

Contribution à la modélisation des réseaux complexes

A. Lachgar

September 25, 2017

Remerciements

gggggggggggggggggggg

Résumé

..... concernant la compréhension de la mécanisme 'riche get richer' dans le modèle Barabazi-Albert, la structure des couches dans les réseaux libre-échelle et en fin on va faire un profond étude théorique sur la structure de modèle des NW afin de bien comprendre comment la propriét petit-monde apparait dans le réseau

Contents

Remerciements	iii
Résumé	v
List of Figures	ix
Introduction générale	1
1 Notions et préliminaire	3
1.1 Les réseaux complexes	3
1.1.1 Définition	3
1.1.2 Différents exemples des Réseaux complexes	3
1.2 Les réseaux complexes, la physique moderne et l'unification	6
1.3 La théorie des graphes	7
1.3.1 Bref historique	7
1.3.2 L'expérience de Milgram	8
1.3.3 Représentation d'un graphe	8
1.4 Caractéristiques des réseaux complexes	9
1.4.1 Plus court chemin	9
1.4.2 Coefficient de regroupement (Clustering)	10
1.4.3 Distribution des degrés	11
1.4.4 Degré de corrélation	12
1.5 Propriétés des réseaux réels	13
1.5.1 La propriété petit-monde	13
1.5.2 La distribution de degré libre-échelle	14
1.5.3 Structure communautaire	15
1.6 Les modèles théoriques les plus connus	16
1.6.1 Réseau aléatoire d'Erdős-Rényi	16
1.6.2 Le modèle petit-monde de Watts-Strogatz	17
1.6.3 Le modèle d'attachement préférentielle de Barabasi-Albert	17
2 Les réseaux en croissances et l'attachement préférentielle	19
2.1 Introduction	19
2.2 Propriétés des réseaux de l'attachement préférentielle	19
2.3 L'attachement préférentielle non linéaire	19

CONTENTS

2.4	Le mécanisme "rich get richer"	19
2.5	Attachement préférentielle sans l'effet "rich get richer"	19
2.5.1	Introduction	19
2.5.2	Le modèle	19
2.5.3	Degré de distribution	19
2.5.4	Comparaison au niveau microscopique avec le modèle de BA	19
2.6	conclusion	19
3	Structure détaillée des réseaux libre échelle: couches et plus court chemin	21
3.1	Introduction	21
3.2	Les réseaux scale-free non corrélé	21
3.3	Ce qui a été fait dans les couches	21
3.4	Structure des couches dans un réseau scale-free non corrélé	21
3.4.1	Intorduction	21
3.4.2	Expression théorique et simulations numériques	21
3.5	Plus court chemin dans un réseau scale-free non corrélé	21
3.5.1	Introduction	21
3.5.2	Expression théorique et simulations numériques	21
3.6	conclusion	21
4	Transition vers l'effet petit-monde dans le modèle petit-monde	23
4.1	Introduction	23
4.1.1	Clustering	23
4.1.2	Distribution de degré	23
4.2	Le groupe de renormalisation et la théorie de champs moyen	23
4.3	Structur des couches dans le modèle petit-monde	23
4.3.1	Couches-aléatoires	23
4.3.2	Couches-régulières	23
4.4	Plus court chemin	23
4.5	Transition spectaculaire vers la propriété petit-monde	23
4.6	Conclusion	23
	Conclusion	25
5	Bibliography	27
A	Annexes	33

List of Figures

1.1	A modular network is illustrated by means of the human proteome (data obtained from the DIP database: http://dip-doe-mbi.ucla.edu). Nodes are proteins and links indicate their physical (protein–protein) interaction	4
1.2	Le 'Social Graph' derrière Facebook, Friendship graph 500 mln people image by Paul Butley, 2010.	5
1.3	Ponts de Königsberg, 1736	7
1.4	Un simple graphe et matrice d'adjacence: Exemple d'un graphe non-orienté avec 5 sommets et 5 aretes et sa matrice d'adjacence M_G . . .	9
1.5	Exemple de coefficient de regroupement.	11
1.6	A modular network is illustrated by means of the human proteome (data obtained from the DIP database: http://dip-doe-mbi.ucla.edu). Nodes are proteins and links indicate their physical (protein–protein) interaction.	12
1.7	Exemple des réseaux assortative et disassortative.	13
1.8	Exemples de quelques exemples des réseaux libre échelle, (A) Graphique de collaboration d'acteur avec $n = 212250$ de noeuds et un degré moyen $\langle k = 28.78 \rangle$, (B) WWW, $n = 325729$, $\langle k = 5.46 \rangle$, (C) Données du réseau électrique, $n = 4941$ et $\langle k = 2.69 \rangle$. Les lignes pointillées ont des pentes (A) $\gamma_{actor} = 2.3$, (B) $\gamma_{www} = 2.1$ et (C) $\gamma_{electrique} = 4$	15
1.9	Exemples d'un réseau de communautaire, chaque couleur represent un groupe plus connecté par rapport au reste du réseau.	16

LIST OF FIGURES

Introduction

Un réseau complexe est un grand nombre des noeuds qui sont liés entre eux selon des topologies de connexion spécifiques, la plupart des réseaux réels peuvent être représentés par des réseaux complexes, on peut distinguer plusieurs types de réseaux dans les différents domaines de la nature, tels que social, technologique, biologique, physique, etc. Par exemple, un système qui se compose de différents types de molécules qui s'affectent les unes aux autres par des réactions enzymatiques [1], l'Internet relie un grand nombre de serveurs et d'ordinateurs partout dans le monde qui échangent consatamment des quantités énormes de paquets d'informations [2], le World Wide Web est un réseau virtuel de sites Web liés avec des hyperliens [3], et les réseaux alimentaires relient également, via des relations trophiques, un grand nombre d'espèces interdépendantes [4, 5]. Bien que l'existence de ces réseaux dans divers domaines était connue depuis longtemps, les physiciens n'ont commencé à s'y intéresser que depuis la découverte de certains principes universels communs à différents systèmes réels. Parmi ces caractéristiques universels les plus importantes on cite: *la distribution de degrés* libre-échelle qui reflète l'hétérogénéité dans les réseaux réels, la propriété *petit-monde* et la valeur élevée de *Coefficient de regroupement* (Clustering). Afin de bien comprendre ces réseaux complexes et établir les lois qui les gouvernent, les physiciens, les mathématiciens et les informaticiens se consacrent à développer des modèles théoriques et des techniques permettant de découvrir et d'analyser les propriétés de ces réseaux qui sont presque partout. Il semble que le début du troisième millénaire va connaître une nouvelle révolution emportée par les principes des réseaux complexes.

Il est évident que la physique statistique est l'outil adéquat pour étudier les systèmes ayant un grand nombre d'éléments en interaction. En effet elle a développé au cours du temps un ensemble de théories et d'outils mathématiques permettant, à partir des comportements microscopiques, de comprendre l'émergence des caractéristiques macroscopiques et d'étudier systématiquement la topologie de ces grands réseaux complexes. En outre la physique statistique est le cadre théorique le plus perfectionné pour étudier les problèmes de transitions de phases et les points critiques, ce qui est incontournable dans l'étude de ces systèmes complexes.

Ce travail de recherche entreprend quelques contributions à la modélisation des réseaux complexes, en abordant quelques problèmes concernant la dynamique de la croissance dans le modèle de Barabasi-Albert (BA) [3], la structure des réseaux libre-

échelle et la transition vers la propriété petit-monde dans le modèle de Newman-Watts [6].

