# MLWEEK - Formation Machine Learning

## Cours 2 : Régressions Linéaire et Logistique

Jeff Abrahamson
François-Marie Giraud

23 Janvier 2019

https ://www.ml-week.com/

# Machine Learning

Cours 2 : Régressions Linéaire et Logistique

# Machine Learning

Rappels

# Rappels

**Apprentissage supervisé**

**Prédire** une valeur numérique ou l'appartenance à une classe
Données d'entrainement **annotées** !

Ex : prédiction CAC40, classification d'image/texte/...

À l'intérieur du **Modèle** :

- **Algèbre linéaire**
- Théorie de l'Optimisation
- Calcul différentiel
- Probabilités
- Statistiques

$$\begin{bmatrix} \mathrm{a} & b \\ \mathrm{c} & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

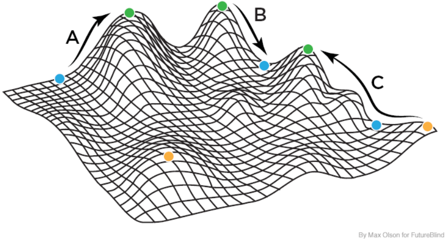
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \\ gx + hy + iz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + cz + d \\ ex + fy + gz + h \\ ix + jy + kz + l \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Machine Learning

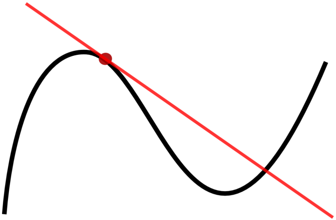
À l'intérieur du **Modèle** :

- Algèbre linéaire
- **Théorie de l'Optimisation**
- Calcul différentiel
- Probabilités
- Statistiques



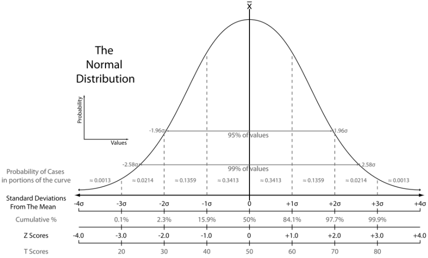
À l'intérieur du **Modèle** :

- Algèbre linéaire
- Théorie de l'Optimisation
- **Calcul différentiel**
- Probabilités
- Statistiques



À l'intérieur du **Modèle** :

- Algèbre linéaire
- Théorie de l'Optimisation
- Calcul différentiel
- **Probabilités**
- **Statistiques**



# Machine Learning

Regression Linéaire

# Regression Linéaire

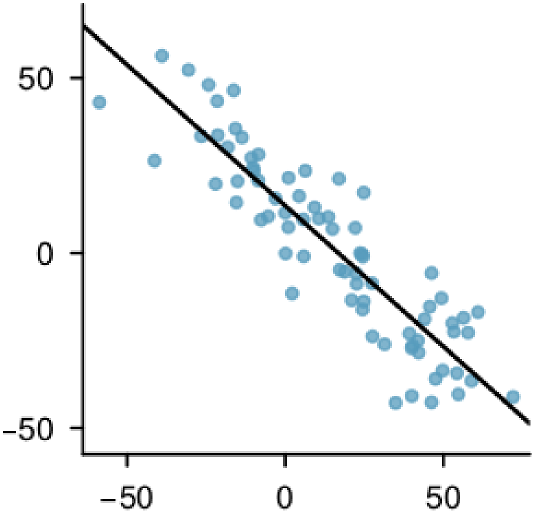
Définition du problème :

Soit $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{R}}$ un ensemble de données tel que $\forall i, x_i \in \mathbb{R}$ et $y_i \in \mathbb{R}$

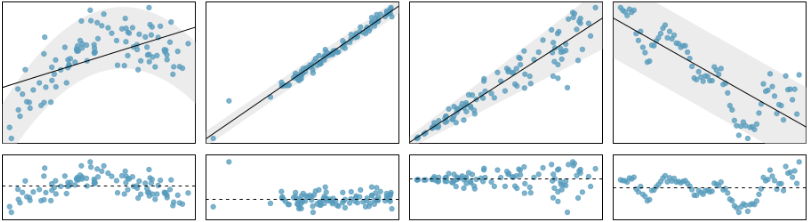
Trouver $\phi^*(x_i) = y_i^*$ telle que

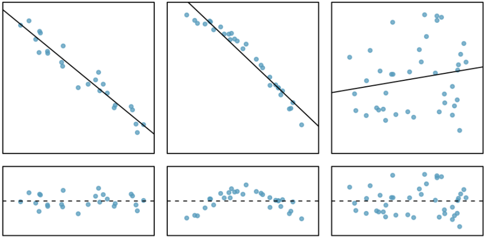
$\forall i, y_i^* - y_i \rightarrow 0$
sous la contrainte que $\phi^*$ soit une fonction linéaire (affine)

