Aproximaciones

Computación 2021

FaMAF

9 abr. 2021

Contenidos

Códigos

Códigos de la clase en:

`https://github.com/mlares/compuprof2021`

Aproximaciones

Aproximación del logaritmo

El teorema de Taylor permite calcular la función logaritmo de manera eficiente en base 2.
Recordemos que un número positivo se puede escribir en base dos como:

$$x = 2^e(1 + m) = 2^{e+1}(1 + m)/2$$

donde $(1 + m)/2$ está en $[1/2, 1]$.
Luego, definiendo $\beta = e + 1$ y $f = (1 + m)/2$,

$$ln(x) = ln(f) + \beta ln(2)$$

de manera que solo necesitamos conocer $ln(2)$ con mucha precisión y trabajar con una expensión de Taylor que ande bien en el intervalo $[1/2, 1]$, tomando por ejemplo $x_0 = 3/4$.

Aproximación del logaritmo

La expansión de Taylor del logaritmo natural alrededor de x_0 es:

$$\begin{aligned} ln(x) &= ln(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^2 + \ldots + \\ &(-1)^n \frac{1}{n}\left(\frac{x - x_0}{x_0}\right)^n + (-1)^n \int_{x_0}^{x} (x-y)^n t^{-n-1} dt \end{aligned}$$

Tenemos un error acotado por:

$$|R_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (x-y)^n t^{-n-1} dt \right|$$

Aproximación del logaritmo

$$|R_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (x-y)^n t^{-n-1} dt \right|$$

Podemos usar que:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b-a| \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

por lo que:

$$|R_n(x)| \leq |x - x_0| \max_t \left| \frac{(x-t)^n}{t^{n+1}} \right|$$

Ahora, sabemos que $x_0 = 3/4$, $x \in [1/2, 1]$ y $t \in [x, x_0]$, luego:

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{4} \qquad y \qquad \left| \frac{(x-t)^n}{t^{n+1}} \right| = |t|^{-1} \left| \frac{x}{t} - 1 \right|^n \leq 2 \left| \frac{x-t}{t} \right|^n$$

Aproximación del logaritmo

La parte $g(t) = \frac{x-t}{t}$ con t entre x y x_0. La derivada, $g'(t) = -x/t^2$ no tiene puntos críticos ($x \in [1/2, 1] \implies x > 0$).
Luego, por el teorema de "valores extremos" el máximo y mínimo están en $t = x$ y en $t = x_0$. De esos dos posibles puntos, sabemos que $g(x) = 0$, por lo tanto $g(x_0)$ es un valor extremo y $|g(t)| \leq |g(x_0)|$.
Sustituyendo en

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{4} \qquad y \qquad \left|\frac{(x-t)^n}{t^{n+1}}\right| = |t|^{-1}\left|\frac{x}{t} - 1\right|^n \leq 2\left|\frac{x-t}{t}\right|^n$$

obtenemos que:

$$\left|\frac{(x-t)^n}{t^{n+1}}\right| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{x_0}\right|^n \leq 2\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^n$$

Luego,

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}\,(1/3)^n$$

Aproximación del logaritmo

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Entonces, si queremos una tolerancia de, digamos, 10^{-6}, necesitamos un n tal que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 10^{-6}$$

o sea, $n > 33$, junto con representaciones muy precisas de $ln(2)$ y de $ln(3/4)$.

Aproximación de Arquímedes

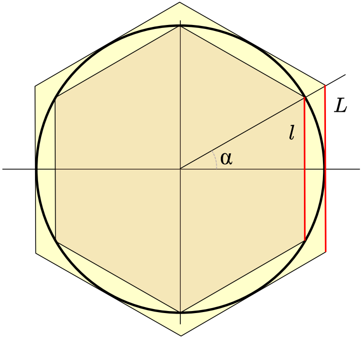
Esta aproximación geométrica se basa en calcular el perímetro de polígonos inscriptos y circunscriptos. Más específicamente, se comienza con el perímetro de un hexágono regular inscripto y uno circunscripto a la circunferencia de radio $r = \frac{1}{2}$. La estrategia consiste en ir duplicando la cantidad de lados en cada iteración. Se puede ver que los perímetros de estos hexágonos van a converger a

$$2\pi r = \pi.$$

Aproximación de Arquímedes

Sea una circunferencia tiene radio r, α es el ángulo desde el eje x, ℓ_0 es el lado inicial del polígono de n lados inscripto y L_0 el lado inicial del polígono de n lados circunscripto.

