Resolución de ecuaciones de una variable

Computación 2021

FaMAF

14 abr. 2021

Contenidos

Códigos

Códigos de la clase en:

`https://github.com/mlares/compuprof2021`

Métodos de Newton

Método de Newton

Def./

Sea f una función real definida en un intervalo de $\xi \in \mathbb{R}$.
La secuencia

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

donde x_0 es un valor cercano a ξ y $\lambda \neq 0$ es una **relajación**

Teorema

Sea f una función real definida y contínua en un entorno de ξ, y sea $f(\xi) = 0$. Además, f' está definida y es contínua en un entorno de ξ y $f'(\xi) \neq 0$.

Entonces existen números reales positivos λ y δ tal que la secuencia

$$x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

converge a ξ para cualquier x_0 en el entorno $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ de ξ.

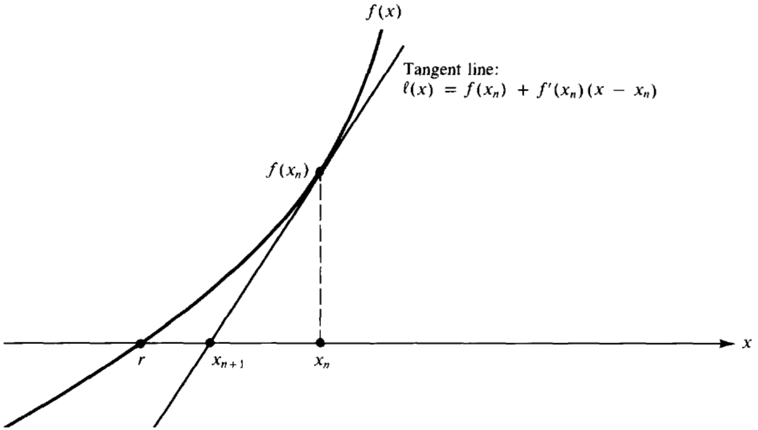
Método de Newton

El método de Newton permite hallar $\bar{x}$ solución de $f(x) = 0$ si:

- f es continuamente diferenciable en un entorno de $\bar{x}$,
- $f'(\bar{x}) \neq 0$,
- x_0 es cercano a $\bar{x}$.

Este método fue propuesto por Isaac Newton (1669) para encontrar raíces de polinomios cúbicos, aunque también lo utilizó para una función no lineal. Luego Joseph Raphson (1690) reescribió el método para encontrar raíces de polinomios, construyéndolo de manera distinta a la propuesta por Newton. Finalmente Thomas Simpson (1740) lo escribió como lo conocemos en la actualidad y lo utilizó para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Método de Newton



Construcción del método

Veamos cómo el hace el método de Newton para generar una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converja a una raíz $\bar{x}$ de f.

El razonamiento usado en este método puede encontrarse en diversas áreas de la matemática y responde al hecho que toda función diferenciable en un punto puede aproximarse localmente por la recta tangente a ese punto.

O sea, aproximar f en un punto x_0 por su polinomio de Taylor de grado 1:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

para todo x en un entorno de x_0.

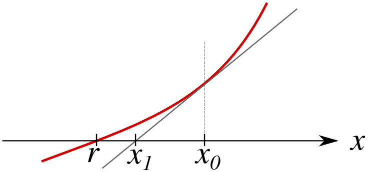
Construcción del método

Con el método de Newton, el problema de hallar x tal que $f(x) = 0$ se cambia por el problema auxiliar de hallar x tal que

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

una vez que se tiene una primera aproximación de la raíz.

La solución de este problema auxiliar, llamémosla x_1, servirá como nuevo punto para definir el siguiente problema auxiliar.



Construcción del método

Entonces, dado x_0 el método de Newton genera una sucesión $\{x_k\}$ tal que para cada $k \geq 0$ definimos x_{k+1} como la solución de

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

Resolviendo la ecuación lineal, se obtiene que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Las condiciones de que f' es continua y $\bar{x}$ es una raíz simple de f (es decir, $f'(\bar{x}) \neq 0$) es de suma importancia para el método. Esto garantiza que $f'(x) \neq 0$ para todo x en un entorno de $\bar{x}$. Luego

- la ecuación lineal tiene solución si x_k está próximo a $\bar{x}$ (pues $f'(x_k) \neq 0$), y
- no existe otra raíz de f cerca de $\bar{x}$.

Construcción del método

Para ver que no existe otra raíz de f cerca de $\bar{x}$, consideremos que si existiera x^* raíz de f en un entorno de $\bar{x}$ obtendríamos que para un ξ entre estos dos puntos vale que:

$$0 = f(x^*) - f(\bar{x}) = f'(\xi)(x^* - \bar{x}),$$

y como $f'(\xi) \neq 0$ entonces $x^* = \bar{x}$.