# Regression Linéaire



# Regression Linéaire





# Machine Learning

Fonction de Coût/Erreur

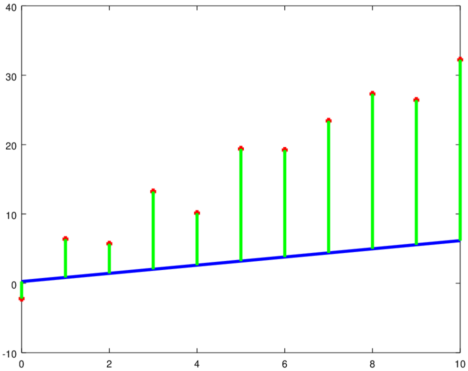
# Fonction de Coût/Erreur

Erreur moyenne :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=[1..n]}\sqrt{(y_i^* - y_i)^2}$$

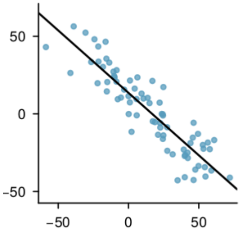
Critère des moindres carrés :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=[1..n]}(y_i^* - y_i)^2$$



# Fonction de Coût/Erreur

$$x = a.x + b$$




$$\boxed{E_\Omega = \frac{1}{2n} \sum_{i=[1..n]} (y_i^* - y_i)^2}$$

# Machine Learning

Optimisation

# Des solutions analytiques existent !

mais ...

# Optimisation

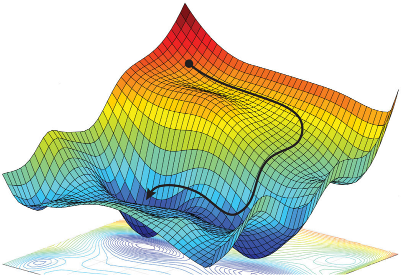
Calcul du gradient de l'erreur par rapport aux paramètres :

$$\frac{\partial Err}{\partial w_i}$$

Mise à jour :

$$w_i' = w_i - \gamma * grad$$

où : $0 < \gamma < 1$ (learning rate)



# Optimisation

1 - initialisation aléatoire du modèle
2 - Tant que(critère arret $== 0$)

- Selection aléatoire d'un **batch** de données
- **Forward** : Passe avant du **batch** dans le modèle
- Calcul de l'erreur par rapport aux sorties attendues
- **Backward** : Rétropropagation du gradient de l'erreur en fonction des paramèrtres dans le modèle (mise à jour du modèle)
- Calcul critère arret

# Machine Learning

Gradient de l'erreur

# Gradient et mise à jour

$$\boxed{y = a.x + b}$$

$$E_\Omega = \frac{1}{2n} \sum_{i=[1..n]} (y_i^* - y_i)^2$$
$$E_\Omega = \frac{1}{2n} \sum_{i=[1..n]} (y_i^* - (a.x_i + b))^2$$

...

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial a} = \frac{1}{n} \sum_{i=[1..n]} (a.x_i + b - y_i^*).x$$
$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial b} = \frac{1}{n} \sum_{i=[1..n]} (a.x_i + b - y_i^*)$$

$$\boxed{U^{2\,\prime} = 2U' * U}$$

**M.A.J :**

$$a \leftarrow a - \gamma.\frac{\partial E_\Omega}{\partial a}$$
$$b \leftarrow b - \gamma.\frac{\partial E_\Omega}{\partial b}$$

où $1 > \gamma > 0$ (learning rate)

# Machine Learning

TP2 : Régression Linéaire

# Prérequis

Deux Options :

$ jupyter notebook regression-lineaire.ipynb

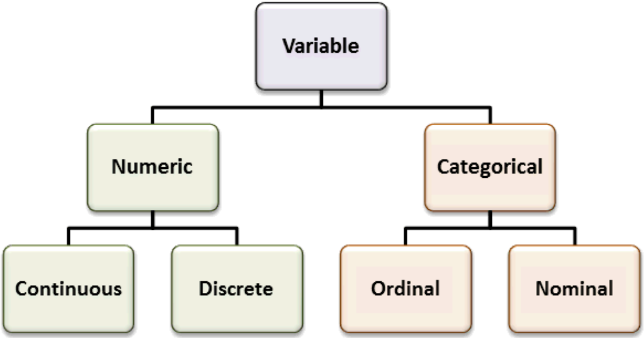
OU

Suivre à l'écran et programmer dans le shell ipython

# Machine Learning

Régression Logistique

# Régression Logistique

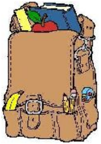


# Régression Logistique

# Régression Logistique


001.ak47


002.american-flag


003.backpack


004.baseball-bat


005.baseball-glove


006.basketball-hoop


007.bat


008.bathtub


009.bear


010.beer-mug


011.billiards


012.binoculars

# Régression Logistique

≈ Distance entre la sortie et la cible ?

