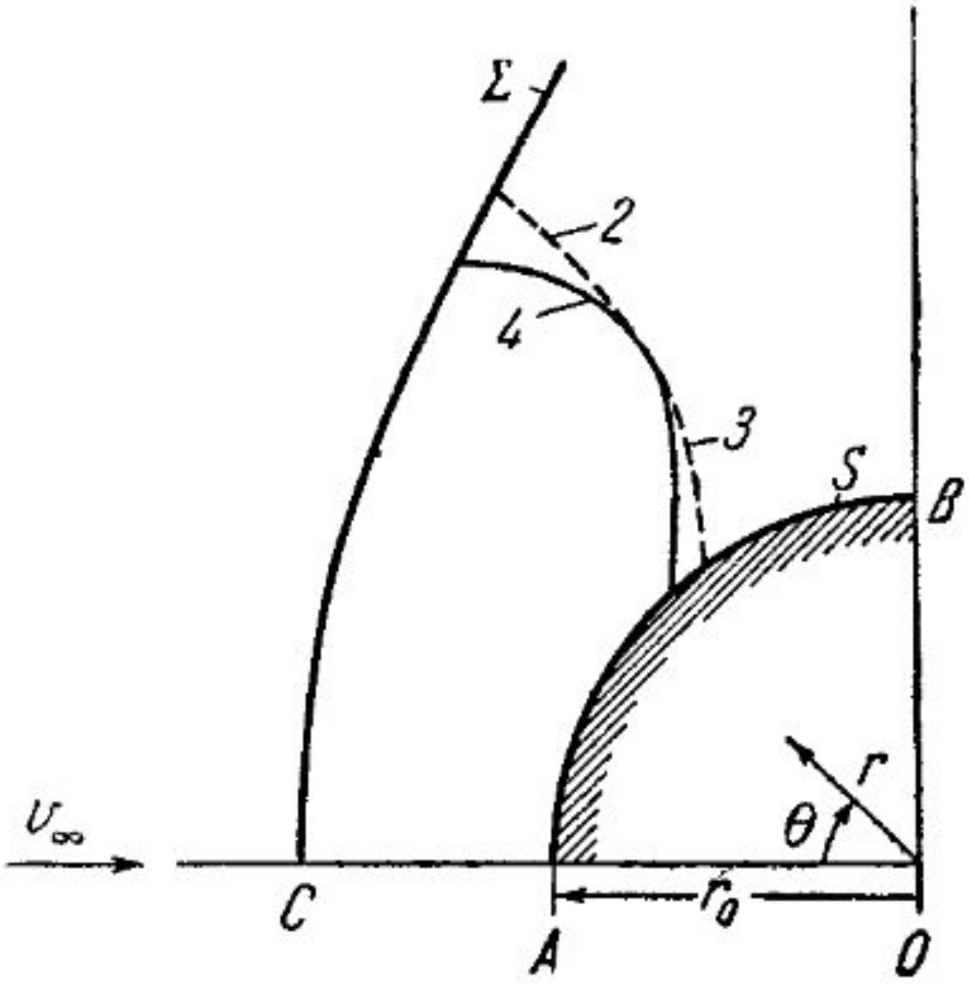
Численные методы решения плоских задач газовой динамики. Расчет сверхзвукового обтекания круглого цилиндра



Σ
2
4
3
S
B
V_∞
r
θ
C
A
r_0
O

Уравнения плоской вихревой стационарной задачи в полярных координатах

Уравнения движения:

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r},$$

$$v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial r \rho v_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} = 0.$$

Функция тока: $\psi(r, \theta)$

$$r\rho v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \rho v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Условие адиабатичности:

$$v_r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} = 0,$$

$$\vartheta = p^{1/\varkappa} \rho^{-1}$$

$$\frac{1}{\rho} p^{1/\varkappa} = \vartheta(\psi)$$

Уравнение Бернулли:

$$\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + \frac{\varkappa \vartheta^\varkappa}{\varkappa - 1} p^{\frac{(\varkappa-1)}{\varkappa}} = \frac{v_{\max}^2}{2}$$

$$v_{\max}^2 = (\varkappa + 1)/(\varkappa - 1)\, a_*^2$$

Умножая (1) на pr и используя (3) получим:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\rho v_r^2 + pr\right) + \frac{\partial \rho\, v_\theta v_r}{\partial \theta} = v_\theta^2 \rho + p$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r v_r \tau) + \frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta \tau) = 0,$$

$$\tau = \left(1 - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$$

Используя (4), получим для изменения ψ вдоль какой-то линии $r = R(\theta)$ соотношение:

