LAPORAN TUGAS BESAR I
IF2123 ALJABAR LINEAR DAN GEOMETRI
SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN DAN APLIKASINYA
DENGAN MENGGUNAKAN BAHASA PEMROGRAMAN JAVA

Disusun untuk memenuhi tugas mata kuliah Aljabar Linear dan Geometri pada Semester 1 (satu) Tahun Akademik 2023/2024.

Oleh Kelompok javasli

Thea Josephine Halim	13522012
Debrina Veisha Rashika W	13522025
Melati Anggraini	13522035

PROGRAM STUDI TEKNIK INFORMATIKA

SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

BANDUNG

2023

DAFTAR ISI

BAB I
DESKRIPSI MASALAH

Matriks merupakan susunan bilangan real atau bilangan kompleks yang disusun dalam baris dan kolom (*m x n*) sehingga membentuk suatu jajaran persegi panjang. Matriks banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematika, contohnya, persamaan linear dan transformasi linear, yakni bentuk umum dari fungsi linear. Matriks mempermudah untuk menganalisis dan mengolah data karena elemen dari matriks dapat dimanipulasi dengan tambah, kurang, kali, dan bagi. Oleh karena itu, matriks dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan berbagai masalah di banyak bidang, seperti pendidikan, manajemen, ekonomi, dan bidang teknologi lainnya.

Sistem persamaan linear (SPL) adalah persamaan linier yang dikorelasikan untuk membentuk suatu sistem. Sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah persamaan yang berisi sejumlah variabel. Cara penyelesaian suatu sistem persamaan linier adalah mencari nilai-nilai variabel tersebut contohnya dengan menggunakan matriks. SPL bisa diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan, dan kaidah Cramer.

Dalam Tugas Besar 1 Aljabar Linear dan Geometri, penulis membuat satu atau lebih pustaka dalam Bahasa Java untuk menyelesaikan masalah yang ada dalam sebuah SPL. Pustaka tersebut terdiri dari fungsi penyelesaian SPL, menentukan invers matriks, dan menghitung determinan. Pustaka ini nantinya digunakan untuk membuat penyelesaian terhadap persoalan yang dimodelkan dalam bentuk Sistem persamaan linier, seperti interpolasi dan regresi linier. Pustaka ini akan menjadi alat yang kuat untuk memodelkan dan memecahkan masalah matematika yang melibatkan SPL dengan cepat dan efisien, serta dapat digunakan dalam berbagai konteks aplikasi seperti statistik, ilmu komputer, dan ilmu pengetahuan lainnya.

BAB II
TEORI SINGKAT

Dalam Tugas Besar 1 ini, terdapat empat bagian yang diselesaikan yaitu, penyelesaian SPL yang meliputi mencari determinan dan matriks balikan, interpolasi polinom, interpolasi bicubic, dan regresi linier berganda. Berikut penjelasan singkat untuk setiap bagian.

2.1 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linear (SPL) adalah persamaan linier yang dikorelasikan untuk membentuk suatu sistem. Sistem persamaan linier terdiri atas sejumlah persamaan yang berisi sejumlah variabel. Bentuk umum persamaan linear dapat ditulis sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

2.1 Bentuk umum sistem persamaan linier

Dengan $a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}$ adalah koefisien-koefisien dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang merupakan bilangan yang tidak diketahui nilainya, sedangkan $b_1, b_2, \dots, b_n$ adalah konstanta. Matriks dapat digunakan sebagai model dalam penulisan SPL. Penulisan dalam matriks dibuat dalam bentuk *$Ax = b$,* dengan A adalah matriks *m x n* dengan *x* dan b adalah vektor kolom.

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

2.2 Bentuk matriks sistem persamaan linier

Dengan menggunakan matriks sistem persamaan linier dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode Eliminasi Gauss, Gauss-Jordan, Matriks Balikan, dan Cramer. Penjelasan mengenai berbagai metode tersebut sebagai berikut.

2.2 Metode Penyelesaian Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

Penyelesaian sistem persamaan linear (SPL) dengan menggunakan eliminasi gauss, matriks perluasan SPL akan dibentuk dalam bentuk eselon baris dengan operasi baris elementer (OBE). Matriks eselon (atau bentuk eselon baris) adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya nol. Selanjutnya untuk persamaan dapat diselesaikan dengan teknik penyulihan mundur.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & * & * & \dots & * & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}$$

2.3 Eliminasi Gauss

Matriks eselon baris terbagi menjadi dua, yaitu matriks eselon tereduksi dan tidak tereduksi. Bentuk eselon matriks ini digunakan untuk menentukan metode eliminasi yang digunakan. Jika bentuk matriks berakhir pada matriks eselon baris tidak tereduksi maka digunakan metode eliminasi Gauss, sedangkan jika berakhir pada matriks eselon baris tereduksi maka digunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

