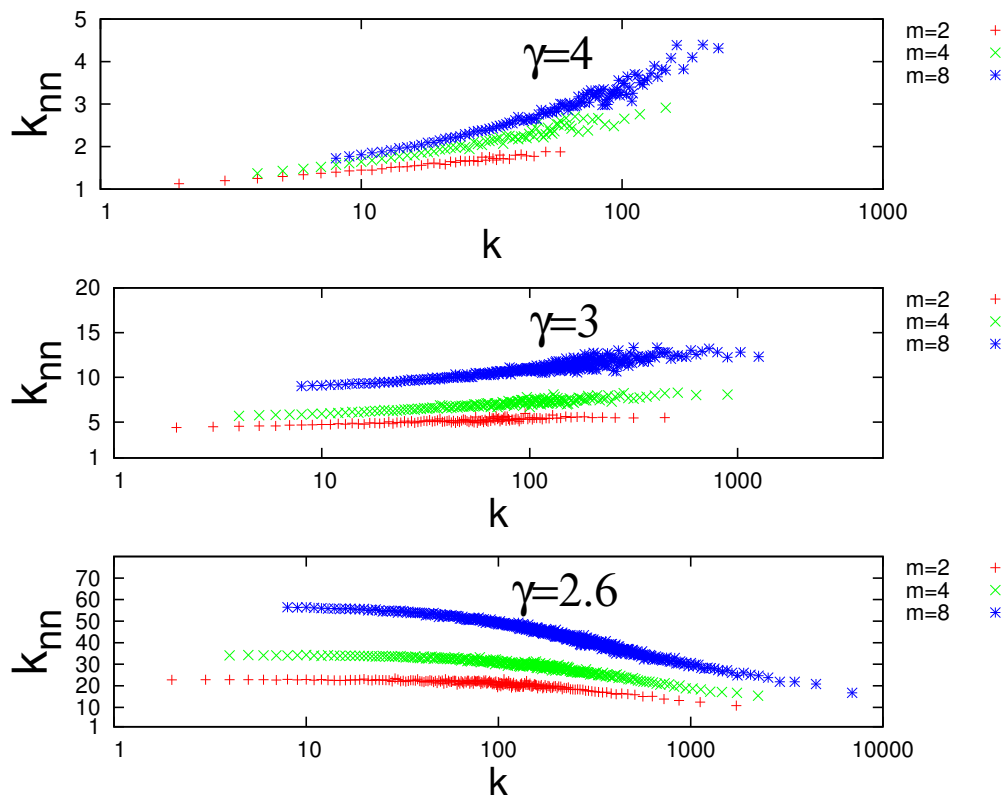


FIGURE 3.1 – Les corrélations des degrés dans le réseau aléatoire libre-échelle pour différents valeurs de m et de γ . Le nombre de nœuds est $n = 10^4$ et le nombre de réalisations pour chaque simulations est 50.

d'états de mélanges de molécules en interactions. Il s'est depuis lors révélé bien adapté pour résoudre de nombreux problèmes de mécanique statistique et de chimie. L'outil principal de l'algorithme est une chaîne de Markov : on tire au hasard une boule et on déplace son centre d'une distance d , le mouvement est accepté si la nouvelle configuration des boules reste sans recouvrement.

3.3 Les anciens études sur les couches et le plus court chemin

3.3.1 Les couches

Newman [134] a calculé l'expression des couches, c'est-à-dire le nombre moyen de nœuds, n_ℓ , à distance ℓ depuis un nœud arbitraire pour un réseau aléatoire, et il a donné l'expression : $n_\ell = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{\ell-1} n_1$, où n_1 et n_2 sont le nombre moyen de premier et second voisins. Cela signifie que n_ℓ augmente ou diminue avec ℓ selon que n_2 est supérieur ou inférieur à n_1 . Cohen et al [135, 136] ont considéré un réseau sans échelle spécifique et ont étudié les couches entourant le nœud le plus connecté, ils ont obtenu une relation de récurrence pour n_ℓ . Ces calculs semblent bien cadrer avec les données Internet réelles dans le cas particulier de $m = 1$, où m est le degré minimum dans le réseau. Deux régimes sont observés pour n_ℓ : le premier est caractérisé par une croissance rapide, et le second se descend de façon exponentielle.

Ces deux études ne sont pas satisfaisant, car le premier expression de Newman est une fonction monotone, soit croissant ou décroissant, ce qui 'est fausse conceptuellement et empiriquement [132], et dans le deuxième résultat, Cohen et al. ne réussissent pas à trouver une expression explicite, mais plutôt une suite de récurrence sans solution, ainsi que leurs expressions sont cadrer avec les données Internet et ne représentent aucun généralité.

3.3.2 Plus court chemin

Le plus court chemin (PCC) peut être le concept le plus intrigant dans les réseaux complexes et la théorie des graphes, principalement après le célèbre expérience de Milgram [40]. Dans cette expérience, Milgram a clairement démontré le phénomène du petit monde dans les réseaux sociaux, ce qui signifie que deux personnes dans le monde sont en moyenne séparées par de petites connexions intermédiaires.

On peut citer les anciens formules de PCC en relation avec la valeur de l'exposant γ comme le suit : Pour $2 < \gamma < 3$ on dit que le réseau est ultra-petit $\langle \ell \rangle \sim \ln \ln(n)$ [14, 15, 137–140],

pour $\gamma = 3$ on dit que le réseau est petit-monde $\langle \ell \rangle \sim \frac{\ln(n)}{\ln \ln(n)}$ [138, 141–144] et pour $\gamma > 3$ le réseau est aussi petit-monde $\langle \ell \rangle \sim \ln(n)$ [138, 141–144].

3.4 Structure des couches dans les réseaux libre-échelle non corrélés

3.4.1 L'étude théorique

La couche dans un réseau complexe est définie comme l'ensemble des nœuds à la même distance d'un nœud arbitraire choisi. Dans un réseau libre-échelle, chaque nœud est lié à d'autres nœuds k avec la probabilité $P(k) = Ck^{-\gamma}$, $k = m, m+1, \dots, K$. Où $C = (\gamma - 1)m^{\gamma-1}$ est la constante de normalisation, m et K sont les seuils inférieur et supérieur de la distribution. $K = mn^{\frac{1}{\gamma-1}}$, avec n est le nombre total de nœuds.

Nous construisons un réseau libre-échelle en choisissant aléatoirement un nœud de degré moyen $\langle k \rangle$, et dans chaque couche suivante, nous mettons le degré le plus élevé suivant jusqu'à ce que la couche soit pleine (Fig. 3.2).

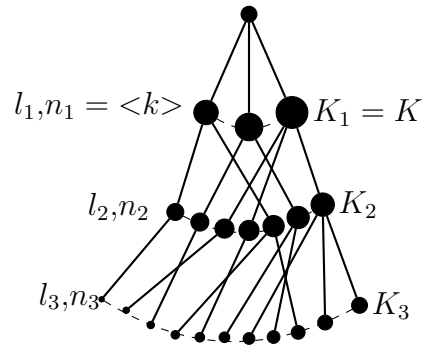


FIGURE 3.2 – Illustration du réseau construit. La taille des cercles pleins (nœuds) est le degré-dépend. Le degré maximum de couche ℓ est K_ℓ .

Évidemment, la première couche contiendra les premiers voisins $\langle k \rangle$ du nœud de départ, alors $n_1 = \langle k \rangle$. Cela ne représente pas un réseau particulier, mais c'est juste une description

idéalisée de tout réseau sans échelle.

Pour les grands réseaux non corrélés, la structure arborescente peut être supposée et les cycles dans la même couche sont négligés [14, 144]. Par la suite, la probabilité p_ℓ qu'un nœud de la couche n_ℓ est lié à un autre nœud n'appartenant pas aux premiers ℓ couches est $p_\ell = \frac{\kappa_\ell - 1}{n}$, où κ_ℓ est le degré moyen des nœuds appartient à la couche n_ℓ et le -1 est dû au lien de la couche précédente.

La probabilité que des nœuds parmi $n - n_1 - 1$ ne soit lié à aucun nœud dans $\ell = 1$ est $(1 - p_1)^{n_1}$, alors la probabilité que ces nœuds soient liés aux nœuds dans $\ell = 1$ est $1 - (1 - p_1)^{n_1}$. Le nombre de nœuds dans $\ell = 2$ est alors donné par $n_2 = (1 - (1 - p_1)^{n_1})(n - n_1 - 1)$. La généralisation pour n_ℓ est simple, on obtient :

$$n_\ell = (1 - (1 - p_{\ell-1})^{n_{\ell-1}})(n - \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j - 1), \quad (3.1)$$

lorsque n est large $p_\ell \ll 1 \implies (1 - p_{\ell-1})^{n_{\ell-1}} \simeq e^{-p_{\ell-1}n_{\ell-1}}$. Eq. 3.1 peut être facilement manipulé pour obtenir :

$$n_\ell = \begin{cases} \langle k \rangle & \text{si } \ell = 1 \\ (n - 1 - n_1)(e^{-\sum_{j=1}^{\ell-2} p_j n_j} - e^{-\sum_{j=1}^{\ell-1} p_j n_j}) & \text{si } \ell \geq 2. \end{cases} \quad (3.2)$$

L'équation ci-dessus peut être simplifiée en développant les sommes en exponentielles. p_ℓ est κ_ℓ -dépendante, qui dépend à son tour de γ et du degré maximal dans la couche ℓ , K_ℓ . D'abord on donne l'expression de κ_ℓ quand $K_\ell \gg m$, et ensuite on développe la somme sur n_j .

$$\kappa_\ell = \frac{\langle k_\ell^2 \rangle}{\langle k_\ell \rangle} = \begin{cases} \left(\frac{\gamma-2}{\gamma-3}\right)m & \text{si } \gamma > 3 \\ m(\log(K_\ell) - \log(m)) & \text{si } \gamma = 3 \\ \left(\frac{\gamma-2}{3-\gamma}\right)m^{\gamma-2}K_\ell^{3-\gamma} & \text{si } 2 < \gamma < 3 \\ \frac{K_\ell - m}{\log(K_\ell) - \log(m)} & \text{si } \gamma = 2. \end{cases} \quad (3.3)$$

CHAPITRE 3. STRUCTURE DES RÉSEAUX LIBRE-ÉCHELLE NON CORRÉLÉ : COUCHES ET PLUS COURT CHEMIN

Lorsque $\gamma = 2$, le degré maximum K_1 est de l'ordre du nombre total de nœuds, c'est-à-dire que presque tous les nœuds sont connectés au nœud de degré maximum. Le réseau peut contenir un maximum de deux couches, avec $n_1 = \langle k \rangle$ et $n_2 = n - \langle k \rangle$.

Quand $2 < \gamma < 3$, le réseau est encore très hétérogène. κ_ℓ est couche-dépendent, il dépend du degré maximum K_ℓ de la couche ℓ (Eq. 3.3). L'étape suivante de nos calculs consiste à relier κ_ℓ à κ_1 . Le nombre de nœuds entre le premier et le $(\ell - 1)^{\text{ème}}$ couches est donné par :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j &= n \int_{K_\ell}^{K_1} P(k) dk \\ &= nm^{\gamma-1} (K_\ell^{1-\gamma} - K_1^{1-\gamma}) \simeq nm^{\gamma-1} K_\ell^{1-\gamma}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où nous avons utilisé $K_1 \gg K_\ell$ pour n assez grand. Dans cette cas où $2 < \gamma < 3$, $\kappa_\ell \gg 1$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j &= \langle k \rangle + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 - 1) + \dots + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 - 1) \dots (\kappa_{\ell-1} - 2) \\ &\approx \langle k \rangle \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{\ell-2}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

on en déduit $K_\ell = \left(\frac{\langle k \rangle \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{\ell-2}}{nm^{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$.

Le degré moyen des voisins à distance ℓ peut maintenant être exprimé comme suit : $\kappa_\ell = \frac{\gamma-2}{3-\gamma} m \left(\frac{n}{\langle k \rangle \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{\ell-2}} \right)^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}}$, ce qui conduit à la relation de récurrence $\kappa_\ell = \kappa_{\ell-1} \left(\kappa_{\ell-2} \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}}$.

Quand γ est dans $]2, 3[$ nous avons généralement $\kappa_{\ell-2} \gg \kappa_{\ell-1}$ mais depuis $\left| \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \right| < 1$, on

considère que $\left(\kappa_{\ell-2} \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}} \approx \left(\kappa_{\ell-1} \right)^{\frac{\gamma-3}{\gamma-1}}$. Enfin, on obtient $\kappa_\ell = \kappa_1 \left(\frac{2\gamma-4}{\gamma-1} \right)^{\ell-1}$.

CHAPITRE 3. STRUCTURE DES RÉSEAUX LIBRE-ÉCHELLE NON CORRÉLÉ : COUCHES ET PLUS COURT CHEMIN

Nous sommes maintenant prêts de calculer la somme dans l'Eq. 3.2 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^l p_j n_j &= \sum_{j=1}^l \frac{\kappa_j}{n} \left(\langle k \rangle \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{j-1} \right) \\
 &\approx \frac{\kappa_\ell}{n} \left(\langle k \rangle \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_{\ell-1} \right) \\
 &\approx \frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{1+\beta+\beta^2+\dots+\beta^{\ell-1}} \\
 &\approx \frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell}{1-\beta}}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

où $\beta = \frac{2\gamma-4}{\gamma-1}$. En prenant $n - n_1 - 1 \approx n$, Eq. 3.2 peut être écrit pour $2 < \gamma < 3$ comme :

$$n_\ell = \begin{cases} \langle k \rangle & \text{if } \ell = 1 \\ n \left(e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^{\ell-2}}{1-\beta}}} - e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^{\ell-1}}{1-\beta}}} \right) & \text{if } \ell \geq 2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Quand $\gamma > 3$, les hubs ne sont pas grands, et les propriétés caractéristiques du réseau sont similaires à celles des réseaux aléatoires ER. κ_ℓ est couche-indépendant comme indiqué dans Eq. 3.3. Alors $\sum_{j=1}^{\ell-1} p_j n_j = \frac{\kappa'}{n} \sum_{j=1}^{\ell-1} n_j$, où $\kappa' = \kappa - 1$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{\ell} n_j &= \langle k \rangle + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 - 1) + \dots + \langle k \rangle (\kappa_1 - 1) (\kappa_2 - 1) \dots (\kappa_{\ell-1} - 1) \\
 &= \langle k \rangle + \langle k \rangle \kappa' + \langle k \rangle \kappa'^2 + \dots + \langle k \rangle \kappa'^{\ell-1} = \langle k \rangle \frac{1 - \kappa'^\ell}{1 - \kappa'}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Eq. 3.2 peut être écrit pour $\gamma > 3$ comme :

$$n_\ell = \begin{cases} \langle k \rangle & \text{if } \ell = 1 \\ n \left(e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa'^{\frac{1-\kappa'^{\ell-2}}{1-\kappa'}}} - e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa'^{\frac{1-\kappa'^{\ell-1}}{1-\kappa'}}} \right) & \text{if } \ell \geq 2. \end{cases} \tag{3.9}$$

Le cas $\gamma = 3$ est le plus problématique. C'est le point où la structure du réseau change radicalement, car on voit la présence de multiples grands hubs et un second moment $\langle k^2 \rangle$ diverge pour $\gamma < 3$, par contre une absence des hubs importants et un $\langle k^2 \rangle$ fini pour $\gamma > 3$.

Dans notre approche, le problème se pose lors du calcul de $\sum_{j=1}^l p_j n_j$. Néanmoins, à ce point de transition ($\gamma = 3$), certaines propriétés du réseau se comportent presque comme celles correspondant à $\gamma > 3$. Principalement, le PCC est mise à l'échelle avec n comme $\frac{\log(n)}{\log(\log(n))}$ [145], et $\langle k^2 \rangle$ reste fini. Ensuite, nous utilisons Eq. 3.9 pour calculer n_ℓ dans ce cas.

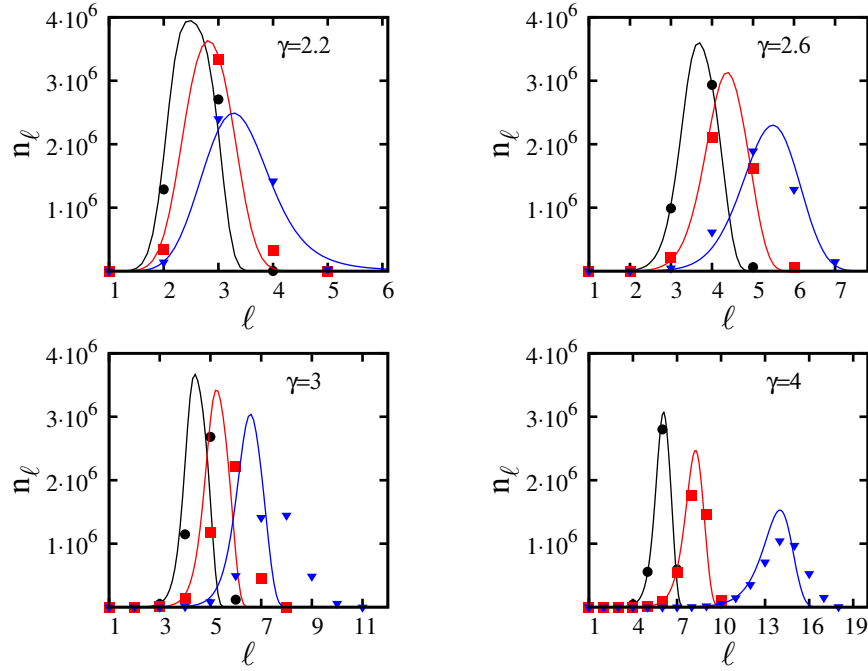


FIGURE 3.3 – Nombre de nœuds dans chaque couche pour différentes valeurs de γ . Les lignes pleines sont Eq. 3.7 et Eq. 3.9. Les symboles sont des simulations d'un réseau de taille $n = 4 \times 10^6$ et une moyenne de 200 réalisation pour chaque point. Les couleurs noir, rouge et bleu se réfèrent respectivement à $m = 8, 4$ et 2 .

Dans la Fig. 3.3, nous représentons n_ℓ en fonction de ℓ pour différentes valeurs de γ et m . En général, un excellent accord entre la théorie et les simulations est observé. Pour $\gamma = 3$, l'accord est moins bonne, principalement due au fait que le réseau est encore hétérogène et que les hubs sont encore présents, alors que nous avons supposé l'homogénéité du réseau pour calculer $\sum_{j=1}^l p_j n_j$ (Eq. 3.8).

On observe peu de différence en n_ℓ entre la théorie et les simulations lorsque $\gamma = 4$ et $m = 2$. Ceci est causé par une augmentation relative de la proportion de cycles dans les

mêmes couches. Ainsi, la structure arborescente parfaite, qui est l'hypothèse principale dans le calcul de n_ℓ , n'est plus vraie. La figure Fig. 3.4 montre clairement l'augmentation relative des cycles quand m est abaissé, et γ est augmenté. Nos résultats analytiques pour n_ℓ sont

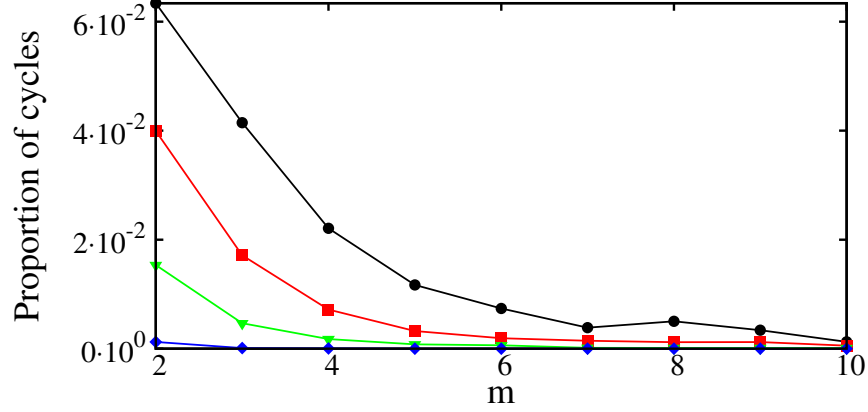


FIGURE 3.4 – Proportion de cycles dans les couches par rapport à m . De haut en bas, γ est respectivement 4, 3, 2.6 et 2.2. Nombre de nœuds $n = 4.10^6$, le nombre de points pour chaque simulation est 200.

également comparés aux réseaux du monde réel. Nous observons à partir de la figure Fig. 3.3 que n_ℓ augmente et diminue de différentes manières. Les manipulations de Eq. 3.7 et Eq. 3.9 sont nécessaires pour extraire une information détaillée sur les queues de la distribution des nœuds.