De façon plus détaillée cet ouvrage présente le travail sur quatre chapitres. Le premier commence par définir et mettre en évidence l'importance de notre cadre de recherche (réseaux complexes), et se termine par un état de l'art de certaines techniques et concepts fondamentaux pertinents de la physique statistique et de la théorie des graphes. Le deuxième chapitre parle au début des réseaux en croissance et l'attachement préférentiel, puis propose un simple modèle de l'attachement préférentiel des réseaux en croissance, en utilisant le complément de la probabilité utilisée dans le modèle de BA, enfin il développe le calcul de la valeur moyenne du degré choisi à chaque instant et leur fluctuation dans notre modèle et celui de BA, afin de faire une comparaison au niveau microscopique entre les deux. Le troisième chapitre a pour but de donner la structure des couches dans les réseaux libre-échelle, ainsi que leurs expressions explicites de couches et de plus court chemin. Le dernier chapitre établit une étude détaillée sur le modèle introduit par Newman-Watts en utilisant la transformation de groupe de renormalisation en espace réel, les résultats obtenus sont très intéressants et nous donnent une perspective plus claire sur la transition vers la propriété petit-monde dans ce modèle.

Chapter 1

Notions et préliminaire

1.1 Les réseaux complexes

1.1.1 Définition

Un *réseau* est tout simplement une collection de points réunis sous forme de paires par lignes, les points sont appelés sommets ou nœuds et les lignes sont appelées liens ou arêtes (Fig.1). Le mot *complexe* est en général le résultat de l'évolution décentralisée et non planifiée dans ces réseaux. De nombreux objets d'intérêt dans les sciences physiques, biologiques et sociales peuvent être considérés comme des réseaux complexes, cette nouvelle façon de penser peuvent souvent conduire à des nouvelles et utiles idées. Alors Un réseau est une représentation simplifiée qui réduit un système à une structure abstraite capturant uniquement les bases des modèles de connexion. Les nœuds et les liens d'un réseau peuvent être accompagné avec informations supplémentaires pour capturer plus de détails sur le système, même qu'il y a un inconvénient de perte des informations dans le processus de réduction d'un système complet à une représentation du réseau, mais il présente également des avantages.

1.1.2 Différents exemples des Réseaux complexes

L'étude des réseaux complexes a été inspiré par le désir de comprendre les différents systèmes réels, allant des réseaux de communications aux réseaux écologiques. Ainsi, les bases de données empiriques disponibles pour l'étude couvrent plusieurs disciplines, en générale, on les classé en quatre grands catégories: Réseaux Technologique, Réseaux Biologiques, Réseaux Sociales et Réseaux d'Informations.

Réseaux Technologique

les réseaux technologiques sont de réseaux artificiels, qui ont grandi au cours du siècle dernier et qui constituent une grande partie de notre société moderne, comme les réseaux électriques, réseaux téléphoniques, réseaux de transports,...ect [7, 8, 9, 10]. L'Internet est un parmi les exemples les plus connus et les plus largement étudiés

des réseaux technologiques, on peut le définir comme un réseau de données informatiques dans lequel les noeuds sont des ordinateurs et les liens sont des connexions de données physiques entre eux, tels que des câbles à fibres optiques ou des lignes téléphoniques [2, 11]. Il est curieux que, bien qu'Internet est un réseau artificiel, nous ne connaissons pas exactement sa structure, nos meilleures données actuelles sur sa structure proviennent d'études expérimentales. Il existe un certain nombre d'excellentes raisons pratiques pour être intéressé à étudier la structure du réseau d'Internet, la fonction d'Internet consiste à transporter des données entre des ordinateurs dans différentes parties du monde, ce qui se fait en divisant les données en pièces ou en paquets et en les transportant du noeud vers noeud sur le réseau jusqu'à ce qu'ils atteignent leur destination, sans aucun doute, la structure du réseau affectera la manière dont il accomplit efficacement cette fonction et si nous connaissons la structure du réseau, nous pouvons aborder de nombreuses questions et problèmes de pertinence pratique.

Réseaux Biologiques

Une autre classe de réseaux les plus étudiées dans la littérature est celle des réseaux biologiques. Cette classe contient une grande variété de réseaux naturels. Les corps soit humain ou animal contient un grand nombre de réseaux, dont certains se produisent dans l'espace réel, tels que le système nerveux. Ces réseaux ont été étudiés depuis longtemps [12]. Une autre classe de réseau, ce sont les réseaux d'interactions gène-gène, gène-gène et protéines-protéines [13], ainsi que les réseaux d'interactions entre les espèces dans les écosystèmes, comme la prédation ou la coopération.

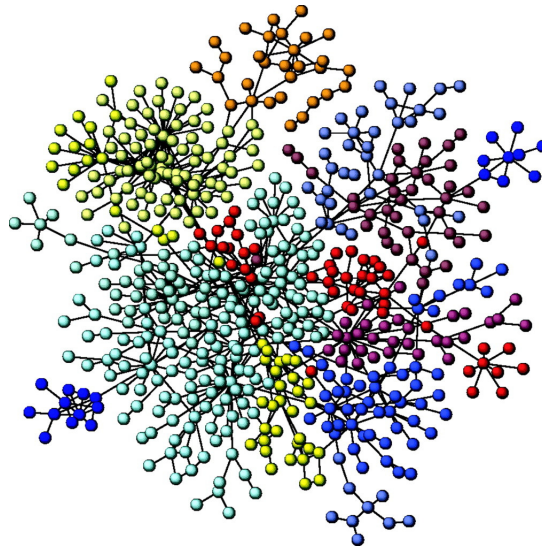


Figure 1.1: A modular network is illustrated by means of the human proteome (data obtained from the DIP database: <http://dip-doe-mbi.ucla.edu>). Nodes are proteins and links indicate their physical (protein-protein) interaction

La structure de ces réseaux se diffère selon chaque cas. Par exemple, les réseaux

métaboliques sont des réseaux de protéines, interagissant les uns avec les autres à l'intérieur de la cellule. Il s'agit d'un réseau dirigé, car chaque protéine peut catalyser ou réprimer la création de toutes les autres protéines, ce qui n'implique pas nécessairement le processus inverse. la structure à grande échelle des réseaux métaboliques a été étudiée. On a conclu que, pour de nombreuses espèces, le réseau métabolique est sans échelle [1]. De plus, il a été observé que le diamètre du réseau est très petit et est pratiquement indépendant de la taille du réseau. Cette indépendance s'explique par que certain classe de réseaux libre-échelle est Ultra-small [14, 15, 16], d'une autre coté notre résultats du chapitre 3 refore cette explication et indiquent que la dépendance du diamètre sur N est très faible. Dans les réseaux génétiques, les noeuds représentent des gènes, et les liens sont dirigés et représentent l'influence d'un gène sur un autre, le réseau E. coli est un des réseaux génétiques qui est bien étudiés dans la littérature [17].

Réseaux Sociales

Un réseau social est un ensemble de noeuds, où ces noeuds se represent par des personnes (individus ou groupes sociaux) et les liens par une relation parmi les différents types qui peuvent être exister (parenté, amitié, statut, affaires,...) [18], cette diversité des liens est une chose apprécier dans l'étude des réseaux sociaux, car il existe de nombreuses définitions possibles d'un tel réseau et la définition particulière que l'on utilisera dépendra des questions auxquelles on est intéressé à répondre. Tel que les réseaux d'amitiés entre les individus [19, 20], les relations d'affaires entre les entreprises [21]. La société offre une grande variété d'organisations de groupes possibles: les familles, les milieux de travail et d'amitié, les villages, les villes, les nations. La diffusion d'Internet a également conduit à la création de groupes virtuels, en direct sur le Web, comme Facebook qui reliant presque tous notre monde entier (voir Fig1.2).