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \rho\left(v_\theta \frac{dR}{d\theta} - r v_r\right)$$

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1-\frac{v_r^2+v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\tau^{\varkappa},$$

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\left(1-\frac{v_r^2+v_\theta^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}=\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{-\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\tau.$$

Краевые условия задачи на поверхности разрыва ∑ и на обтекаемом цилиндре S:

$$v_x = v_\infty \left(1 + \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{a_\infty^2}{v_\infty^2} - \frac{2}{\varkappa + 1} \cos^2 \varphi\right)$$

$$v_y = v_\infty \frac{2}{\varkappa + 1} \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2} - \cos^2 \varphi\right),$$

$$\frac{v_\infty^2}{2} + \frac{a_\infty^2}{\varkappa - 1} = \frac{1}{2} v_{\max}^2,$$

$$\left(\frac{a_\infty}{v_\infty}\right)^2 = \frac{\varkappa - 1}{2}\left(\frac{v_{\max}^2}{v_\infty^2} - 1\right)$$

Сочетая (13), (14) с:

$$\left.\begin{aligned} v_r &= v_y \sin\theta - v_x \cos\theta, \\ v_\theta &= v_x \sin\theta + v_y \cos\theta, \end{aligned}\right\}$$

До прохождения разрыва:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \rho_\infty v_\infty \sin\theta = \rho_0 \left(1 - \frac{v_\infty^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} v_\infty \sin\theta.$$

На поверхности разрыва:

$$\psi = \rho_0 \left(1 - \frac{v_\infty^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} v_\infty r \sin\theta.$$

При этом, если поверхность ∑ имеет уравнение:

$$r = r_0 + e(\theta).$$

То:

$$\frac{de}{d\theta} = -(r_0 + e)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \theta\right)$$

Для определения значений ϑ после прохождения разрыва:

$$\vartheta^{\varkappa} = \frac{p}{p^{\varkappa}}; \quad \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\varkappa} = \frac{p}{p_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\varkappa} = \frac{p}{p_\infty}\left(\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)^{\varkappa}:$$

$$\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa}\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2}\cos^2\varphi - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(1+2\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{\varkappa-1}\right)^{\varkappa}$$

Краевые условия на обтекаемом цилиндре:

$$\text{при } r = r_0 \quad v_r = 0 \quad \psi = 0.$$

$$\text{при } r = r_0: \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa}\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)\left(1+\frac{2}{\varkappa-1}\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\right)^{\varkappa}$$

Аппроксимирующая система О. М. Белоцерковского на основе метода интегральных соотношений А. А. Дородницына.

Разобьём всю область между цилиндром S и поверхностью разрыва ∑ на N полосок, проводя N-1 кривую с уравнениями:

$$r = r_i(\theta) = r_0 + \frac{i}{N} e(\theta), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1.$$

Линии равноудалены на: $e(\theta)/N$

Проинтегрируем обе части уравнения (8) по r вдоль произвольного луча θ = const:

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} (\rho v_\theta v_r)\,dr - \frac{i}{N}(\rho v_\theta v_r)_i \frac{de}{d\theta} + (r\rho v_r^2 + pr)_i - (pr)_S =$$

$$= \int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} (v_\theta^2 \rho + p)\,dr, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$((v_r)_S = 0).$$

Аналогичная операция для уравнения (9):

$$\frac{d}{d\theta}\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} v_\theta \tau\, dr - \frac{i}{N}(v_\theta \tau)_i \frac{de}{d\theta} + (r v_r \tau)_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Предыдущие 2 уравнения содержат интегралы вида:

$$\int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} f(r,\ \theta)\, dr.$$

Аппроксимируя теперь любую подынтегральную функцию интерполяционным полиномом по г степени N, принимая за узлы интерполяций границы полос:

$$f(r,\ \theta) = \sum_{m=0}^{N} a_m(\theta) \left[\frac{r - r_0}{e(\theta)}\right]^m$$

Коэффициенты $a_m(\theta)$ выразим как:

$$\sum_{m=0}^{N} a_m \left(\frac{i}{N}\right)^m = f_i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$a_0 = f_0, \quad a_m = b_{jm} f_0 + \sum_{j=1}^{N} b_{jm} f_j \qquad (m = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