Pour n grand, Eq. 3.7 pour $\ell > 1$ peut être approché comme :

$$\begin{aligned}
 n_\ell &= n \left(e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell-2}{1-\beta}}} - e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell-1}{1-\beta}}} \right) \\
 &\approx -n \frac{\partial \left(e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell-3}{1-\beta}}} \right)}{\partial \ell} \\
 &\approx -\frac{\langle k \rangle \log(\kappa_1) \log(\beta)}{1-\beta} \beta^{\ell-\frac{3}{2}} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell-3}{1-\beta}} e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta^\ell-3}{1-\beta}}}, \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

où $\ell - \frac{3}{2}$ est utilisé à la place de $\ell - 1$ pour améliorer la différenciation avec la règle du point central.

Quand $\kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}} \ll \frac{n}{\langle k \rangle}$, $e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}}} \approx 1$, le terme dominant dans l'équation Eq. 3.10 est $\kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}}$, n_ℓ augmente ensuite suite à une loi de puissance. Après avoir atteint son maximum à $\kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}} = \frac{n}{\langle k \rangle}$, n_ℓ diminue exponentiellement comme $e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}}}$ quand $\kappa_1^{\frac{1-\beta\ell-\frac{3}{2}}{1-\beta}} \gg \frac{n}{\langle k \rangle}$.

De la même manière, Eq. 3.9 peut être écrit comme $n_\ell \approx \langle k \rangle \log(\kappa') \kappa'^{\ell-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\langle k \rangle}{n} \kappa'^{\ell-\frac{3}{2}}}$, conduisant à un comportement de loi de puissance pour $\kappa'^{\ell-\frac{3}{2}} \ll \frac{n}{\langle k \rangle}$, et à une décroissance exponentielle pour $\kappa'^{\ell-\frac{3}{2}} \gg \frac{n}{\langle k \rangle}$.

3.4.2 Comparaison avec les données réels

La Fig. 3.5 représente une comparaison entre nos équations et quelques réseaux réels, on a choisi des réseaux réels en rend compte les différents gammes de γ , de $\gamma = 2.13$ à $\gamma = 4.831$. Le réseau Digg est un réseau de réponse du site d'informations sociales, chaque nœud du réseau est un utilisateur du site Web, et chaque arête dirigée indique qu'un utilisateur a répondu à un autre utilisateur et dans le réseau Gnutella les nœuds représentent des hôtes de Gnutella, et les bords dirigés représentent des connexions entre eux. En générale nos équations sont très en accord avec ces réseaux réels, ce que donne une importance supplémentaires de notre travail concernant ce problème de couches dans les réseaux libre-échelle.

3.5 Plus court chemin dans les réseaux libre-échelle non corrélés

3.5.1 L'étude théorique

Nous déduisons le PCC dans les réseaux libre-échelle non corrélés à partir de la distribution des nœuds, n_ℓ . En fait, la forme quasi-symétrique de n_ℓ dans la figure Fig. 3.3 suggère que

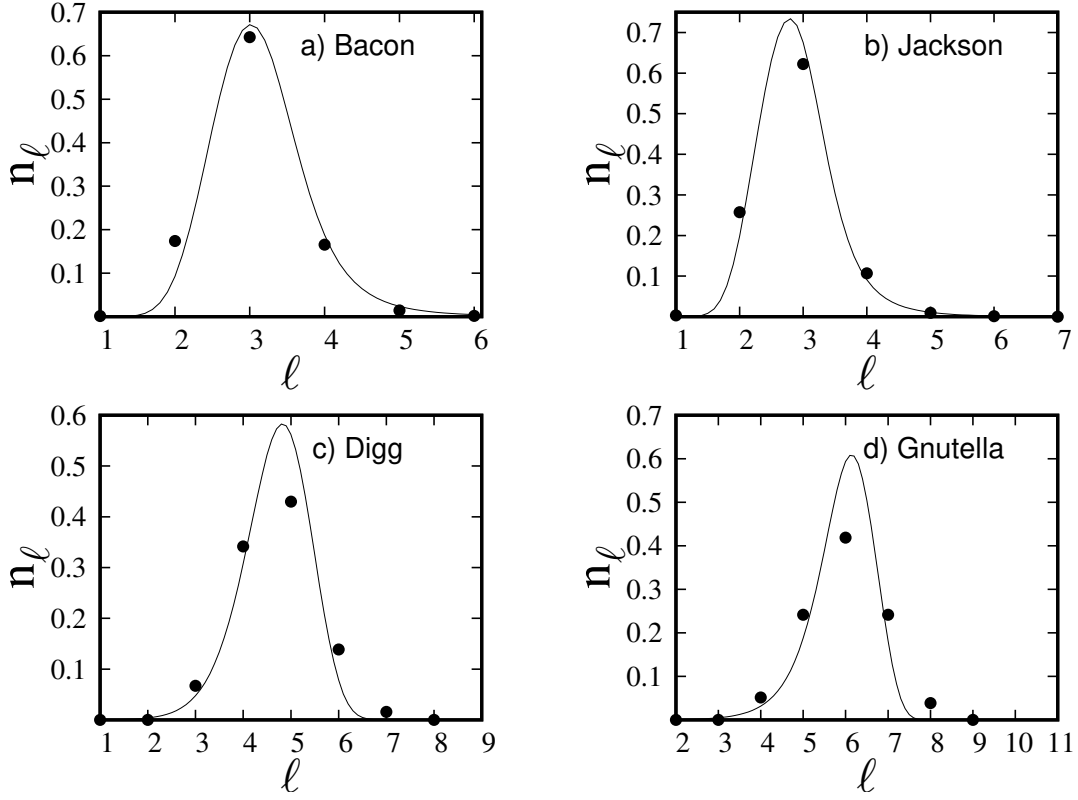


FIGURE 3.5 – Comparaison entre les données empiriques (cercle) de quelques réseaux réels et nos équations (ligne continue) : **a)** Les cercles représentent les couches du réseau d’acteurs Hollywoodien de 2283910 acteurs et de $\gamma = 2.13$ lorsque Kevin Bacon est au centre de réseau et la ligne continue représente l’Eq. 3.7 avec les mêmes valeurs γ et n de réseau Hollywoodien, **b)** Le même réseau Hollywoodien mais lorsque Samuel L.Jackson est au centre de réseau, **c)** Les cercles représentent les couches du réseau Digg, la ligne continue représente Eq. 3.7 avec le même exposant γ du réseau sociale Digg ($\gamma = 2.691$) et même sa taille $n = 30398$, **d)** Les cercles représentent les couches du réseau d’hôtes Gnutella, la ligne continue représente Eq. 3.9 avec le même exposant γ de ce réseau d’hôtes Gnutella ($\gamma = 4.831$) et même sa taille $n = 62586$. Tous les résultats empiriques ont été extraites des sites : ”<http://oracleofbacon.org/center.php>” et ”<http://konect.uni-koblenz.de/networks/>”.

PCC correspond à la distance à laquelle n_ℓ est maximum.

Nous commençons par le cas le plus simple $\gamma = 2$. Comme déjà mentionné, il y a un maximum de deux couches dans le réseau, le PCC peut être écrit comme :

$$\langle \ell \rangle = \frac{\langle k \rangle + 2(n - \langle k \rangle)}{n}, \quad (3.11)$$

qui tend à 2 pour un grand n . Cela signifie que presque tous les nœuds sont connectés au moyen du nœud de degré maximal.

Quand $2 < \gamma < 3$, aucune solution pour $\frac{\partial n_\ell}{\partial \ell} = 0$ ne peut être trouvée directement à partir de l'Eq. 3.7, à la place nous utilisons l'approximation donnée dans Eq. 3.10, où n_ℓ est maximum quand $\kappa_1^{\frac{1-\beta\langle\ell\rangle-\frac{3}{2}}{1-\beta}} = \frac{n}{\langle k \rangle}$. Après avoir remplacé κ_1 et K_1 par leurs expressions correspondantes, on obtient :

$$\langle \ell \rangle = \frac{\log\left(1 - \frac{\log(n) - \log(\langle k \rangle)}{\log(n) + \frac{\gamma-1}{3-\gamma} \log(\frac{\gamma-2}{3-\gamma} m)}\right)}{\log\left(\frac{2\gamma-4}{\gamma-1}\right)} + \frac{3}{2}. \quad (3.12)$$

pour n grand, $\langle \ell \rangle \approx -\frac{\log(\log(n))}{\log(\beta)}$. Cette forme d'échelle est derrière la nomenclature mondiale ultra-petite [14], et est largement acceptée pour cette gamme de γ [15, 137–140].

Pour $\gamma \geq 3$, l'PCC peut être déduit de Eq. 3.9 en résolvant $\frac{\partial n_\ell}{\partial \ell} = 0$. Cela donne :

$$\langle \ell \rangle = \frac{\log(n)}{\log(\kappa')} + \frac{\log(\log(\kappa')) - \log(\langle k \rangle)}{\log(\kappa')} + 1. \quad (3.13)$$

Si $\gamma > 3$, κ est constant (Eq. 3.3). Pour un grand n , $\langle \ell \rangle \approx \frac{\log(n)}{\log(\kappa')}$, qui est la forme d'échelle rapportée dans de nombreux autres travaux [138, 141–144], et connu comme le comportement du petit monde.

Quand $\gamma = 3$, κ dépend de K , qui dépend à son tour de n . Prenant $\kappa = m(\log(K) - \log(m))$ et $K = mn^{\frac{1}{\gamma-1}}$, nous trouvons pour grand n , $\langle \ell \rangle \approx \frac{\log(n)}{\log(\log(n))}$. Ce résultat est en accord avec les travaux précédents [14, 138, 142, 146], et confirme le cas particulier de $\gamma = 3$. En effet, la présence de hubs rend les distances entre nœuds plus petites que celles où les hubs sont absents ($\gamma > 3$), en même temps les hubs ne sont pas suffisamment grands pour faire des distances ultra-petites comme $2 < \gamma < 3$.

Comme nous avons signalé dans la Section. 3.3.2, les travaux importants [14, 15] dans ce sujet donnent seulement l'allure de PCC pour large taille, n . L'exception est la contribution de Fronczak et al. [142] où ils ont trouvé les expressions de PCC basant sur les paramètres du réseau, leurs équation prédire que le PCC tend vers une valeur constante lorsque n tend

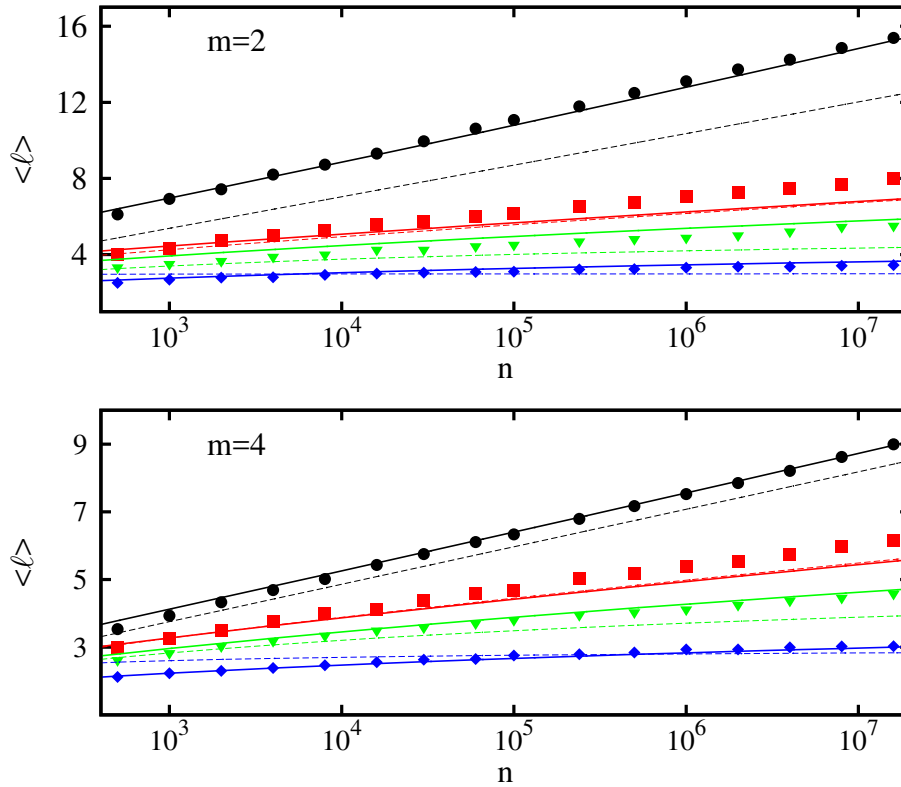


FIGURE 3.6 – La longueur moyenne du trajet en fonction du nombre de nœuds. Les valeurs de γ de haut en bas sont respectivement 4, 3, 2.6 et 2.2. Les lignes pleines correspondent à l'équation Eq. 3.12 et à l'équation Eq. 3.13. Chaque simulation est moyennée à plus de 200.

vers l'infini pour $2 < \gamma < 3$, mais celle-ci tend vers une valeur constante et cela n'est pas vrai selon les simulations numériques (voir Fig. 3.6) et tous autres résultats existe dans la littérature [14, 15, 137–140]. De la même Fig. 3.6 on voit que nos résultats sont parfaitement en accord avec les simulations pour $\gamma \neq 3$, pour $\gamma = 3$ nos résultats sont très proches et possèdent la même allure des simulations, ainsi ils sont très confondus avec ceux de [142].

3.6 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail certains aspects fondamentaux des réseaux libre-échelle non corrélés. Avec des étapes et des hypothèses simples, nous avons obtenu des expressions explicites, en fonction de l'exposant de degré γ , pour le nombre de nœuds à

une distance donnée d'un nœud arbitraire, n_ℓ , ainsi qu'une description précise de sa forme de la distribution. En plus de détail, nous avons montré que n_ℓ augmente en tant que loi de puissance pour les quelques premières couches et après avoir atteint un maximum, puis il diminue exponentiellement dans les dernières couches. Profitant de la forme de la distribution n_ℓ , nous avons pu déduire l'expression explicite de PCC. Les expressions obtenues reproduisent les formes de mise à l'échelle connues pour différentes plages de γ . Autrement dit, le monde ultra-petit pour $2 < \gamma < 3$, et le petit monde pour $\gamma \geq 3$. Nos résultats théoriques concordent très bien avec les simulations, sauf dans le cas de $\gamma = 3$, où nous avons observé la même forme, comme pour les autres valeurs de γ , dans les queues de n_ℓ , mais avec un manifeste différence dans la position du maximum. Cette différence n'affecte pas la forme de mise à l'échelle de l'PCC pour cette valeur de γ .

Chapitre 4

Émergence de la propriété petit-monde dans le modèle petit-monde

L'émergence de la propriété petit-monde dans le modèle Newman-Watts est encore un phénomène pas bien compris, parmi ses problématiques on cite : à partir de quel point ce réseau change sa nature grand-monde vers petit-monde ? Si ce réseau se sature par les raccourcis ajoutés, comment et quand la saturation se réalise ? Est-ce-qu'il y a vraiment une transition de phase ou non ? Etc. Par des études théoriques confirmant par une intense nombre de simulations, on abordera quelques questions de ce genre.

4.1 Introduction

Le modèle de Watts-Storogatz (WS) connaît une attention énorme depuis son apparition en 1998 [92], il a deux propriétés très intéressantes : la présence d'un coefficient de Clustering élevé et d'un petit PCC. Ces deux propriétés se trouvent dans la plupart des réseaux réels [132, 147], en plus ce modèle est très simple et combine la régularité avec l'aléatoire. En 1999 Newman et Watts [148] ont réalisé une petite modification sur le modèle WS,

dont il y a n nœuds qui se distribuent dans un réseau régulier unidimensionnelle sous forme d'un cercle où chaque nœud fait $2k$ liens avec ses plus proches voisins (voir Fig.4.1), le nombre de nœuds reste fixe puis chaque lien se reconnecte par une probabilité ϕ entre deux autres nœuds choisis aléatoirement sans supprimer aucuns liens, les liens ajoutés sont nommé raccourcis, en moyenne il y a $x = nk\phi$ raccourcis. Ce modèle aussi connaît une grande attention car il a les mêmes propriétés du modèle WS, sauf pour $k = 1$ où il y a une certaine différence¹, au même temps il est moins difficile dans l'étude.

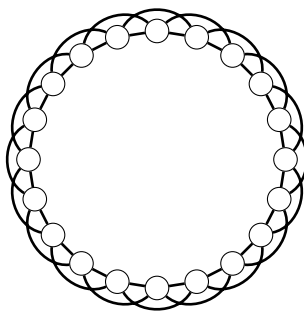


FIGURE 4.1 – Un réseau petit-monde WS pour $n = 20$, $k = 2$ sans raccourcis.

4.2 La théorie de groupe de renormalisation et transition de phase

Dans un système physique proche d'une transition de phase, les méthodes d'approximations les plus courantes s'appuyant à négliger les corrélations entre un grand nombre de particules ou plutôt entre un grand nombre de degrés de liberté, ces approximations sont valables lorsque la longueur de corrélation est petite. En pratique, on sait traiter de façon simple les corrélations à deux particules. Le problème à trois particules est déjà beaucoup plus difficile. Ce type de méthodes est voué à l'échec quand la longueur de corrélation est grande.

D'où l'idée de réduction du nombre de degrés de liberté, on cherche à établir une

1. Le cas $k = 1$ ne nous intériorisons jamais dans ce modèle, car dans ce cas le coefficient de Clustering est zéro, alors on prend toujours $k > 1$.

correspondance entre un problème de longueur de corrélation donnée et un problème de longueur de corrélation plus petite. La théorie de groupe de renormalisation établit ainsi des correspondances entre systèmes de longueurs de corrélation différentes. Considérons par exemple un système de moments magnétique en interaction au voisinage du point critique de la transition ferromagnétique. Afin de réduire le nombre élevé de degrés de liberté, au lieu de considérer tous les moments magnétiques atomiques individuellement, on les regroupe en blocs comprenant plusieurs moments que l'on considère comme nouvelles entités de base, avec un nouveau moment (moment de bloc). On calcule alors les interactions entre ces nouvelles entités, ce qui suppose que l'on a su moyenner les fluctuations des variables internes à l'intérieur des blocs. On change ensuite d'échelle de façon que le nouveau réseau devienne le même que le précédent, enfin, on renormalise judicieusement la taille des nouveaux moments magnétiques. Une série d'opérations fait passer un système à un autre avec réduction de la longueur de corrélation dans un rapport donné. Dans cette transformation, les degrés de liberté du système sont grignotés car on a moyenné les fluctuations des variations internes des blocs. Autrement dit on a remplacé l'interaction initiale entre les anciens degrés de liberté par une nouvelle interaction effective entre les degrés de liberté réduits [149, 150].

4.3 Plus court chemin et transition de phase dans le modèle NW : ancienne contribution et la notre

4.3.1 Ancienne contribution

Malgré tous les efforts qu'ont été faits, il n'existe pas encore un calcul exact des couches² et du PCC dans le modèle de NW. En 2000 Newman, Moore et Watts [94] ont trouvé pour la première fois l'expression de PCC dans ce modèle sous la forme universelle $\ell = \frac{n}{k}f(x)$

2. C'est-à-dire le nombre moyen de nœuds, n_ℓ , à distance ℓ depuis un nœud arbitraire

avec f est la fonction universelle³ :

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x}} \tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right), \quad (4.1)$$

selon NW cette expression est bonne pour le cas de petit nombre des raccourcis et pour les réseaux larges, avec la remarque que au voisinage de $\phi = 1$ on observe une déviation entre cette solution analytique et les simulations numériques (voir Fig. 4.5). D'un autre côté, le comportement de la transition entre réseau-régulier et réseau-aléatoire ou plutôt entre grand-monde et petit-monde est aussi une part très importante dans l'étude de ce modèle, Barthélémy et Amaral [93] ont trouvé que l'apparition du comportement du petit-monde n'est pas une transition de phase mais un phénomène de croisement, leur méthode tend à déterminer la taille de réseau $n^*(\phi)$ pour lequel : si $n < n^*$, ℓ croît linéairement avec n , et si $n > n^*$, ℓ croît comme $\ln(n)$. Par des analyses numériques ils ont trouvé que $n^*(\phi) \sim \phi^{-\tau}$ avec $\tau \approx \frac{2}{3}$. Ces résultats sont rapidement critiqués par Barrat [151] car il a démontré que τ ne peut pas être inférieur à 1, en plus il a trouvé que $\tau = 1$ en utilisant la même approche de Barthélémy et Amaral mais avec des tailles de système plus grand. Newman et Watts [6, 152] confirment cette valeur de l'exposant critique unique $\tau = 1$ en utilisant une transformation de groupe de renormalisation et ils ont dit aussi que la transition vers le petit-monde se fait d'une façon continue, c'est-à-dire par une transition de phase de deuxième ordre où le point de transition de phase se réalise lorsque la densité des raccourcis tend vers zéro ($\phi = 0$). Mais M. Argollo et al. [153] ont obtenu que la transition de phase est de première ordre au point $\phi = 0$, à cause d'une discontinuité d'un certain paramètre d'ordre dans ce point. On en déduit qu'il y a encore un débat à propos du type de transition de phase dans ce modèle.