La longitud de la circunferencia es mayor que $P_0 = n\ell_0$ y menor que $Q_0 = nL_0$.



Por lo tanto,

$$\frac{\ell_0}{2} = r\,\mathrm{sen}(\alpha_0)$$

$$\frac{L_0}{2} = r\tan(\alpha_0)$$

Aproximación de Arquímedes

Cuando dividamos el ángulo en 2, los nuevos lados cumplirán

$$\frac{\ell_1}{2} = r\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right), \quad \frac{L_1}{2} = r\tan\left(\frac{\alpha_0}{2}\right).$$

y si dividimos por dos, sucesivas veces:

$$\begin{aligned} \frac{\ell_0}{2} &= r\,\mathrm{sen}(\alpha_0) & \tfrac{L_0}{2} &= r\tan(\alpha_0) \\ \frac{\ell_0}{4} &= r\,\mathrm{sen}(\alpha_0/2) & \tfrac{L_0}{4} &= r\tan(\alpha_0/2) \\ \frac{\ell_0}{8} &= r\,\mathrm{sen}(\alpha_0/4) & \tfrac{L_0}{8} &= r\tan(\alpha_0/4) \end{aligned}$$

Aproximación de Arquímedes

Para obtener una fórmula iterativa, escribamos las funciones aplicadas a $\alpha/2$ en términos de las aplicadas en α.

Recordemos las propiedades de las funciones trigonométricas:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\sin(b)$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\operatorname{sen}(b)$$
$$\operatorname{sen}^2(a) + \cos^2(a) = 1$$

O sea,

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

Aproximación de Arquímedes

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

Por lo tanto:

$$\cos(\alpha) = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2})$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)}}{2}}.$$

Aproximación de Arquímedes

Por otro lado, $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ entonces

$$\begin{aligned}
\tan(2x) &= \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)} \\
&= 2\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)} = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} \\
\implies & \quad \tan(2x)(1 - \tan^2(x)) = 2\tan(x) \\
\implies & \quad 0 = \tan(2x) - \tan(2x)\tan^2(x) - 2\tan(x)
\end{aligned}$$

o sea, $\quad 0 = \tan(\alpha) - 2\tan(\alpha/2) - \tan(\alpha)\tan(\alpha/2)^2$

$$\implies \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)}}{\tan(\alpha)}$$

Aproximación de Arquímedes

Tenemos entonces,

$$\frac{\ell_0}{2} = r\,\mathrm{sen}(\alpha_0)$$
$$\frac{L_0}{2} = r\tan(\alpha_0)$$

y las relaciones de recurrencia:

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\alpha)}}{2}}.$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{-1+\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}{\tan(\alpha)}$$

Aproximación de Arquímedes

Ahora, si la circunferencia tiene radio $r = \frac{1}{2}$,

$$\ell_0 = \text{sen}(\alpha), \qquad L_0 = \tan(\alpha).$$

Si además comenzamos con hexágonos ($n = 6$), entonces $\alpha = 30$, $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{2}$ y $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Los perímetros de los hexágonos inscripto (P_0) y circunscripto (Q_0) son, respectivamente,

$$P_0 = 6\ell_0 = 6\frac{1}{2} = 3, \quad Q_0 = 6L_0 = 6\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 3.464102$$

(comparar con la longitud de la circunferencia, $2\pi r = 2\pi(1/2) = \pi$).

Aproximación de Arquímedes

Ahora vamos a duplicar la cantidad de lados (α se reduce a la mitad)
Al *duplicar la cantidad de lados* tendremos perímetros

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2 \cdot 6\ell_1 = 2 \cdot 6 \sin(\alpha_1) & Q_1 &= 2 \cdot 6L_1 = 2 \cdot 6 \tan(\alpha_1) \\
P_2 &= 4 \cdot 6\ell_2 = 4 \cdot 6 \sin(\alpha_2) & Q_2 &= 4 \cdot 6L_2 = 4 \cdot 6 \tan(\alpha_2) \\
P_3 &= 8 \cdot 6\ell_3 = 8 \cdot 6 \sin(\alpha_3) & Q_3 &= 8 \cdot 6L_3 = 8 \cdot 6 \tan(\alpha_3) \\
&\ldots & &\ldots
\end{aligned}$$

Ahora podemos definir las sucesiones:

$$s_0 = \frac{1}{2}; \qquad s_n = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - s_{n-1}^2}}{2}}$$