Figure 1.2: Le 'Social Graph' derrière Facebook, Friendship graph 500 mln people image by Paul Butley, 2010.

Réseaux d'informations

Les réseaux de citation de divers types et le World Wide Web (WWW) sont un bon exemple des réseaux d'informations, car leur contenues d'informations étant stockée dans les noeuds, c'est pour cette raison que l'on utilise le terme réseau d'informations. Parfois on rencontre une certaine confusion à propos de réseau WWW et le réseau d'Internet. Dans la WWW, les noeuds sont les pages HTML, et les bords représentent les liens entre les pages. d'autre part dans l'Internet, les liens correspondent aux câbles physiques entre les ordinateurs. Alors le WWW est virtuelle et Internet est physique

1.2 Les réseaux complexes, la physique moderne et l'unification

La physique explique les phénomènes de la nature en les réduisant à une interaction de lois fondamentales simples. Cette méthode plutôt réussie semble rencontrer certaines difficultés lorsqu'il s'agit des systèmes complexes en général et des réseaux complexes en particulier. Dans ces derniers il reste peu clair s'il existe des lois universelles uniques expliquant une variété de similitudes structurelles et dynamiques trouvées dans de nombreux réseaux réels différents[22, 23, 24, 25]. En revanche, cette *unification* des lois universelles qui paraissaient jusqu'alors complètement séparés sont d'une origine commune, c'est ce que les physiciens théoriques rêvent de la découvrir. Une telle *unification* va être, sans doute, un grand pas dans notre compréhension de la nature. En outre, l'existence de cette belle idée au cœur de l'unification montre le pouvoir mystérieux que les êtres humains peuvent découvrir derrière les apparences de la nature [26].

Le réseau causal représentant la structure à grande échelle de l'espace-temps dans notre univers accéléré est un graphe de loi de puissance avec un regroupement fort, similaire à de nombreux réseaux complexes tels que les réseaux Internet, sociaux ou biologiques [22]. Cette similitude structurelle est une conséquence de l'équivalence asymptotique entre la dynamique de croissance à grande échelle des réseaux complexes et des réseaux causaux. Par conséquent, un intérêt croissant est adressé à l'étude de la gravité quantique à partir de la théorie de l'information et de la perspective des réseaux complexes [27, 28].

Récemment, des relations intrigantes entre les propriétés des réseaux de communication quantique avec des topologies de réseau et la physique statistique ont été rapportées. Sur la base des concepts classiques de percolation [29], il a été montré que ces réseaux quantiques peuvent présenter une transition de phase de percolation d'enchevêtrement [30, 31]. L'avancement rapide de la technologie de l'information quantique a suscité un intérêt considérable pour les propriétés dynamiques des réseaux quantiques formés par les systèmes élémentaires, tels que les qubits, en raison de leur rôle privilégié dans la communication quantique et le calcul quantique [32, 33, 34].

1.3 La théorie des graphes

En termes généraux, un réseau se décrit comme un graphique dont les noeuds (sommets) identifient les éléments du système et les liens de connexion (arêtes) représente la présence d'une relation ou d'une interaction entre ces éléments. Avec un tel niveau de généralité, il est facile de percevoir qu'un large éventail de systèmes peuvent être abordés dans le cadre de la théorie du graphe. Alors nous fournissons ici un bref historique et quelques notations de base nécessaires dans la théorie de graphe pour décrire les réseaux. Le cadre naturel pour une description mathématique rigoureuse des réseaux se trouve dans la théorie des graphes, mais il faut noter que la théorie des graphes consiste un branche des mathématiques vastes et compliquées et nous ne sommes pas dans l'état de fournir une présentation formelle et complète de celui-ci. Cependant notre but dans ce chapitre d'introduction est de fournir seulement quelques notions utiles pour décrire les réseaux dans le reste de cette thèse. Pour les lecteurs intéressés à poursuivre l'étude de la théorie des graphes en plus de taille pourraient regarder les livres [35, 36].

1.3.1 Bref historique

En plus de la topologie, Euler est devenue le père de la théorie des graphes quand il a résolu, en 1736, un problème célèbre sous le nom *le problème du pont de Königsberg*, la question était de savoir s'il était possible de visiter les quatre quartiers de la ville séparés les uns des autres par un bras de rivière, en passant exactement une fois par chaque pont et en revenant à son point de départ (voir Fig.1.3). A fin de trouver

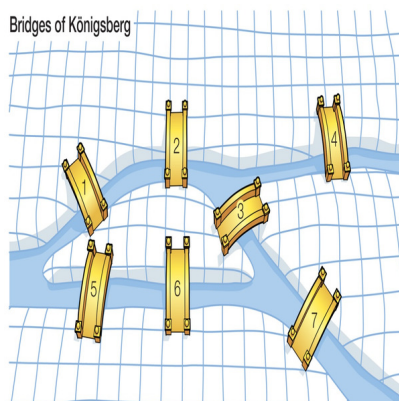


Figure 1.3: Ponts de Königsberg, 1736

une solution de ce problème Euler a remplacé chaque zone de terrain par un point et chaque pont par une ligne joignant les points correspondants, produisant ainsi un *graphique*. Ainsi il a montré que le problème est insoluble et que le graphique de cette ville ne peut pas être parcouru d'une certaine manière.

En 1847 Kirchhoff a développé la théorie des arbres afin de résoudre le Système d'équations linéaires simultanées qui donnent le courant dans chaque Branche et autour de chaque circuit d'un réseau électrique. Bien qu'un physicien, Il a pensé

comme un mathématicien lorsqu'il a soulevé un réseau électrique avec et l'a remplacé par sa structure combinatoire correspondante constituée uniquement de points et de lignes sans indication du type d'élément électrique représenté par des lignes individuelles. Dans les années 1960, deux mathématiciens, Paul Erdos et Alfred Rényi (ER), ont introduit une nouvelle idée ingénieuse, ils ont combiné les concepts de la théorie graphique avec les outils de la théorie des probabilités, cela permettant d'envisager des familles de graphiques plutôt que des graphiques spécifiques.

1.3.2 L'expérience de Milgram

En 1967, Stanley Milgram a effectué une expérience intéressante. Il a envoyé 60 lettres à diverses personnes à Wichita, Kansas, aux États-Unis, qui ont été invitées à remettre la lettre à l'épouse d'un étudiant à un endroit précis à Cambridge. Les participants ne pouvaient passer que les lettres (à la main) aux connaissances personnelles qu'ils pensaient pouvoir atteindre la cible, soit directement, soit via un finalement atteint leur destination. Mais dans les expériences ultérieures, Milgram a réussi à augmenter le taux de réussite à 95%, pour plus de détails (voir [37, 38]). La conclusion principale de cette expérience de Milgram était que la plupart des gens sur notre planète n'est séparé que par six autres personnes en moyen. Cette idée de Milgram a été reprise encore une fois en 2001 par Duncan Watts et ses collègues en utilisant un message électronique qui devait être livré à des expéditeurs autour du monde, étonnamment, Watts a constaté que le nombre moyen d'intermédiaires était 6. Pour plus de détails et une analyse statistique beaucoup plus étendue des données par rapport à l'analyse de Milgram, voir Dodds et al [39].

1.3.3 Représentation d'un graphe

Comme dans toute abstraction mathématique, lorsque nous décrivons un système en tant que graphique, nous décidons de rejeter plusieurs des particularités particulières des phénomènes réels et de nous concentrer uniquement sur quelques caractéristiques d'intérêt. En particulier, un graphique est essentiellement un moyen de coder une relation (liens physiques, interactions, etc.) entre les éléments d'un système. Les éléments du système identifient l'ensemble V (ensemble des sommets) et les relations entre ceux de l'ensemble E (ensemble des arêtes). Le graphique indiqué comme $G(V, E)$ peut être tracé en traçant les sommets en tant que points et les bords comme lignes entre eux. Parmi les façons de représentation basant sur cette définition on peut citer la matrice adjacence et la liste adjacence.