4.3.2 Notre contribution

Notre travail ici se consacre, au début, à faire une étude sur les couches dans le modèle NW en utilisant la transformation de groupe de renormalisation en espace réel (GR), (voir

3. Cette fonction universelle a été déjà démontré par Newman et Watts [148], mais sans donner aucune expression théorique, leur étude est basée sur les simulations numériques.

Fig. 4.3). Une couche n_d est le nombre de nœuds ayant la distance d autour d'un nœud arbitraire. Sachant que ce modèle est un mélange entre la régularité et l'aléatoire, nous proposons de séparer les couches selon deux types, couches-régulières n_d^r qui représentent les nœuds restant dans leurs distances régulières initiales, d , sans aucune influence par les raccourcis ajoutés et les couches-aléatoires n_d^{al} qui représentent les nœuds changeant leurs distances régulières vers une autre plus proche de nœud arbitraire, d , à cause des raccourcis (voir Fig. 4.2). En manipulant les expressions de ces couches, on trouvera que la somme des couches aléatoires S_{al} et la somme des couches régulières S_r , pouvant également s'écrire sous forme d'une fonction universelle comme le PCC, $S_{al} = nh(x)$ et $S_r = n(1 - h(x))$ avec $h(x) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \text{erf}(\sqrt{x})$. Sachant que la fonction $h(x)$ représente la fraction des nœuds appartient aux couches-aléatoires, on peut la considérer comme un paramètre d'ordre, car il varie entre 0 et 1 selon le degré de l'ordre et de désordre dans le réseau. A partir de l'expression de $h(x)$ on déduit l'absence d'une transition de phase dans ce modèle mais un phénomène de croisement qui commence depuis $x = 0$.

Pour calculer le PCC, ℓ , nous utilisons les résultats précédent et nous prenons également, comme le cas des couches, que le PCC est la somme de PCC de réseau-régulier ℓ_r et le PCC de réseau-aléatoire ℓ_{al} , $\ell = \ell_{al} + \ell_r$, en se basant dans le calcul de ℓ_{al} sur la proposition que le PCC est la position de la couche maximale (voir Chapitre. 3) et pour calculer ℓ_r on utilise une approximation qui sera décrite dans la troisième section de ce chapitre, et on va trouver une expression de PCC plus précise par rapport à l'expression de Newman et al. (voir Fig. 4.5). En plus on va démontrer que la formule universelle en fonction de nombre de raccourcis est valable sauf pour $y \ll 1$, avec $y = 2k\phi$ un paramètre qu'on va définir plus tard. Ce résultat est très important, car on a montré que la fonction universelle $f(x)$ qui a été considéré conceptuellement vrai n'est pas toujours valable, en revanche on obtient une autre formule universelle $g(y)$ qui est valable lorsque y n'est pas très inférieure à 1. Cette nouvelle formule sous la forme $g(y) = \frac{\ln(n)}{\ell}$, nous montre que la propriété petit-monde émerge d'une façon universelle en fonction de y .

4.4 Structure de réseau NW : couche et plus court chemin

4.4.1 Les couches aléatoires et régulières

Au début on va appliquer une transformation de groupe de renormalisation en espace réel, en transformant le réseau NW de k et n quelconque à un réseau de $\acute{k} = 1$ et de nombre de nœuds $\acute{n} = \frac{n}{k}$ (voir Fig. 4.3)⁴. On suppose que chaque ensemble de k nœuds voisins comme un seul nœud, d'où la probabilité qu'un nœud dans le nouveau réseau ($\acute{k} = 1$ et $\acute{n} = \frac{n}{k}$) est lié aléatoirement à un autre nœud est $q = 1 - \left(1 - \frac{2k\phi}{n}\right)^{k^2}$, pour $n \gg k\phi$ on peut écrire $q = \frac{2k^3\phi}{n}$. Puis nous calculons la probabilité $P_r(j)$ qu'un nœud reste dans sa distance régulière j et la probabilité $P_{al}(j)$ qu'un nœud change sa distance régulière vers une nouvelle distance j plus proche de nœud arbitraire grâce aux raccourcis ajoutés, par exemple, dans la Fig. 4.2, les nœuds noires sont celles qui devient plus proche de nœud arbitraire grâce au raccourci.

Généralement les recules des nœuds vers des distances plus proche de nœud arbitraire se fassent à travers 1 raccourci, 2 ou plus, pour cette raison on distingue chaque cas différemment.

■ À travers 1 raccourci :

Soit $\pi^1(i)$ la probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j vers la

4. On voit que le degré de liberté est réduit, car dans le nouveau réseau le paramètre \acute{k} est toujours égale à 1, c'est exactement l'idée de la théorie de groupe de renormalisation.

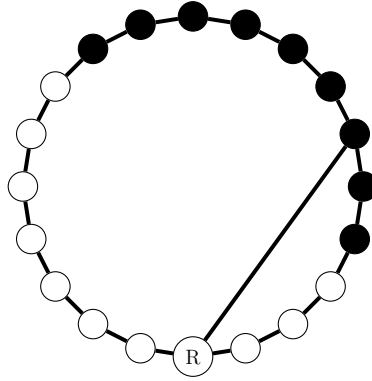


FIGURE 4.2 – Illustration des nœuds aléatoires (nœuds noirs) qui devient plus proche du nœud arbitraire R , et nœuds réguliers (nœuds blanches) qui restent dans leurs distance initial par rapport au même nœud arbitraire R , le réseau est de taille $n = 20$, $k = 1$ et un seul raccourci.

$i^{\text{ème}}$ distance ($i < j$) à travers un seul raccourci :

$$\begin{aligned}
 \pi^1(1) &= (1 - q), \\
 \pi^1(2) &= (1 - q)^4, \\
 \pi^1(3) &= (1 - q)^{4 \cdot 2}, \\
 &\vdots \\
 \pi^1(i) &= (1 - q)^{4(i-1)}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Il faut signalé que l'expression $\pi^1(i) = (1 - q)^{4(i-1)}$ est une approximation de champs moyenne qu'est vrai pour la plupart des cas et qui représente la valeur minimale de cette probabilité, car les nombres des possibilités $4, 4 \times 2, \dots, 4 \times (i - 1)$ sont les valeurs maximales, mais à cause des interférences entres elles, le nombre de possibilités peut être moindre, la même remarque pour tous les cas suivants, on prend toujours le nombre maximum de possibilité, d'où nos équations sont des approximations de champs moyenne et ne sont pas des expressions mathématiques exactes, certes comme tous les systèmes de très grand nombre de constituants, il suffit de faire la bonne approximation au niveau microscopique, c'est-à-dire local, pour trouver la description parfaite des grandeurs macroscopique de système, ce que nous avons exactement fait.

De l'Eq. 4.2 la probabilité $P_r^1(j)$ qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j à travers un seul raccourci est :

$$\begin{aligned}
 P_r^1(j) &= \pi^1(1)\pi^1(2)\dots\pi^1(j-1) \\
 &= (1-q)(1-q)^4(1-q)^{4\cdot 2}\dots(1-q)^{4(j-2)} \\
 &= (1-q)^{1+4+4\cdot 2+4\cdot 3\dots 4(j-2)} \\
 &= (1-q)^{1+4\sum_{i=1}^{j-1}(i-1)}.
 \end{aligned}$$

On doit signaler qu'on peut négliger le cas $\pi^i(i) = (1-q)^i(\acute{n} - 2i)^{i-1}$, dans le cas d'un raccourci et dans tous les cas suivants sans aucun problème, alors $P_r^1(j)$ sera écrite :

$$P_r^1(j) = (1-q)^{4\sum_{i=1}^{j-1}(i-1)}$$

■ À travers 2 raccourcis :

La probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j vers la $i^{\text{ème}}$ distance ($i < j$) à travers deux raccourcis, dans le cas où le nœud arbitraire lié directement par un raccourci avec un nœud intermédiaire z qui est à une distance $i - 1$ du nœud j à travers aussi un seul raccourci, est $(1-q^2)^{4(i-2)}$. On considère que cette probabilité est la même pour les autres possibilités d'arrangements de deux raccourcis autour le nœud intermédiaire.

Le nombre possible des arrangements de ces deux raccourcis autour de nœud intermédiaire z pour lequel la distance entre j et le nœud arbitraire sera toujours i est ⁵ $(i - 1)$.

En outre le nombre maximal possible des positions de z sur le réseau pour que $i < j$ est $\acute{n} - 2i$, alors la probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j vers

5. Par exemple dans le cas où $i = 4$, on a 3 des arrangements possibles pour que la distance entre le nœud j et le nœud arbitraire est 4 :

le 1^{ère} : la distance entre le nœud arbitraire et le nœud intermédiaire z est 1 et entre z et le nœud j est 3.

le 2^{ème} : la distance entre le nœud arbitraire et le nœud intermédiaire z est 2 et entre z et le nœud j est également 2.

le 3^{ème} : la distance entre le nœud arbitraire et le nœud intermédiaire z est 3 et entre z et le nœud j est 1.

la $i^{\text{ème}}$ distance ($i < j$) à travers deux raccourcis est

$$\pi^2(i) = (1 - q^2)^{4(i-1)(i-2)(n-2i)},$$

d'où

$$\begin{aligned} P_r^2(j) &= \pi^2(1)\pi^2(2)\dots\pi^2(j-1) \\ &= (1 - q^2)^{4\sum_{i=1}^{j-1}((i-1)(i-2)(n-2i))}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

comme nous avons déjà signalé le terme $\pi^i(i)$ est négligeable, ici est $\pi^2(2)$.

■ À travers 3 raccourcis :

Dans ce cas on a deux nœuds intermédiaires z et \hat{z} sous la condition que entre deux nœuds intérieures il y a un seul raccourci. La probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance j vers la $i^{\text{ème}}$ distance à travers 3 raccourcis pour le cas où le nœud arbitraire lié directement par un raccourci avec z qui lié aussi directement par un raccourci avec \hat{z} et ce dernière à une distance de $i - 2$ au nœud j à travers aussi un seul raccourci, est $(1 - q^3)^{4(i-3)}$. On considère que cette probabilité est la même pour les autres possibilités d'arrangements de trois raccourcis autour les deux nœuds intermédiaires.

Le nombre possible des arrangements de ces trois raccourcis autour des nœuds intérieures z et \hat{z} pour que la distance entre j et le nœud arbitraire est toujours i est $C_2^{i-1} = \frac{(i-1)(i-2)}{2!}$.

En outre le nombre maximal possible des positions de z et \hat{z} sur le réseau pour $i < j$ est approximativement $(n - 2i)^2$.

Alors on obtient que $\pi^3(i) = (1 - q^3)^{4 \frac{(i-1)(i-2)}{2!} (i-3)(n-2i)^2}$ d'où

$$\begin{aligned} P_r^3(j) &= \pi^3(1)\pi^3(2)\dots\pi^3(j-1) \\ &= (1 - q^3)^{4 \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{(i-1)(i-2)}{2!} (i-3)(n-2i)^2 \right)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

■ À travers 4 raccourcis :

Dans ce cas on a trois nœuds intermédiaires z, z' et z'' , toujours sous la condition qu'il y a un seul raccourci entre chaque deux nœuds intermédiaires. La probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance j vers la $i^{\text{ème}}$ distance à travers 4 raccourcis pour le cas où le nœud arbitraire lié directement par un raccourci avec z et celui-ci lié également directement par un raccourci avec z' qui est de sa part lié directement par un raccourci avec le nœud z'' et ce dernier à une distance de $i-3$ au nœud j à travers aussi un seul raccourci est $(1 - q^4)^{4(i-4)}$. On considère comme les cas précédent que cette probabilité est la même pour les autres possibilités d'arrangements de quatre raccourcis autour les trois nœuds intermédiaires.

Le nombre possible des arrangements de ces trois raccourcis autour des nœuds intermédiaires z, z' et z'' pour que la distance entre j et le nœud arbitraire est i est $C_3^{i-1} = \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{3!}$.

En outre le nombre maximal possible des positions de z, z' et z'' sur le réseau pour $i < j$ est approximativement $(n-2i)^3$. Alors on obtient

$$\pi^4(i) = (1 - q^4)^{4 \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{3!} (i-4)(n-2i)^3},$$

d'où

$$\begin{aligned} P_r^4(j) &= \pi^4(1)\pi^4(2)\dots\pi^4(j-1) \\ &= (1 - q^4)^{4 \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{3!} (i-4)(n-2i)^3 \right)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

■ À travers m raccourcis :

Par la même méthode, si on suppose qu'il y a $(m - 1)$ nœuds intermédiaires, on va obtenir l'expression générale de la probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance j vers la $i^{\text{ème}}$ distance à travers m raccourcis sous la forme

$$\pi^m(i) = (1 - q^m)^{4 \frac{(i-1)(i-2)\dots(i-m)}{(m-1)!} (\acute{n}-2i)^{(m-1)}},$$

alors la probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j à travers m raccourcis est

$$\begin{aligned} P_r^m(j) &= \pi^m(1)\pi^m(2)\dots\pi^m(j-1) \\ &= (1 - q^m)^{4 \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{(i-1)(i-2)\dots(i-m)}{(m-1)!} (\acute{n}-2i)^{m-1} \right)}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

sachant que $q < 1$ on peut écrire

$$P_r^m(j) = e^{-4q^m \sum_{i=1}^{j-1} \left(\frac{(i-1)(i-2)\dots(i-m)}{(m-1)!} (\acute{n}-2i)^{m-1} \right)}. \quad (4.7)$$

Alors la probabilité $P_r(j)$ qu'un nœud ne change pas sa distance régulière j vers la $i^{\text{ème}}$ distance par n'importe quel nombre des raccourcis est

$$\begin{aligned} P_r(j) &= P_r^1(j)P_r^2(j)P_r^4(j)\dots P_r^m(j) \\ &= e^{-4q \sum_{i=1}^{j-1} (i-1)B(i)}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

avec $B(i) = (1 + [q(i-2)(\acute{n}-2i)] + [q^2 \frac{(i-2)(i-3)}{2!} (\acute{n}-2i)^2] + \dots + [q^{m-1} \frac{(i-2)\dots(i-m)}{(m-1)!} (\acute{n}-2i)^{m-1}] + \dots + [q^{i-2} (\acute{n}-2i)^{i-2}])$, les termes de cette expression lient respectivement au probabilité que le nœud j ne change pas sa distance vers le $i^{\text{ème}}$ distance par 2, 3, 4, ..., $i - 1$ raccourcis, le cas de i raccourcis est négligé comme nous avons déjà dit. D'une autre coté

on voit que $B(i)$ peut s'écrire sous la formule du Binôme

$$\begin{aligned}
 B(i) &= (1 + [q(i-2)(\acute{n}-2i)] + [q^2 \frac{(i-2)(i-3)}{2!}(\acute{n}-2i)^2] + \dots + [q^{i-2}(\acute{n}-2i)^{i-2}]) \\
 &= \sum_{j=1}^{i-2} C_j^{i-2} [q(\acute{n}-2i)]^j 1^{i-2-j} \\
 &= (q(\acute{n}-2i) + 1)^{i-2}.
 \end{aligned}$$

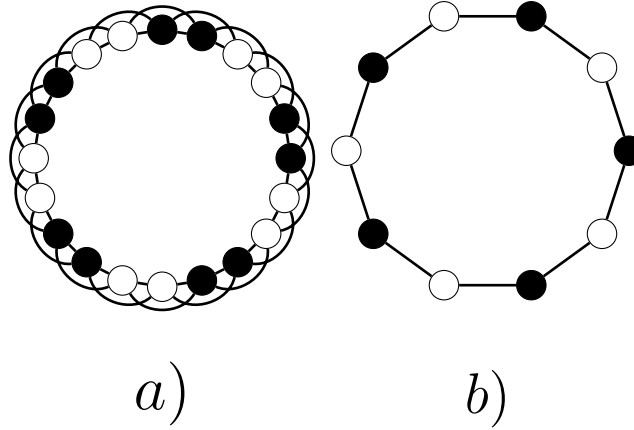


FIGURE 4.3 – La transformation GR d'un réseau (a) de $n = 20$ et $k = 2$ vers un réseau (b) de $\acute{n} = 10$ et $\acute{k} = 1$.

Alors la probabilité qu'un nœud ne change pas sa distance j est :

$$\begin{aligned}
 P_r(j) &= e^{-4q \sum_{i=1}^{j-1} (i-1)(q(\acute{n}-2i)+1)^{i-2}} \\
 &= e^{-4q \int_{i=1}^{j-1} (i-1)(q(\acute{n}-2i)+1)^{i-2} di}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En outre la probabilité $P_{al}(j)$ qu'un nœud change sa distance régulière vers la $j^{\text{ème}}$ égale le produit de la probabilité que ce nœud ne change pas sa distance vers une autre inférieur à

j , $P_r(j-1)$, et la probabilité que le nœud change sa distance vers la $j^{\text{ème}}$ distance, $1 - \pi(j)$,

$$\begin{aligned}
 P_{al}(j) &= P_r(j-1)(1 - \pi(j)) \\
 &= P_r(j-1) - \pi(j)P_r(j-1) \\
 &= P_r(j-1) - P_r(j) \\
 &= -\frac{\partial P_r(j)}{\partial j} \\
 &= 4q(j-2)(q(\acute{n} - 2(j-1) - 1) + 1)^{j-3}P_r(j), \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

pour simplifier les calculs on peut prendre sans aucun souci⁶ que dans l'équation précédent $j-1 = j$, d'où on obtient

$$P_{al}(j) = 4q(j-1)(q(\acute{n} - 2j - 1) + 1)^{j-2}P_r(j). \tag{4.11}$$

Le nombre des nœuds dans la couche n_j^r est $P_r(j)$ multiplié par 2, car initialement dans chaque couche on a deux nœuds réguliers

$$n_j^r = 2P_r(j), \tag{4.12}$$

et le nombre des nœuds dans la couche aléatoire n_j^{al} est $P_{al}(j)$ multiplié par le nombre des nœuds qui ont une distance plus grande que j

$$n_j^{al} = (\acute{n} - 2j)P_{al}(j), \tag{4.13}$$

6. Cette approximation signifie une augmentation de l'erreur de l'ordre $\frac{1}{\ell}$, cependant ℓ tend vers l'infini lorsque n est très large, alors cette approximation ne pose aucun problème.

d'où la $j^{\text{ème}}$ couche est

$$\begin{aligned}
 n_j &= n_j^r + n_j^{al} \\
 &= 2P_r(j) + (\acute{n} - 2j)P_{al}(j) \\
 &= 2P_r(j) + (\acute{n} - 2j)P_r(j-1) - (\acute{n} - 2j)P_r(j) \\
 &= (\acute{n} - 2j)P_r(j-1) - (\acute{n} - 2(j+1))P_r(j) \\
 &= v(j-1) - v(j) \quad \text{avec : } v(j) = (\acute{n} - 2(j+1))P_r(j).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Maintenant on va calculer la somme des nœuds de couches-régulières S'_r et la somme des nœuds de couches-aléatoires S'_{al} afin de les utiliser dans le calcul de PCC. De Eq. 4.9 et Eq. 4.12 on obtient

$$\begin{aligned}
 S'_r &= n_1^r + \sum_2^{\frac{\acute{n}}{2}} n_i^r \\
 &= n_1^r + \int_2^{\frac{\acute{n}}{2}} n_i^r di \\
 &= n_1^r + 2 \int_2^{\frac{\acute{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1)(q(\acute{n}-2j)+1)^{j-2} dj} di,
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

l'intégrale $\int_2^{\frac{\acute{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1)(q(\acute{n}-2j)+1)^{j-2} dj} di$, n'a aucune solution disponible, pour cette raison, on est obligé d'utiliser une approximation en tenant compte seulement les chemins à travers un seul raccourci et on néglige les autres.