$N = 1$ имеем

$$b_{01} = -1, \qquad b_{11} = +1.$$

Для $N = 2$ имеем

$$b_{01} = -3,\ b_{11} = 4, \qquad b_{21} = -1;$$
$$b_{02} = 2, \qquad b_{12} = -4,\ b_{22} = 2;$$

для $N = 3$:

$$b_{01} = -\frac{11}{2},\quad b_{11} = 9, \qquad b_{21} = -\frac{9}{2}, \qquad b_{31} = 1;$$
$$b_{02} = 9, \qquad b_{12} = -\frac{45}{2}, \quad b_{22} = 18, \qquad b_{32} = -\frac{9}{2};$$
$$b_{03} = -\frac{9}{2},\quad b_{13} = \frac{27}{2}, \qquad b_{23} = -\frac{27}{2}, \quad b_{33} = +\frac{9}{2}$$

Можем теперь вычислить $\bar{f}_i(\theta) = \int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} f(r, \theta)\, dr.$

С помощью (25):

$$\bar{f}_i(\theta) = \sum_{m=0}^{m} a_m(\theta) \int\limits_{r_0}^{r_i(\theta)} \left[\frac{r - r_0}{e(\theta)}\right]^m dr = e(\theta) \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m(\theta)}{m+1} \left[\frac{r_i - r_0}{e(\theta)}\right]^{m+1}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

или по (22):

$$\bar{f}_i(\theta) = e(\theta) \sum_{m=0}^{N} \frac{a_m(\theta)}{m+1} \left(\frac{i}{N}\right)^{m+1}$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$\bar{f}_i(\theta) = e(\theta)\left(\beta_{0i} f_0 + \sum_{j=1}^{N} \beta_{ji} f_j\right) \qquad (f_N = f_\Sigma),$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

Для $N = 1$

$$\beta_{01} = \frac{1}{2}, \qquad \beta_{11} = \frac{1}{2}.$$

Для $N = 2$

$$\beta_{01} = \frac{5}{24}, \quad \beta_{11} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{21} = -\frac{1}{24},$$

$$\beta_{02} = \frac{1}{6}, \quad \beta_{12} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{6}.$$

Для $N = 3$

$$\beta_{01} = \frac{1}{8}, \quad \beta_{11} = \frac{19}{72}, \quad \beta_{21} = -\frac{5}{72}, \quad \beta_{31} = \frac{1}{72},$$

$$\beta_{02} = \frac{1}{9}, \quad \beta_{12} = \frac{4}{3}, \quad \beta_{22} = \frac{1}{9}, \quad \beta_{32} = 0,$$

$$\beta_{03} = \frac{1}{8}, \quad \beta_{13} = \frac{3}{8}, \quad \beta_{23} = \frac{3}{8}, \quad \beta_{33} = \frac{1}{8}.$$

$$f_j = \alpha_{0j} f_0 + \frac{1}{e(\theta)} \sum_{i=1}^{N} \alpha_{ij} \bar{f}_i$$ [1])

Для $N = 1$

$$\alpha_{01} = -1, \quad \alpha_{11} = 2.$$

Для $N = 2$

$$\alpha_{01} = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_{11} = 2, \quad \alpha_{21} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{02} = 1, \quad \alpha_{12} = -8, \quad \alpha_{22} = 4.$$

Для $N = 3$

$$\alpha_{01} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_{11} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{21} = \frac{3}{2}, \quad \alpha_{31} = -\frac{1}{6}$$

$$\alpha_{02} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_{12} = -6, \quad \alpha_{22} = 3, \quad \alpha_{32} = \frac{2}{3},$$

$$\alpha_{03} = -1, \quad \alpha_{13} = \frac{27}{2}, \quad \alpha_{23} = -\frac{27}{2}, \quad \alpha_{33} = \frac{13}{2},$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\bar{s}_i}{d\theta} &= \frac{i}{N}\bar{s}_i\frac{de}{d\theta} - (r\rho v_r^2 + pr)_i + (pr)_0 + (\overline{v_\theta^2\rho + p})_i,\\ \frac{d\bar{t}_i}{d\theta} &= \frac{i}{N}\bar{t}_i\frac{de}{d\theta} - (rv_r\tau)_i,\end{aligned}\right\}$$