La matrice d'adjacence

Un graphe est représenté fréquemment par une matrice d'adjacence, $M_{i,j}$, qui est une matrice dans laquelle chaque ligne et chaque colonne représente un sommet du graphique. L'élément $M_{i,j}$ est 1 si un lien existe entre les i^{th} et j^{th} vertices, ou 0 sinon (voir Fig1.4). Dans un graphe dirigé, la matrice sera en général asymétrique et les éléments diagonales ne sont pas nécessairement 0.

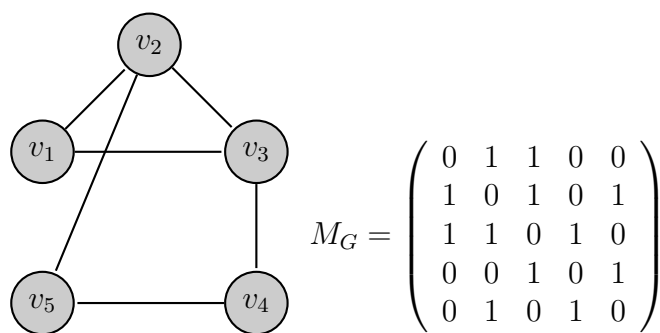


Figure 1.4: Un simple graphe et matrice d'adjacence: Exemple d'un graphe non-orienté avec 5 sommets et 5 arêtes et sa matrice d'adjacence M_G .

La liste d'adjacence

Le format de liste d'adjacence est utile pour les graphiques sans données associées à des noeuds ou des bords et à des noeuds qui peuvent être représentés de manière significative sous la forme de chaînes, il se compose de lignes avec des étiquettes de noeud, la première étiquette dans une ligne est le noeud source, d'autres étiquettes dans la ligne sont considérées comme des noeuds cibles et sont ajoutées au graphique avec un bord entre le noeud source et le noeud cible.

En règle générale, les matrices sont généralement utilisées pour les tableaux denses et les listes d'adjacence pour les tableaux dispersés. La raison en est que les matrices consomment moins d'espace pour les tableaux denses et les listes d'adjacence consomment moins d'espace pour les tableaux dispersés. Cependant, l'espace n'est qu'une considération, d'autres facteurs doivent également être pris en compte.

1.4 Caractéristiques des réseaux complexes

Je crois que nous ne comprenons toujours pas les réseaux de manière appropriée. Par exemple, si les données (par exemple, la matrice d'adjacence) d'un grand graphique sont données et que vous n'êtes pas autorisé à visualiser le réseau, il semble assez complexe de le dire, en calculant uniquement la topologie graphique, quelles sont les propriétés du réseau. Alors la caractérisation de ces réseaux oblige d'ajouter d'autres caractéristiques supplémentaires, tant que, Plus court chemin, Clustering, etc.

1.4.1 Plus court chemin

Le plus court chemin entre deux sommets d'un graphique est mesurée comme la longueur de trajet la plus courte parmi eux. Une mesure statistique globale de la distance entre les sommets peut alors être exprimée comme la longueur de chemin moyenne la plus courte parmi tous les couples possibles de sommets du réseau,

mathématiquement on peut le définir par la forme suivante

$$l = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} d_{i,j} \quad (1.1)$$

avec $d_{i,j}$ est la distance du nœud i au nœud j et n est le nombre total de noeuds dans le réseau. sachant que la distance entre deux noeuds s'ils ne peuvent être atteints l'un par l'autre est 0 et la distance d'un noeud à lui-même est également 0.

Dans de nombreux réseaux à grande échelle, la distance moyenne entre les sommets est très faible par rapport à la taille des graphiques, ce phénomène connu sous le nom la propriété *petit-monde*. Cette propriété a été popularisé dans le contexte sociologique où il est parfois appelé *six degrés de séparation* [37].

L'importance de cette propriété se représente en son rôle important dans le transport et la communication au sein d'un réseau. Supposons qu'il soit nécessaire d'envoyer un paquet de données d'un ordinateur à l'autre via Internet: la géodésique fournit un chemin optimal, car on pourrait obtenir un transfert rapide et enregistrer des ressources système [40]. Pour une telle raison, les chemins les plus courts ont également joué un rôle important dans la caractérisation de la structure interne d'un graphique [41, 18].

1.4.2 Coefficient de regroupement (Clustering)

En plus de l'effet du petit monde un haut niveau de regroupement s'en accompagne dans de nombreux réseaux sociaux et dans de nombreux autres réseaux ont montré cette tendance telle que le réseau mondial [42], les réseaux de transport [43] et les réseaux métaboliques [44, 45]. Le concept de regroupement d'un graphique se réfère à la tendance observée dans de nombreux réseaux naturels à former des cliques au voisinage d'un sommet donné. cette propriété appelé également la transitivité dans le contexte de la sociologie [41].

Le coefficient de regroupement peut être considéré comme la fraction de paires de sommets avec un sommet commun ou équivalent comme la probabilité moyenne que deux sommets voisins ont un sommet commun. C'est peut-être la manière la plus utile de définir le coefficient de regroupement. En notation mathématique:

$$C = \frac{3 \times (\text{Nombre de triangles})}{(\text{Nombre de triples connectés})} \quad (1.2)$$

Le facteur 3 dans le numérateur compense le fait que chaque triangle complet de trois nœuds contribue à trois triples connectés, l'un centré sur chacun des trois noeuds et assure que $0 \leq C \leq 1$.

Une autre définition du coefficient de regroupement, également largement utilisé, a été donnée par Watts et Strogatz [46], qui a proposé de définir une valeur locale

$$C_i = \frac{(\text{Nombre de triangles connectés au sommet } i)}{(\text{Nombre de triples centrés sur le sommet } i)} \quad (1.3)$$

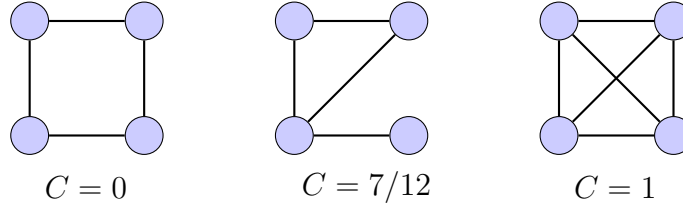


Figure 1.5: Exemple de coefficient de regroupement.

Dans le cas où le sommet a le degré 0 ou 1, nous mettons $C_i = 0$. Ensuite, le coefficient de regroupement pour l'ensemble du réseau est la moyenne

$$C = \frac{1}{n} \sum_i C_i \quad (1.4)$$

Le coefficient de regroupement mesure la densité des triangles dans un réseau. Une généralisation évidente est de demander à propos de la densité des boucles plus longues aussi: boucles de longueur quatre et plus. Un certain nombre d'auteurs ont examiné ces coefficients de regroupement d'ordre supérieur [47, 48, 49, 50], bien qu'il n'y ait jusqu'à présent aucune théorie propre qui sépare les contributions indépendantes des différents ordres l'un de l'autre.

1.4.3 Distribution des degrés

La propriété la plus importante qui caractérise une structure de réseau est la distribution de degré $P(k)$, définie comme la probabilité qu'un noeud choisi uniformément au hasard ait un degré k ou, de manière équivalente, la fraction de noeuds dans le graphique ayant le degré k . Si le graphe est dirigé, le degré du noeud comporte deux composantes: le nombre de liens sortants k^{out} (appelé "out-degree") et le nombre de liens entrants k^{in} (appelé "in-degree"). Le degré total est alors défini comme $k = k^{out} + k^{in}$.