L'approximation s'avère vrai dans la première région où le nombre des raccourcis est très faible, par contre dans la seconde région où le nombre des raccourcis est grand n'est pas vrai, néanmoins la fraction des nœuds de réseau régulier dans la seconde région est très petit, pour cette raison cette approximation est valable pour les deux régions. Alors on prend que $\int_2^{\frac{\acute{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1)(q(\acute{n}-2j)+1)^{j-2} dj} di \approx \int_2^{\frac{\acute{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1) dj} di$. Pour $\acute{n} \gg 1$ on peut prendre que

CHAPITRE 4. ÉMERGENCE DE LA PROPRIÉTÉ PETIT-MONDE DANS LE MODÈLE PETIT-MONDE

$\int_2^{\frac{\dot{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1) dj} di \approx \int_2^{\frac{\dot{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^i j dj} di$, d'où :

$$\begin{aligned}
 S'_r &\approx n_1^r + 2 \int_2^{\frac{\dot{n}}{2}} e^{-4q \int_{j=1}^i j dj} di \\
 &\approx n_1^r + 2 \int_2^{\frac{\dot{n}}{2}} e^{-2qi^2} di \\
 &\approx 2 + 2 \left[\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erf}(\sqrt{2q}i)}{2\sqrt{q}} \right]_2^{\frac{\dot{n}}{2}} \quad \text{avec } n_1^r = 2 \\
 &\approx 2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{8q}} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{2q}\frac{\dot{n}}{2}) - \operatorname{erf}(2\sqrt{2q}) \right],
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

pour $q \ll 1$ on a $\operatorname{erf}(2\sqrt{2q}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{2q}$ alors on obtient

$$\begin{aligned}
 S'_r &\approx 2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{8q}} \left[\operatorname{erf}(\sqrt{2q}\frac{\dot{n}}{2}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} 2\sqrt{2q} \right] \\
 &\approx 2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{8q}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{q\dot{n}^2}{2}}) - 4 \\
 &\approx \dot{n} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2q\dot{n}^2}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{q\dot{n}^2}{2}}) - \frac{2}{\dot{n}} \right) \\
 &\approx \dot{n} \sqrt{\frac{\pi}{2q\dot{n}^2}} \operatorname{erf}(\sqrt{\frac{q\dot{n}^2}{2}}).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

On sait que $q = \frac{2k^3\phi}{n}$ et $\dot{n} = \frac{n}{k}$ alors $\frac{q\dot{n}^2}{2} = kn\phi$ qui est le nombre moyen des raccourcis dans le réseau, d'où la somme des nœuds réguliers s'écrit aussi comme une fonction universelle, sous la forme

$$S'_r = \frac{n}{k} (1 - h(kn\phi)), \tag{4.18}$$

avec $h(x) = 1 - \sqrt{\frac{\pi}{4x}} \operatorname{erf}(\sqrt{x})$

En outre la somme des nœuds aléatoires est la soustraction du nombre de nœuds et la

somme des nœuds réguliers

$$\begin{aligned}
 S'_{al} &\approx \dot{n} - S'_r \\
 &\approx \dot{n} - \dot{n} \sqrt{\frac{\pi}{2q\dot{n}^2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{q\dot{n}^2}{2}}\right) \\
 &\approx \dot{n} \left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{2q\dot{n}^2}} \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{q\dot{n}^2}{2}}\right)\right) \\
 &\approx \frac{n}{k} h(kn\phi).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

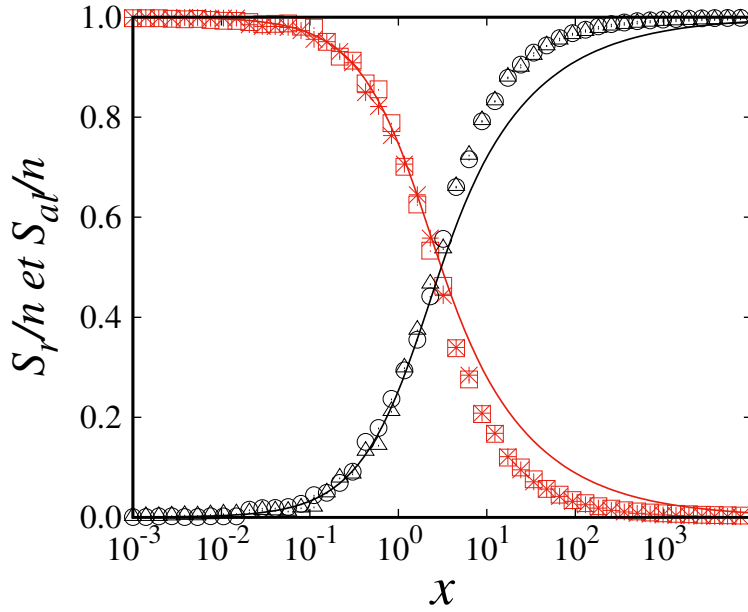


FIGURE 4.4 – Fraction des nœuds aléatoires S_{al}/n (noir) et des nœuds réguliers S_r/n (rouge) en fonction de nombre des raccourcis x . Les lignes représentent les fonction $h(x)$ (noir) et $1 - h(x)$ (rouge). Les symboles représentent les simulations numériques d'un réseau de taille $n = 10^4$, avec $k = 1$ (étoile et cercle) et $k = 5$ (carré et triangle). Chaque simulation est moyennée à 200 réalisations.

Si on prend en considération la transformation de GR qu'on a déjà utilisé dans nos calculs, les valeurs de S'_r et S'_{al} représentent en réalité le nombre des groupes k de nœuds, alors pour trouver le nombre réel des nœuds dans le réseau, il suffit de multiplier S'_r et

S'_{al} par k , car dans chaque groupe on a k nœuds, d'où le nombre des nœuds réguliers est $S_r = n(1 - h(kn\phi))$ et le nombre de nœuds aléatoires est $S_{al} = nh(kn\phi)$. Sachant que la fonction $h(x)$ peut être considéré comme un paramètre d'ordre et selon son expression, on peut conclure qu'il n'y a pas une transition de phase dans ce modèle mais un phénomène de croisement qui commence depuis $x = 0$. L'existence d'un tel paramètre d'ordre dans le modèle de NW est déjà une chose très importante, car il n'est pas toujours facile de le trouver, ainsi l'absence d'un tel paramètre de ce modèle dans la littérature.

4.4.2 Plus court chemin

On sait que l'expression du PCC s'écrit $\ell = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (i \cdot n_i)$, mais cette somme n'a pas une solution directe. Pour cette raison on va dissocier le PCC en deux types, exactement comme le cas des couches, d'où $\ell = \ell_{al} + \ell_r$, avec ℓ_r est le PCC du réseau régulier et ℓ_{al} est le PCC du réseau aléatoire.

On commence par le PCC de réseau régulier ℓ_r qui s'écrit sous la forme

$$\ell_r = \frac{S'_r \int_1^{\frac{n}{2}} i \cdot n_i^r di}{\dot{n} a_r}, \quad (4.20)$$

avec $a_r = \int_1^{\frac{n}{2}} n_i^r di = S'_r$ est la constante de normalisation, d'où $\ell_r = \int_1^{\frac{n}{2}} i \cdot \frac{n_i^r}{\dot{n}} di$.

De Eq. 4.9 et Eq. 4.12 on obtient

$$\ell_r = \frac{1}{\dot{n}} \int_1^{\frac{n}{2}} 2ie^{-4q \int_{j=1}^{i-1} (j-1)(q(\dot{n}-2j)+1)^{j-2} dj} di,$$

en utilisant la même approximation précédente de l'Eq. 4.16 on obtient

$$\begin{aligned}
 \ell_r &\approx \frac{1}{\dot{n}} \int_1^{\frac{\dot{n}}{2}} 2i e^{-2qi^2} di \\
 &\approx \frac{1}{\dot{n}} \frac{e^{-2q} - e^{-\frac{q\dot{n}^2}{2}}}{2q} \\
 &\approx \frac{1}{\dot{n}} \frac{1 - e^{-\frac{q\dot{n}^2}{2}}}{2q} \quad \text{car : } q \ll 1 \\
 &\approx \frac{\dot{n}}{4} \frac{1 - e^{-\frac{q\dot{n}^2}{2}}}{\frac{q\dot{n}^2}{2}},
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

sachant que $\frac{q\dot{n}^2}{2} = nk\phi = x$ et $\dot{n} = \frac{n}{k}$ alors ℓ_r peut s'écrire sous la forme universelle suivante

$$\ell_r \approx \frac{n}{k} f_r(x) \quad \text{avec} \quad f_r(x) = \frac{1 - e^{-x}}{4x}. \tag{4.22}$$

A fin de calculer ℓ_{al} , nous utilisons la proposition que le PCC est la position de la couche maximale (voir Section. 3.5.1). Dans notre cas ici c'est la position de la couche aléatoire maximale, de point de vue mathématique il suffit de résoudre $\frac{\partial n'_{al}(i)}{\partial i} = 0$. Soit $u(i) = 4q(i-1)(q\dot{n} - 2i + 1)^{i-2}$, de l'Eq. 4.9 et Eq. 4.11 on obtient que $P_{al}(i) = u(i)e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j)dj}$. D'autre coté, il est évident que ℓ_{al} prédomine dans l'expression du PCC si $S_{al} \gg S_r$, alors la dimension de PCC devient négligeable devant la dimension de \dot{n} car le nombre de raccourcis dans le réseau est important, d'où on peut prendre que $\dot{n} - 2i \approx \dot{n}$, donc $u(i) = 4q(i-1)(q\dot{n} + 1)^{i-2}$. Soit $y = q\dot{n}$ le paramètre qui représente le degré moyen de raccourcis pour chaque nœud après la transformation de GR, car q est la probabilité pour qu'un pair de nœuds se connecte et \dot{n} est le nombre de nœuds.

De l'Eq. 4.13 et $P_{al}(i) = u(i)e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j)dj}$ on obtient

$$n'_{al}(i) = \dot{n} u(i) e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j)dj}, \tag{4.23}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial n'_{al}(i)}{\partial i} &= \dot{n} \frac{\partial u(i)}{\partial i} e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j) dj} + \dot{n} u(i) \frac{\partial e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j) dj}}{\partial i} \\ &= \dot{n} \frac{\partial u(i)}{\partial i} e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j) dj} - \dot{n} u(i)^2 e^{-\int_{j=1}^{i-1} u(j) dj},\end{aligned}\quad (4.24)$$

alors la solution de $\frac{\partial n'_{al}(i)}{\partial i} = 0$ est la solution de l'équation suivante

$$\frac{\partial u(i)}{\partial i} - u(i)^2 = 0. \quad (4.25)$$

On a $\frac{\partial u(i)}{\partial i} = u(i) \left[\frac{1}{i-1} + \ln(y+1) \right]$ et on sait que $\ln(y+1) \gg \frac{1}{i-1}$, car i reflète ici la valeur de PCC qui croît avec la taille du réseau \dot{n} , alors si \dot{n} croît l'expression $\frac{1}{i-1}$ tend vers 0, par contre $y = 2k^2\phi$ ne dépend pas de la taille de réseau, d'où on peut négliger $\frac{1}{i-1}$ devant $\ln(y+1)$ et on obtient $\frac{\partial u(i)}{\partial i} = u(i)\ln(y+1)$.

Alors l'Eq. 4.25 devient

$$u(i) = \ln(y+1), \quad (4.26)$$

si on remplace $u(i)$ par son expression $u(i) = 4q(i-1)(q\dot{n}+1)^{i-2} = 4q(i-1)(y+1)^{i-2}$, on va trouver la solution de l'Eq. 4.26 qui nous donne la position de la couche-aléatoire maximal i_{max}

$$i_{max} = \frac{W\left(\frac{\ln(y+1)^2(y+1)}{4q}\right)}{\ln(y+1)} + 1, \quad (4.27)$$

avec $W(x)$ est la fonction de Lambert.

Alors selon notre proposition, la valeur de ℓ_{al} est i_{max} multiplié par la fraction des nœuds aléatoires $\ell_{al} = i_{max}h(x)$, d'où

$$\ell_{al} = \left(\frac{W\left(\frac{(y+1)^2(y+1)}{4q}\right)}{\ln(y+1)} + 1 \right) h(x). \quad (4.28)$$

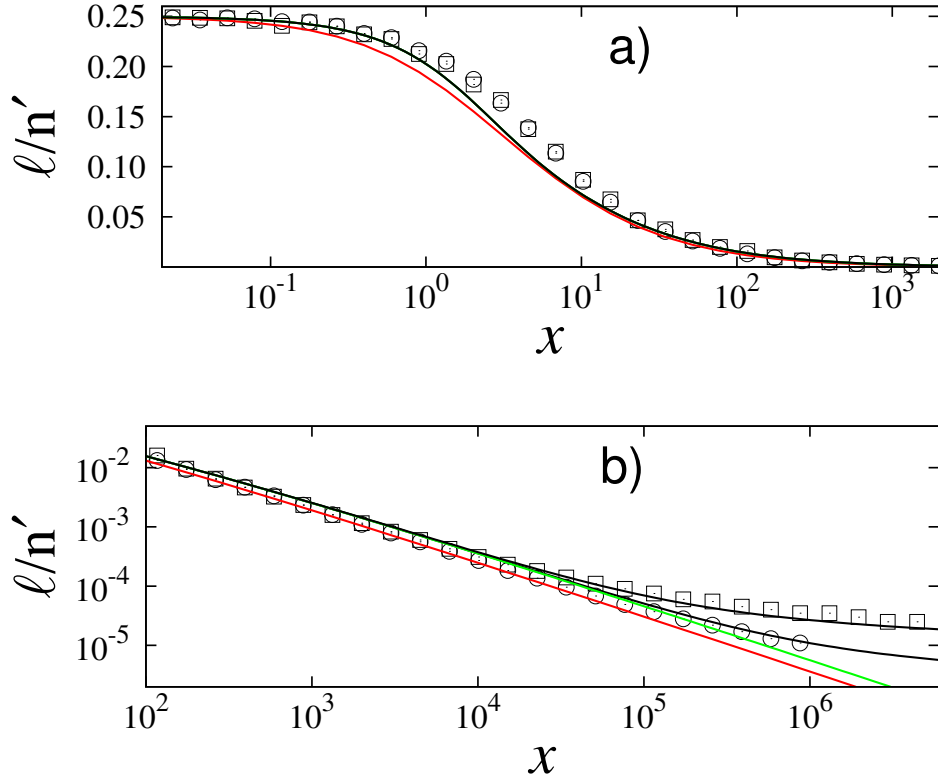


FIGURE 4.5 – L'expression universelle $f(x) = \ell/\acute{n}$ en fonction de x pour un réseau de taille $n = 10^6$. La formule de Newman et watts Eq. 4.1 (ligne rouge), Eq. 4.30 (ligne vert), Eq. 4.29 (ligne noir) et les simulations numériques pour $k = 1$ (cercle) et $k = 5$ (carré). L'échelle est linéaire-log dans **a)** et log-log dans **b)**. Chaque simulation est moyennée à 100 réalisations.

De l'Eq. 4.22 et Eq. 4.28 on obtient l'expression globale de PCC

$$\ell = \left(\frac{W\left(\frac{\ln(y+1)^2(y+1)}{4q}\right)}{\ln(y+1)} + 1 \right) h(x) + \acute{n} \frac{1 - e^{-x}}{4x} \quad (4.29)$$

pour trouver une expression universelle de ℓ en fonction du nombre des raccourcis x , il faut considérer que $y \ll 1$, d'où

$$\ell = \acute{n} f(x) \quad (4.30)$$

avec $f(x) = \left(\frac{2W(\frac{x}{2})h(x) + 1 - e^{-x}}{4x} \right)$ est la nouvelle fonction universelle.

De la Fig. 4.5, on voit que l'Eq. 4.29 est en accord avec les simulations sauf dans l'intervalle $1 < x < 20$ où il y a une certaine déviation, on explique cela par la proposition de l'existence des fluctuations élevées dans cette intervalle, car il est évident que lorsque les fluctuations deviennent importantes l'approximation du champs moyen n'est plus valable, comme le cas usuel dans tous les systèmes physiques au voisinage des points critiques. On montre notre proposition par les simulations en utilisant le paramètre d'ordre, $\frac{S_{al}}{n}$. Soit $\sigma = \frac{\sqrt{\langle \frac{S_{al}}{n} \rangle^2 - \langle \frac{S_{al}}{n} \rangle^2}}{\langle \frac{S_{al}}{n} \rangle}$ les fluctuations de $\frac{S_{al}}{n}$ par rapport à sa taille, en effet selon la Fig. 4.6 le maximum des fluctuations est dans l'intervalle $1 < x < 20$ où l'Eq. 4.29 montre une petite déviation.

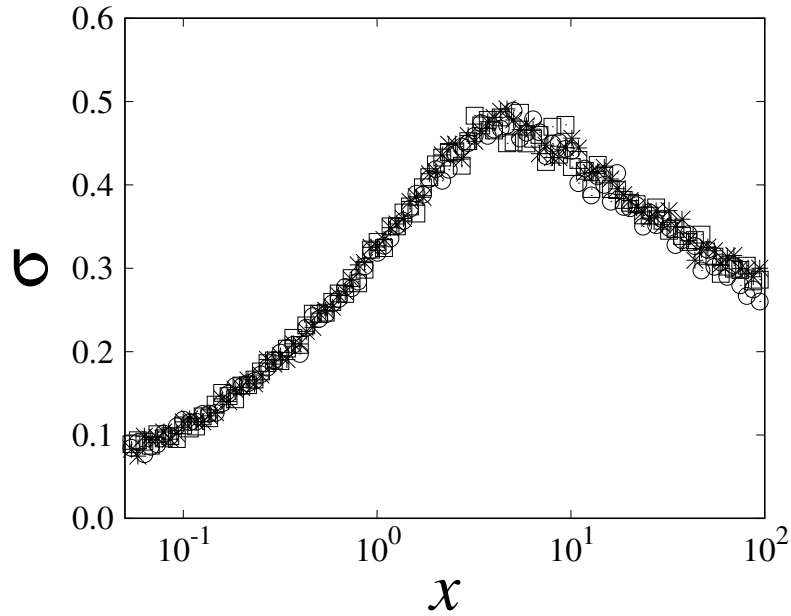


FIGURE 4.6 – Fluctuation σ en fonction de x d'un réseau de taille $n = 10^4$ pour différents valeurs de k , $k = 1$ (étoile), $k = 2$ (carré) et $k = 5$ (cercle), le nombre de réalisations est 1000.

4.5 Émergence spectaculaire vers la propriété petit-monde

4.5.1 Échoué de l'ancien fonction universelle et la saturation des raccourcis

Selon l'Eq. 4.29, l'expression universel $\ell = \dot{n}f(x)$ n'est plus valable si la condition $y \ll 1$ n'est pas vérifié, qu'on peut aussi montrer par les simulations numériques. Soit Δ l'écart de $\frac{\ell}{\dot{n}}$ en fonction de y entre un réseau de n , k et ϕ donné et d'autres réseaux possédant des valeur aléatoires n_{al} , k_{al} et ϕ_{al} sous la condition que $nk\phi = n_{al}k_{al}\phi_{al}$. L'expression de l'écart de $\frac{\ell}{\dot{n}}$ peut s'écrire comme

$$\Delta = \frac{\frac{\ell}{\dot{n}} - \frac{\ell_{al}}{\dot{n}_{al}}}{\frac{\ell}{\dot{n}} + \frac{\ell_{al}}{\dot{n}_{al}}}. \quad (4.31)$$

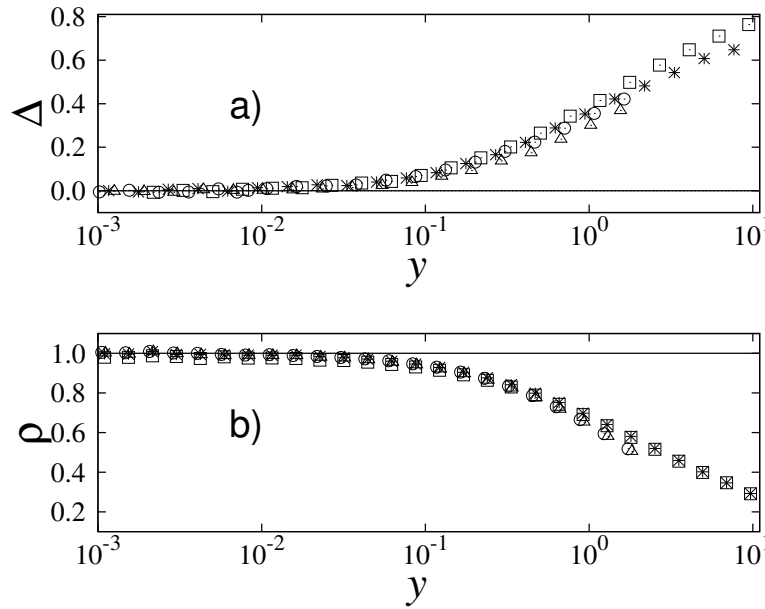


FIGURE 4.7 – La valeur de Δ et ρ en fonction de y pour différent valeurs de n et k : $n = 10^{-3}$ et $k = 1$ (triangle), $n = 10^{-3}$ et $k = 4$ (carré), $n = 10^{-4}$ et $k = 1$ (cercle), $n = 10^{-4}$ et $k = 4$ (étoile). Dans **a)** le nombre de réalisations pour chaque simulation est 1000 et dans **b)** le nombre de réalisations pour chaque simulation est 5000.