**Sortie :**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.1 | 0.4 | 0.0 | 0.0 | 0.2 | 0.1 | 0.0 | 0.2 | 0.0 |

**Cible :**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0 | **1.0** | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

# Machine Learning

Réseau de Neurones

# Réseau de Neurones

$$\sigma\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_d \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} ?_{11} & ?_{12} & \dots & ?_{1n} \\ ?_{21} & ?_{22} & \dots & ?_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ?_{d1} & ?_{d2} & \dots & ?_{dn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} o_1 & o_2 & \dots & o_n \end{bmatrix}$$

où :

X est une donnée en entrée de dimension **d**,

$?_{??}$ sont les paramètres à trouver des **n** neurones de notre modèle.

$\sigma$ la fonction d'activation et

O la sortie du réseau

Calcul de l'erreur

$$\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} o_1^* & o_2^* & \dots & o_n^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_1 & o_2 & \dots & o_n \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{bmatrix}$$

où :

$O^*$ représente la sortie attendue du réseau,

O la sortie du réseau et

E l'erreur commise par chaque neurone de sortie.

# Réseaux de neurones

Mise à jour des poids (**backward**)

$$\Delta w_i = -\gamma * \frac{\partial E}{\partial w_i}$$

où :

$\Delta w_i$ est l'update du paramètre $w_i$ et

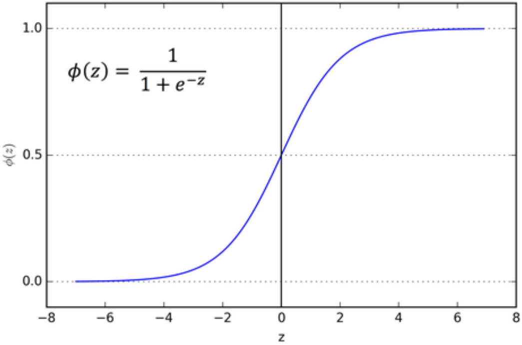
$\gamma$ est un méta-paramètre du modèle (learning rate)

# Réseaux de neurones : Fonction d’activation $\sigma$

- Sigmoïde
- Tanh
- Softmax
- ReLU
- ...

# Réseaux de neurones : Fonction d'activation $\sigma$

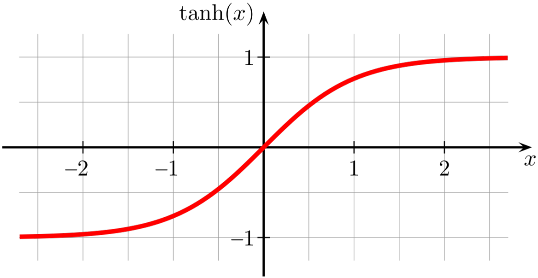
Sigmoïde




$$\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} = \phi(x) * (1 - \phi(x))$$

# Réseaux de neurones : Fonction d'activation $\sigma$

$$\tanh(x) = \frac{1 - \exp -2 * x}{1 + \exp -2 * x}$$




$$\frac{\partial \tanh(x)}{\partial x} = 1 - \tanh^2(x)$$

# Réseaux de neurones : Fonction d'activation $\sigma$

$$Softmax(x_j) = \frac{\exp x_j}{\sum_{i=1}^{n} \exp x_i}$$

donc :

$$\sum_{j=1}^{n} Softmax(x_j) = 1$$

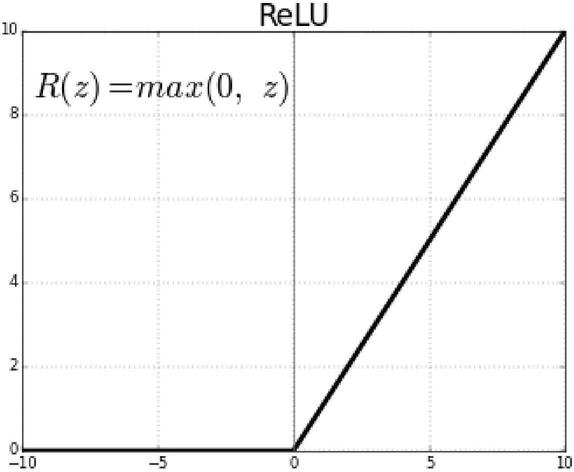
dérivée (ou jacobien car le softmax est une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) :