где:

$$s_i = (\rho v_\theta v_r)_i, \quad t_i = (v_\theta\tau)_i$$

С другой стороны, в силу (30):

$$\frac{ds_j}{d\theta} = \frac{1}{e(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\frac{d\bar{s}_i}{d\theta} - \frac{1}{e^2(\theta)}\frac{de}{d\theta}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\bar{s}_i \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Аналогично, для $dt_j/d\theta$

$$\frac{dt_j}{d\theta} - \alpha_{0j}\frac{dt_0}{d\theta} = \frac{1}{e(\theta)}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\frac{d\bar{t}_i}{d\theta} - \frac{1}{e^2(\theta)}\frac{de}{d\theta}\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ij}\bar{t}_i \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N).$$

Получим систему 2N(j=1, …, N) обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, линейную относительно производных.

Система эта будет содержать:

- 2N + 1 скорости: $(v_r)_1,\ (v_r)_2,\ \ldots,\ (v_r)_N;\ (v_\theta)_S,\ (v_\theta)_1,\ \ldots,\ (v_\theta)_N$

$$(v_r)_N = (v_r)_\Sigma,\ (v_\theta)_N = (v_\theta)_\Sigma),$$

- N+1 функцию: $\vartheta_S,\ \vartheta_1,\ \ldots,\ \vartheta_N$
- функцию: $e(\theta)$

Всего: 3N + 3 функций

Теперь для $d(v_\theta)_\Sigma/d\theta$ и $d(v_r)_\Sigma/d\theta$ получим:

$$\frac{d(v_\theta)_\Sigma}{d\theta} = -n_1\frac{d\varphi}{d\theta} - (v_r)_\Sigma, \quad \frac{d(v_r)_\Sigma}{d\theta} = m_1\frac{d\varphi}{d\theta} + (v_\theta)_\Sigma$$

где:

$$m_1 = +\frac{dv_y}{d\varphi}\sin\theta - \frac{dv_x}{d\varphi}\cos\theta, \quad n_1 = -\left(\frac{dv_x}{d\varphi}\sin\theta + \frac{dv_y}{d\varphi}\cos\theta\right)$$

Так как:

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\psi_i)$$

То:

$$d\vartheta_i/d\theta = d\vartheta_i/d\psi_i \cdot d\psi_i/d\theta.$$

С другой стороны:

$$\vartheta_i(\psi_i) = \left(\vartheta_\Sigma(\psi_\Sigma)\right)_{\psi_\Sigma=\psi_i}$$

Поэтому:

$$d\vartheta_i/d\psi_i = \left(d\vartheta_\Sigma/d\psi_\Sigma\right)_{\psi_\Sigma=\psi_i}$$

Окончательное выражение:

$$\frac{d\vartheta_i}{d\theta} = \left(\frac{d\vartheta_\Sigma}{d\varphi}\,\frac{d\theta}{d\psi_\Sigma}\right)_{\psi_\Sigma=\psi_i}\frac{d\varphi}{d\theta}\,\rho_i\left[(v_\theta)_i\,\frac{i}{N}\,\frac{de}{d\theta} - r_i\,(v_r)_i\right]$$

Таким образом мы замкнули задачу: число уравнений будет равно числу искомых функций. При этом краевые условия на теле и ударной волне удовлетворяются автоматически при любом N.

на оси θ = 0:

$$(v_\theta)_S = (v_\theta)_1 = \ \dots\ = (v_\theta)_{N-1} = 0, \quad \varphi = 0, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \ \dots\ = \vartheta_{N-1} =$$

$$= \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)\left(1 + \frac{2}{\varkappa - 1}\frac{a_\infty^2}{v_\infty^2}\right)\left(\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1}\frac{v_\infty^2}{a_\infty^2} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}},$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \ \dots\ = \psi_{N-1} = 0.$$

Неизвестными оказываются: $(v_r)_1,\ (v_r)_2\ \dots\ (v_r)_{N-1},\ e\,(0)$

Мы привели систему к виду, решённому относительно производных:

$$ds_j/d\theta, \quad dt_j/d\theta,$$

где: s_j и t_j определяются через: $(v_r)_j$ и $(v_\theta)_j$.

