Mathématiques pour le machine learning

Module 2

Objectifs

Objectifs

- exprimer des transformations de données grâce à l'algèbre linéaire
- minimiser des fonctions analytiquement
- décrire l'incertain
- décrire des données

Algèbre linéaire

Utilité

- décrire des transformations simples sur un dataset entier avec des mécanismes adaptés
- comprendre les possibilités et les limites de ces transformations simples.

Transformation linéaire

- algèbre linéaire $=$ on se limite aux sommes pondérées des inputs.
- bonne nouvelle : énorme partie des opérations en machine learning

Description des données — échantillon

Python :

```
data = (1, 3)
```

Algèbre linéaire :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Description des données — dataset

Python :

```
data = [(1, 3),
         (2, 2),
         (4, 2)]
```

Algèbre linéaire :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Description des transformations linéaires

Python :

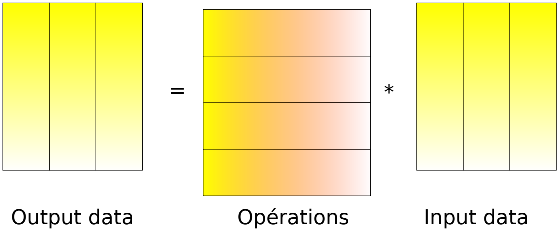
```python
def weights(x, y):
    return x * 2 + y / 2
```

Algèbre linéaire :

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

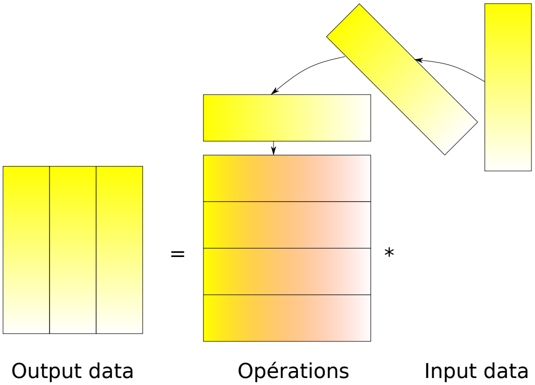
Transformation linéaire = somme pondérée.

Application d'une transformation linéaire à un exemple



Bonne intuition à garder : Verser les colonnes (les exemples du dataset) dans les lignes (les opérations).

Bonne intuition à garder



Bonne intuition à garder : Verser les colonnes (les exemples du dataset) dans les lignes (les opérations).

Application d'une transformation linéaire à un exemple

Python :

```
data = (1, 3)

def weights(x, y):
    return 2 * x + y / 2

res = weights(*data)
```

Algèbre linéaire :

$$f = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3$$

Application d'une transformation linéaire à un dataset

Python :

```
data = [(1, 3),
         (2, 2),
         (4, 2)]

def f(x, y):
    return x * 2 + y / 2

res = [f(x, y)
       for x, y
       in data]
```

Algèbre linéaire :

$$\text{res} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3,5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Application de plusieurs transformations linéaires à un dataset

Python :

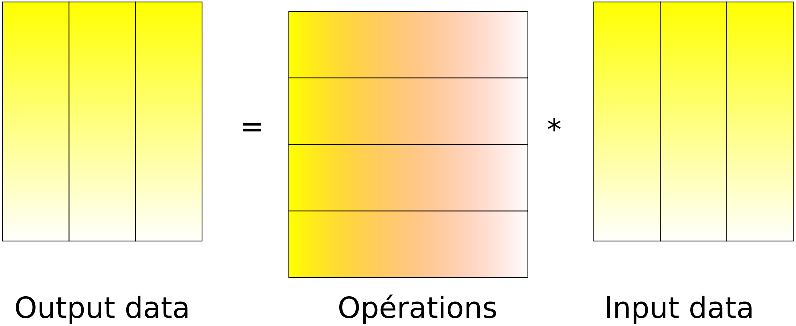
```
data = [(1, 3), (2, 2),
        (4, 2)]

def f(x, y):
    return x * 2 + y / 2

def g(x, y):
    return x / 2 + y * 2

res = [[t(x, y) for x, y
                in data]
       for t in [f, g]]
```

Algèbre linéaire :

