Machine Learning

Algèbre Linéaire

Les vecteurs :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha v = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

La norme d'un vecteur :

$$\parallel v \parallel = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Algèbre Linéaire : les bases

Le produit scalaire :

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + \cdots + u_n \cdot v_n$$

$$= \parallel u \parallel \parallel v \parallel \cos\theta$$

Algèbre Linéaire : les bases

Les matrices :

$$A = \begin{Bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{Bmatrix}$$

Addition :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Multiplication :

$$a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} = c_{11}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A * B \neq B * A}$$

Transposition :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Inverse :

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Algèbre Linéaire : les bases

B est une base de V ssi (au choix) :

- B est générateur de V et de taille minimum
- B est composé de vecteurs linéairements indépendants et de taille maximum
- $\forall v \in V \; \exists ! \{w_i\}_{i \in \mathbb{K}}$ tels que $v = \sum_{i \in \mathbb{K}} w_i . b_i$ où K est minimal

Algèbre Linéaire : transformations

Une matrice A est une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ y = A * x$$

$n = 2$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & b \\ \mathrm{c} & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

$n = 3$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix}$$

$n = 4$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \\ 1 \end{bmatrix}$$

Définition des valeurs propres et vecteurs propres :

$Av = \lambda v$

$Av = \lambda I_k v \iff (A - \lambda I_k)v = 0$

Algèbre Linéaire : transformations

Les transformations linéaires en vidéo :
video time

Algèbre Linéaire : transformations

Certaines matrices sont diagonalisables, ainsi :

$$A = QDQ^{-1} \qquad \text{avec } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Q = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{bmatrix}$$