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad t_n = \frac{-1 + \sqrt{1 + t_{n-1}^2}}{t_{n-1}}.$$

Aproximación de Arquímedes

Si continuamos con este procedimiento obtendremos que

$$P_n = 2^n \cdot 6 \cdot s_n, \quad Q_n = 2^n \cdot 6 \cdot t_n,$$

Se puede demostrar que $P_n < \pi < Q_n$ y ambas sucesiones convergen a π, por lo que podemos tomar como n-ésima aproximación

$$a_n = \frac{P_n + Q_n}{2}$$

Aproximación de Arquímedes: código

```
def PiArquimedes(tolerancia):
  nlados=6 #nro de lados iniciales
  s=1/2
  t=1/np.sqrt(3) # seno y tangente iniciales
  P=nlados*s
  Q=nlados*t
  while Q-P>tolerancia:
    nlados=2*nlados
    s=np.sqrt((1-np.sqrt(1-s**2))/2)
    t=(np.sqrt(1+t**2)-1)/t
    P=nlados*s
    Q=nlados*t
  return (P+Q)/2
```

Aproximación de Wallis y de Euler

John Wallis (1616 - 1703) escribió π como un producto infinito de racionales:

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}.$$

Leonhard Euler (1707 - 1783) obtuvo la aproximación estudiando las sumas invertidas de las raíces de polinomios:

$$\pi = \sqrt{6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

Algoritmo de Brent-Salamin

Está relacionado con el algoritmo de la media aritmética-geométrica. Publicada en 1976 de manera independiente por Eugene Salamin y luego por Richard Brent.

El procedimiento tiene valores iniciales

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u_0 = \frac{1}{4}, \quad v_0 = 1,$$

y generar las sucesiones

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\ b_{n+1} &= \sqrt{a_n b_n}, \\ u_{n+1} &= u_n - v_n(a_n - a_{n+1})^2, \\ v_{n+1} &= 2v_n. \end{aligned}$$

Obteniendo que

$$\frac{(a_{n+1} + b_{n+1})^2}{4u_{n+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi$$

El problema de las colisiones

El problema de las colisiones:
https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs
Solución:
https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE
Otra solución:
https://www.youtube.com/watch?v=brU5yLm9DZM

Python

Funciones recursivas en python

```
def factorial_recursive(n):
    # Base case: 1! = 1
    if n == 1:
        return 1

    # Recursive case: n! = n * (n-1)!
    else:
        return n * factorial_recursive(n-1)
```

Resolución de ecuaciones de una variable

Ecuaciones de una variable

Queremos resolver el problema de hallar x tal que

$$f(x) = 0,$$

donde $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función con características a determinar. O sea, vamos a encontrar una solución de esta ecuación, que equivale a determinar una **raíz** de la función f. A las raíces de una función también se las suele llamar también los "ceros" de la función.

Notar que no estamos interesados en hallar todas las raíces, en caso de existir más de una, sino en obtener al menos una de ellas.

Para resolver nuestro problema utilizaremos **métodos de aproximación**, esto es, generar una sucesión que converja a la solución del problema.

Ecuaciones de una variable

Dependiendo de ciertas propiedades de f, existen algoritmos capaces de resolver el problema. Por ejemplo, si f es continua, convexa, Lipschitz continua, diferenciable, continuamente diferenciable, etc.

Algunas funciones son simples y se puede encontrar la raíz analíticamente, sin necesidad de métodos numéricos. ▷ e.g.:

$$f(x) = 2x - 6$$

Por otro lado, hay funciones cuya resolución no resulta simple, ▷ e.g.:

$$xe^x = 1$$

Vamos a considerar funciones cuya solución analítica no es fácil o no es posible, pero es fácil evaluar la función en cualquier punto x.

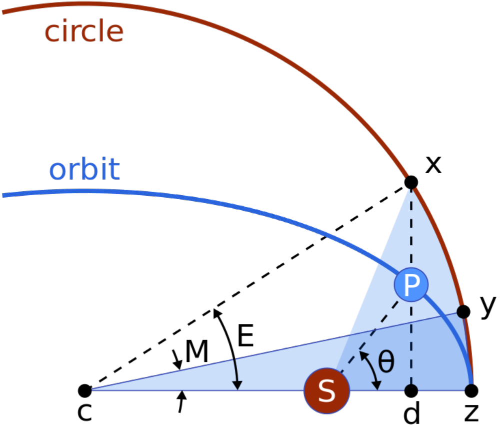
▷ *e.g.: Ecuación de Kepler*

Las leyes de Kepler describen de manera aproximada el movimiento de los planetas alrededor del Sol.
Los planetas describen una órbita elíptica con el Sol en uno de sus focos, y se mueven con velocidad variable en función de la posición en la órbita. La tercera ley de Kepler establece que el radio vector Sol-planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