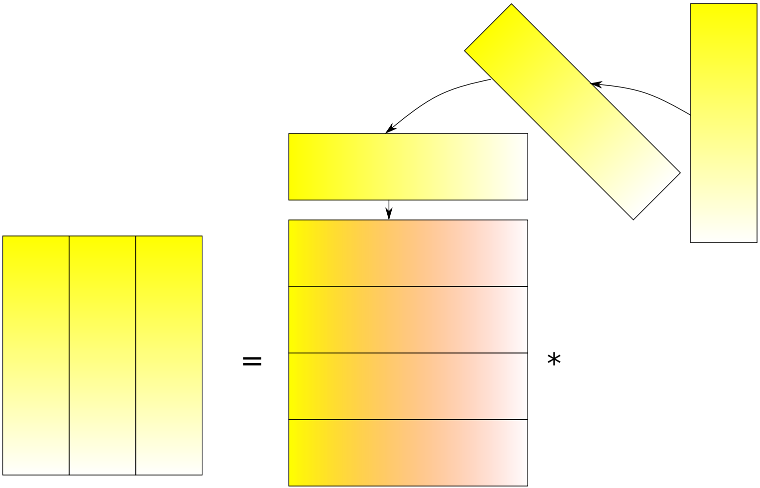
$$\text{res} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3,5 & 5 & 9 \\ 6,5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Bonne intuition à garder



Bonne intuition à garder

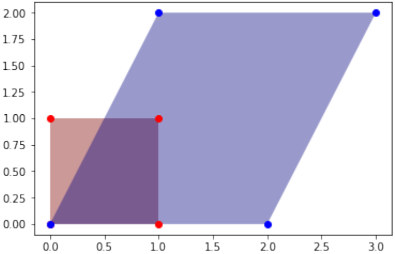


Output data Opérations Input data

Exercice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = ?$$

Exemple de transformation



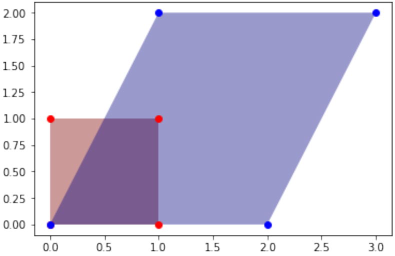
$$\begin{aligned}
\text{Bleu} &= \text{Transformation} \times \text{Rouge} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Formes

	Taille
D	(m, n)
W	(o, m)
WD	(o, n)

$\rightarrow$ dataset avec m features et n lignes transformé par o opérations donne dataset de o features et n lignes.

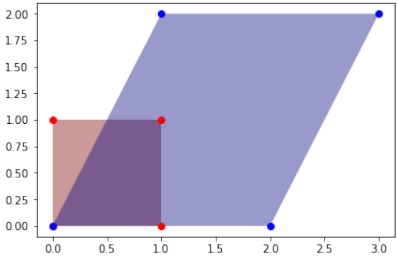
Déterminant



Facteur de dilatation de la transformation (ratio aire bleue sur aire rouge).

Quel est le déterminant de cette transformation ? 4.

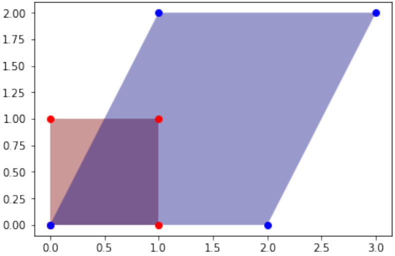
Vecteur propre



Vecteur partant de l'origine qui conserve sa direction malgré la transformation.

Pouvez-vous en trouver un ? $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ par exemple.

Valeur propre



Facteur par lequel un vecteur propre est redimensionné.

Quelle est la valeur propre de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$? 2.

Analyse

Utilité

Souvent besoin de minimiser une fonction en machine learning.

(trouver le x pour lequel f est minimale)

Vous souvenez-vous de comment l'on procède ?

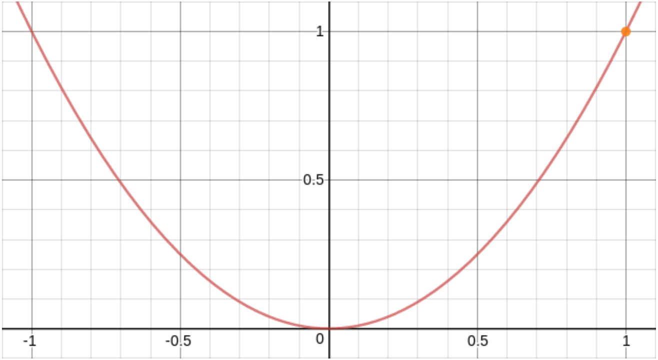
Idée clef

Décider d'un x de départ puis suivre la pente jusqu'au minimum.

Pente $=$ dérivée

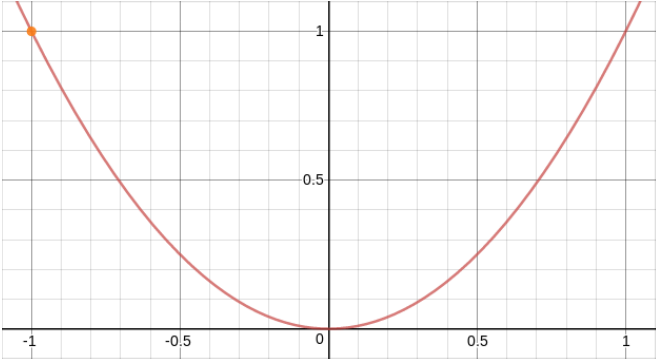
$\rightarrow$ Modifier itérativement x par un pas vers l'opposé de la dérivée.