Un réseau ordinaire a une séquence de degré simple parce que tous les noeuds ont le même nombre de bords, et donc une forme de distribution de degré contient une seule pointe forte (voir Fig.1.6). En outre dans le cas limitant d'un réseau complètement aléatoire, la séquence de degré obéit à la distribution de Poisson qui diminue exponentiellement, loin de la valeur moyenne $\langle k \rangle$. En raison de ce déclin exponentiel, la probabilité de trouver un noeud avec k bord devient négligeable pour $k \gg \langle k \rangle$ (voir Fig.1.6). Au cours des dernières années, de nombreux résultats empiriques ont montré que pour la plupart des réseaux réels à grande échelle, la distribution de degré s'écarte de manière significative de la distribution de Poisson. En particulier, pour un certain nombre de réseaux, la distribution du degré peut être mieux décrite par une loi de puissance de la forme $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Cette distribution de la loi de puissance diminue progressivement permet de créer quelques noeuds de très grande importance. Étant donné que ces lois de puissance sont libres de

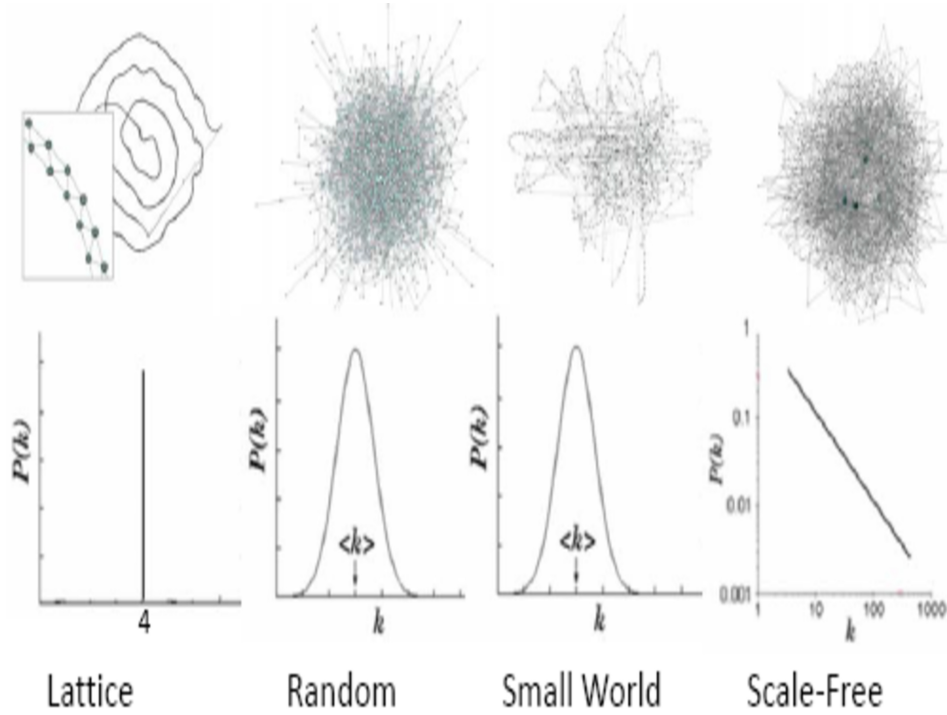


Figure 1.6: A modular network is illustrated by means of the human proteome (data obtained from the DIP database: <http://dip-doe-mbi.ucla.edu>). Nodes are proteins and links indicate their physical (protein–protein) interaction.

toute échelle caractéristique, pour cette raison un tel réseau avec une distribution de puissance est appelé un réseau sans-échelle.

1.4.4 Degré de corrélation

Un grand nombre de réseaux réels sont corrélés en ce sens que la probabilité qu'un noeud de degré k soit connecté à un autre noeud de degré, disons k' , dépend de k . Dans ces cas, il est nécessaire d'introduire la probabilité conditionnelle $P(k'|k)$, étant défini comme la probabilité qu'un lien d'un noeud de degré k points à un noeud de degré k' [51]. Bien que les corrélations de degré soient formellement caractérisées par $P(k'|k)$, l'évaluation directe de la probabilité conditionnelle donne des résultats extrêmement bruyants pour la plupart des réseaux réels en raison de leur taille finie N . Ce problème peut être surmonté en définissant le degré moyen voisin le plus proche d'un noeud i comme

$$k_{nn,i} = \frac{1}{k_i} \sum_{j \in N_j} k_j \quad (1.5)$$

Où la somme s'exécute sur les noeuds appartenant à N_i , l'ensemble des premiers voisins de i .

Où la somme s'exécute sur les noeuds appartenant à N_i , l'ensemble des premiers voisins de i . on peut calculer le degré moyen des voisins les plus proches des noeuds

avec le degré k , noté $k_{nn}(k)$, obtenant une expression qui intègre implicitement la dépendance de k . Une telle quantité peut, en effet, être exprimée en termes de probabilité conditionnelle comme

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k' \setminus k) \quad (1.6)$$

S'il n'y a pas de corrélations de degré, l'équation Eq.1.6 donne $k_{nn}(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle}$, c'est-à-dire que $k_{nn}(k)$ est indépendant de k [52].

Selon l'équation Eq.1.6 on peut distinguer deux différents types des réseaux, si les sommets de haut degré dans un réseau associent préférentiellement avec d'autres sommets à haut degré on dit que le réseau est assortative, et s'ils préfèrent s'attacher à ceux à faible degré on dit que le réseau est disassortative. Les deux situations sont observées dans certains réseaux, mais le cas du assortative est particulièrement intéressant, car le degré est lui-même une propriété de la topologie des graphes, alors les corrélations de degré peuvent donner lieu à des effets de structure de réseau intéressants [53, 47].

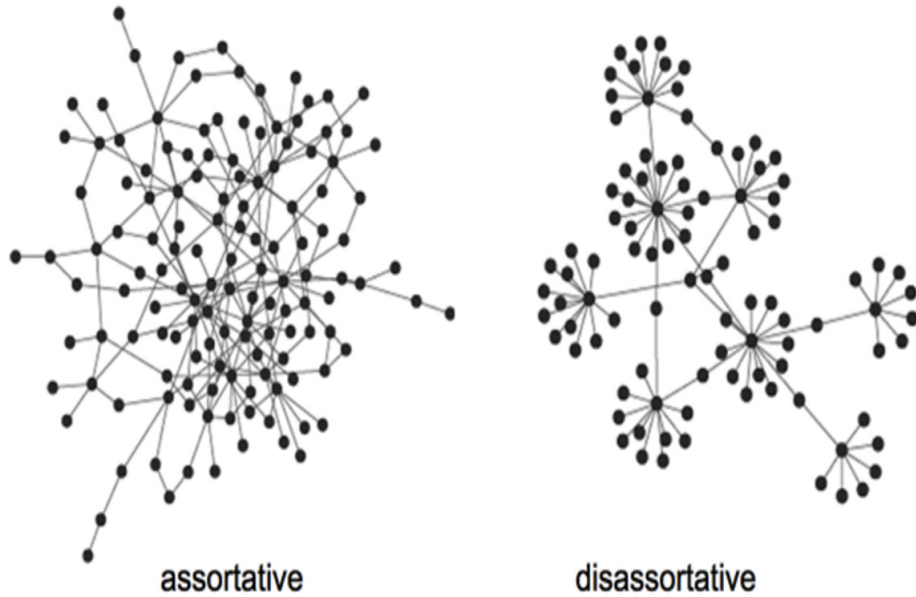


Figure 1.7: Exemple des réseaux assortative et disassortative.