Pseudocódigo

1. Dar x_0 y $k = 0$.
2. Si $f(x_k) = 0$, parar y retornar x_k.
3. Si $f'(x_k) = 0$, parar porque el método no puede continuar.
4. Definir
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$
5. Hacer $k \leftarrow k + 1$ e ir al paso 2

Implementación del método

Los criterios de parada $f(x_k) = 0$ y $f'(x_k) = 0$ no son apropiados para trabajar en aritmética finita. Para la implementación, considere una tolerancia $\varepsilon > 0$ para el error del valor funcional, $\delta > 0$ para el error a la solución y $N \in \mathbb{N}$ para el número máximo de iteraciones. De esta manera, detendremos la ejecución del algoritmo si:

1. $|f(x_k)| < \varepsilon$
2. $|x_k - x_{k-1}| < \delta$
3. $k > N$

En general queremos que suceda $(1 \wedge 2) \vee 3$

Para no dividir por un $f'(x_k)$ próximo a cero, podemos detener la ejecución si $|f'(x_k)|$ es menor al épsilon de la máquina, o sea, paramos si no vale que $1 + |f'(x_k)| > 1$.

Criterio de convergencia

1. $C_1 = |f(x_k)| < \varepsilon$
2. $C_2 = |x_k - x_{k-1}| < \delta$
3. $C_3 = k > N$

En general queremos que suceda $C = (C_1 \wedge C_2) \vee C_3$

Notar que si el criterio que debe cumplirse es C, quiere decir que mientras no se cumpla C se debe seguir iterando.
Teniendo en cuenta que para dos proposiciones lógicas P y Q, se cumple que (Leyes de Morgan):

$$\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\iff \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) &\iff \neg P \wedge \neg Q, \end{aligned}$$

la negación de C es:

$$\neg C = \neg(C_1 \wedge C_2) \wedge \neg C_3 = (\neg C_1 \vee \neg C_2) \wedge \neg C_3$$

Criterio de convergencia

```
tolerancia_x = 1.e-6
tolerancia_f = 1.e-6
tolerancia_N = 50
contador = 0

while not condicion:

    ...

    contador += 1
    condicion1 = delta_x < tolerancia_x
    condicion2 = delta_f < tolerancia_f
    condicion3 = contador > tolerancia_N

    condicion = (condicion1 and condicion2) or condicion3
```

Criterio de convergencia

```python
tolerancia_x = 1.e-6
tolerancia_f = 1.e-6
tolerancia_N = 50
contador = 0

while not condicion:

    ...

    contador += 1
    condicion1 = delta_x < tolerancia_x
    condicion2 = delta_f < tolerancia_f
    condicion3 = contador == tolerancia_N

    condicion = (condicion1 and condicion2) or condicion3
```

Criterio de convergencia

```python
tolerancia_x = 1.e-6
tolerancia_f = 1.e-6
tolerancia_N = 50
contador = 0

while condicion:

    ...

    contador += 1
    condicion1 = delta_x > tolerancia_x
    condicion2 = delta_f > tolerancia_f
    condicion3 = contador < tolerancia_N

    condicion = (condicion1 or condicion2) and condicion3
```

Teorema: método de Newton

Teorema

Sea f una función continuamente diferenciable en un entorno de un punto $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$. Entonces existe un intervalo $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ tal que si x_0 se toma en ese intervalo, el método de Newton o finaliza con $f(x_k) = 0$ para algún $k \geq 0$, o genera una sucesión infinita $\{x_k\}$ tal que:

- $f'(x_k) \neq 0$ *para todo k,*
- $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$

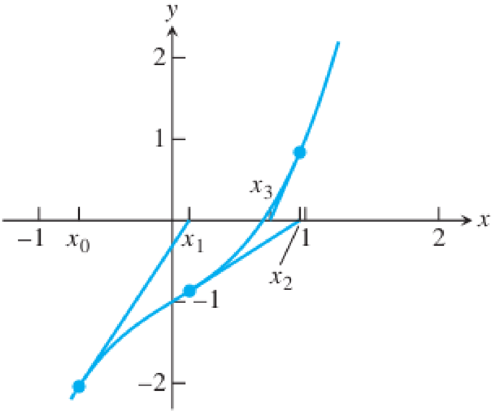
Además, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|} = 0,$$