Pente positive



Opposé de la pente $= -2$. Avec un pas de $0,1$, on passe de 1 à $0,8$.

Pente négative

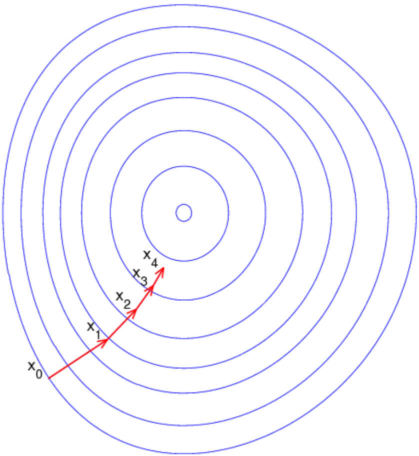


Opposé de la pente = 2. Avec un pas de $0,1$, on passe de -1 à $-0,8$.

Extension à plusieurs dimensions

- dérivée $\longrightarrow$ gradient
- identique sinon !

Exemple en 2 dimensions



Probabilités

Utilité

- quantifier l'incertain
- support pour les statistiques

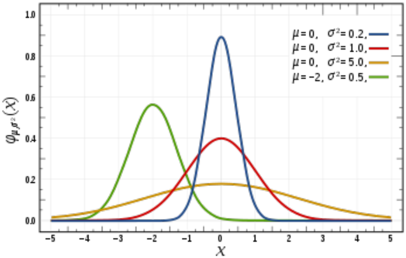
Probabilité

- la probabilité de l'événement X est notée $P(X)$
- $P(X) \in [0, 1]$
- $P(X) = 0 \iff$ X est impossible
- $P(X) = 1 \iff$ X est certain
- $P(\neg X) = 1 - P(X)$

Loi de probabilité

Décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard.

- $\sum_u P(X = u) = 1$ en discret
- $\int P(X)dX = 1$ en continu
- loi uniforme
- loi normale/gaussienne

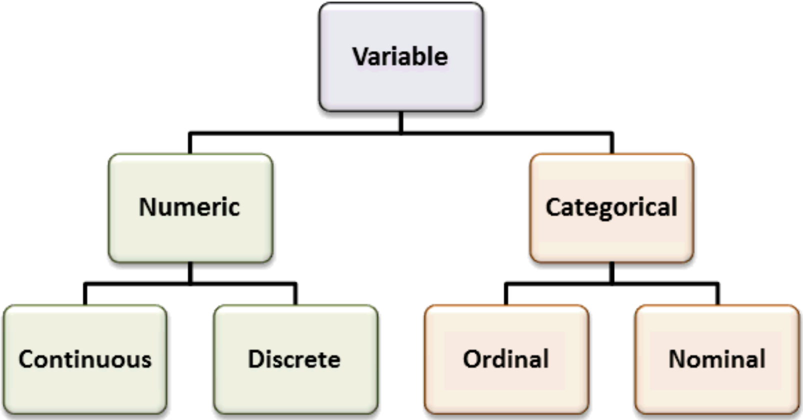


Statistiques

Utilité

- description et compréhension des données
- correction pour faciliter les traitements

Types de variables



Hypothèse

Pré-requis pour les mesures statistiques qui suivent (et la plupart du machine learning) :

- les données **doivent être issues d'une même loi**
- chaque échantillon doit être **indépendant** des autres
- pas évident en pratique ! Pourquoi ?

Variance

Mesure la dispersion d'une série statistique (ou d'une variable) :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Pour la calculer :

$$V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

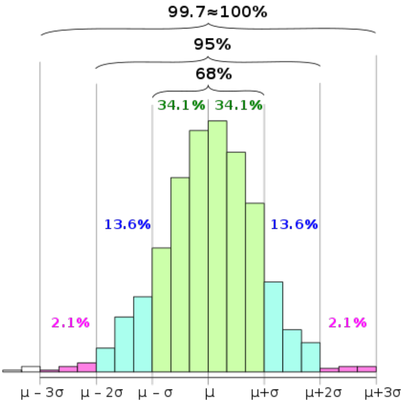
Écart-type

Racine carrée de la variance

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Écart-type — règle des 68, 95 et 99,7

Pour les lois normales :