$$M = E - e\ sin(E),$$

donde M es la anomalía media o ángulo que recorrería un planeta ficticio que se moviese con movimiento uniforme por la circunferencia principal, e es la excentricidad de la elipse ($0 < e < 1$) y E es la anomalía excéntrica, que queremos encontrar.

▷ e.g.: Ecuación de Kepler



▷ *e.g.: Modelo de crecimiento exponencial*

En ciertas situaciones, en periodos cortos de tiempo y bajo ciertas condiciones de aislamiento, el crecimiento de una población se puede modelar considerando que la variación en la misma es proporcional al tamaño de la población:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t)$$

que tiene como solución:

$$N(t) = N_0\, e^{\lambda\, t}$$

donde N_0 es la población inicial. Si además se permite una "inmigración" constante a una tasa ν (individuos por unidad de tiempo), entonces

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) + \nu; \qquad N(t) = N_0\, e^{\lambda\, t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

▷ e.g.: Modelo de crecimiento exponencial

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda\, N(t) + \nu; \qquad N(t) = N_0\, e^{\lambda\, t} + \frac{\nu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

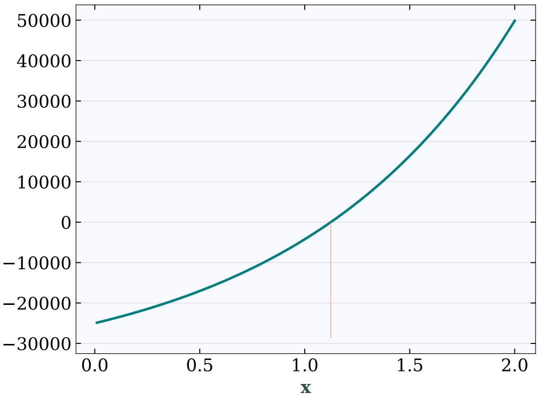
Supongamos ahora que cierta población tiene inicialmente $N(0) = 10000$ individuos, y que cruzan la frontera $\nu = 5000$ individuos por año. Al cabo de un año la población total asciende a $N(1) = 16000$.
Para determinar la tasa de "crecimiento" de la población (por ejemplo, la tasa de nacimientos o la tasa de contagios) se quiere encontrar λ que cumpla:

$$16000 = 10000\, e^{\lambda} + \frac{5000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

es decir,

$$f(\lambda) = 10000\, e^{\lambda} + \frac{5000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) - 16000 = 0$$

▷ e.g.: Modelo de crecimiento exponencial



Método de Bisección

Permite hallar x_0 solución de $f(x) = 0$ en un intervalo $[a, b]$ si:

- f es continua en $[a, b]$,
- $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos

Construcción del método

Veamos como generar una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converja a x_0.
Si $f(a) = 0$ o $f(b) = 0$, ya tenemos resuelto nuestro problema. Por lo tanto, supongamos que $f(a) \neq 0$ y $f(b) \neq 0$. Tomemos $a_0 = a$ y $b_0 = b$.
Como f es continua en el intervalo $[a_0, b_0]$ y tiene signos distintos en sus extremos, entonces podemos garantizar que f se anula en (a_0, b_0). En este caso, definimos x_0 como el punto medio del intervalo, o sea

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

Si $f(x_0) = 0$ entonces $\bar{x} = x_0$. Si $f(x_0) \neq 0$ entonces debe tener signo distinto al de $f(a_0)$ o $f(b_0)$.
Si $f(x_0)$ y $f(a_0)$ tienen signos distintos, entonces f se anula en (a_0, x_0). En este caso definimos

$$a_1 = a_0 \quad \text{y} \quad b_1 = x_0.$$

Construcción del método

Por el contrario, si $f(x_0)$ y $f(a_0)$ no tienen signos distintos entonces $f(x_0)$ y $f(b_0)$ deben tener signos distintos, luego f se anula en (x_0, b_0). En este caso definimos

$$a_1 = x_0 \quad \text{y} \quad b_1 = b_0.$$

Ahora podemos aplicar el mismo procedimiento en el intervalo $[a_1, b_1]$. Note que con este procedimiento se van generando intervalos encajados $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots [a_n, b_n] \ldots$ donde cada uno contiene al menos una raíz y su longitud es la mitad de la longitud del intervalo precedente.