1.5 Propriétés des réseaux réels

1.5.1 La propriété petit-monde

La propriété du petit monde se réfère au fait que dans plusieurs réseaux, peut-être la plupart des réseaux à grande échelle, la distance moyenne entre les sommets est

très faible par rapport à la taille des graphiques. La distance entre deux sommets d'un graphe est mesurée comme la plus petite longueur de chemin entre eux. Une mesure statistique globale de la distance entre les sommets peut alors être exprimée comme la longueur de trajet moyenne la plus courte parmi tous les couples possibles de sommets dans le réseau. Nous avons discuté dans la Section 1.3 l'expérience passante de Stanley Milgram dans les années 1960, dans laquelle on a trouvé que le nombre d'étapes qu'une personne cible obtient une lettre d'un titulaire initial, via le réseau social, est environ six en moyenne. L'expérience de Milgram est une démonstration magnifique et puissante de l'effet de petit-monde.

L'effet du petit monde a des implications évidentes pour la dynamique des processus qui se déroulent sur les réseaux. Par exemple, si l'on considère la diffusion de l'information, ou encore tout autre chose, à travers un réseau, l'effet du petit monde implique que cette propagation sera rapide sur la plupart des réseaux réels. Cela affecte le nombre de "sauts" qu'un paquet doit faire pour passer d'un ordinateur à l'autre sur Internet, le nombre de jambes d'un voyage pour un voyageur aérien ou en train, le temps qu'il faut pour qu'une maladie se propage dans une population, et ainsi de suite. L'effet du petit monde sous-tend également certains jeux de société bien connus, en particulier le calcul des nombres d'Erdős [54] et des nombres de bacon.

1.5.2 La distribution de degré libre-échelle

La distribution des degrés libre-échelle qu'on appelle également la loi de puissance a suscité un intérêt particulier au cours des dernières années pour ses propriétés mathématiques, ce qui entraîne parfois des conséquences physiques surprenantes et son apparence dans une diversité de phénomènes naturels et artificiels, voir quelques exemples dans la Fig.1.8.

Les distributions de la loi de puissance se produisent dans une gamme de phénomènes extraordinairement diversifiée, tels que, les populations des villes [55, 56], la taille des tremblements de terre [57], des cratères de lune [58], la fréquence d'utilisation des mots dans n'importe quelle langue humaine [59, 60], la fréquence de l'apparition de noms personnels dans la plupart des cultures [61], le nombre de documents scientifiques écrivent [62], le nombre de citations reçues par les documents [63], le nombre de visites sur les pages Web [64] Les ventes de livres, les enregistrements musicaux et presque tous les autres produits de marque [65], le nombre d'espèces dans les taxons biologiques [66], les revenus annuels des personnes [67], les collecteurs de réseaux quantiques complexes [68] et une foule d'autres variables sont toutes suivies des distributions des lois de puissances.

Mathématiquement, une quantité x obéit à une loi de puissance si elle est tirée d'une distribution de probabilité

$$P(x) \propto x^{-\gamma} \quad (1.7)$$

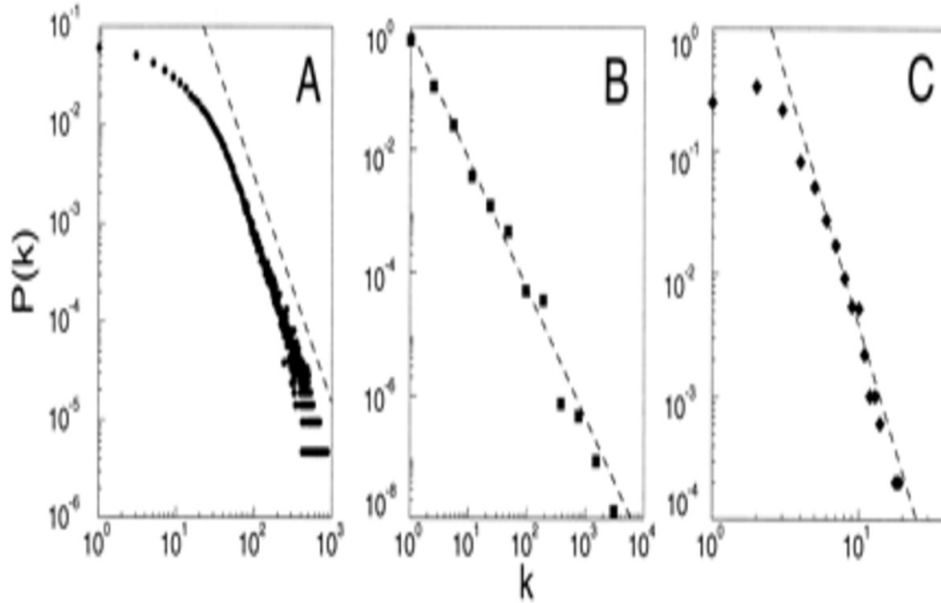


Figure 1.8: Exemples de quelques exemples des réseaux libre échelle, (A) Graphique de collaboration d'acteur avec $n = 212250$ de noeuds et un degré moyen $\langle k = 28.78 \rangle$, (B) WWW, $n = 325729$, $\langle k = 5.46 \rangle$, (C) Données du réseau électrique, $n = 4941$ et $\langle k = 2.69 \rangle$. Les lignes pointillées ont des pentes (A) $\gamma_{actor} = 2.3$, (B) $\gamma_{www} = 2.1$ et (C) $\gamma_{electrique} = 4$.

Avec γ est un paramètre constant de la distribution connue sous le nom d'exposant, empiriquement ce exposant se situe généralement dans l'intervale $2 < \gamma < 3$, bien qu'il existe des exceptions occasionnelles.

1.5.3 Structure communautaire

La société offre une grande variété d'organisations de groupes possibles: les familles, les milieux de travail et d'amitié, les villages, les villes, les nations (voir Fig.1.9). La diffusion d'Internet a également conduit à la création de groupes virtuels, en direct sur le Web, ainsi que, ces communautés se produisent également dans de nombreux systèmes en réseau, de la biologie, de l'informatique, de l'ingénierie, de l'économie, de la politique, etc. Par exemple dans le graphique du World Wide Web peuvent correspondre à des groupes de pages portant sur les mêmes sujets ou des sujets connexes [69, 70] ou Dans les réseaux d'interactions protéines-protéines, les communautés sont susceptibles de regrouper des protéines ayant la même fonction spécifique dans la cellule [71, 72].

Les communautés peuvent avoir des applications concrètes. Clustering les clients Web qui ont des intérêts similaires et qui sont géographiquement proches l'un de l'autre peuvent améliorer la performance des services fournis sur le World Wide Web, en ce sens que chaque groupe de clients pourrait être desservi par un serveur miroir dédié [73]. Les réseaux auto-configurés formés par des noeuds de communication

agissant dans la même région et en changeant rapidement n'ont généralement pas de tables de routage centralisées qui spécifient comment les noeuds doivent communiquer avec d'autres noeuds. Alors Le regroupement des noeuds en clusters permet de générer des tables de routage compactes alors que le choix des chemins de communication est encore efficace [74].

La détection communautaire est également importante pour d'autres raisons. L'identification des modules et de leurs limites permet une classification des sommets, en fonction de leur position structurelle dans les modules. Donc, les sommets avec une position centrale dans leurs grappes partagent un grand nombre de bords avec les autres partenaires du groupe, ce qui est une caractéristique importante de contrôle et de stabilité au sein du groupe, en outre, Les sommets situés aux frontières entre les modules jouent un rôle important de médiation et mènent les relations et les échanges entre les différentes communautés [75].

