

Eigenfaces

Bouarah Romain

Langdorph Matthieu
Souffan Nathan

Ketels Lucas

22 mars 2020

Première partie

Partie Mathématiques

1 Calcul des Eigenfaces

1.1 Travail dans $\mathbb{R}^{N \times N}$

Considérons une image de visage comme une matrice $N \times N$ dont le coefficient (i, j) est égal au niveau de gris du pixel (i, j) (l'origine se situant dans le coin haut gauche). On transforme ensuite cette matrice comme un vecteur de $\mathbb{R}^{N \times N}$ en juxtaposant les colonnes l'une en dessous de l'autre, par exemple.

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,N} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N,1} & p_{N,2} & \cdots & p_{N,N} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} p_{1,1} \\ p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{N,1} \\ \vdots \\ p_{1,N} \\ \vdots \\ p_{N,N} \end{pmatrix}$$

1.2 Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice de covariance

Les images des visages sont globalement similaires, donc ces images ne seront pas distribuées aléatoirement dans notre espace $\mathbb{R}^{N \times N}$. On peut donc décrire notre espace des visages de manière plus fine (*i.e.* avec moins de dimensions).

1.2.1 Matrice de covariance

Avant de commencer la réduction de l'espace de travail, nous allons d'abord analyser cette dispersion en calculant la matrice de covariance.

Supposons que nous avons M images de visage. On note $I = [I_1 \ I_2 \ \dots \ I_M]$ la matrice de taille $N^2 \times M$ de l'ensemble de nos images. Normalisons nos images de visages :

1. On calcule le visage moyen $\Psi = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I_i$.

2. On retire le visage moyen à chacun de nos visages, en effet nous nous intéressons uniquement aux particularités.

Donc, chaque visage diffère de la moyenne par le vecteur $\Phi_i = I_i - \Psi$. On pose $A = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_M]$ la matrice $N^2 \times M$ des visages normalisés.

On calcule alors la matrice de covariance $C = AA^T$.

Cette matrice encode la dispersion de nos images de visages dans \mathbb{R}^{N^2} . Les coefficients de la diagonale sont les variances selon les axes e_1, e_2, \dots, e_{N^2} . Les autres coefficients sont la covariance entre deux axes.

1.2.2 Méthode 1 : Analyse en composantes principales

1.2.3 Méthode 2 : Décomposition en valeurs singulières

2 Utilisation des eigenfaces pour classer une image de visage

*Définir M' comme étant le nombre de visage du training set
Définir la base de l'espace des eigenfaces*

2.1 Projection dans l'espace des visages

Soit Γ une nouvelle image de visage, on la projette dans l'espace des visages par :

$$\omega_k = u_k^T (\Gamma - \Psi)$$

pour $k = 1, \dots, M'$, on obtient ainsi un vecteur Ω tel que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_{M'} \end{pmatrix}$$

Ω décrit la contribution de chacun des eigenfaces pour l'image en question.

2.2 Analyse de la projection

On peut maintenant utiliser ce vecteur pour reconnaître si ce vecteur correspond à un visage déjà connue étant dans la base ou si c'est un visage inconnu. Pour ce faire, on cherche la classe k qui minimise la distance euclidienne $\epsilon_k = \|(\Omega - \Omega_k)\|^2$ où Ω_k est le vecteur décrivant la k^{ieme} classe de visage. Les classes de visages Ω_i sont calculés en faisant la moyenne de plusieurs ou une image du visage de chaque individu.

On considère ensuite qu'un visage appartient à une certaine classe de visage k si le minimum ϵ_k est en dessous un certain seuil Θ . Si $\forall k, \epsilon_k > \Theta$, alors le visage est inconnu et on a alors une nouvelle classe de visage.

Il y a finalement 4 possibilités pour une image :

1. L'image est proche de l'espace des visages et proche d'une classe de visage en particulier, c'est alors un visage connu
2. L'image est proche de l'espace des visages mais n'est proche d'aucune classe de visage, c'est alors un visage inconnu
3. L'image est distante de l'espace des visages mais proche d'une classe de visage, *EXPLICATION!!!* C'est la plupart du temps un faux positif.
4. L'image est distante de l'espace des images et également distante de toutes les classes de visages, on peut alors en conclure que ce n'est pas un visage