De la Fig. 4.7.(a) on observe une augmentation remarquable de Δ lorsque y n'est pas très inférieur à 1, par intuition on peut expliquer ce phénomène par le début d'une saturation de raccourcis lorsque y augmente, car après la saturation le réseau change son comportement devant les raccourcis ajoutés. Afin de montrer l'existence d'un changement de comportement vis-à-vis des raccourcis ajoutés, on va simuler numériquement le nombre de raccourcis existants dans le trajet de PCC entre deux nœuds choisi au hasard par rapport au nombre moyen des raccourcis dans le réseau, ρ , en fonction de y . En effet, selon les Fig. 4.7.(a) et Fig. 4.7.(b), on remarque une saturation de raccourcis qui varie d'une façon similaire avec Δ en fonction de y . Pour $y \ll 1$ on voit que $\rho \approx 1$, alors presque tous les raccourcis existent dans les trajets de PCC, c'est-à-dire l'impact des raccourcis sur le PCC est maximale, en revanche avec l'augmentation de y le pourcentage des raccourcis existents dans les trajets diminue, c'est-à-dire l'impact des raccourcis sur le PCC se diminue. On conclut que la saturation des raccourcis ajoutés explique bien la non validité de la fonction universelle $f(x)$ pour $y \ll 1$.

4.5.2 La nouvelle fonction universelle

La saturation des raccourcis peut signifier que le réseau commence à posséder la propriété petit-monde, autrement dit le PCC devient de l'ordre de $\ln(n)$, pour confirmer cette proposition on réalise des simulations numériques et on les compare avec notre équation. En effet, de la Fig. 4.8 on voit que le rapport $\frac{\ln(n)}{\ell}$ émerge et devient important d'une façon universelle en fonction du même paramètre y avec lequel la saturation émerge. Alors une nouvelle équation universelle g sous la forme $g(y) = \frac{\ln(n)}{\ell}$ apparaît.

Maintenant on essaye de formuler l'expression analytique de cette nouvelle équation universelle g , de l'Eq. 4.29 on peut trouver facilement que dans la limite de grande taille de système on va obtenir que

$$\frac{\ln(n)}{\ell} = \ln(y + 1). \quad (4.32)$$

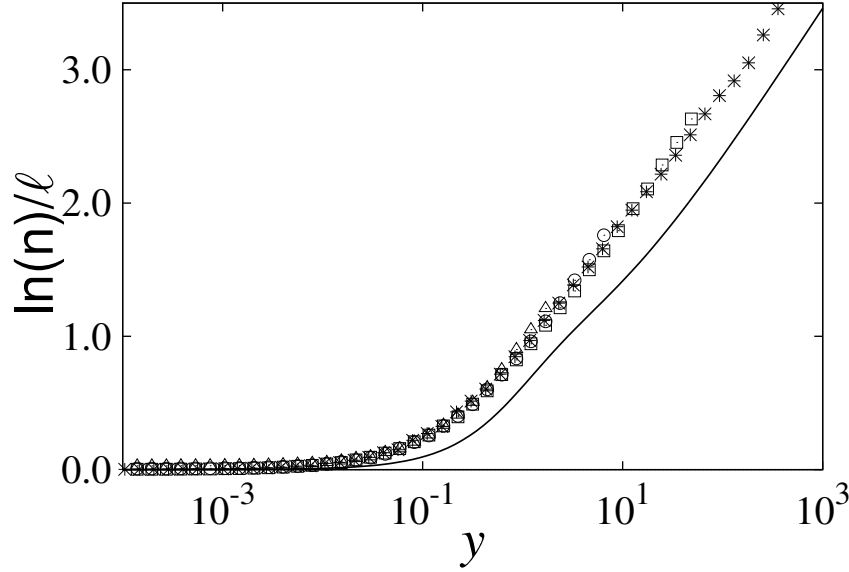


FIGURE 4.8 – L'expression universelle de PCC en fonction de y , par Eq.4.34 (ligne continue) et par les simulations numériques pour différents valeurs de n et k , $n = 10^{-6}$ et $k = 20$ (étoile), $n = 10^{-5}$ et $k = 5$ (carré), $n = 10^{-4}$ et $k = 2$ (cercle), $n = 10^{-3}$ et $k = 1$ (triangle), nombre de réalisations pour chaque simulations est 100. En **a**) l'échelle est linéaire-log et en **b**) l'échelle est log-log.

Il est évident que l'Eq. 4.32 n'est pas une expression exacte à cause de la transformation de GR que nous avons utilisé au début lorsque nous avons supposé que chaque k voisins, on le dénommé ici amas, est comme un seul nœud.

Sur le trajet de PCC entre deux amas quelconques dans le réseau on trouve des liens ordinaires et des raccourcis, dans le cas où il y a deux raccourcis successifs sur le trajet, c'est-à-dire on a deux raccourcis liant au même amas, la probabilité que les deux raccourcis lient au même nœuds dans cette amas est $\frac{1}{k}$ et la probabilité que les deux raccourcis ne lient pas au même nœud, c'est-à-dire on aura un lien en plus, est $1 - \frac{1}{k}$, autrement dit chaque fois on a deux raccourcis successifs il y a une probabilité de $1 - \frac{1}{k}$ que le PCC augment par 1.

D'autre part, le nombre des liens réguliers qui lient entre les amas est toujours \dot{n} et le nombre des raccourcis entre les amas est $\frac{q\dot{n}(\dot{n}-1)}{2} \approx \frac{q\dot{n}^2}{2}$, q est la probabilité qu'un pair d'amas se connecte et $\frac{\dot{n}(\dot{n}-1)}{2}$ est le nombre des paires possibles. Alors la fraction des raccourcis par rapport au nombre totale des liens est $\frac{q\dot{n}}{2+q\dot{n}} = \frac{y}{2+y}$, d'où la probabilité d'obtenir deux

CHAPITRE 4. ÉMERGENCE DE LA PROPRIÉTÉ PETIT-MONDE DANS LE MODÈLE PETIT-MONDE

raccourcis liant au même amas dans le trajet entre deux nœuds quelconque est $(\frac{y}{2+y})^2$. Par conséquent la probabilité pour que la valeur de PCC sera doublé est $(\frac{y}{2+y})^2(1 - \frac{1}{k})$, où $(\frac{y}{2+y})^2$ est la probabilité d'avoir deux raccourcis liant au même amas, et $(1 - \frac{1}{k})$ est la probabilité que ces deux amas seront liant à deux nœuds différent. La probabilité que le PCC restera sans aucun changement est $(1 - (\frac{y}{2+y})^2) + \frac{1}{k}(\frac{y}{2+y})^2$, le première terme représente la probabilité que deux raccourcis n'est pas liant au même amas et le deuxième représente la probabilité que deux raccourcis liant au même amas et au même nœud $\frac{1}{k}(\frac{y}{2+y})^2$, d'où l'Eq.4.32 devient

$$\frac{\ln(n)}{l} = \frac{\ln(y+1)}{\frac{1}{k}(\frac{y}{2+y})^2 + (1 - (\frac{y}{2+y})^2) + 2(1 - \frac{1}{k})(\frac{y}{2+y})^2} \quad (4.33)$$

pour $k \gg 1$ on obtient que

$$\frac{\ln(n)}{\ell} = \frac{\ln(y+1)}{(1 + (\frac{y}{2+y})^2)} \quad (4.34)$$

Cette fonction montre un certain écart par rapport aux résultats numériques, car dans notre calcul on n'a pas pris en compte tous les cas possibles des raccourcis entre les amas mais on a fait juste une approximation de champs moyen. Cependant notre expression de $g(y) = \frac{\ln(y+1)}{(1 + (\frac{y}{2+y})^2)}$ nous donne l'allure de la variation de la fonction universelle, qui varie d'une façon logarithmique.

Le fait qu'on a réussi à contrôler le nombre des raccourcis ajoutés pour atteindre la phase petit-monde dans le modèle de NW est une chose très importante et une contribution qui va enrichir tellement l'utilité de ce modèle. La difficulté qu'a empêché à répondre à ce problème au cours des vingtième années précédente est de trouver le paramètre avec lequel on détermine le point où le réseau est saturé, alors par un raisonnement purement théorique on a trouvé que ce paramètre est y .

4.6 Conclusion

En utilisant la transformation de GR sur le modèle NW, on a trouvé une expression analytique de PCC plus précise que l'ancien existé déjà dans la littérature, et à partir de cette nouvelle expression, on a conclu que le paramètre y est le variable avec lequel la propriété petit-monde émerge, le variable avec lequel on détermine l'erreur et la validité de l'ancien fonction universelle $f(x) = \frac{\ell}{n}$, le variable qui nous donne le degré de saturation de raccourcis, ainsi que le variable de la nouvelle fonction universelle $g(y) = \frac{\ln(n)}{\ell}$. On en déduit que l'émergence qui se passe en fonction de ce paramètre y dans le modèle NW est une émergence spectaculaire.

Chapitre 5

Une nouvelle approche pour prédire les transitions de phases dans le phénomène de percolation

La détermination de type de transition de phase dans le phénomène de percolation n'est pas encore une science exacte, car il n'y a pas encore une règle avec laquelle on peut dire que cet ou celle transition sera de premier ou de deuxième ordre. Cependant la détermination se fait au cours de la transition ou plutôt après, notre but dans ce chapitre est de faire une contribution concernant ce problème qui est un sujet très important au point de vue de physique fondamentale.

5.1 Introduction

Le but ultime de l'étude des réseaux est de mieux comprendre le comportement des réseaux de systèmes. Par exemple, nous étudions la structure d'Internet pour mieux comprendre comment le trafic Internet circule, ou pourquoi les protocoles de communication fonctionnent, ou comment nous pourrions changer ou réorganiser le réseau pour le rendre plus performant. Nous étudions les réseaux biochimiques comme les réseaux métaboliques car nous espérons

qu'ils permettront de comprendre les processus chimiques complexes qui se déroulent dans la cellule, ou des outils algorithmiques pouvant nous aider à extraire des informations biologiques des grands volumes de données générés par les techniques de laboratoire modernes [147]. Nous étudions le réseau causal pour comprendre pourquoi ce réseau représentant la structure à grande échelle de l'espace-temps dans notre univers accéléré est aussi un graphe de loi libre-échelle avec un regroupement fort [154].

Alors notre but ultime dans ce chapitre, à part de rappel théorique, est de mieux comprendre le comportement de transitions des phases dans les réseaux réelles à partir de nos compréhensions dans le domaine de réseau complexe. En détaille on va établir une formule pour prédire au voisinage de point critique le type de transition de phase.

5.2 Transition de phase

De la fusion de la glace en eau au ferro-magnétisme et de la supraconductivité au repliement des protéines, la nature présente quotidiennement des transitions de phase, processus dans lesquels les systèmes changent radicalement une ou plusieurs de leurs propriétés physiques lorsqu'une variation minimale des variables se produisent.

Compte tenu de la grande présence des transitions de phase dans le monde réel, il n'est pas étonnant que les physiciens aient commencé, depuis le tout début de la mécanique statistique, à découvrir des comportements universels et critiques (ou scaling à proximité des points de transition), ainsi que de consacrer un effort dans la classification des transitions de phase. La première tentative de fournir une classification a été donnée par Ehrenfest [1], mais les schémas de classification plus modernes considèrent les transitions de phase se divisées en deux grandes catégories comme : les premières et les deuxièmes.

En thermodynamique, les transitions de phase du premier ordre sont celles qui impliquent une chaleur latente, c'est-à-dire celles pendant lesquelles le système absorbe ou libère une quantité typiquement élevée d'énergie par volume. Normalement, ils sont caractérisés (au point de transition) par un "régime en phase mixte", dans lequel certaines parties du système ont achevé la transition et d'autres non, présentant ainsi une sorte de coexistence des phases

des deux systèmes. Les signatures de telles transitions sont le comportement abrupt et discontinu du paramètre d'ordre à proximité du point de transition, ainsi que l'irréversibilité intrinsèque de la transition, avec la présence (dans la majorité des cas) de boucles hystérèses. En variante, les transitions de phase de second ordre (également appelées transitions de phase continues) sont réversibles et correspondent à des paramètres d'ordre présentant un comportement continu au voisinage de point critique. Des exemples des premiers processus sont la fusion de la glace, ou l'ébullition de l'eau, ou les transitions de super-refroidissement et de surchauffe. Des exemples de ces derniers processus sont la transition ferromagnétique, la transition supraconductrice et la transition super-fluide.

5.3 Percolation

La percolation est la transition vers la connectivité à grande échelle des réseaux sur l'ajout progressif de liens, elle se produit au cours des processus de croissance et d'évolution dans une grande variété de systèmes naturels, technologiques et sociaux [155–161]. La percolation se produit aussi en physique dans les solides atomiques et moléculaires, ainsi que dans les réseaux sociaux, biologiques et artificiels [156, 162, 163]. Autrement dit, on peut dire qu'un système de percolation consiste d'une grille, dans laquelle les nœuds ou les liens sont retirés avec une certaine probabilité $1 - p$, ou on considère que les nœuds se lient avec une probabilité p [164, 165], le système se déconnecte en petits groupes, c'est-à-dire qu'il devient impossible de passer d'un côté de la grille à l'autre en suivant les liens conducteurs, mais au-dessus de p_c , une grappe s'étend, semblable à la composante géante dans les graphiques aléatoires (voir Fig. 5.1).

5.4 Percolation explosive

En percolation de liaison, on commence de n nœuds non connectés. A chaque pas de temps, un lien est ajouté entre deux nœuds sélectionnés selon une règle donnée. Le nombre d'arêtes (E) ajoutées au système à un certain pas de temps divisé par la taille du système est

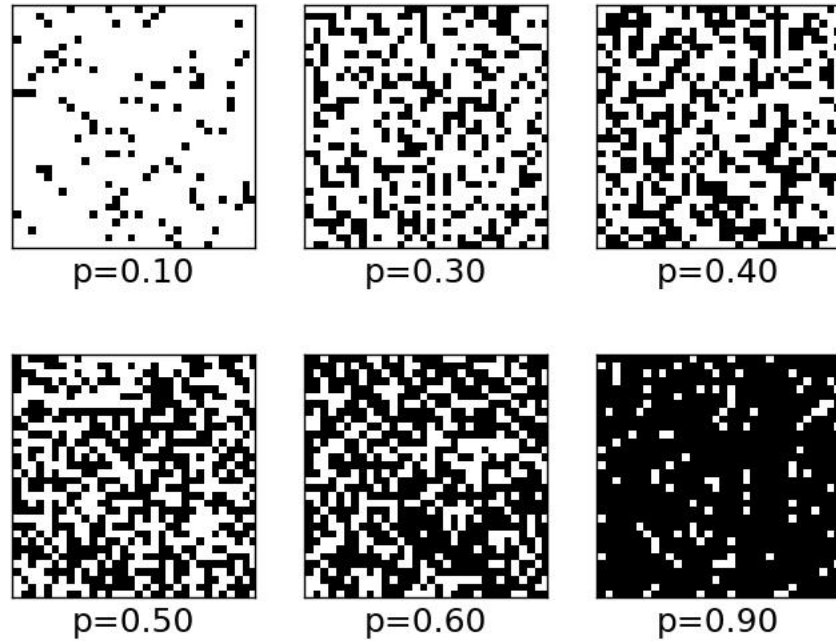


FIGURE 5.1 – Une démonstration de percolation sur une grille à deux dimensions pour différents valeurs de p . Sous le seuil de percolation le système est composé de petites grappes, après un certain point critique p_c une grappe étendue et occupe la grille.

le paramètre de contrôle ($\langle k \rangle = \frac{2E}{n}$) qui décrit la transition de phase. En ce qui concerne le paramètre d'ordre, on peut prendre la fraction des nœuds appartenant au composante géant du réseau (généralement noté $S(t)$). À mesure que le temps augmente, de plus en plus des liens sont ajoutés dans le réseau, dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$), $S(t)$ présente une transition de phase de zéro à $O(1)$ au voisinage d'un point critique ($\langle k \rangle_c$). La percolation classique est une transition de phase géométrique typique, qui a été largement étudiée depuis 1940 dans de nombreux domaines, y compris les mathématiques, la physique statistique et l'ingénierie. De nombreux modèles de percolation, tels que la percolation d'invasion, la percolation de premier passage, la percolation dirigée, la percolation bootstrap et la percolation k-core. Tous ces modèles et beaucoup d'autres ont démontré que la transition de phases est étroitement liée à diverses applications, la turbulence, les modèles magnétiques, les colloïdes, la transition de Hall quantique spin, etc. Le lecteur est adressé aux revues récentes dans [166–168], ses références contiennent un ensemble des principaux résultats et concepts de la percolation classique.

Pendant des décennies, la plupart des transitions dans la percolation classique (ou ordinaire) se sont avérées être de type de second ordre (continue). Un exemple est la percolation de la liaison dans les réseaux ER, pour laquelle la taille de la composante géante augmente progressivement lorsque le paramètre de contrôle, $\langle k \rangle$, dépasse le seuil de percolation. Il convient toutefois de noter qu'il existe également de rares exemples de modèles de percolation présentant une transition de phase de première ordre (discontinue), tels que la percolation bootstrap [169], la percolation k-core [170] et la percolation de brouillage [171]. Par l'observation que les règles de concurrence non locales ou globales lors des processus de fusion de clusters dans le réseau peuvent conduire à une percolation explosive PE, un certain nombre de ces processus, tel que ceux d'Achlioptas ont été étudiés [174–176].

5.4.1 Percolation explosive dans le processus d'Achlioptas

L'idée derrière le processus Achlioptas (PA) [172] est de modifier la règle pour générer des graphiques aléatoires ER. Au lieu d'ajouter des liens aléatoires, dans le processus Achlioptas, on choisit deux liens au hasard, puis on utilise une règle pour sélectionner l'une ou l'autre. Le lien sélectionnée est ensuite ajoutée au graphe alors que l'autre lien est rejeté. Considérons la Fig. 5.2 (adapté de [172]) : **(A)** l'évolution du réseau sous le modèle ER, à chaque étape, deux nœuds sont choisis au hasard et reliés par un bord (représenté par la ligne pointillée). Dans cet exemple, deux composants de taille 7 et 2 sont fusionnés. **(B)** Deux liens aléatoires $\{e_1, e_2\}$ sont sélectionnés à chaque étape mais un seul est ajouté au réseau en fonction d'une règle de sélection, tandis que l'autre est rejeté. Sous la règle de produit (RP), le lien sélectionnée est celle qui minimise le produit des tailles des composants qu'elle fusionne. Dans cet exemple, e_1 (avec le produit $2 \times 7 = 14$) serait choisi et e_2 rejeté (parce que $4 \times 4 = 16$). En revanche, la règle sélectionnant le lien minimisant la somme des tailles des composants au lieu du produit sélectionnerait e_2 plutôt que e_1 . **(C)** Évolution de fraction de la composante géante $\frac{C}{n}$ pour ER, BF (une règle de taille bornée, voir [173]), et RP. Le réseau étudié est de taille $n = 512000$.

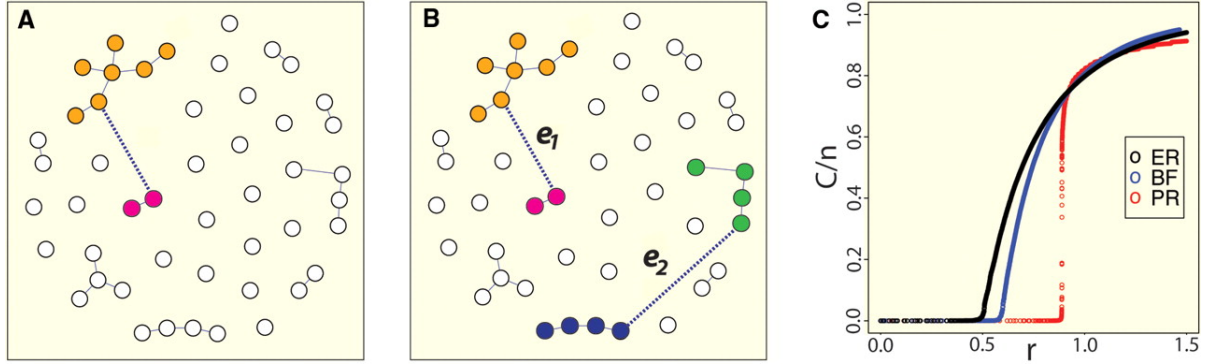


FIGURE 5.2 – Comparaison entre la percolation aléatoire et PA. (A) Percolation ER classique, où les liens sont ajoutés au hasard dans le réseau. (B) Percolation PA, où à chaque étape deux liens sont en compétition pour être établis. (C) Paramètre d'ordre : la taille relative de la composante géante par rapport au nombre des liens ajoutées normalisées par la taille du système.