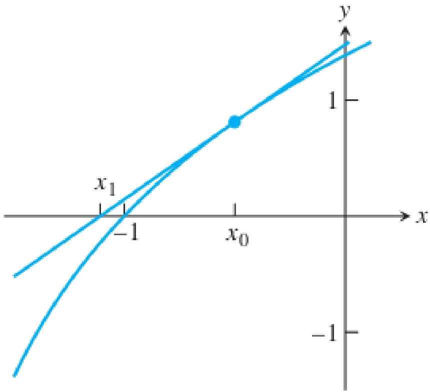
y si existe L tal que $|f'(y) - f'(x)| \leq L|y - x|$ entonces

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} < \infty.$$

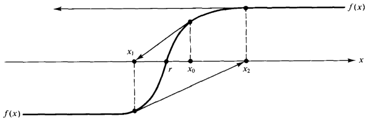
Método de Newton

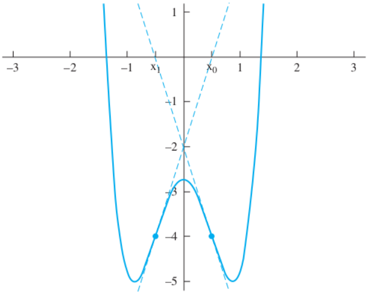


Método de Newton



Método de Newton: casos patológicos





Más info: Ref.: Donovan, G. C., Miller, A. R., & Moreland, T. J. (1993). Pathological Functions for Newton's Method. The American Mathematical Monthly, 100(1)

Demostración de convergencia

Veamos cómo demostrar el teorema enunciado anteriormente:

Si no vale que $f(x_k) = 0$ para algún $k \geq 0$, entonces el método genera una sucesión $\{x_k\}$.

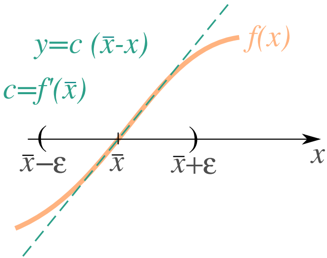
Por continuidad de f', tomando $c = |f'(\bar{x})| > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ entonces:

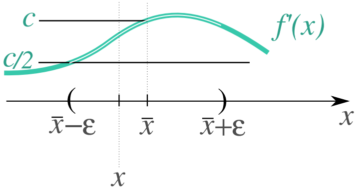
$$|f'(x)| > \frac{c}{2}$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |f'(x + t(\bar{x} - x)) - f'(x)| < \frac{c}{4}$$

Demostración de convergencia

$$|f'(x)| > \frac{c}{2} \qquad\qquad \sup_{t\in[0,1]} |f'(x+t(\bar{x}-x)) - f'(x)| < \frac{c}{4}$$

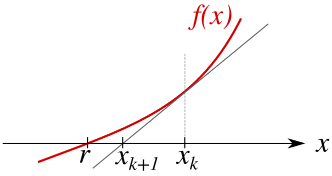




Demostración de convergencia

Veamos por inducción que si $x_k \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$ entonces $x_{k+1} \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$.
De la iteración del método tenemos que:

$$
\begin{aligned}
0 &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\
&= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - \bar{x}) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k).
\end{aligned}
$$



Demostración de convergencia

Veamos por inducción que si $x_k \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$ entonces $x_{k+1} \in (\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon)$.
De la iteración del método y usando que $f(\bar{x}) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= 0 && (1)\\ 0 &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) && (2)\\ (1),(2) \implies f(\bar{x}) &= f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - \bar{x}) + f'(x_k)(\bar{x} - x_k). && (3) \end{aligned}$$

Como $f'(x_k) \neq 0$ pues x_k está en el intervalo, entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \bar{x} &= \frac{1}{f'(x_k)}\big(f(\bar{x}) - f(x_k) - f'(x_k)(\bar{x} - x_k)\big)\\ &= \frac{1}{f'(x_k)}\left(\int_0^1 \big(f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)\big)(\bar{x} - x_k)dt\right), \end{aligned}$$

Donde usamos que para $\phi(t) = f(x_k + t(\bar{x} - x_k))$ se tiene $\phi'(t) = f'(x_k + t(\bar{x} - x_k))(\bar{x} - x_k)$.

Demostración de convergencia

Tomando valor absoluto obtenemos

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{2}{c} \left(\sup_{t \in [0,1]} |f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)| \right) |x_k - \bar{x}|.$$

Usando la cota para el supremo y el hecho que $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$ se consigue que

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} |x_k - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Por lo tanto x_{k+1} también está en el intervalo. Concluyendo que si x_0 está en el intervalo toda la sucesión queda en el intervalo. Con esto, garantizamos que

$$|x_k - \bar{x}| \leq \frac{1}{2} |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \ldots \leq \frac{1}{2^k} |x_0 - \bar{x}|,$$

y por lo tanto $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$.