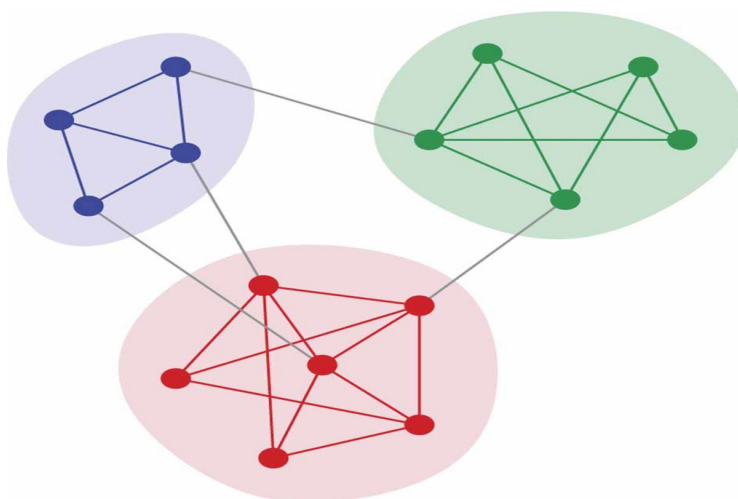


Figure 1.9: Exemples d'un réseau de communautaire, chaque couleur represent un groupe plus connecté par rapport au reste du réseau.

1.6 Les modèles théoriques les plus connus

De façon générale on peut distinguer trois modèles des réseaux: aléatoire, de petit monde et le modèle libre-échelle. Ces modèles se caractérisent chacun par la manière dont les réseaux sont créés et par plusieurs statistiques résultantes, telles que la distribution des degrés, la longueur moyenne entre les paires de noeuds et le coefficient clustering.

1.6.1 Réseau aléatoire d'Erdős-Rényi

Un réseau aléatoire est créé en spécifiant que chaque paire de noeuds est connecté par un lien avec une probabilité uniforme p . Ce tel réseau a été étudié d'un point de vue des mathématiques pures par Erodős et Rényi [76, 77, 78]. Dans la limite du

grand n , bon nombre des propriétés moyennes de l'ensemble des réseaux aléatoires ont été exprimées analytiquement de façon parfait et élégant.

Les graphiques aléatoires ER sont les mieux étudiés parmi les modèles graphiques, les propriétés structurelles des graphiques aléatoires ER varient en fonction de p montrant notamment un changement dramatique à une probabilité critique $p_c = \frac{1}{n}$, correspondant à un degré moyen critique $k_c = 1$. Erdős et Rényi ont prouvé que:

- Si $p < p_c$, presque avec certitude lorsque n tend à l'infini, le graphique n'a pas de composante de taille supérieure à $(\ln(n))$.
- Si $p = p_c$, presque certainement le composant le plus important a la taille de $n^{\frac{2}{3}}$.
- Si $p > p_c$, le graphique a un composant de taille de l'ordre n et aucun autre composant n'a plus de taille supérieure à $(\ln(n))$.

La transition au p_c présente les caractéristiques typiques d'une transition de phase de deuxième ordre. En particulier, si l'on considère comme paramètre d'ordre la taille du composant le plus important, la transition tombe dans la même classe d'universalité que celle des transitions de percolation de champ moyen. Erdős et Rényi ont étudié la distribution du degré minimum et maximum dans le graphe aléatoire, mais la distribution du degré complet a été obtenue plus tard par Bollobás [Bollobas].

1.6.2 Le modèle petit-monde de Watts-Strogatz

aaaaaa

1.6.3 Le modèle d'attachement préférentielle de Barabasi-Albert

aaaaaaaaaaaa

Chapter 2

Les réseaux en croissances et l'attachement préférentielle

2.1 Introduction

On remet une petite couche de biblio[?]. Toujours pour voir si la bibliographie est bonne[?].

2.2 Propriétés des réseaux de l'attachement préférentielle

2.3 L'attachement préférentielle non linéaire

2.4 Le mécanisme "rich get richer"

2.5 Attachement préférentielle sans l'effet "rich get richer"

2.5.1 Introduction

2.5.2 Le modèle

2.5.3 Degré de distribution

2.5.4 Comparaison au niveau microscopique avec le modèle de BA

2.6 conclusion

Chapter 3

Structure détaillée des réseaux libre échelle: couches et plus court chemin

3.1 Introduction

aaaaaaaaaaaaaaaa

3.2 Les réseaux scale-free non corrélé

3.3 Ce qui a été fait dans les couches

3.4 Structure des couches dans un réseau scale-free non corrélé

3.4.1 Intorduction

3.4.2 Expression théorique et simulations numériques

3.5 Plus court chemin dans un réseau scale-free non corrélé

3.5.1 Introduction

3.5.2 Expression théorique et simulations numériques

3.6 conclusion

Chapter 4

Transition vers l'effet petit-monde dans le modèle petit-monde

4.1 Introduction

Ici on cite un article de Dudarev[?], puis un sur Bader[?] et un petit dernier[?]. Le tout pour tester la bibliographie.

4.1.1 Clustering

4.1.2 Distribution de degré

4.2 Le groupe de renormalisation et la théorie de champs moyen

4.3 Structur des couches dans le modèle petit-monde

4.3.1 Couches-aléatoires

4.3.2 Couches-régulières

4.4 Plus court chemin

4.5 Transition spectaculaire vers la propriété petit-monde

4.6 Conclusion

Conclusion

TTTTTTTTTTTTTTTT

CONCLUSION

Bibliography

- [1] Jeong H., B.Tombor, R.Albert, Z.N.Oltvai, and A.L.Barabasi. The large-scale organization of a metabolic networks. *Nature*, 407:651–654, 2000.
- [2] M. Faloutsos, P. Faloutsos, and C. Faloutsos. On power-law relationships of the internet topology. *Computer Communication Review*, 29:251, 1999.
- [3] A.-L. Barabasi and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [4] Cohen, J. E., Briand F., and Newman, C. M. Community food webs: Data and theory. *Biomathematics*, 20, 1990.
- [5] Pimm, S. L. *Food Webs*. University of Chicago Press, Chicago, 2nd ed. 2002.
- [6] M. Newman and D. Watts. *Phys. Lett. A*, 341, 1999.
- [7] Pitts, F. R. A graph theoretic approach to historical geography. *The Professional Geographer*, 17:15–20, 1965.
- [8] Amaral, L. A. N., Scala, A., Barthélemy, M., and Stanley, H. E. Classes of small-world networks. *Proc. Natl. Acad. Sci, USA* 97:11149–11152, 2000.
- [9] Dobson, I., Carreras, B. A., Lynch, V. E., and Newman, D. Complex systems analysis of series of blackouts: Cascading failure, critical points, and self-organization. *Chaos*, 17:026103, 2007.
- [10] Sen, P., Dasgupta, S., Chatterjee, A., Sreeram, P. A., Mukherjee, G., and Manna, S. S. Small-world properties of the indian railway network. *Phys.Rev. E*, 67:036106, 2003.
- [11] Broido, A. and Claffy, K. C. Internet topology: Connectivity of ip graphs, in s. fahmy and k. park, eds., scalability and traffic control in ip networks, no. 4526 in proc. spie. *International Society for Optical Engineering*, page 172–187, 2001.
- [12] G. B. West, J. H. Brown, and B. J. Enquist. A general model for the origin of allometric scaling laws in biology. *Science*, 276:122–126, 1997.