Achlioptas a d'abord demandé s'il est possible de déplacer le point critique de cette transition de phase en suivant une règle de sélection appropriée. Une règle qui peut naturellement être imaginée est la règle du produit : Parmi les liens potentielles données, choisissez celle qui minimise le produit des tailles des composants contenant les quatre extrémités de $\{e_1, e_2\}$. Cette règle a été suggérée dans [177] comme la plus susceptible de retarder le point critique. Une autre règle est la règle de somme, où la taille du nouveau composant formé est minimisée. La Fig. 5.2.(c) est seulement suffisante pour motiver l'idée que la transition de percolation RP est discontinue. Achlioptas et al. utilisent une méthode intéressante pour vérifier que la transition est bien discontinue. Ils mesurent numériquement le pas de temps t_0 auquel la taille de la composante géante (C) devient plus grand que $n^{\frac{1}{2}}$ et t_1 où C devient plus grand que $\frac{1}{2} \times n$. Un pas de temps correspond à une valeur de r où $r = \frac{E}{n} = \frac{t}{n}$ (puisque le nombre de liens à l'instant t est E). Pour le processus ER, et d'autres transitions de percolation continues, on trouve que $\Delta \equiv t_1 - t_0$ est extensive, c'est-à-dire qu'il évolue avec n . D'un autre côté, pour le modèle RP, ils ont trouvé que $\Delta \sim n^{\frac{2}{3}}$. Puisque Δ est sous-linéaire en n , c'est une preuve numérique que dans la limite thermodynamique $n \rightarrow \infty$, la transition de percolation est en effet discontinue.

Cependant, cette conjecture a été rapidement et rigoureusement désapprouvée par Rioridan et Warnke [178, 179], en montrant qu'il ne peut s'agir d'une transition discontinue, mais

continue. En fait, leur argument montre des transitions de phase continues pour une classe encore plus grande de processus [179]. Leurs résultats indiquent que la continuité de la transition de phase est une caractéristique si robuste et donc tous les processus Achlioptas ont une transition de phase continue. En revanche, Nagler et ses collègues [180] ont montré qu'il est également vrai que certains processus de percolation basés sur le choix d'un nombre fixe de sommets aléatoires sont discontinus, et ils ont résolu ce paradoxe apparent. En identifiant et analysant un processus qui est continu dans le sens défini par Riordan et Warnke [179] mais qui présente encore un nombre infini de sauts discontinus dans un voisinage arbitraire du point de transition : un escalier du Diable. Il ont démontré analytiquement que la continuité à la première transition de connectivité et la discontinuité du processus de percolation sont compatibles pour certains systèmes de percolation compétitifs.

La percolation explosive est un problème scientifique très intéressant dans le domaine plus large de la percolation. Il détient un potentiel considérable pour faire progresser notre connaissance des transitions de phase et des phénomènes critiques. Le fait qu'une légère modification des règles de sélection classiques puisse modifier de manière significative la classe d'universalité de la transition de phase sous-jacente est impressionnant. De plus, il semble que dans des cas extrêmes, l'ordre de transition lui-même puisse également changer.

5.4.2 Percolation explosive sous d'autres modèle

Au-delà de la percolation ordinaire, de nombreux autres modèles ont été développés, où diverses contraintes sur l'occupation des liens afin de produire PE. Dans ce qui suit, nous examinons brièvement certains de ces modèles suivant de la référence [166] :

Les modèles de probabilité

Ce modèle consiste de donner à chaque amas i un poids s_i , et à chaque pas de temps un lien entre une paire des amas ij est occupé par une probabilité proportionnelle à $(s_i s_j)^\alpha$. La somme sur tous les poids est calculée comme une constante de normalisation :

$w = \sum_i \sum_j (s_i s_j)^\alpha$, alors la probabilité que l'amas i lie avec un autre amas j est $\frac{(s_i s_j)^\alpha}{w}$ [181]. Une autre type de ces modèles, c'est le modèle hamiltonien de la référence [182], on commence par un réseau de n nœuds sans aucuns liens, de sorte que chaque nœud appartient initialement à un amas différent. Tout d'abord, un hamiltonien H simple est défini en fonction des tailles de grappe et du nombre de liens ajoutées aux grappes. Ensuite, un nouveau lien e entre toute paire de nœuds non encore connectés est ajouté, avec une probabilité proportionnelle à $e^{(-\beta \Delta H_e)}$, où ΔH_e est le changement d'énergie après l'ajout du lien.

Les modèles Hybrid

Les modèles hybrides sont ceux pour lesquels la règle d'occupation des arêtes est un mélange de percolation ordinaire et de règles de compétitif : à chaque pas de temps, une arête peut être choisie aléatoirement avec probabilité p , alors qu'elle peut aussi être choisie suivant une règle de compétitif donnée par la probabilité $1 - p$. Par exemple, dans [183] RP est utilisé, dans la référence [184], un mélange de $k = 2$ et $k = 3$ -core sur le réseau aléatoire et un mélange de $k = 3$ -core et des modèles de percolation de brouillage dans le réseau 2D sont étudiés. Les modèles hybrides ont été étudiés dans des réseaux 2D [183, 184] et des réseaux ER [183–185].

Les modèles bootstrap

Dans le cadre du PE, certains modèles bootstrap ont été proposés [186]. Le processus standard de percolation bootstrap sur un treillis suppose que les sites sont actifs ou inactifs et que l'état d'un site dépend de ses voisins. Initialement, chaque site est activé avec une probabilité p , et inactivé avec probabilité $1 - p$. Chaque site activé reste dans son état, alors que chaque site inactivé peut devenir actif (et rester actif pour toujours) si ses k voisins les plus proches sont actifs (avec $k = 2, 3, \dots$). La procédure est poursuivie jusqu'à ce que le système atteigne la configuration stable qui ne change plus. Dans l'état final du processus, on s'inquiète de savoir s'il existe ou non un groupe géant couvrant de sites actifs. La percolation bootstrap peut montrer des transitions continues ou discontinues, selon le type de réseau et

sa dimensionnalité.

5.5 Percolation au voisinage de point critique : approche théorique et simulation

5.5.1 Introduction

La détermination de type de transition de phase dans le phénomène de percolation n'est pas encore une science exacte, c'est-à-dire, il n'y a pas encore une règle avec laquelle on peut dire que cet ou celle transition est de premier ou de deuxième ordre indépendamment des mécanismes locales d'évolutions de système ou modèle étudié, même que la percolation est l'un des modèles les plus simples et les plus anciens de la physique statistique. Cependant quelque modèles spécifique, par exemple dans [187], une approche de l'équation de taux a été utilisée pour déterminer le type de transition de percolation, Par exemple, dans l'évolution des réseaux ER, l'équation de vitesse est écrite dans la limite thermodynamique comme :

$$\frac{\partial n_s(t)}{\partial t} = \sum_{i+j=s} \frac{k_i n_i}{c(t)} \frac{k_j n_j}{c(t)} - 2 \frac{k_s n_s}{c(t)}, \quad (5.1)$$

où $c(t) = \sum_s k_s n_s$ est la constante de normalisation, $\frac{k_i n_i}{c(t)} \frac{k_j n_j}{c(t)}$ est la probabilité qu'une amas de taille i et de poids k_i sera connecte à une amas de taille j et de poids k_j et $2 \frac{k_s n_s}{c(t)}$ est la probabilité qu'une amas de taille s et de poids k_s sera connecté à n'importe quel amas dans le réseau.

Dans [181, 188] les auteurs ont généralisé l'Eq. 5.1 en prenant $k_i = i^\omega$, le cas $\omega = 1$ est exactement le cas ER. En utilisant la technique de fonction génératrice, ils ont trouvé l'expression de distribution d'amas au point critique, $n_s(t_c) \sim s^{-\gamma}$, où γ est déterminé

comme :

$$\gamma = \begin{cases} 1 + 2\omega & \text{si } 0 < \omega < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \omega & \text{si } \frac{1}{2} < \omega < 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

En basant sur des simulations numériques, il 'a été trouvé que pour $\frac{1}{2} < \omega < 1$ la transition de phase est continue et pour $0 < \omega < \frac{1}{2}$ la transition de phase est discontinue. Ainsi, il peut déterminer par simulation le type de transition de percolation dans ce modèle en mesurant l'exposant ω en termes de processus d'agrégation de cluster. En 1983, un modèle unidimensionnel de percolation a été introduit [189] dans laquelle les sites i et j sont reliés par la probabilité $p_{ij} = \frac{p}{|i-j|^s}$, où p est un paramètre défini dans l'intervalle $0 \leq p \leq 1$, et s est aussi un paramètre. Dans la référence [190] les auteurs ont prouvé que la transition est discontinue pour $1 < s \leq 2$ et ils ont fait d'autres progrès notables associés à la percolation à longue distance, pour plus de détails voir [191].

Dans ces modèles la caractérisation des transition de phases dépend de certains paramètres intrinsèques et n'est pas une caractérisation générale qu'on peut appliquer à tous différents modèles de percolation. La question qui se pose, c'est : Est-ce-que possible d'unifier la loi, dont on détermine le type de la transition ? Pour reprendre à cette question, il faut d'abord trouver les paramètres ou les grandeurs avec lesquelles on va établir cette unification.

Pour cette raison, on propose une méthode qui peut prédire le type de transition de phase au voisinage de point critique. En utilisant la proposition que la distribution d'amas dans le réseau au voisinage de point critique suit toujours une loi de puissance, on définit deux paramètres : le premier est l'exposant γ de la distribution d'amas au voisinage de point critique, $P(s) = cs^{-\gamma}$, avec c est la constante de normalisation, et le deuxième paramètre est γ' qui dépend de la manière de choisir les amas, plus précisément ce paramètre dépend des corrélations existes dans le réseau, car dans les réseaux corrélés la probabilité de choisir une amas de taille s dans le réseau est différent de sa distribution réel dans le réseau. Par exemple, dans la Fig. 5.3 on observe que dans le cas d'un processus Achlioptas, l'exposant de la distribution d'amas avec laquelle les amas se choisissent, γ' , est différent à la distribution

d'amas réel $\gamma = 2.5$, par contre dans le cas aléatoire les distributions restent exactement les mêmes, $\gamma' = \gamma = 2.5$. Autrement dit, on peut dire que dans les réseaux non-corrélés la probabilité de choisir un amas est exactement lié de sa distribution, qui ce n'est pas le cas dans l'existence des corrélations. D'où on définit la distribution d'amas avec laquelle les amas se choisissent comme $P(s)' = c's^{-\gamma'}$, avec c' est la constante de normalisation.

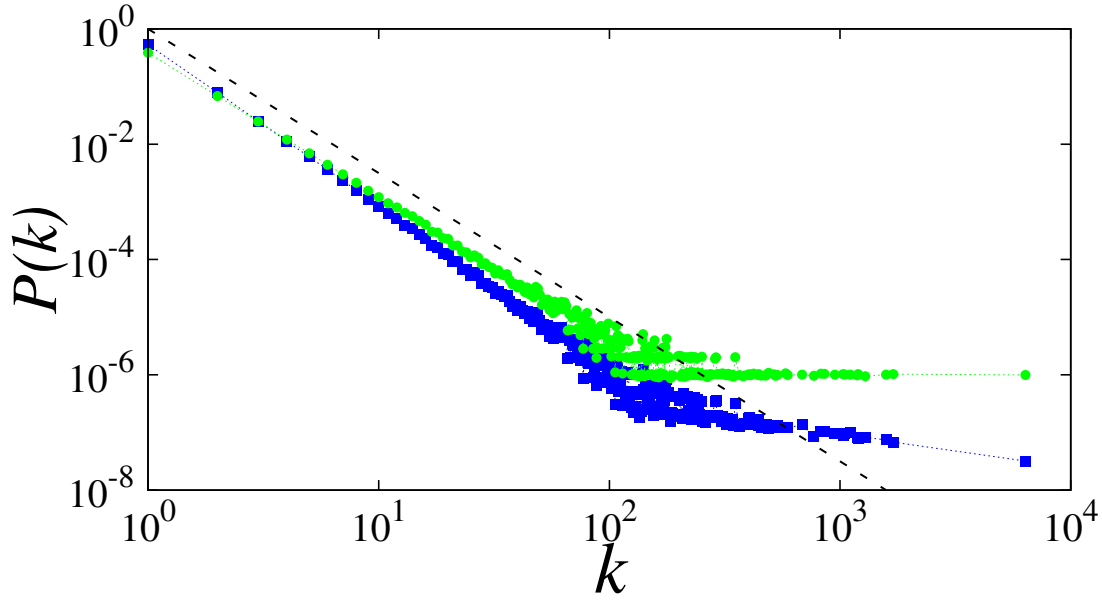


FIGURE 5.3 – La distribution d'amas selon deux méthodes différentes de choisir les liens dans le même réseau, où l'exposant de la distribution d'amas dans le réseau est $\gamma = 2.5$, la première méthode est aléatoire comme le processus ER (cercles verts), la deuxième est par le processus Achlioptas [172] (carrés bleus). La ligne pointillée a pour but de montrer l'exposant $\gamma = 2.5$. La taille du réseau est $n = 10^6$, chaque simulation est moyennée à n réalisations.

5.5.2 Approche théorique

Composante géante :

Dans cette partie on va élaborer une expression de la composante géante, beaucoup plus générale au celle de ER, au voisinage de point critique en fonction de deux paramètres γ et γ' . On suppose que le point critique est notre temps initial, puis on ajoute des liens au réseau. Pour qu'un amas de taille i n'appartient pas à la composante géante, il ne doit pas être connecté à la composante géante via un autre amas de taille j . Cela signifie que : (a) l'amas de taille i n'est pas connecté à l'amas de taille j par un lien, ou (b) l'amas de taille i est connecté à l'amas de taille j , mais l'amas de taille j n'est pas lui-même membre de la composante géante.

Soit $p = \frac{\langle k \rangle}{n-1}$ la probabilité que deux nœuds se connectent, où $\langle k \rangle = \frac{2 \times (\text{nombre de liens ajoutés})}{n}$ est la densité des liens ajoutés par rapport à la taille du réseau. La probabilité de résultat (a) est $(1 - p)^{ij}$, et la probabilité de résultat (b) est $(1 - (1 - p)^{ij})u$, où u est la probabilité qu'un nœud n'appartient pas à la composante géante. D'où la probabilité qu'une amas de taille i n'appartient pas à la composante géante à travers n'importe quelles amas de taille j dans le réseaux est

$$\begin{aligned} q_{ij} &= [(1 - p)^{ij} + (1 - (1 - p)^{ij})u]^{n_a P(j)'} \\ &\approx [1 - ijp(1 - u)]^{n_a P(j)'} \\ &\approx e^{-ijp(1-u)n_a P(j)'}, \end{aligned} \tag{5.3}$$

avec $P(j)' = c' j^{-\gamma'}$ est la probabilité de choisir un amas de taille j et n_a est le nombre des amas. D'où la probabilité qu'un amas de taille i n'appartient pas à la composante géante à travers n'importe quels amas est

$$\begin{aligned} \pi_i &= \prod_{j=1}^K q_{ij} \\ &= e^{-ipn_a(1-u) \sum_{j=1}^K j P(j)'}, \end{aligned} \tag{5.4}$$

CHAPITRE 5. UNE NOUVELLE APPROCHE POUR PRÉDIRE LES TRANSITIONS DE PHASES DANS LE PHÉNOMÈNE DE PERCOLATION

où $K = n_a^{\frac{1}{\gamma'-1}}$ est l'amas maximal au voisinage de point critique ($\langle k \rangle_c$).

D'où $\sum_{j=1}^K jP(j)' = \langle k_a \rangle'$ est le degré moyen avec lequel les amas se choisissent au réseau, ainsi que $\langle k_a \rangle$ est la valeur moyen des amas, alors $n = n_a \langle k_a \rangle$, et on sait que $p = \frac{\langle k \rangle}{n-1}$, d'où on peut écrire

$$\pi_i = e^{\frac{-i(1-u)\langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}}. \quad (5.5)$$

La fraction des amas de taille i qui n'appartient pas à la composante géante par rapport au taille de réseau n est

$$u_i = \frac{n_a i P(i) \pi_i}{n}, \quad (5.6)$$

d'où la fraction des nœuds qui n'appartient pas à la composante géante est

$$u = \sum_{i=1}^K u_i. \quad (5.7)$$

Alors la fraction des nœuds qui appartient à la composante géante est

$$S = 1 - u = 1 - \sum_{i=1}^K u_i. \quad (5.8)$$

De Eq. 5.5, Eq. 5.6 et sachant que $n = n_a \langle k_a \rangle$ et $S = 1 - u$ on obtient

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{\langle k_a \rangle} \sum_{i=1}^K i P(i) e^{\frac{-i S \langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} \\ &= 1 - \frac{1}{\langle k_a \rangle} \int_{i=1}^K i P(i) e^{\frac{-i S \langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} di. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Cette formule au-dessus est une expression beaucoup plus générale à celle de ER [88], en effet, dans le cas où on ajoute des liens aléatoirement sans corrélations, $\gamma = \gamma'$, et lorsque au temps initial tous amas sont de même taille 1, on va trouver exactement l'expression de ER, $S = 1 - e^{-S \langle k \rangle}$.

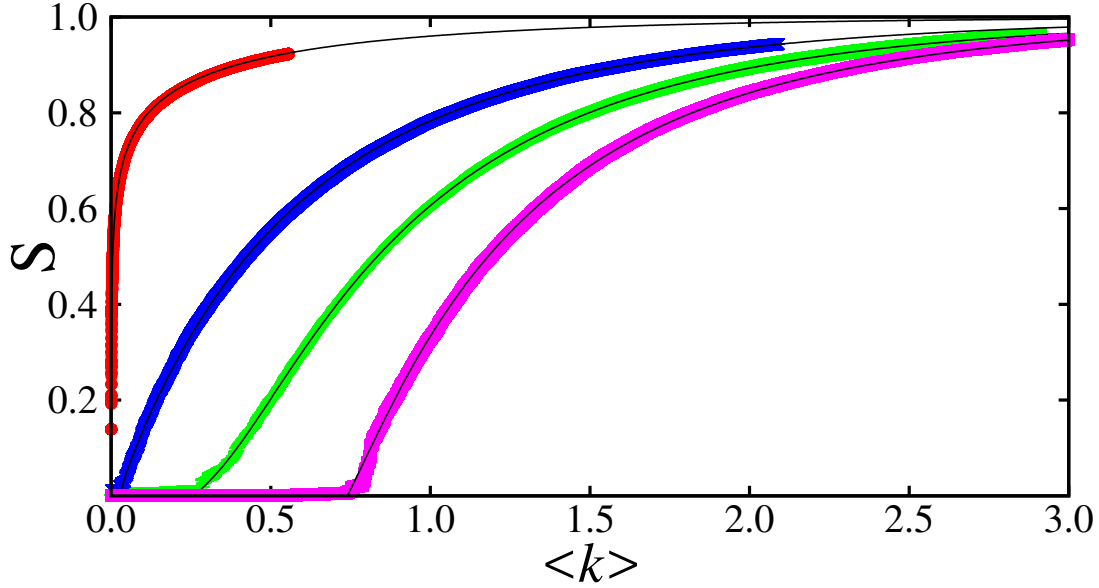


FIGURE 5.4 – Fraction de la composante géante S en fonction de la densité des liens $\langle k \rangle$ pour différents valeurs de γ , les couleurs de gauche à droite représentent respectivement les simulations numériques pour $\gamma = 2, 2.5, 3, 4$, les lignes noire représentent la solution numérique de l'Eq. 5.9. Le nombre des nœuds est $n = 10^5$.

Détermination de point critique :

A partir de Eq. 5.9 et en basant sur une solution graphique qui a été utilisé dans [193] on peut obtenir facilement le point critique $\langle k \rangle_c$ où la composante géante est apparaît, cette méthode s'appuie sur que le point critique $\langle k \rangle$ justifie la condition

$$\left(\frac{\partial \left(1 - \frac{1}{\langle k_a \rangle} \sum_{i=1}^K i P(i) e^{\frac{-iS \langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} \right)}{\partial S} \right)_{S=0} = 1, \quad (5.10)$$

la solution de cette équation au-dessus nous donne l'expression de point critique suivant

$$\langle k \rangle_c = \frac{\langle k_a \rangle^2}{\langle k_a^2 \rangle \langle k_a \rangle'}, \quad (5.11)$$

dans le cas où il n'y a pas des corrélations $\gamma = \gamma'$, c'est-à-dire $\langle k_a \rangle = \langle k_a \rangle'$, on obtient que

$$\langle k \rangle_c = \frac{\langle k_a \rangle}{\langle k_a^2 \rangle} = \frac{1}{\kappa_a}, \quad (5.12)$$

cette expression est beaucoup plus exacte de celle donné par [181], où les auteurs ont trouvé que $\langle k \rangle_c = \frac{1}{\langle k_a^2 \rangle}$, mais en basant sur les simulations numérique (voir Fig. 5.5) il est claire que notre formule est plus exacte.