Demostración de convergencia

De aquí se obtiene la velocidad de convergencia superlineal

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|} \leq \frac{2}{c} \left(\sup_{t \in [0,1]} |f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)| \right) \to 0.$$

y si $|f'(y) - f'(x)| \leq L|y - x|$ obtenemos la velocidad de convergencia cuadrática

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|^2} \leq \frac{2L}{c}.$$

Métodos Cuasi-Newton

Método ....

Estos métodos permiten hallar $\bar{x}$ solución de $f(x) = 0$ si:

- $|f'(y) - f'(x)| \leq L|y - x|$ para todo x, y en un entorno de $\bar{x}$,
- $f'(\bar{x}) \neq 0$,
- x_0 es cercano a $\bar{x}$.

La primera condición nos dice que f' es localmente Lipschitz continua en $\bar{x}$. Claramente esta condición implica que f es continuamente diferenciable en un entorno de $\bar{x}$.

Como ya se vio, el método de Newton necesita el cálculo de la derivada en cada iteración. En algunos casos la evaluación de la derivada es prohibitivo por su costo computacional o en otros casos no existe una forma de calcularla pues la función f es resultado de un procedimiento. En esos casos se suele utilizar una aproximación de la derivada.

Pseudocódigo

Resumiendo, dado x_0 un método cuasi-Newton genera una sucesión $\{x_k\}$ tal que para cada $k \geq 0$ definimos x_{k+1} como la solución de

$$0 = f(x_k) + a_k(x - x_k).$$

Resolviendo la ecuación lineal, se obtiene que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k}.$$

Por lo general se espera que a_k sea una aproximación de $f'(x_k)$. Formalmente

$$a_k = f'(x_k) + p_k,$$

donde p_k es una perturbación que se mantiene controlada a lo largo de las iteraciones y mejor aún si $p_k \to 0$.
Con esto, los métodos cuasi-Newton pueden entenderse como un método de Newton sujeto a perturbaciones.

Pseudocódigo

1. Dar x_0, a_0 y $k = 0$.
2. Si $f(x_k) = 0$, parar y retornar x_k.
3. Si $a_k = 0$, parar porque el método no puede continuar.
4. Definir
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k}.$$
5. Calcular a_{k+1}.
6. Hacer $k \leftarrow k + 1$ e ir al paso 2

Aproximación por diferencias finitas

Considere un valor pequeño $h > 0$, del desarrollo de Taylor sabemos que

$$f(x_k + h) = f(x_k) + f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi_k)h^3,$$

obteniendo la *diferencia hacia adelante*

$$a_k := \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} = f'(x_k) + O(h).$$

Si consideramos el siguiente desarrollo

$$f(x_k - h) = f(x_k) - f'(x_k)h + \frac{1}{2}f''(x_k)h^2 - \frac{1}{6}f'''(\eta_k)h^3$$

obtenemos la *diferencia hacia atrás*

$$a_k := \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h} = f'(x_k) + O(h).$$

Ahora, restando los desarrollos anteriores obtenemos la *diferencia centrada*

$$a_k := \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h} = f'(x_k) + O(h^2).$$

Método cuasi-Newton con recomienzos

Notar que las tres opciones proveen aproximaciones de la derivada con una perturbación de orden h o h^2.

Aunque la diferencia centrada aproxima mejor, su costo de evaluación es mayor. En el procedimiento, antes de calcular a_k uno ya posee el valor $f(x_k)$ y por lo tanto las diferencias hacia adelante o hacia atrás requieren una sola evaluación funcional extra. En cambio, la diferencia centrada necesita dos evaluaciones funcionales.

Para la implementación computacional, se pueden considerar los mismos criterios de parada que para el método de Newton. A fin de poder trabajar con valores de a_k pequeños alrededor de la solución, en vez de verificar si $1 + |a_k| > 1$ (magnitud de a_k comparada con 1) utilizaremos $|f(x_k)| + |a_k| > |f(x_k)|$ (magnitud de a_k comparada con $f(x_k)$) que es equivalente a

$$1 + \frac{|a_k|}{|f(x_k)|} > 1.$$

Método cuasi-Newton con recomienzos

En el caso que la derivada pueda calcularse pero sea costosa, se puede calcular la derivada en un punto y dejarla constante por m iteraciones. O sea, para $k \geq 0$

$$a_k = \begin{cases} f'(x_k), & \text{si } k \text{ es múltiplo de } m, \\ a_{k-1}, & \text{si } k \text{ no es múltiplo de } m. \end{cases}$$

El caso particular en que

$$a_k = f'(x_0)$$

para todo $k \geq 0$ se conoce como **cuasi-Newton estacionario** y correspondería a tomar $m = 0$.