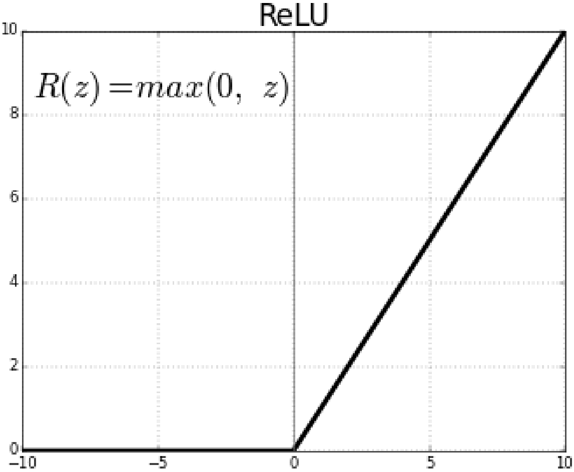
$$D_j S_i = S_i(\delta_{ij} - S_j)$$

où $D_j S_i$ est la dérivée partielle de la i-ième sortie par rapport à la j-ième entrée

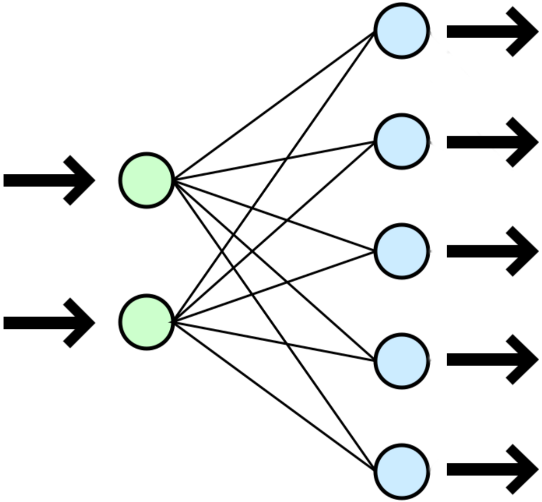
$\delta_{ij}$ est le delta de Kronecker

# Réseaux de neurones : Fonction d'activation $\sigma$

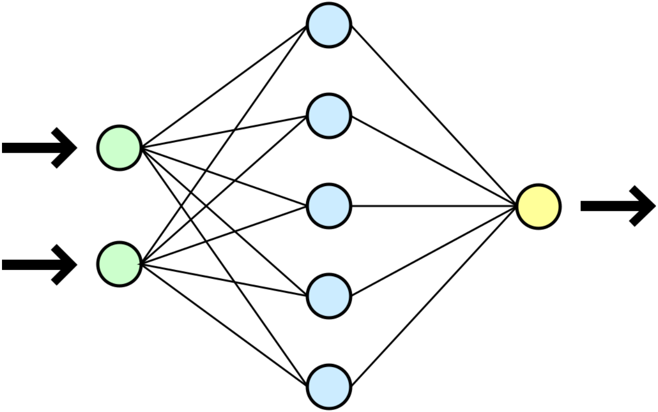



ReLU
$R(z) = max(0, \ z)$
10
8
6
4
2
0
−10
−5
0
5
10

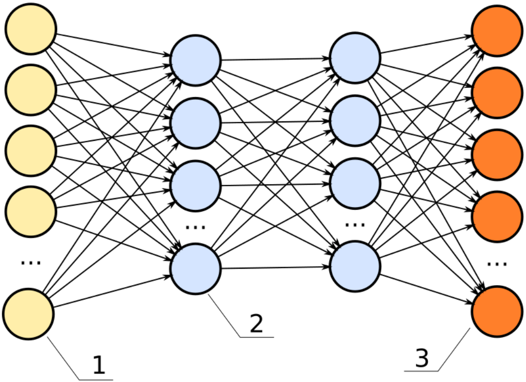
# Réseau de Neurones



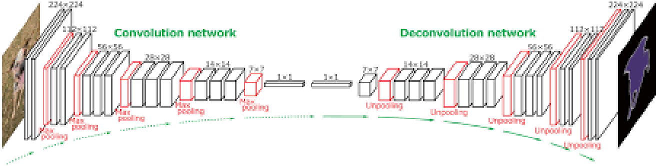
# Réseau de Neurones



# Réseau de Neurones



# Réseau de Neurones



# Machine Learning

TP 2 : Régression Logistique

# Régression Logistique

Deux Options :

$ jupyter notebook logistic_regression.ipynb

OU

Suivre à l'écran et programmer dans le shell ipython

requirements : python3 python3-dev python3-tk installées.