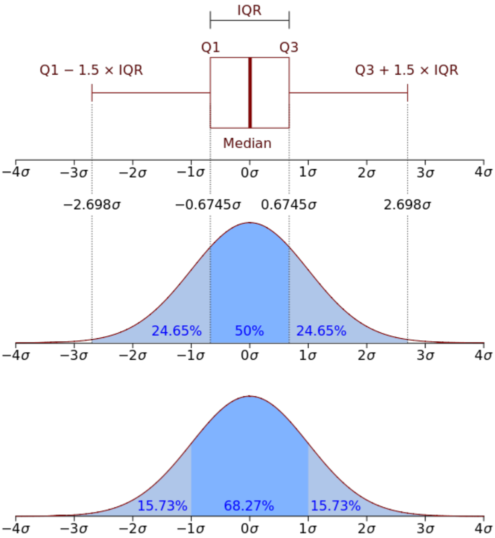
Quartile

Les quartiles (Q_1, Q_2 et Q_3) divisent les données en 4 intervalles contenant le même nombre d'observations.

Déclinable en quantile de taille arbitraire (décile, percentile).

Que veut dire être dans le 95^{e} percentile ?

Boxplot


IQR
Q1
Q3
Q1 − 1.5 × IQR
Q3 + 1.5 × IQR
Median
−4σ −3σ −2σ −1σ 0σ 1σ 2σ 3σ 4σ
−2.698σ
−0.6745σ
0.6745σ
2.698σ
24.65%
50%
24.65%
−4σ −3σ −2σ −1σ 0σ 1σ 2σ 3σ 4σ
15.73%
68.27%
15.73%
−4σ −3σ −2σ −1σ 0σ 1σ 2σ 3σ 4σ

Covariance

Mesure la variabilité jointe de deux variables aléatoires :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(X - \mathbb{E}[X])\right]$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right]$$

Pour la calculer :

$$\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

Corrélation

Covariance divisée par le produit des écart-types :

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

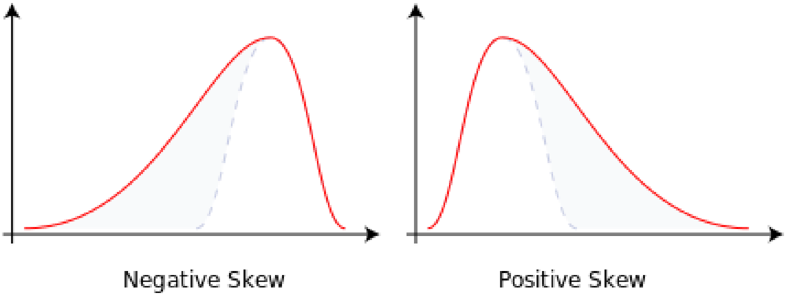
Intérêt ? Pas d'unité.

Test de normalité

Pour tester (et corriger) la normalité d'une distribution, on utilise deux mesures :

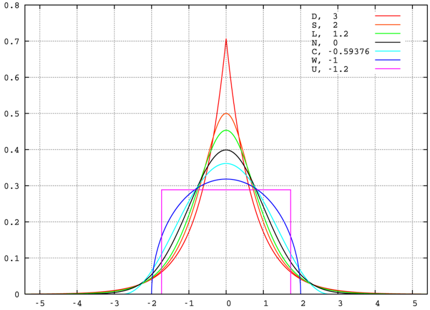
- l'asymétrie (*skew*)
- le kurtosis

Asymétrie



$$\text{asym}(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X - \bar{X}}{\sigma}\right)^3\right]$$

Kurtosis



$$\mathrm{kurt}(X) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right]$$

Transformation de Box-Cox

Asymétrie et kurtosis peuvent se corriger avec la transformation de Box-Cox ou des transformations log.

Quizz

Algèbre linéaire

- comment décrit-on on enregistrement ?
- comment décrit-on une transformation linéaire ?
- quel est le sens de la multiplication de matrices dans le contexte dataset/opérations ?

Analyse

- intuitivement, qu'est-ce que nous apprend une dérivée ?
- à quelle valeur de la dérivée d'une fonction atteint-on un minimum ?
- si la dérivée est négative, dans quel sens faut-il faire évoluer x ?
- est-ce que la pas d'apprentissage impacte seulement les performances en temps de calcul ?

Probabilités

- quelle est la forme d'une gaussienne ?
- à combien somme une loi discrète ?

Statistiques

- quelle est l'hypothèse que l'on fait dans la plupart des approches de statistiques / machine learning ?
- que nous apprennent la variance et l'écart-type ?
- que nous apprennent la covariance et la corrélation ?
- comment peut-on savoir si une distribution est normale ?

Conclusion

Conclusion

- algèbre linéaire $\rightarrow$ raisonner sur des opérations simples et les décrire efficacement
- minimiser une fonction continue $\rightarrow$ dérivée
- décrire l'incertain $\rightarrow$ probabilités
- caractériser une série de données $\rightarrow$ statistiques