Используя это, получим:

$$\frac{dt_j}{d\theta} = -\frac{t_j (v_r)_j}{a_j^2} \frac{d (v_r)_j}{d\theta} + \frac{\tau_j}{a_j^2} \left(a^2 - v_\theta^2\right)_j \frac{d (v_\theta)_j}{d\theta}$$

$$\frac{ds_j}{d\theta} = \rho_0 \left(\frac{\vartheta_j}{\vartheta_0}\right)^{-\varkappa/(\varkappa-1)} \left[(v_r)_j \frac{dt_j}{d\theta} + t_j \frac{d (v_r)_j}{d\theta} - \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} t_j (v_r)_j \frac{d \ln \vartheta_j}{d\theta}\right]$$

Аппроксимирующую систему в нормальной форме можно записать так:

$$\frac{de}{d\theta} = -(r_0 + e)\,\mathrm{tg}\,(\theta + \varphi),$$

$$\frac{d\psi_j}{d\theta} = \rho_j \left(v_1 \frac{dr_j}{d\theta} - r v_r\right)_j,$$

$$\vartheta_j(\psi_j) = \vartheta_\Sigma(\psi_\Sigma)\big|_{\psi_\Sigma = \psi_j}, \qquad \frac{d(v_r)_j}{d\theta} = v_j,$$

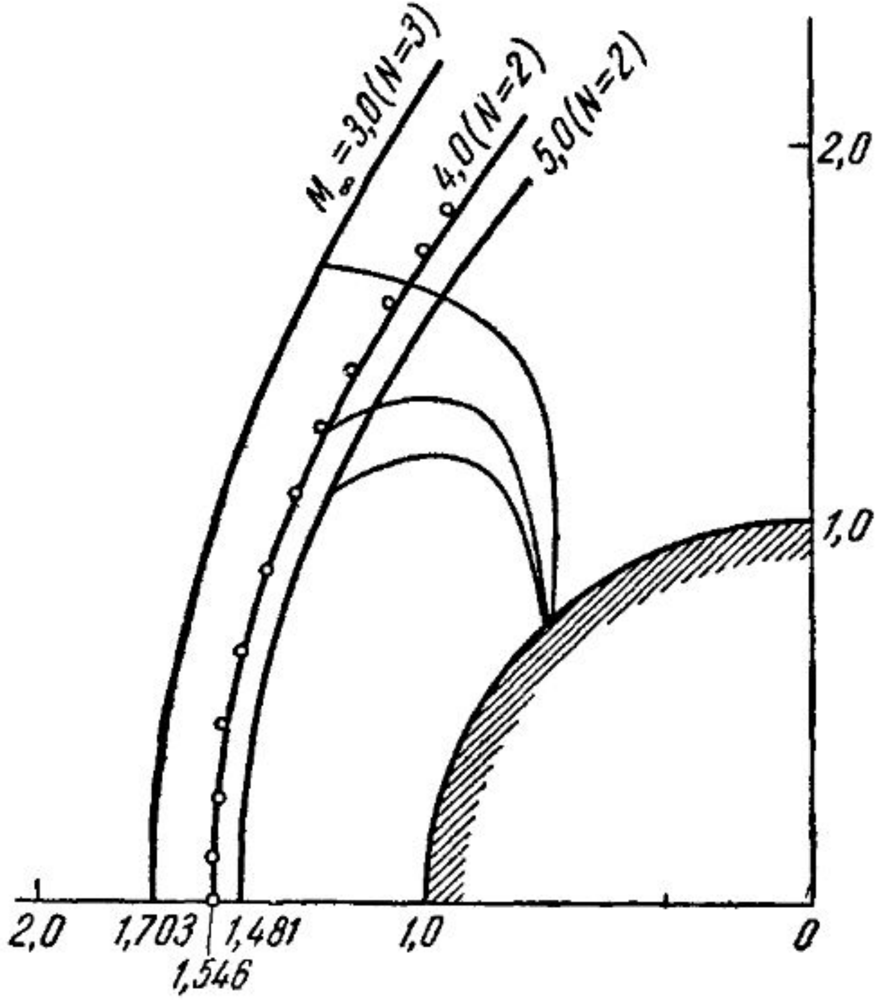
$$\frac{d(v_\theta)_s}{d\theta} = \frac{E_0}{a_s^2 - (v_\theta^2)_s}, \qquad \frac{d(v_\theta)_j}{d\vartheta} = \frac{E_j}{a_j^2 - (v_\theta^2)_j},$$