Método de la secante

El **método de la secante** es un método del tipo cuasi-Newton y tiene sus fundamentos en la construcción del método de Newton.
Mientras que en cada iteración del método de Newton se resuelve una ecuación lineal dada por la recta tangente a f en el punto x_k:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k),$$

en el método de la secante se utiliza la ecuación lineal dada por la recta secante entre la iteración actual y la anterior. O sea, en la iteración k tenemos que resolver:

$$0 = \ell(x) := f(x_k) + a_k(x - x_k),$$

donde la recta ℓ cumple que

$$\ell(x_k) = f(x_k) \quad \text{y} \quad \ell(x_{k-1}) = f(x_{k-1}).$$

Método de la secante

$$0 = \ell(x) := f(x_k) + a_k(x - x_k),$$

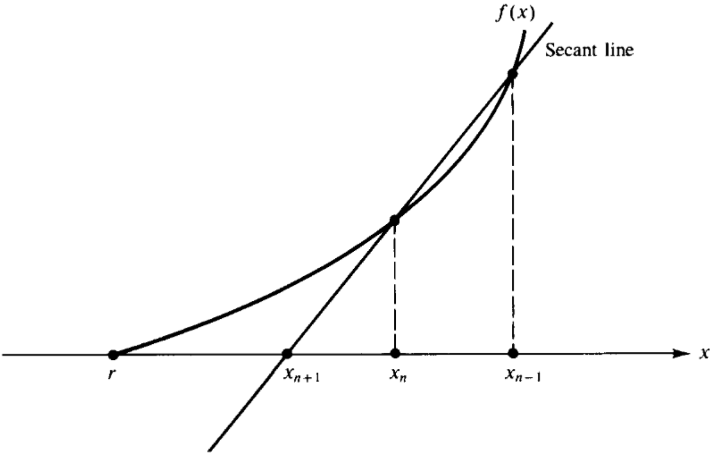
$$\ell(x_k) = f(x_k) \quad \text{y} \quad \ell(x_{k-1}) = f(x_{k-1}).$$

Note que la primera de estas ecuaciones es trivial y de la segunda se deduce que

$$a_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Claramente esto tiene sentido si $k \geq 1$. Para $k = 0$ necesitaríamos dar un punto auxiliar x_{-1} o directamente dar una aproximación inicial a_0. En este curso optaremos por la primera opción.

Método de Newton



Método de la secante

Para ver que esta es una aproximación de la derivada, definamos $\phi(t) = f\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)$ y usando que

$$\phi'(t) = f'\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)(x_k - x_{k-1})$$

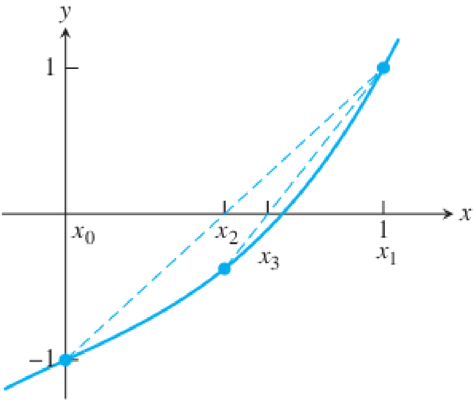
se obtiene

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\phi(1) - \phi(0)}{x_k - x_{k-1}} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_0^1 \phi'(t)dt \\ &= \int_0^1 f'\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big)dt \\ &= f'(x_k) + \int_0^1 \Big(f'\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big) - f'(x_k)\Big)dt \end{aligned}$$

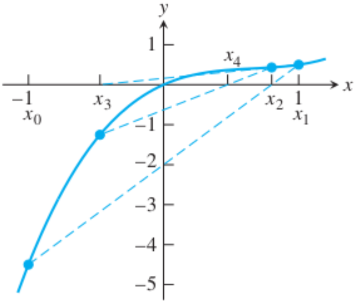
En el caso que la sucesión $\{x_k\}$ sea convergente podemos garantizar que

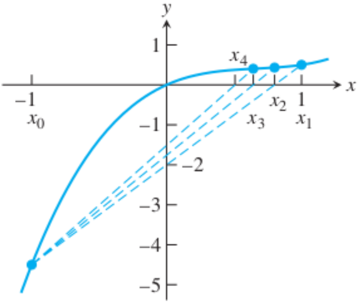
$$\int_0^1 \Big(f'\big(x_{k-1} + t(x_k - x_{k-1})\big) - f'(x_k)\Big)dt \to 0.$$