Pseudocódigo

1. Dar a y b tal que $f(a)f(b) < 0$. Tomar $a_0 = a$, $b_0 = b$ y $k = 0$.
2. Tomar
$$x_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}.$$
3. Si $f(x_k) = 0$, parar y retornar $\bar{x} = x_k$.
4. Si $f(x_k)f(a_k) < 0$, tomar
$$a_{k+1} = a_k \quad \text{y} \quad b_{k+1} = x_k.$$
Sino, tomar
$$a_{k+1} = x_k \quad \text{y} \quad b_{k+1} = b_k.$$
5. Hacer $k \leftarrow k + 1$ e ir al paso 1.

Implementación del método

El criterio de parada $f(x_k) = 0$ no es una condición apropiada para trabajar en aritmética finita.

- Puede que nunca se cumpla debido al error de redondeo del número $f(x_k)$,
- puede que nunca se cumpla debido a que el intervalo $[a_k, b_k]$ es muy pequeño y el error de redondeo hace que x_k sea igual a uno de los extremos del intervalo,
- puede que $\bar{x}$ sea el límite de $\{x_k\}$ y necesitaríamos realizar infinitas iteraciones.

Este tipo de inconvenientes se resuelven fijando tolerancias deseadas. En este caso, considere una tolerancia $\varepsilon > 0$ para el error del valor funcional, $\delta > 0$ para el error a la solución y $N \in \mathbb{N}$ para el número máximo de iteraciones. De esta manera, detendremos la ejecución del algoritmo si:

- $|f(x_k)| < \varepsilon$,
- $|x_k - x_{k-1}| < \delta$, o

Construcción del método

En la mayoría de los casos es preferible que las condiciones 1 y 2 se verifiquen simultáneamente.

Para ver que efectos tienen estos criterios de parada, analicemos el algoritmo. Note que en la k-ésima iteración tendremos que $\bar{x} \in (a_k, x_k)$ o $\bar{x} \in (x_k, b_k)$, y que $|x_k - a_k| = |x_k - b_k|$. Por construcción, $a_k = x_{k-1}$ o $b_k = x_{k-1}$. Por lo tanto

$$|x_k - \bar{x}| \leq |x_k - x_{k-1}|.$$

Por otro lado, como la longitud de los intervalos se reduce a la mitad, tendremos que

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2^2} = \ldots = \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}.$$

Construcción del método

Luego, si tomamos

$$N > \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\delta}\right) - 1,$$

entonces

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{N+1}} < \delta.$$

Obteniendo que

$$|x_N - x_{N-1}| = b_{N+1} - a_{N+1} = \frac{b_0 - a_0}{2^{N+1}} < \delta.$$

Con esto relacionamos los criterios de parada 2 y 3. Obteniendo que el criterio 2 se debe cumplir luego de N iteraciones.

Convergencia

Veamos que podemos demostrar formalmente la convergencia del método

Teorema

Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Suponga que $\{x_k\}$ es una sucesión generada por el método de bisección. Entonces ocurre alguna de las siguientes:

- $f(x_k) = 0$ *para algún* $k \geq 0$,
- $\lim_{k \to \infty} x_k = \bar{x}$ *y* $f(\bar{x}) = 0$.

Convergencia

Demostración: Si no vale que $f(x_k) = 0$ para algún $k \geq 0$, entonces el método genera una sucesión $\{x_k\}$.
La sucesión $\{x_k\}$ generada por el método tiene algunos de sus miembros en la sucesión $\{a_k\}$ y otros en la sucesión $\{b_k\}$. Por construcción tenemos que $\{a_k\}$ es una sucesión no decreciente acotada superiormente por b_0, y $\{b_k\}$ es una sucesión no creciente acotada inferiormente por a_0. Por lo tanto, ambas sucesiones son convergentes. Además, como

$$0 < b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k},$$

obtenemos que existe $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k$. En consecuencia, $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$.
Además, como para todo k vale que $f(a_k)f(b_k) < 0$, tomando límite y usando que f es continua obtenemos

$$0 \geq f(\bar{x})f(\bar{x}) = \big(f(\bar{x})\big)^2.$$

Por lo tanto, $f(\bar{x}) = 0$.