$$j = 1,\ 2,\ \ldots,\ N - 1.$$

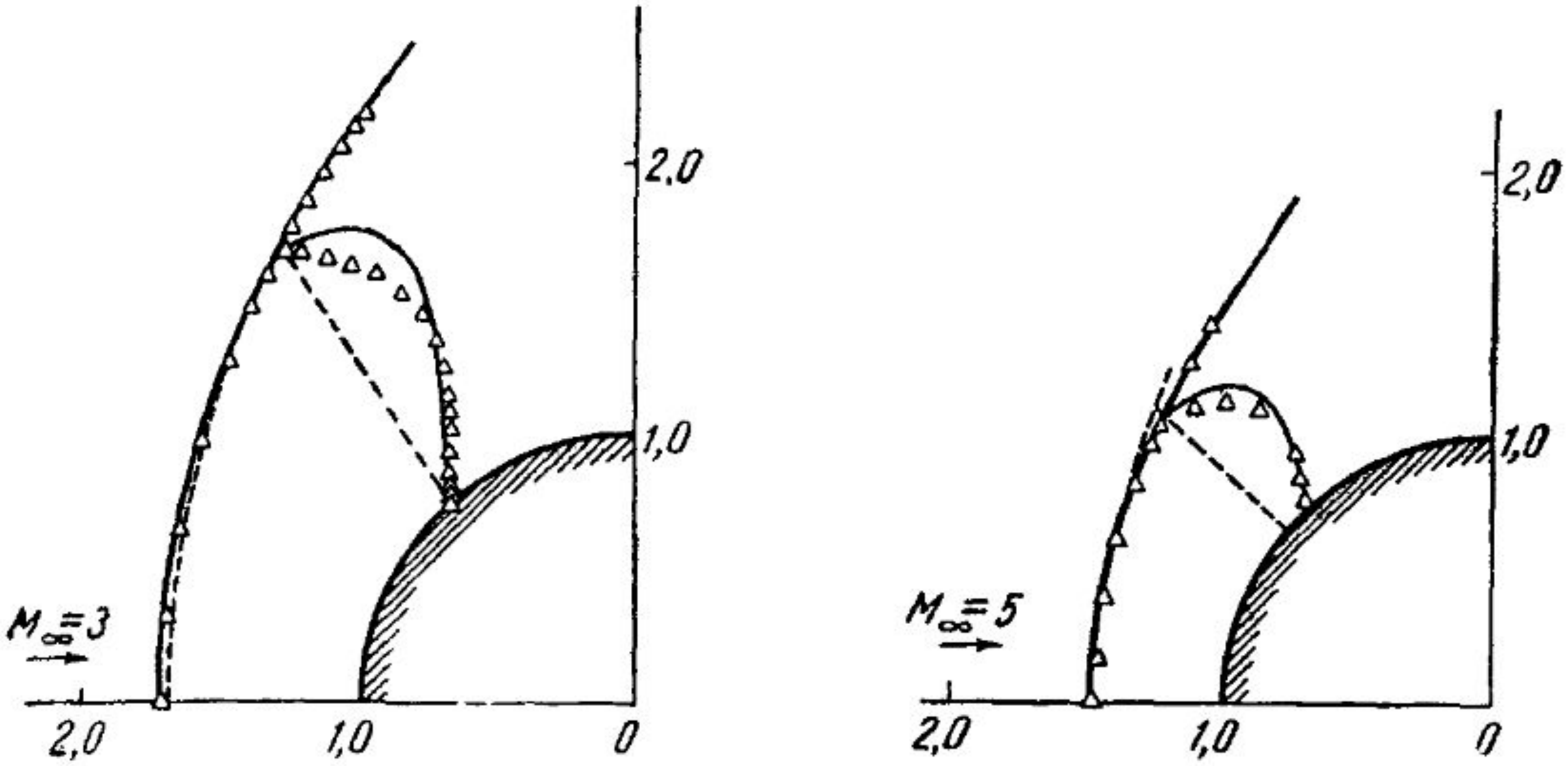
при: $(v_0)_j = a_j$ должно быть: $E_j = 0 \ (j = s, \ 1, \ 2, \ \ldots, \ N-1)$.