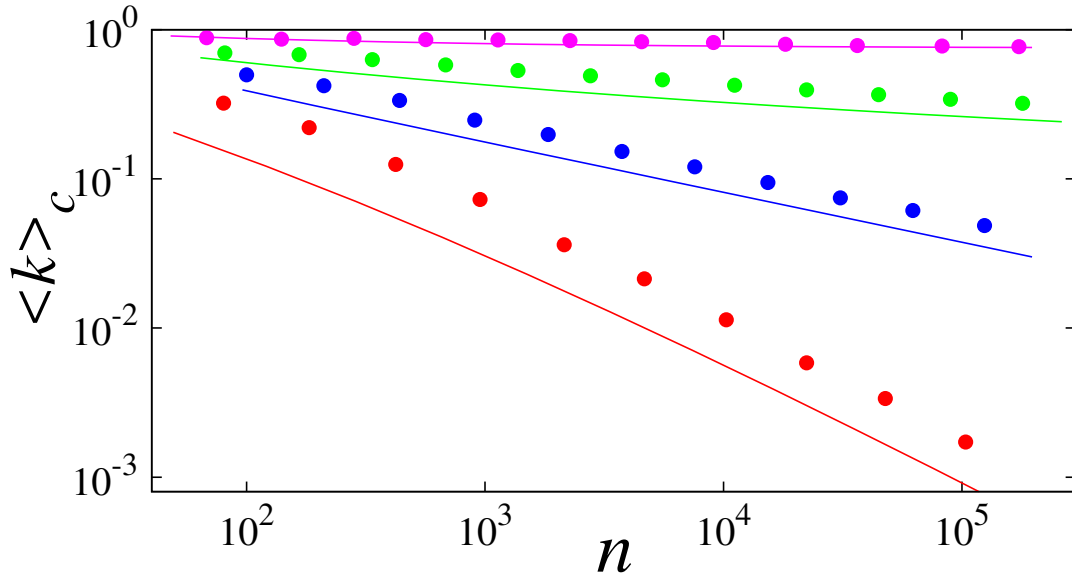


FIGURE 5.5 – Estimation de point critique par les simulations numériques (cercles) et par Eq. 5.12 (ligne). Les valeurs de γ de haut en bas sont respectivement 4, 3, 2.5, 2. Chaque simulation est moyennée à 500 réalisations.

Il convient de signaler que la détermination de point critique par les simulations n'est pas une opération assez facile, il est un peu compliqué et délicat de le trouver par une grande précision. Dans nos simulations représentées dans la Fig. 5.5, nous avons estimé le point critique par la détermination de point où la valeur moyenne des petites amas dans le réseau

est maximale, cependant cette estimation est devient plus pertinent avec l'augmentation de nombre des nœuds du réseau, car les effets d'échelle se diminuent avec la taille. Alors on a l'intuition que notre expression théorique est exacte mais le problème est dans la détermination de point critique par les simulations numériques.

Détermination du type de transition de phase :

Pour déterminer le type de transition de phase on va essayer de calculer la valeur de $\langle k \rangle$ pour que S atteigne une valeur à l'échelle macroscopique, $O(1)$, (par exemple $S = \frac{1}{4}$), si $\langle k \rangle$ tend vers zéro on dit alors que la transition est de première ordre sinon on dit qu'elle est au deuxième ordre.

A partir de Eq. 5.9 et sachant que $P(i) = ci^\gamma$, on obtient

$$S = 1 - \frac{c}{\langle k_a \rangle} \int_{i=1}^K i^{1-\gamma} e^{-\frac{iS\langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} di, \quad (5.13)$$

l'intégrale dans cet expression n'a pas une solution explicite connue, alors il est impossible d'extraire la valeur de $\langle k \rangle$ en fonction de S , pour cette raison on propose une autre approche, on va construire la composante géante par la plus vite manière possible, puis on déduit le type de transition de phase selon γ et γ' .

Pour chaque nouveau lien, on lie les deux amas les plus grands dans le réseau¹, mathématiquement on réécrit cela par cette expression

$$S = \sum_{i=1}^t k(i) = \int_1^t k(i) di, \quad (5.14)$$

où t représente le temps et également le nombre des liens ajoutés, et $k(t)$ est $t^{\text{ème}}$ degré maximal, avec $k(1) = K$.

1. Cette approche est valable sauf au voisinage de point critique lorsque la distribution d'amas est suivie d'une loi de puissance, car lorsque on commence d'ajouter les liens par cette méthode au loin du point critique, cela peut ralentir la transition au point critique au lieu de l'accélérer.

CHAPITRE 5. UNE NOUVELLE APPROCHE POUR PRÉDIRE LES TRANSITIONS DE PHASES DANS LE PHÉNOMÈNE DE PERCOLATION

$k(t)$ peut être calculer par l'expression suivante

$$\sum_{i=k(t)}^K n_a P(i) = \int_{i=k(t)}^K n_a P(i) di = t, \quad (5.15)$$

d'où on obtient que

$$\begin{aligned} k(t) &= \left(K^{1-\gamma} + \frac{(\gamma-1)t}{cn_a} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \\ &= \left(\frac{t+1}{n_a} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{car : } c = \gamma - 1 \quad \text{et} \quad K = n_a^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &= \left(\frac{t}{n_a} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad \text{car : } t+1 \approx t, \end{aligned} \quad (5.16)$$

de Eq. 5.14 et Eq. 5.16 on trouve que

$$S = \frac{\gamma-1}{(\gamma-2)\langle k_a \rangle} \left(\left(\frac{t}{n_a} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}} - \left(\frac{1}{n_a} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}} \right), \quad (5.17)$$

sachant que $\langle k_a \rangle = \frac{\gamma-1}{\gamma-2}$ et $t = \frac{n\langle k \rangle}{2}$, on obtient que Eq. 5.17 devient

$$S = \left(\frac{\langle k \rangle (\gamma-1)}{2(\gamma-2)} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}} - \left(\frac{1}{n_a} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}}, \quad (5.18)$$

d'où on obtient

$$\langle k \rangle = \frac{2(\gamma-2)}{\gamma-1} \left(S + \left(\frac{1}{n_a} \right)^{\frac{2-\gamma}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1-\gamma}{2-\gamma}}. \quad (5.19)$$

Pour $\gamma > 2$ et pour une valeur S donné qui différent au 0, on peut écrire dans la limite thermodynamique que $\langle k \rangle = \frac{2(\gamma-2)}{\gamma-1} \left(S \right)^{\frac{1-\gamma}{2-\gamma}}$, sous les conditions précédents cette dernière expression ne peut jamais tend vers zéro, ce que signifie absolument que la transition de phase ne peut pas être discontinue pour $\gamma > 2$, certes elle est au deuxième ordre, ou plutôt elle est continue.

On a démontré ici qu'il est impossible de trouvé une transition de phase de première ordre, lorsque l'exposant $\gamma > 2$ au voisinage de point critique indépendamment de l'autre exposant γ' , c'est-à-dire indépendamment de corrélations collectives dans le réseau.

CHAPITRE 5. UNE NOUVELLE APPROCHE POUR PRÉDIRE LES TRANSITIONS DE PHASES DANS LE PHÉNOMÈNE DE PERCOLATION

Maintenant on va étudier le cas $\gamma = 2$ pour déterminer quelle type de transition de phase apparaît ici.

Dans ce cas, l'intervalle de Eq. 5.13 se calcule en s'appuyant sur l'approximation suivante

$$e^{\frac{-iS\langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} \approx \frac{1}{1 + \frac{iS\langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}}, \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned} \int_{i=1}^K \frac{i^{-1}}{1 + \frac{iS\langle k \rangle \langle k_a \rangle'}{\langle k_a \rangle}} di &= \left[\ln(i) - \ln(i\langle k_a^2 \rangle \langle k \rangle S + \langle k_a \rangle) \right]_{i=1}^{i=K} \\ &= \ln(K) - \ln(K\langle k_a^2 \rangle \langle k \rangle S + \langle k_a \rangle) \quad \text{car : } K \gg \langle k_a \rangle \end{aligned} \quad (5.20)$$

si on remplace Eq. 5.20 dans Eq. 5.13 on obtient

$$S = 1 - \frac{c}{\langle k_a \rangle} (\ln(K) - \ln(K\langle k_a^2 \rangle \langle k \rangle S + \langle k_a \rangle)), \quad (5.21)$$

d'où l'expression de $\langle k \rangle$ s'écrit

$$\langle k \rangle = \frac{e^{\frac{c \ln(K) + \langle k_a \rangle (S-1)}{c}} - \langle k_a \rangle}{K\langle k_a \rangle' S}, \quad (5.22)$$

sachant que pour $\gamma = 2$ on a $K = n_a$ et $\langle k_a \rangle = c \ln(n_a)$, on obtient

$$\langle k \rangle = \frac{n_a^S - c \ln(n_a)}{n_a \langle k_a \rangle' S}, \quad (5.23)$$

pour $n_a \gg 1$ on a $n_a \gg c \ln(n_a)$ et lorsque $S > 0$ on peut écrire

$$\langle k \rangle = \frac{n_a^{S-1}}{\langle k_a \rangle' S}, \quad (5.24)$$

il est clair que cette expression au-dessus tend toujours vers 0 pour toutes valeurs de $S < 1$ et pour n'importe quelle valeur de γ' . Le fait que $\langle k \rangle$ tende vers 0 cela signifie que la transition est discontinue dans la limite thermodynamique, c'est-à-dire, pour $\gamma = 2$ on a une transition de phase de première ordre.

Alors nous allons montrer comment le type de la transition de phase dépend seulement de la distribution d'amas au voisinage de point critique (l'exposant γ), et ne dépend pas des

corrélations collectives entre les amas (l'exposant γ').

En outre, on peut déduire que les corrélations n'ont aucune importance au voisinage de point critique dans la détermination du type de transition de phase, plutôt leur rôle est seulement de mener le réseau à atteindre une certaine distribution d'amas, la transition sera de première ordre si les corrélations réussissent à mener le réseau à atteindre un exposant inférieur ou égale 2, sinon la transition sera de deuxième ordre.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit une méthode pour anticiper le type de transition de phase dans le phénomène de percolation au voisinage de point critique. Cette méthode basé sur deux paramètres, le premier est l'exposant de la distribution d'amas au voisinage de point critique, γ , et le deuxième est l'exposant de la distribution d'amas avec lesquels les amas se choisissent, γ' , ce dernier reflète les corrélations dans le réseau. Nous avons trouvé qu'une transition de phase est de première ordre si $\gamma \leq 2$, sinon la transition est de deuxième ordre, indépendamment de la valeur de γ' . En outre, on en déduit que les corrélations collectives entre les amas au voisinage de point critique n'ont aucune influence sur le type de transition de phase, mais elles jouent le rôle pour que le réseau acquière un certain exposant de distribution d'amas.

Conclusion

Dans cette thèse, quatre contributions ont été effectuées au domaine des réseaux complexes, soit par résoudre des problèmes et des difficultés concernant les calculs théoriques, ou par proposer des nouvelles idées. Dans la première contribution, deuxième chapitre, nous avons introduit un simple modèle de réseau complexe avec un critère d'attachement préférentiel sans l'effet "rich get richer", le réseau obtenu est homogène, ce qui démontre le rôle crucial de l'effet "rich get richer" dans la topologie du réseau, ainsi on a déduit qu'un traitement préférentiel aux nœuds les moins connectés équivaut à utiliser une probabilité d'attachement aléatoire. En calculant le degré moyen instantané d'un nœud sélectionné et ses fluctuations, nous montrons comment le degré moyen de hubs et ses fluctuations divergent avec le temps dans le modèle BA, et restent finis dans notre modèle.

Dans la deuxième contribution, troisième chapitre, nous avons étudié en détail certains aspects fondamentaux des réseaux libre-échelle aléatoires non corrélés. Avec des étapes et des hypothèses simples, nous avons obtenu les expressions explicites du nombre des nœuds à une distance donnée d'un nœud arbitraire, n_ℓ . Nous avons obtenu également la description précise de la forme de la distribution, en plus de détail, nous avons montré que n_ℓ augmente en tant que loi de puissance pour les premières couches et après avoir atteint un maximum il diminue exponentiellement dans les dernières couches. Profitant de la forme de la distribution n_ℓ , nous avons pu déduire l'expression explicite de PCC. Les expressions obtenues reproduisent les formes de mise à l'échelle connues pour différentes plages de γ . Autrement dit, le monde ultra-petit pour $2 < \gamma < 3$, et le petit monde pour $\gamma \geq 3$. Nos

CONCLUSION

résultats théoriques concordent très bien avec les simulations, sauf dans le cas de $\gamma = 3$, où nous avons observé la même forme, dans les queues de n_ℓ , mais avec une petite déviation dans la position du maximum. Cette différence n'affecte pas la forme de mise à l'échelle de PCC pour cette valeur de γ , ainsi que nos expressions sont les plus précises dans la littérature.

Dans la troisième contribution, quatrième chapitre, en utilisant la transformation de groupe de renormalisation GR sur le modèle NW, on a trouvé une expression analytique de PCC mieux que l'ancien déjà existé dans la littérature. À partir de cette nouvelle expression, on a déduit à la fois que le paramètre $y = 2k^2\phi$ est le variable dont la propriété petit-monde émerge, avec lequel on détermine l'erreur de la fonction universelle $\ell = \acute{n}f(x)$, et en fonction de lui une nouvelle fonction universelle apparaît. Alors c'est une émergence spectaculaire qui se passe en fonction du paramètre y .

Dans la quatrième contribution, dernier chapitre, nous avons introduit une méthode pour anticiper le type de transition de phase dans le phénomène de percolation au voisinage de point critique, nous avons trouvé qu'une transition de phase de première ordre est impossible si l'exposant de distribution d'amas $\gamma > 2$, indépendamment de la valeur de l'exposant γ' , en revanche elle est du première ordre si $\gamma \leq 2$. De façons générale, il s'avère que si on connaît γ au voisinage de point critique, c'est suffisant pour connaître le type de transition de phase.

Bibliographie

- [1] Jeong H., B.Tombor, R.Albert, Z.N.Oltvai, and A.L.Barabasi. The large-scale organization of a metabolic networks. *Nature*, 407 :651–654, (2000).
- [2] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communication Review*, 29 :251, (1999).
- [3] A.-L. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286 :509–512, (1999).
- [4] Cohen, J. E., Briand F., and Newman, C. M. Community food webs : Data and theory. *Biomathematics*, 20, (1990).
- [5] Pimm, S. L. *Food Webs*. University of Chicago Press, Chicago, 2nd ed. (2002).
- [6] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Renormalization group analysis of the small-world network model. *Phys. Lett.A*, 263 :341, (1999).
- [7] F. R. Pitts. A graph theoretic approach to historical geography. *The Professional Geographer*, 17 :15–20, (1965).
- [8] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy, and H. E. Stanley. Classes of small-world networks. *Proc. Natl. Acad. Sci, USA* 97 :11149–11152, (2000).
- [9] I. Dobson, B. A. Carreras, V. E. Lynch, and D. Newman. Complex systems analysis of series of blackouts : Cascading failure, critical points, and self-organization. *Chaos*, 17 :026103, (2007).
- [10] P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram, G. Mukherjee, and S. S. Manna. Small-world properties of the indian railway network. *Phys.Rev. E*, 67 :036106, (2003).

BIBLIOGRAPHIE

- [11] A. Broido and K. C. Claffy. Internet topology : Connectivity of ip graphs, in s. fahmy and k. park, eds., scalability and traffic control in ip networks, no. 4526 in proc. spie. *International Society for Optical Engineering*, page 172–187, (2001).
- [12] G. B. West, J. H. Brown, and B. J. Enquist. A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. *Science*, 276 :122–126, (1997).
- [13] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. *Evolution of Networks : From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford Univ Press, Oxford, (2003).
- [14] R. Cohen and S. Havlin. Scale-free networks are ultrasmall. *Phys. Rev. Lett*, 90 :058701, (2003).
- [15] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Metric structure of random networks. *Nucl. Phys. B*, 653 :307, (2003).
- [16] F. Chung and L. Lu. The average distance in a random graph with given expected degrees. *Internet Math*, 1 :91–113, (2003).
- [17] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, and U. Alon. Network motifs : simple building blocks of complex networks. *Science*, 298 :824–827, (2002).
- [18] J. Scott. *Social Network Analysis : A Handbook*. Sage Publications, London, 2nd ed. (2000).
- [19] W. W. Zachary. An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, 33 :452–473, (1977).
- [20] J. L. Moreno. *Who Shall Survive ?* Beacon House, Beacon, (1934).
- [21] J. Galaskiewicz and P. V. Marsdeny. Interorganizational resource networks : Formal patterns of overlap. *Social Science Research*, 7 :89–107, (1978).
- [22] Krioukov, D., Kitsak, M., Sinkovits, R. S., Rideout, D., Meyer, D., and Boguna, M. Network cosmology. *Scientific Reports*, 2 :793, (2012).
- [23] E. Bullmore and O. Sporns. Complex brain networks : Graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nat Rev Neurosci*, 10 :168–198, (2009).
- [24] D. Lazer and al. Computational social science. *Science*, 323 :721–723, (2009).

BIBLIOGRAPHIE

- [25] Y.Y. Liu, J.J. Slotine, and A.L. Barabasi. Controllability of complex networks. *Nature*, 473 :167–173, (2011).
- [26] L. Smolin. *The life of the cosmos*. Oxford University Press, Oxford, (1997).
- [27] C. A. Trugenberger. Quantum gravity as an information network : Self-organization of a 4d universe. *Phys.Rev. D*, 92 :084014, (2015).
- [28] Bianconi, G., Rahmede, C., and Wu, Z. Complex quantum network geometries : Evolution and phase transitions. *Phys. Rev. E*, 92 :022815, (2015).
- [29] B. Bollobas and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, Cambridge, (2006).
- [30] A. Acin, J. I. Cirac, and M. Lewenstein. Entanglement percolation in quantum networks. *Nature Physics*, 3 :256, (2007).
- [31] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [32] J. Novotny, G. Alber, and I. Jex. Universality in random quantum networks. *Phys. Rev. A*, 92 :062335, December (2015).
- [33] D. Bruß and G. Leuchs (eds.). *Lectures on Quantum Information*. Weinheim, Wiley-VCH, (2007).
- [34] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [35] M. Mitchell. Complex systems : Network thinking. *Artificial Intelligence*, 170 :1194–1212, (2006).
- [36] I.A. Basheer M. Hajmeer. Artificial neural networks : fundamentals, computing, design and application. *Journal of Microbiological Methods*, 43 :3–31, (2000).
- [37] A. Passerini, G. Tack, and T. Guns. Introduction to the special issue on combining constraint solving with mining and learning. *Artificial Intelligence*, 244 :1–5, (2017).
- [38] F. Harary. *Graph Theory*. Perseus, Cambridge, MA (1995).

BIBLIOGRAPHIE

- [39] D. B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (1996).
- [40] S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, page 56–67, May (1967).
- [41] J. Travers and S. Milgram. *Sociometry*, 32 :425, (1969).
- [42] P. Dodds, R. Muhamad, and D. Watts. An experimental study of search in global social networks. *Science*, 301(5634) :827–829, (2003).
- [43] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani. *Evolution and Structure of the Internet : A Statistical Physics Approach*. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [44] S. Wasserman and K. Faust. *Social Network Analysis : Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [45] Boccaletti, Stefano, and al. Complex networks : Structure and dynamics. *Physics reports*, 424.4 :175–308, (2006).
- [46] Q. Ye, B. Wu, and B. Wang. Distance distribution and average shortest path length estimation in real-world networks. *In Proceedings of the 6th international conference on Advanced data mining and applications : Part I*, volume 6440 of Lecture Notes in Computer Science :322–333, (2010).
- [47] V. Latora and M. Marchiori. Efficient behavior of small-world networks. *Phys. Rev. Lett*, 87(19) :198701, Oct (2001).
- [48] S. Melnik, A. Hackett, M. A. Porter, P. J. Mucha, and J. P. Gleeson. The unreasonable effectiveness of tree-based theory for networks with clustering. *Phys. Rev. E*, 83 :036112, (2011).
- [49] M. Zhao, T. Zhou, B.-H. Wang, G. Yan, H.-J. Yang, and W.-J. Bai. Relations between average distance, heterogeneity and network synchronizability. *Physica A*, 371 :377, (2006).
- [50] R. Albert, H. Jeong, and A. L. Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature (London)*, 406 :378, (2000).