Método de la secante



Método de la secante





Teorema: convergencia de los métodos cuasi-Newton

Veamos que podemos demostrar formalmente la convergencia de los métodos cuasi-Newton:

Teorema

Sea f una función con $|f'(y) - f'(x)| \leq L|y - x|$ para todo x e y en un entorno de un punto $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$ y $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\eta > 0$ tales que si $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$ y $|a_k - f'(x_k)| < \eta$ para todo k, el método cuasi-Newton o finaliza con $f(x_k) = 0$ para algún $k \geq 0$, o genera una sucesión infinita $\{x_k\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}.$$

Demostración de convergencia

Si no vale que $f(x_k) = 0$ para algún $k \geq 0$, entonces el método genera una sucesión $\{x_k\}$.
Sea $c = |f'(\bar{x})| > 0$ y defina

$$\varepsilon < \frac{c}{4L}, \qquad \eta = L\varepsilon.$$

Veamos por inducción que si $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$ entonces $|x_{k+1} - \bar{x}| < \varepsilon$.
De las hipótesis se deduce que

$$\begin{aligned} |f'(\bar{x}) - f'(x_k)| &\leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)| \\ &\leq L|x_k - \bar{x}| < \eta. \end{aligned}$$

Con esto, obtenemos que

$$\begin{aligned} c = |f'(\bar{x})| &\leq |a_k| + |f'(\bar{x}) - f'(x_k)| + |f'(x_k) - a_k| \\ &< |a_k| + 2\eta < |a_k| + \frac{c}{2}, \end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{1}{|a_k|} < \frac{2}{c}.$$

Demostración de convergencia

De la iteración del método y usando que $f(\bar{x}) = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = 0 &= f(x_k) + a_k(x_{k+1} - x_k) \\ &= f(x_k) + a_k(x_{k+1} - \bar{x}) + a_k(\bar{x} - x_k). \end{aligned}$$

Despejando, se obtiene

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \bar{x} &= \frac{1}{a_k}\big(f(\bar{x}) - f(x_k) - f'(x_k)(\bar{x} - x_k) - \big(a_k - f'(x_k)\big)(\bar{x} - x_k)\big) \\ &= \frac{1}{a_k}\left(\int_0^1 \big(f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)\big)dt - \big(a_k - f'(x_k)\big)\right)(\bar{x} - x_k). \end{aligned}$$

Demostración de convergencia

Tomando valor absoluto obtenemos

$$
\begin{aligned}
|x_{k+1} - \bar{x}| &\leq \frac{2}{c} \left(\sup_{t \in [0,1]} |f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)| + |a_k - f'(x_k)| \right) |x_k - \bar{x}| \\
&< \frac{2}{c} 2\eta |x_k - \bar{x}| = \frac{4L\varepsilon}{c} |x_k - \bar{x}| < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

donde usamos que $4L\varepsilon/c < 1$. Por lo tanto x_{k+1} también está en el intervalo. Concluyendo que si x_0 está en el intervalo toda la sucesión queda en el intervalo. Con esto, garantizamos que

$$
|x_k - \bar{x}| \leq \frac{4L\varepsilon}{c} |x_{k-1} - \bar{x}| \leq \ldots \leq \left(\frac{4L\varepsilon}{c} \right)^k |x_0 - \bar{x}|,
$$

y por lo tanto $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$. ■

Convergencia superlineal del método secante

De la demostración del Teorema sabemos que si $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$ y $|a_k - f'(x_k)| < \eta$, entonces $|x_{k+1} - \bar{x}| < \varepsilon$. Luego de la fórmula de la actualización secante tenemos

$$\begin{aligned}
|a_{k+1} - f'(x_{k+1})| &= \left| \int_0^1 \Big(f'\big(x_k + t(x_{k+1} - x_k)\big) - f'(x_{k+1}) \Big) dt \right| \\
&\leq \int_0^1 L(1-t)|x_{k+1} - x_k| dt = \frac{L}{2}|x_{k+1} - x_k| \\
&\leq \frac{L}{2}(|x_{k+1} - \bar{x}| + |x_k - \bar{x}|) \\
&< \frac{L}{2} 2\varepsilon = \eta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$ y $|a_0 - f'(x_0)| < \eta$, entonces $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$ y $|a_k - f'(x_k)| < \eta$ para todo k.