Проведённый О. М. Белоцерковским анализ особых точек показывает, что в уравнениях (40) особенности будут типа «седла», причём во всей рассматриваемой области интегрирования существует единственное решение, голоморфное всюду и удовлетворяющее условиям как при θ = 0, так и при $(v_\theta)_j = a_j$

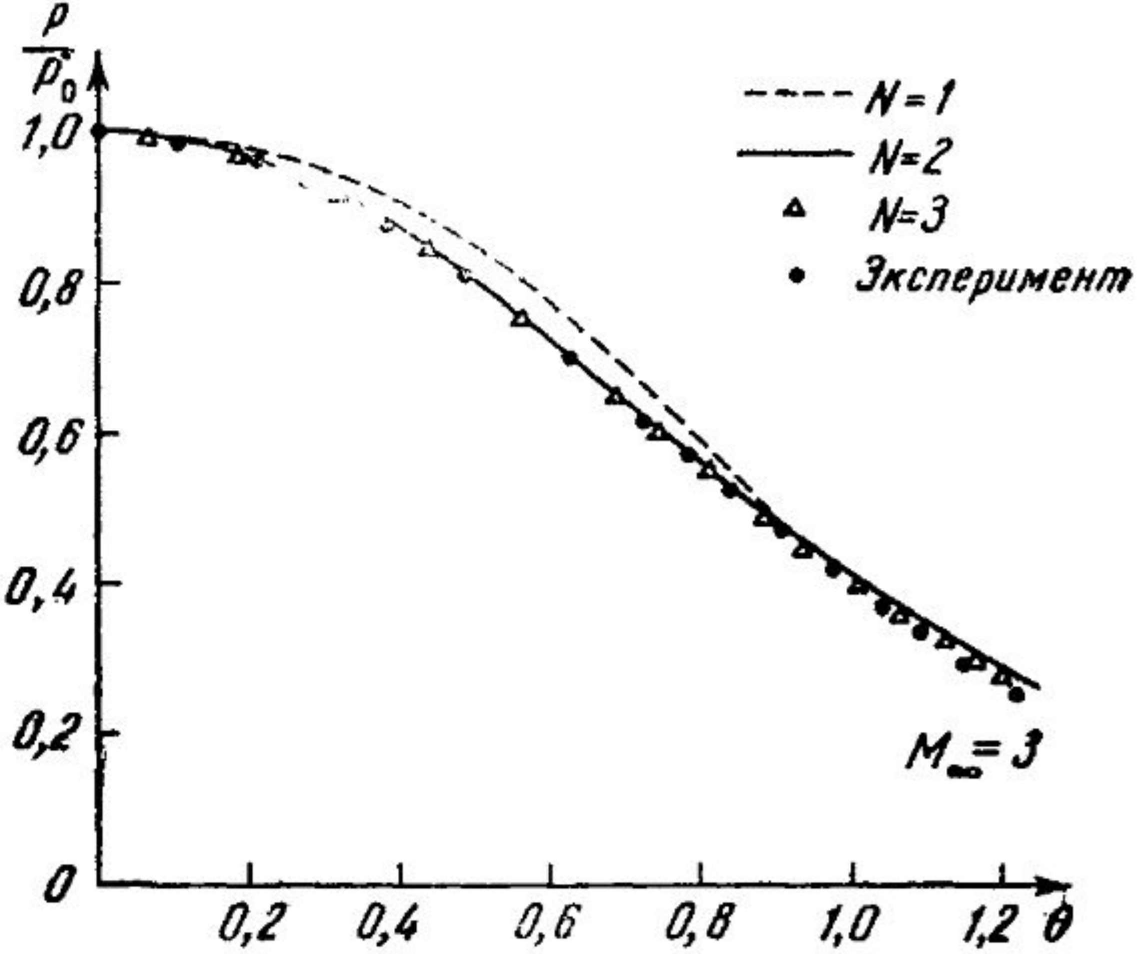
Техническая трудность: в особых точках в правых частях уравнений (40) будут неопределенности типа 0/0.



$M_\infty = 3,0 (N=3)$
$4,0 (N=2)$
$5,0 (N=2)$
2,0
1,0
2,0
1,703
1,546
1,481
1,0
0



2,0
1,0
$M_\infty = 3$
2,0
1,0
0
2,0
1,0
$M_\infty = 5$
2,0
1,0
0



$\frac{p}{p_0}$
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
θ
N = 1
N = 2
N = 3
Эксперимент
$M_\infty = 3$

Итог: как видим, уже расчёт по первому приближению даёт в основном правильное положение и форму ударной волны, распределение давления на теле, на волне.
Для определения величин в поле при $M_{\infty} \leqslant 3$ надо считать по крайней мере три приближения, в то время как при $M_{\infty} > 3$ достаточно двух.