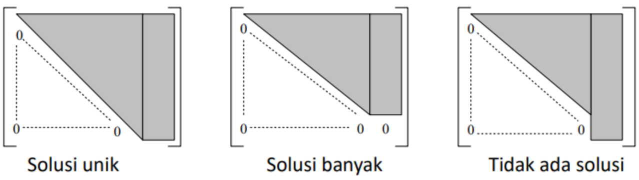
2.4 Contoh Matriks Eselon Baris Tereduksi

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah pengembangan metode eliminasi Gauss. Operasi baris elementer diterapkan pada matriks *augmented* sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi. Tidak diperlukan substitusi mundur untuk memperoleh nilai-nilai variabel. Metode eliminasi Gauss-Jordan terdiri dari dua fase, yaitu fase maju atau fase eliminasi Gauss dan fase mundur untuk menghasilkan nilai 0 diatas satu utama.

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \sim\text{OBE}\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & * \end{bmatrix}
$$

2.5 Eliminasi Gauss-Jordan

Terdapat tiga kemungkinan hasil penyelesaian dari sistem persamaan linier, yaitu, solusi unik, solusi banyak, dan tidak ada solusi. Untuk menentukan hasil dari solusi SPL dapat dilihat dari hasil akhir matriks *augmented* setelah proses eliminasi dilakukan sebagai berikut.



$$
\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

Ciri: Matriks augmented akhir berbentuk segitiga sampai barus terakhir

Ciri: ada satu atau lebih baris yang semuanya bernilai 0

Ciri: ada baris yang semuanya bernilai 0 kecuali nilai pada bagian kolom b

8

2.6 Tiga Kemungkinan Penyelesaian SPL

2.3 Determinan Matriks

Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi. Determinan matriks A ditulis dengan tanda det(A), det A, atau |A|. Determinan dapat dianggap sebagai faktor penskalaan transformasi yang digambarkan oleh matriks. Pada Matriks perkalian determinan dapat diselesaikan dengan dua cara, yaitu dengan OBE membentuk segitiga atas atau bawah dan metode kofaktor.

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}a_{44}
$$

2.7 Metode Segitiga Atas

Jika menggunakan metode segitiga atas atau bawah, hasil determinan dapat dicari dengan mengalikan elemen diagonal matriks. Namun, terdapat beberapa aturan yang harus dipenuhi jika menggunakan metode ini sebagai berikut.

$$A \xrightarrow{\text{Kalikan sebuah baris dengan k}} B\ ,\quad \text{maka } \det(B) = k \det(A)$$

$$A \xrightarrow{\text{Pertukarkan dua baris}} B\ ,\quad \text{maka } \det(B) = -\det(A)$$

$$A \xrightarrow[\text{dengan k kali baris yang lain}]{\text{Sebuah baris ditambahkan}} B\ ,\quad \text{maka } \det(B) = \det(A)$$

2.8 Aturan Determinan

Cara kedua mencari determinan adalah kofaktor. Tiap elemen pada matriks memiliki kesamaan dalam beberapa faktornya sehingga faktor-faktor yang sama bisa dikeluarkan. Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari minor entri dari setiap elemennya. Kofaktor matriks berkorespondensi dengan minor entri hanya berbeda tanda (positif atau negatif, tergantung nilai i dan j). Pola positif dan negatif untuk minor entri dapat dilihat sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2.8 Pola Minor Entri

Setelah didapat matriks kofaktor, determinan matriks tersebut diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen pada satu baris yang sama atau pada satu kolom yang sama. Maka determinan dapat dicari dengan rumus sebagai berikut.

$$det(A) = a_{n1}C_{n1} + a_{n2}C_{n2} + \dots + a_{nn}C_{nn} \text{ secara baris}$$

atau

$$det(A) = a_{1n}C_{1n} + a_{2n}C_{2n} + \dots + a_{nn}C_{nn} \text{ secara kolom.}$$

2.4 Matriks Balikan (invers)

Invers matriks adalah kebalikan (invers) dari sebuah matriks yang apabila matriks tersebut dikalikan dengan inversnya, akan menjadi matriks identitas. Invers matriks dilambangkan dengan A^{-1}. Suatu matriks dikatakan memiliki invers jika determinan dari matriks tersebut tidak sama dengan nol. Balikan matriks bisa dihitung dengan dua metode, yaitu metode matriks identitas dan kofaktor.