Convergencia superlineal del método secante

Con esto, del Teorema deducimos que $x_k \to \bar{x}$. Ahora, de la fórmula anterior tenemos

$$\lim_{k\to\infty} |a_k - f'(x_k)| \leq \lim_{k\to\infty} \frac{L}{2}|x_{k+1} - x_k| = 0.$$

Combinando este resultado con la cota del error $k+1$ de la demostración del Teorema, obtenemos

$$\frac{|x_{k+1} - \bar{x}|}{|x_k - \bar{x}|} \leq \frac{2}{c}\left(\sup_{t\in[0,1]} |f'(x_k + t(\bar{x} - x_k)) - f'(x_k)| + |a_k - f'(x_k)| \right) \to 0.$$

Problema de punto fijo

Se desea hallar x tal que

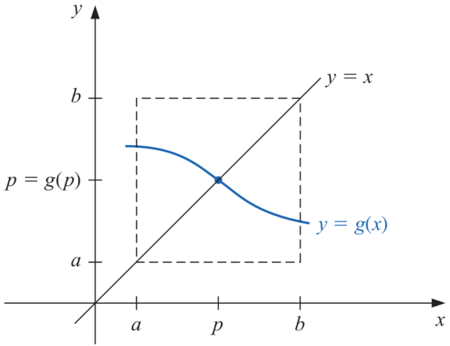
$$x = g(x),$$

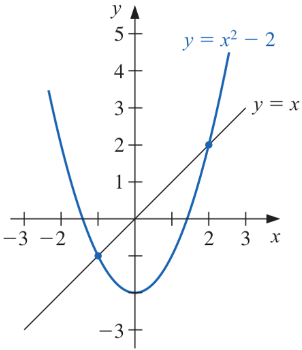
donde $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
Este problema es equivalente al problema de resolver una ecuación no lineal. O sea, si solucionamos uno entonces solucionamos el otro.

- Si quiero resolver el problema de punto fijo para g, defino $f(x) = x - g(x)$ y encuentro $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Obteniendo que $\bar{x} = g(\bar{x})$.
- Si quiero resolver la ecuación no lineal para f, defino $g(x) = x - \lambda f(x)$ para algún $\lambda \neq 0$ y encuentro $\bar{x}$ tal que $\bar{x} = g(\bar{x})$. Obteniendo que $f(\bar{x}) = 0$.

Aunque los problemas son equivalentes, las técnicas para resolver estos problemas tienen orígenes distintos.

Método de iteración de punto fijo





Método de iteración de punto fijo

Permite hallar $\bar{x}$ solución de $g(x) = x$ en un intervalo $[a, b]$ si:

- $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.
- existe $0 < \lambda < 1$ tal que $|g(x_1) - g(x_0)| \leq \lambda |x_1 - x_0|$ para todo $x_0, x_1 \in [a, b]$,

La primera condición nos garantiza que la función mapea puntos de $[a, b]$ en $[a, b]$.
La segunda condición equivale a decir que g es **"contractiva"** en $[a, b]$.

Def./

Sea g una función real definida y contínua en un intervalo $[a, b]$. Se dice que g es una **contracción** de $[a, b]$ si

$$\exists \; L \in [0, 1] \;\; / \;\; |g(x) - g(y)| \leq L|x - y| \;\; \forall x, y \in [a, b]$$

Nota: Cuando L es cualquier número real, esta condición se llama **condición de Lipschitz**.

Método de iteración de punto fijo

Teorema (Teorema de Brower)

Sea g una función real definida y contínua en $[a,b]$*, con*

$$g(x) \in [a,b] \forall x \in [a,b].$$

Entonces,

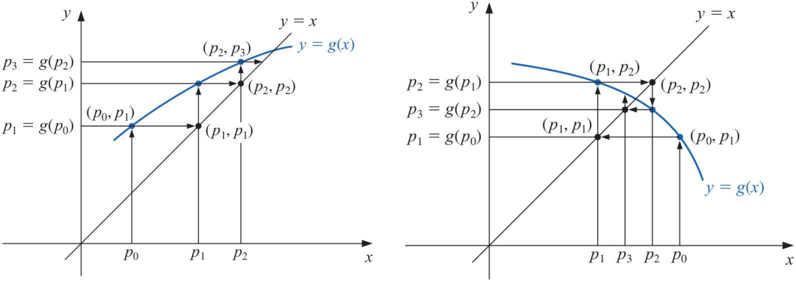
$$\exists \; \xi \in [a,b] \; / \; \xi = g(\xi)$$