BIBLIOGRAPHY

- [13] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford Univ Press, Oxford, 2003.
- [14] R. Cohen and S. Havlin. *Phys. Rev. Lett*, 90:058701, 2003.
- [15] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. *Nucl. Phys. B*, 653:307, 2003.
- [16] F. Chung and L. Lu. *Internet Math*, 1:91, 2003.
- [17] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, and U. Alon. Network motifs: simple building blocks of complex networks. *Science*, 298:824–827, 2002.
- [18] J. Scott. *Social Network Analysis: A Handbook*. Sage Publications, London, 2nd ed. 2000.
- [19] W. W. Zachary. An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, 33:452–473, 1977.
- [20] Moreno, J. L. *Who Shall Survive?* Beacon House, Beacon, 1934.
- [21] J. Galaskiewicz and P. V. Marsdeny. Interorganizational resource networks: Formal patterns of overlap. *Social Science Research*, 7:89–107, 1978.
- [22] Krioukov, D., Kitsak, M., Sinkovits, R. S., Rideout, D., Meyer, D., and Boguna, M. Network cosmology. *Scientific Reports*, 2:793, 2012.
- [23] Bullmore, E. and Sporns, O. Complex brain networks: Graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nat Rev Neurosci*, 10:168–198, 2009.
- [24] Lazer, D. and al. Computational social science. *Science*, 323:721–723, 2009.
- [25] Liu, Y.Y., Slotine, J.J., and Barabasi, A.L. Controllability of complex networks. *Nature*, 473:167–173, 2011.
- [26] Smolin, L. *The life of the cosmos*. Oxford University Press, Oxford, 1997.
- [27] C. A. Trugenberger. Quantum gravity as an information network: Self-organization of a 4d universe. *arXiv preprint. arXiv:1501.01408*, 2015.
- [28] Bianconi, G., Rahmede, C., and Wu, Z. Complex quantum network geometries: Evolution and phase transitions. *Phys. Rev. E*, 92:022815, 2015.
- [29] B. Bollobas and O. Riordan. *Percolation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [30] A. Acin, J. I. Cirac, and M. Lewenstein. *Nature Physics*, 3:256, 2007.
- [31] S. Sachdev. *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

BIBLIOGRAPHY

- [32] Jaroslav Novotny, Gernot Alber, and Igor Jex. Universality in random quantum networks. *Phys. Rev. A*, 92:062335, December 2015.
- [33] D. Bruß and G. Leuchs (eds.). *Lectures on Quantum Information*. Weinheim, Wiley-VCH, 2007.
- [34] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [35] Harary, F. *Graph Theory*. Perseus, Cambridge, MA (1995).
- [36] West, D. B. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ (1996).
- [37] Milgram, S. The small world problem. *Psychology Today*, page 56–67, May 1967.
- [38] Travers, J., and S. Milgram. *Sociometry*, 32:425, 1969.
- [39] Dodds, P., Muhamad, R., and Watts, D. An experimental study of search in global social networks. *Science*, 301(5634):827–829, 2003.
- [40] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani. *Evolution and Structure of the Internet: A Statistical Physics Approach*. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [41] S. Wasserman and K. Faust. *Social Network Analysis: Methods and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, (1994).
- [42] Lada A. Adamic. The small world web. in proceedings of the third european conference on research and advanced technology for digital libraries. *Sociometry*, 1696 of Lecture Notes in Computer Science:443–452, 1999.
- [43] P. Sen, S. Dasgupta, A. Chatterjee, P. A. Sreeram, G. Mukherjee, and S. S. Manna. *Small-world properties of the indian railway network*. (2002).
- [44] Andreas Wagner and David Fell. *The small world inside large metabolic networks*. (August 21 2000).
- [45] Sven Bilke and Carsten Peterson. Topological properties of citation and metabolic networks. *Rev. E*, 64:036106, 2001.
- [46] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, 393:440–442, (1998).
- [47] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Rev*45, 2:167–256, 2003.
- [48] G. Bianconi and A. Capocci. Number of loops of size h in growing scale-free networks. *Phys. Rev. Lett*, 90:art. no. 078701, (2003).

BIBLIOGRAPHY

- [49] A. Fronczak, J. A. Holyst, M. Jedynak, and J. Sienkiewicz. Higher order clustering coefficients in barabasi-albert networks. *Phys. A*, 316:688–694, (2002).
- [50] P. M. Gleiss, P. F. Stadler, A. Wagner, and D. A. Fell. Relevant cycles in chemical reaction networks. *Adv. in Complex Systems*, 4:207–226, (2001).
- [51] M. Boguñá and R. Pastor-Satorras. *Phys. Rev. E*, 66:047104, 2002.
- [52] Boccaletti, Stefano, and al. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics reports*, 424.4:175–308, 2006.
- [53] Maslov, S. and Sneppen, K. Specificity and stability in topology of protein networks. *Science*, 296:910–913, 2002.
- [54] Famous trails to Paul Erdos. Relevant cycles in chemical reaction networks. *Math. Intelligencer*, 51:51–63, (1999).
- [55] Newman and M. E. J. *Contemporary Physics*, 46:323, (2005).
- [56] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and M. E. J. Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, 51 n.4:661–703, November (2009).
- [57] B. Gutenberg and R. F. Richter. *Bull. Seismol. Soc. Am*, 34:185, (1944).
- [58] G. Neukum and B.A. Ivanov. in *Hazards Due to Comets and Asteroids*. edited by T. Gehrels, (University of Arizona Press, Tucson, AZ, 1994),pp. 359 – 416.
- [59] G.K. Zipf. *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1949.
- [60] J.B. Estoup. *Gammes Stenographiques*. (Institut Stenographique de France, Paris, 1916).
- [61] D.H. Zanette and S.C. Manrubia. *Physica A*, 295:1, (2001).
- [62] A.J. Lotka and J. Wash. *Acad. Sci*, 16:317, (1926).
- [63] D.J. de S. Price. *Science*, 149:510, (1965).
- [64] L. A. Adamic and B. A. Huberman. Q. j. electron. *Commerce*, 1:512, (2000).
- [65] R.A.K. Cox, J.M. Felton, and K.C. Chung. *J. Cult. Econ*, 19:333, (1995).
- [66] J.C. Willis and G.U. Yule. *Nature*, 109:177, (1922).
- [67] V. Pareto. *Cours d’Economie Politique*. Droz, Geneva, 1896.
- [68] G. Bianconi and C. Rahmede. 5:13979, (2015).
- [69] Dourisboure, Y., F. Geraci,, and M. Pellegrini. in WWW’07: Proceedings of the 16th international conference on the World Wide Web (ACM, New York, NY, USA). pages 461–470, (2007).

BIBLIOGRAPHY

- [70] Flake, G. W., S. Lawrence, C. Lee Giles, and F. M. Coetzee. *IEEE Computer*, 35:66, (2002).
- [71] Chen, J. and B. Yuan,. *Bioinformatics*, 22(18):2283, (2006).
- [72] Rives, A. W. and T. Galitski. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100(3):1128, (2003).
- [73] Krishnamurthy, B. and J. Wang. *PrSIGCOMM Comput. Commun. Rev*, 30(4):97, (2000).
- [74] Steenstrup, M. Cluster-based networks. *Addison Wesley, Reading, USA*, chapter 4:75–138, (2001).
- [75] Csermely, P. Cluster-based networks. *Trends Biochem. Sci*, 33(12):569, (2008).
- [76] P. Erdos and A. Rényi. On random graphs. *Publicationes Mathematicae*, 6:290–297, (1959).
- [77] P. Erdos and A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5:17–61, (1960).
- [78] P. Erdos and A. Rényi. On the strength of connectedness of a random graph. *Acta Mathematica Scientia Hungary*, 12:261–267, (1961).

BIBLIOGRAPHY

Appendix A

Annexes

aaaaaaaaaaaaaaaa