- [51] L. A. Adamic. The small world web. in proceedings of the third european conference on research and advanced technology for digital libraries. *Sociometry*, 1696 of Lecture Notes in Computer Science :443–452, (1999).
- [52] P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram, G. Mukherjee, and S. S. Manna. *Small-world properties of the indian railway network*. (2002).
- [53] A. Wagner and D. Fell. *The small world inside large metabolic networks*. (August 21 2000).
- [54] S. Bilke and C. Peterson. Topological properties of citation and metabolic networks. *Rev. E*, 64 :036106, (2001).
- [55] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 393 :440–442, (1998).
- [56] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*45, 2 :167–256, (2003).
- [57] G. Bianconi and A. Capocci. Number of loops of size h in growing scale-free networks. *Phys. Rev. Lett*, 90 :art. no. 078701, (2003).
- [58] A. Fronczak, J. A. Holyst, M. Jedynek, and J. Sienkiewicz. Higher order clustering coefficients in barabasi-albert networks. *Phys. A*, 316 :688–694, (2002).
- [59] P. M. Gleiss, P. F. Stadler, A. Wagner, and D. A. Fell. Relevant cycles in chemical reaction networks. *Adv. in Complex Systems*, 4 :207–226, (2001).
- [60] M. Boguñá and R. Pastor-Satorras. *Phys. Rev. E*, 66 :047104, (2002).
- [61] S. Maslov and K. Sneppen. Specificity and stability in topology of protein networks. *Science*, 296 :910–913, (2002).
- [62] M. Dehmer. *Structural Analysis of Complex Networks*. Springer, (2011).
- [63] P. Hage and F. Harary. Eccentricity and centrality in networks. *Soc Networks*, 17 :57–63, (1995).

BIBLIOGRAPHIE

- [64] S. Wasserman and K. Faust. *Social network analysis : methods and applications. Structural analysis in the social sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [65] L. C. Freeman. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry*, 40 :35–41, (1977).
- [66] Famous trails to Paul Erdos. Relevant cycles in chemical reaction networks. *Math. Intelligencer*, 51 :51–63, (1999).
- [67] M. E. J. Newman. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Contemporary Physics*, 46 :323–351, (2005).
- [68] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and M. E. J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51 n.4 :661–703, November (2009).
- [69] B. Gutenberg and R. F. Richter. Energy ratio of reflected and refracted seismic waves. *Bull. Seismol. Soc. Am*, 34 :85–102, (1944).
- [70] G. Neukum and B.A. Ivanov. in *Hazards Due to Comets and Asteroids*. edited by T. Gehrels, (University of Arizona Press, Tucson, AZ, 1994),pp. 359 – 416.
- [71] G.K. Zipf. *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1949.
- [72] J.B. Estoup. *Gammes Stenographiques*. Institut Stenographique de France, Paris, (1916).
- [73] D.H. Zanette and S.C. Manrubia. Vertical transmission of culture and the distribution of family names. *Physica A*, 295 :1, (2001).
- [74] A.J. Lotka. The frequency distribution of scientific productivity. *Acad. Sci*, 16 :317–323, (1926).
- [75] D.J. de S. Price. Networks of scientific papers. *Science*, 149 :510–515, (1965).
- [76] L. A. Adamic and B. A. Huberman. Q. j. electron. *Commerce*, 1 :512, (2000).

- [77] R.A.K. Cox, J.M. Felton, and K.C. Chung. The concentration of commercial success in popular music : an analysis of the distribution of gold records. *J. Cult. Econ*, 19 :333–340, (1995).
- [78] J.C. Willis and G.U. Yule. Some statistics of evolution and geographical distribution in plants and animals and their significance. *Nature*, 109 :177, (1922).
- [79] V. Pareto. *Cours d'Economie Politique*. Droz, Geneva, (1896).
- [80] G. Bianconi and C. Rahmede. Complex quantum network manifolds in dimension $d > 2$ are scale-free. *Scientific Reports*, 5 :13979, (2015).
- [81] Dourisboure, Y., F. Geraci,, and M. Pellegrini. in WWW'07 : Proceedings of the 16th international conference on the World Wide Web (ACM, New York, NY, USA). pages 461–470, (2007).
- [82] Flake, G. W., S. Lawrence, C. Lee Giles, and F. M. Coetzee. Self-organization and identification of web communities. *IEEE Computer*, 35 :66, (2002).
- [83] J. Chen and B. Yuan. Detecting functional modules in the yeast protein–protein interaction network. *Bioinformatics*, 22(18) :2283, (2006).
- [84] A. W. Rives and T. Galitski. Modular organization of cellular networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100(3) :1128, (2003).
- [85] B. Krishnamurthy and J. Wang. On network-aware clustering of web clients. *Proceedings of the conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication*, 30(4) :97, (2000).
- [86] M. Steenstrup. Cluster-based networks. *Addison Wesley, Reading, USA*, chapter 4 :75–138, (2001).
- [87] P. Csermely. Cluster-based networks. *Trends Biochem. Sci*, 33(12) :569, (2008).
- [88] P. Erdos and A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6 :290–297, (1959).
- [89] P. Erdos and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5 :17–61, (1960).

BIBLIOGRAPHIE

- [90] P. Erdos and A. Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 12 :261–267, (1961).
- [91] B. Bollobás. Modern graph theory. *Springer*, (1998, New York).
- [92] D.J. Watts and S.H. Strogatz. Collective dynamics of small-world networks. *Nature*, 393 :440–442, (1998).
- [93] M. Barthélemy and L. A. N. Amaral. Small-world networks : Evidence for a crossover. *Phys. Rev. Lett*, 82 :3180, (1999).
- [94] M. E. J. Newman, C. Moore, and D.J. Watts. Mean-field solution of the small-world network model. *Phys. Rev. Lett*, 84 :3201, (2000).
- [95] M.E.J. Newman. *Networks : An Introduction*. University of Michigan and Santa Fe Institute Press, (2010)p.558- 560.
- [96] A. Barrat and M. Weigt. On the properties of small-world network models. *Eur. Phys. J. B*, 13 :547, (2000).
- [97] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Growing network with heritable connectivity of nodes. *ArXiv Condensed Matter e-prints*, (2000).
- [98] P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz. Connectivity of growing random networks. *Physical Review Letters*, 85 :4629–4632, (2000).
- [99] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Structure of growing networks with preferential linking. *Phys. Rev. Lett*, 85 :4633–4636, (2000).
- [100] B. Bollobás and O. Riordan. A polynomial of graphs on surfaces. *Math. Ann*, 323 :1–35, (2002).
- [101] R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys*, 74 :47, (2002).
- [102] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. Evolution of networks. *Adv. Phys*, 51 :1079, (2002).
- [103] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*, 45 :167, (2003).

BIBLIOGRAPHIE

- [104] W. B. Deng, L. Guo, W. Li, and X. Cai. World wide marine transportation network : Efficiency and container throughput. *Chin. Phys. Lett*, 26 :118901, (2009).
- [105] R. Albert, I. Albert, and G. L. Nakarado. Structural vulnerability of the north american power grid. *Phys. Rev. E*, 69 :025103, (2004).
- [106] T. B. Achacoso and W. S. Yamamoto. *AY's Neuroanatomy of C. elegans for Computation*. CRC Press, Boca Raton, FL, (1992).
- [107] A.-L. Barabási, H. Jeong, and R. Albert. Statistical mechanics and its applications. *Physica A*, 272 :173, (1999).
- [108] Y.-B. Xie, T. Zhou, and B.-H. Wang. Scale-free networks without growth. *Physica A*, 387 :1683, (2008).
- [109] V. K. Samalam. *arXiv :1202.1498*.
- [110] A. Nordsieck, W. E. Lamb Jr., and G. E. Uhlenbeck. On the theory of cosmic-ray showers i : The furry model and the fluctuation problem. *Physica*, 7(4) :344–360, (1940).
- [111] W. H. Furry. On fluctuation phenomena in the passage of high energy electrons through lead. *Phys. Rev*, 52(6) :569–581, (1937).
- [112] W. Feller. Die grundlagen der volterraschen theorie des kampfes ums dasein in wahrscheinlichkeitstheoretischer behandlung. *Acta Biotheor*, 52(6) :11–40, (1939).
- [113] M. Delbrück. Statistical fluctuations in autocatalytic reactions. *J. Chem. Phys*, 8(1) :120–124, (1940).
- [114] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland Personal Library. Elsevier, Amsterdam, 3rd edition, 2007.
- [115] C. Gardiner. *Stochastic Methods - A Handbook for the Natural and Social Sciences*. volume 13 of Springer Series in Synergetics, Amsterdam, Springer, Berlin, Heidelberg, 4th edition, 2009.
- [116] Weber M F and Frey E. Master equations and the theory of stochastic path integrals. *Rep. Prog. Phys*, 80 :046601, (2017).

BIBLIOGRAPHIE

- [117] R. J. Glauber. Time-dependent statistics of the ising model. *J. Math. Phys*, 4(2) :294–307, (1963).
- [118] K. Kawasaki. Diffusion constants near the critical point for time-dependent ising models. i. *Phys. Rev*, 145(1) :224–230, (1966).
- [119] K. Kawasaki. Diffusion constants near the critical point for time-dependent ising models. ii. *Phys. Rev*, 148(1) :375–381, (1966).
- [120] K. Kawasaki. Diffusion constants near the critical point for time-dependent ising models. iii. *Phys. Rev*, 150 :285–290, (1966).
- [121] A. M. Walczak, A. Mugler, and C. H. Wiggins. A stochastic spectral analysis of transcriptional regulatory cascades. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 106 :6529–6534, (2009).
- [122] C. V. Rao, D. M. Wolf, , and A. P. Arkin. Control, exploitation and tolerance of intracellular noise. *Nature*, 420 :231–237, (2002).
- [123] L. S. Tsimring. Noise in biology. *Rep. Prog. Phys*, 77 :026601, (2014).
- [124] N. T. J. Bailey. A simple stochastic epidemic. *Biometrika*, 37 :193–202, (1950).
- [125] K. Rock, S. Brand, J. Moir, and M. J. Keeling. Dynamics of infectious diseases. *Rep. Prog. Phys*, 77 :026602, (2014).
- [126] E. Clayton, D. P. Doupé, A. M. Klein, D. J. Winton, B. D. Simons, and P. H. Jones. A single type of progenitor cell maintains normal epidermis. *Nature*, 446 :185–189, (2007).
- [127] W. Weidlich and M. Braun. The master equation approach to nonlinear economics. *J. Evol. Econ*, 2 :233–265, (1992).
- [128] D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson, and C. M. Harris. Fundamentals of queueing theory. *John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 4th edition*, (2008).
- [129] A. L. Barabási. *Network Science*. Cambridge University Press, (2015).
- [130] A. L. Barabási. *Linked : The New Science of Networks*. Perseus, Cambridge, 2002.

BIBLIOGRAPHIE

- [131] A. Barrat et al. *Dynamical Processes on Complex Networks*. (Cambridge University Press, 2008).
- [132] R. Cohen and S. Havlin. *Complex Networks : Structure, Robustness and Function*. (Cambridge University Press, 2010).
- [133] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller, and E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21 :1087–1092, (1953).
- [134] M. E. J. Newman. *Networks : An Introduction*. University of Michigan and Santa Fe Institute Press, (2010)p.456.
- [135] R. Cohen and S. Havlin. *Complex Networks : Structure, Robustness and Function*. (Cambridge University Press, 2010).pp :72-77.
- [136] T. Kalisky, R. Cohen, O. Mokryn, D. Dolev, Y. Shavitt, and S. Havlin. Equation of state calculations by fast computing machines. *Phys. Rev. E*, 74 :066108, (2006).
- [137] R. Cohen, S. Havlin, and D. ben Avraham. *Structural properties of scale free networks*, in : S. Bornholdt and H. G. Schuster, editors, *Handbook of graphs and networks*, chapter 4. Wiley-VCH, Berlin, (2002).
- [138] F. Chung and L. Lu. The average distances in random graphs with given expected degrees. *PNAS*, 99 :15879–15882, (2002).
- [139] R. J. Fox and D. R. Bellwood. Herbivores in a small world : network theory highlights vulnerability in the function of herbivory on coral reefs. *Fuctional Ecology*, 28 :642, (2014).
- [140] R. van der Hofstad, G. Hooghiemstra, and D. Znamenski. Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. *Electronic Journal of Probability*, 12 :703766, (2007).
- [141] B. Bollobás. *Random Graphs*. Academic Press, London, (1985).
- [142] A. Fronczak, P. Fronczak, and J. A. Holyst. Average path length in random networks. *Phys. Rev. E*, 70 :056110, (2004).

BIBLIOGRAPHIE

- [143] R. van der Hofstad, G. Hooghiemstra, and P. Van Mieghem. Random graphs with arbitrary i.i.d. degrees. *Random Structures and Algorithms*, 26 :76123, (2006).
- [144] R. Cohen and S. Havlin. *Scaling properties of complex networks and spanning trees, Chapter 3 in "Handbook of Large-Scale Random Networks"*, Eds. Bela Bollobas, Robert Kozma and Dezso Miklos. (Bolyai Society of Mathematical Studies and Springer, 2009).
- [145] B. Bollobás and O. Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, 24 :5–34, (2004).
- [146] B. Bollobás and O. Riordan. *Handbook of graphs and networks*, eds. S. Bornholdt and H. G. Schuster. Wiley-VCH, Berlin, (2002).
- [147] M. E. J. Newman. *Networks : An Introduction*. University of Michigan and Santa Fe Institute Press, (2010).
- [148] M. Newman and D. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys. Lett. A*, 341, (1999).
- [149] A. Pelissetto and E. Vicari. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Phys. Rept*, 368 :549, (2002).
- [150] K. G. Wilson. The renormalization group : Critical phenomena and the kondo problem. *Rev. Mod. Phys*, 47 :773–840, (1975).
- [151] A. Barrat. Comment on ‘Small-world networks : crossover picture’.
- [152] M. E. J. Newman and D. J. Watts. Scaling and percolation in the small-world network model. *Phys. Rev.E*, 60 :7332, (1999).
- [153] M. Argollo de Menezes, C. Moukarzel, and T.J.P. Penna. *Europhys. Lett*, 50 :574, (2000).
- [154] S. Hong and A. Dey. Network analysis of cosmic structures : network central- ity and topological environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 450 :1999–2015, June (2015).
- [155] S. H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410 :268–276, (2001).

BIBLIOGRAPHIE

- [156] M. E. J. Newman, D. J. Watts, and S. H. Strogatz. Random graph models of social networks. *Proc. Natl Acad. Sci*, 99 :2566–2572, (2002).
- [157] C. Song, S. Havlin, and H. A. Makse. Origins of fractality in the growth of complex networks. *Nature Phys*, 2 :275–281, (2006).
- [158] R. Parshani, S. V. Buldyrev, and S. Havlin. Interdependent networks : Reducing the coupling strength leads to a change from a first to second order percolation transition. *Phys. Rev. Lett*, 105 :048701, (2010).
- [159] R. Parshani, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley, and S. Havlin. Catastrophic cascade of failures in interdependent networks. *Nature*, 464 :1025–1028, (2010).
- [160] D. Ben-Avraham and S. Havlin. *Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems*. Cambridge Univ. Press, (2001).
- [161] A. A. Saberi. Recent advances in percolation theory and its applications. *Phys.Rep*, 578, (2015).
- [162] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Critical phenomena in complex networks. *Rev. Mod. Phys*, 80 :1275–1335, (2008).
- [163] H. D. Rozenfeld, L. K. Gallos, and H. A. Makse. Explosive percolation in the human protein homology networks. *Eur. Phys. J.*, E 75 :305–310, (2010).
- [164] A. Bunde and S. Havlin. *Fractals and Disordered Systems*. Springer, Berlin, (1996).
- [165] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to Percolation Theory*. Taylor and Francis, London, (1994).
- [166] S. Boccaletti, J. Almendral, S. Guan, I. Leyva, Z. Liu, I. Sendina-Nadal, Z. Wang, and Y. Zou. Explosive transitions in complex networks’ structure and dynamics : percolation and synchronization. *Physics Reports*, 660 :1, (2016).
- [167] R. M. D’Souza and J. Nagler. Anomalous critical and supercritical phenomena in explosive percolation. *Nat. Phys*, 11 :531–538, (2015).
- [168] N. Araújo, P. Grassberger, B. Kahng, K. Schrenk, and R. Ziff. Recent advances and open challenges in percolation. *Eur. Phys. J. Spec. Top*, 223 (11) :2307–2321, (2014).

BIBLIOGRAPHIE

- [169] J. Adler. Bootstrap percolation. *Physica A*, 453 :171, (1991).
- [170] S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. k-core organization of complex networks. *Phys. Rev. Lett*, 96 :040601, (2006).
- [171] P. Echenique, J. Gómez-Gardeñes, and Y. Moreno. Dynamics of jamming transitions in complex networks. *EPL (Europhysics Letters)*, 71 (2) :325–331, (2005).
- [172] D. Achlioptas, R. M. D'Souza, and J. Spencer. Explosive percolation in random networks. *Science*, 323 (5920) :1453–1455, (2009).
- [173] T. Bohman and A.M. Frieze. Avoiding a giant component. *Random Structures and Algorithms*, 19 :75–85, (2001).
- [174] R. A. da Costa, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Explosive percolation transition is actually continuous. *Phys. Rev. Lett*, 105 :255701, (2010).
- [175] R. A. da Costa, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Inverting the achlioptas rule for explosive percolation. *Phys. Rev. E*, 91, (2015).
- [176] Y. S. Cho and B. Kahng. Suppression effect on explosive percolation. *Phys. Rev. Lett*, 107 :275703, (2011).
- [177] B. Bollobas. The evolution of random graphs. *Trans. Amer. Math. Soc*, 286 :257—274, (1984).
- [178] O. Riordan and L. Warnke. Explosive percolation is continuous. *Science*, 333 :322, (2011).
- [179] O. Riordan and L. Warnke. Achlioptas process phase transitions are continuous. *The Ann. Appl.Prob*, 22 :1450–1464, (2012).
- [180] J. Nagler, T. Tiessen, and H. W. Gutch. Continuous percolation with discontinuities. *Phys. Rev. X*, 2 :031009, (2012).
- [181] Y. S. Cho, B. Kahng, and D. Kim. Cluster aggregation model for discontinuous percolation transitions. *Phys. Rev. E*, 81 :030103(R), (2010).
- [182] A. A. Moreira, E. A. Oliveira, S. D. S. Reis, H. J. Herrmann, and J. S. Andrade. Hamiltonian approach for explosive percolation. *Phys. Rev. E*, 81 :040101, (2010).

BIBLIOGRAPHIE

- [183] N. Bastas, P. Giazitzidis, M. Maragakis, and K. Kosmidis. Explosive percolation : Unusual transitions of a simple model. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 407 :54–65, (2014).
- [184] L. Cao and J. M. Schwarz. Correlated percolation and tricriticality. *Phys. Rev. E*, 86 :061131, (2012).
- [185] J. Fan, M. Liu, L. Li, and X. Chen. Continuous percolation phase transitions of random networks under a generalized achlioptas process. *Phys. Rev. E*, 85 :061110, (2012).
- [186] G. J. Baxter, S. N. Dorogovtsev, A. V. Goltsev, and J. F. F. Mendes. Bootstrap percolation on complex networks. *Phys. Rev. E*, 82 (1), (2010).
- [187] R. M. Ziff, E. M. Hendriks, and Ernst.M.H. Kinetics of gelation and universality. *J. Phys. A : Math. Gen*, 16 :2293, (1983).
- [188] Y. S. Cho and B. Kahng. Discontinuous percolation transitions in real physical systems. *Phys. Rev. E*, 84 :050102(R), (2011).
- [189] L. S. Schulman. Long range percolation in one dimension. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 16 :L639, (1983).
- [190] M. Aizenman and C. M. Newman. Discontinuity of the percolation density in one dimensional $\frac{1}{|x-y|^2}$ percolation models. *Commun. Math. Phys*, 107 :611, (1986).
- [191] D. Lee, Y.S. Cho, and B. Kahng. Diverse types of percolation transitions. *J. Stat. Mech. Theor. Exp*, 107 :124002, (2016).
- [192] A. Lachgar and A. Achahbar. Network growth with preferential attachment and without "rich get richer" mechanism. *Int. J. Mod. Phys. C*, 27 :1650020, (2016).
- [193] M.E.J. Newman. *Networks : An Introduction*. University of Michigan and Santa Fe Institute Press, (2010)p.403-408.