El número ξ *se llama punto fijo de la función g.*

Método de iteración de punto fijo

El método consiste en generar una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ dando $x_0 \in [a, b]$ y definiendo

$$x_{k+1} = g(x_k)$$



Pseudocódigo

1. Dar $x_0 \in [a, b]$. Tomar $k = 0$.
2. Definir
$$x_{k+1} = g(x_k).$$
3. Si $x_{k+1} - x_k = 0$, parar y retornar $\bar{x} = x_k$.
4. Hacer $k \leftarrow k + 1$ e ir al paso 2

Teorema de convergencia

Veamos formalmente la convergencia del método

Teorema

Sea g una función tal que $g(x) \in [a, b]$ *para todo* $x \in [a, b]$ *y suponga que existe* $\lambda \in (0, 1)$ *tal que* $|g(y) - g(x)| \leq \lambda |y - x|$ *para todo* $x, y \in [a, b]$.

Entonces el método del punto fijo finaliza con $g(x_k) = x_k$ *para algún* $k \geq 0$ *o genera una sucesión infinita* $\{x_k\}$ *que converge a un punto fijo* $\bar{x}$ *de g en* $[a, b]$.
Más aún, $\bar{x}$ *es el único punto fijo de g en* $[a, b]$.

Demostración de convergencia

Veamos la demostración del teorema:

Si no vale que $g(x_k) - x_k = 0$ para algún $k \geq 0$, entonces el método genera una sucesión $\{x_k\}$.
Como $x_0 \in [a, b]$ y $x_{k+1} = g(x_k) \in [a, b]$ si $x_k \in [a, b]$, entonces concluímos que $x_k \in [a, b]$ para todo $k \geq 0$. Además, para $k > 0$,

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| &= |g(x_k) - g(x_{k-1})| \\ &\leq \lambda |x_k - x_{k-1}| \leq \lambda^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \\ &\leq \lambda^k |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

Demostración de convergencia

Ahora, usando que $\lambda < 1$, para $m > n$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= \left| \sum_{j=n}^{m-1} x_{j+1} - x_j \right| \leq \sum_{j=n}^{m-1} |x_{j+1} - x_j| \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} \lambda^j |x_1 - x_0| = \lambda^n \sum_{j=0}^{m-n-1} \lambda^j |x_1 - x_0| \\
&\leq \lambda^n \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j |x_1 - x_0| = \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|.
\end{aligned}
$$

Luego para todo m y n suficientemente grande esta diferencia puede hacerse tan pequeña como uno desee. Demostrando que $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente. Entonces existe $\bar{x}$ tal que

$$
\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}.
$$

Demostración de convergencia

Además, como $x_k \in [a, b]$ para todo k y el intervalo es cerrado, obtenemos que $\bar{x} \in [a, b]$. Como g es continua,

$$\bar{x} = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(\bar{x}).$$

Por otro lado, si existe $\hat{x} \in [a, b]$ tal que $g(\hat{x}) = \hat{x}$, entonces

$$|\hat{x} - \bar{x}| = |g(\hat{x}) - g(\bar{x})| \leq \lambda|\hat{x} - \bar{x}|.$$

Luego, como $\lambda < 1$,

$$0 \geq (1 - \lambda)|\hat{x} - \bar{x}| \geq |\hat{x} - \bar{x}|.$$

Concluyendo que $\hat{x} = \bar{x}$. ■

Aclaración sobre resultados de convergencia

Un error bastante común en la interpretación de los resultados de congergencia de los algoritmos, es confundir condiciones necesarias con condiciones suficientes.

Las hipótesis utilizadas en los resultados de convergencia son condiciones suficientes. Podemos garantizar la convergencia bajo esas hipótesis. Es lógicamente incorrecto afirmar que el no cumplimiento de estas hipótesis garantiza la no convergencia del algoritmo.

El algoritmo puede hallar la solución de un problema que no cumpla con las hipótesis del teorema. Para demostrar la no convergencia de un método se debería verificar el no cumplimiento de condiciones necesarias.

Implementación del método

Como en implementaciones anteriores, dada una tolerancia deseada $\delta > 0$ para el error a la solución y $N \in \mathbb{N}$ para el número máximo de iteraciones, detendremos la ejecución del algoritmo si:

1. $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, o
2. $k > N$.

La condición 1 nos da una estimación del error cometido sin necesidad de conocer $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - \bar{x}| = |g(x_k) - g(\bar{x})| &\leq \lambda |x_k - \bar{x}| \\ &\leq \lambda\big(|x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - \bar{x}|\big). \end{aligned}$$

Usando que $\lambda < 1$ y despejando, tenemos que

$$|x_{k+1} - \bar{x}| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_{k+1} - x_k|.$$