Mencari balikan dengan metode matriks identitas, memiliki sifat $[\ A \mid I\ ] = [\ I \mid A^{-1}\ ]$ dengan A adalah matriks persegi dan I adalah matriks eselon tereduksi dengan panjang kolom yang sama dengan matriks A. Balikan (inverse) matriks A adalah A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A =$ I. Selanjutnya dilakukan metode eliminasi Gauss-Jordan pada kedua matriks hingga Matriks A berbentuk matriks identitas. Hasil dari matriks balikan terletak pada matriks di sebelah kanan.

Cara kedua mencari matriks balikan adalah dengan metode kofaktor dengan memanfaatkan matriks adjoin. Rumus dari mencari balikan matriks menggunakan adjoin adalah sebagai berikut.

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \text{adj(A)}$$

2.9 Rumus Balikan Matriks dengan Adjoin

Matriks adjoin didapat dari matriks yang dihasilkan oleh matriks kofaktor yang telah ditranspos sebelumnya. Hal ini berarti terdapat penukaran elemen C_{ij} pada matriks kofaktor menjadi elemen C_{ji} pada matriks adjoin nya. Contohnya sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj(A)} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

2.10 Perubahan Matriks Kofaktor menjadi Adjoint

2.5 Kaidah Cramer

Kaidah Cramer merupakan salah satu metode penyelesaian SPL dengan menggunakan determinan. Langkah pertama adalah mengubah SPL yang ada menjadi matriks augmented berukuran NxN (kita sebut matriks A) seperti metode SPL yang lainnya. Pada matriks A nilai b (hasil) tidak dimasukkan dan akan dipisahkan menjadi matriks kedua (sebut B) berukuran 1xN. Kemudian akan dicari determinan dari matriks augmented A tersebut yang akan kita sebut sebagai *det(A)*. Nilai matriks B akan menggantikan nilai matriks A pada kolom-kolom tertentu hingga kolom terakhir. Kita akan mendapatkan matriks A_i dengan kolom ke-i digantikan oleh matriks B dan nilai determinannya $det(A_i)$. Proses pencarian $det(A_i)$ akan terus menerus dilakukan hingga nilai i = N. Setelah itu akan kita cari nilai masing-masing variabel x_i.

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

2.11 Rumus mencari nilai setiap variabel

Perlu diingat bahwa kaidah Cramer hanya bisa dilakukan untuk nilai matriks yang menghasilkan nilai variabel tunggal karena nilai determinan ≠ 0.

2.6 Interpolasi Polinom

Interpolasi Polinom adalah metode interpolasi dengan mengasumsikan pola data yang kita miliki mengikuti pola polinomial baik berderajat satu (linier) maupun berderajat tinggi. Dalam interpolasi polinomial, kita memiliki data (n+1) buah titik (x_n, y_n) yang akan diandaikan sebagai suatu garis polinom $p_n(x)$ pada grafik sehingga $y_i = p_n(x_i)$ untuk $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Pembentukan polinom $p_n(x)$ dapat dilakukan dengan pemanfaatan kaidah Cramer, Gauss, atau metode penyelesaian SPL lainnya. Data titik inputan akan diubah menjadi sebuah SPL yang selanjutnya akan diubah menjadi sebuah matriks berukuran (jumlah_titik, jumlah_titik+1).

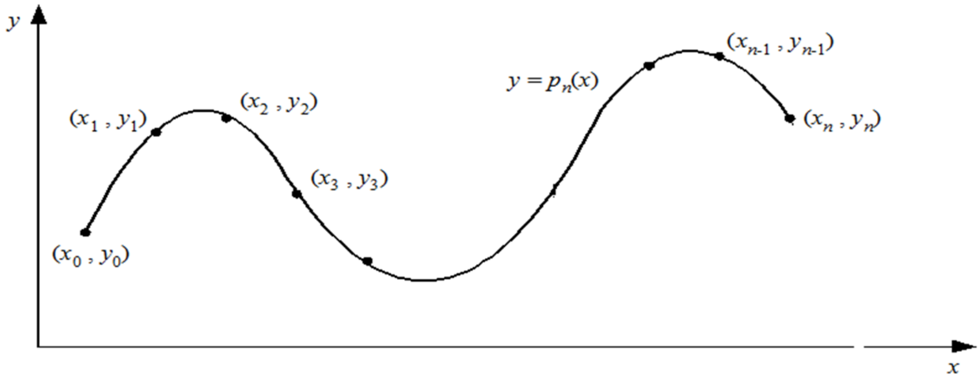
$$\begin{gathered}
a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\
\dots \qquad\qquad \dots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n
\end{gathered}$$

2.12 SPL masing masing titik

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^{\,2} & \cdots & x_1^{\,n-1} & y_1 \\ 1 & x_2 & x_2^{\,2} & \cdots & x_2^{\,n-1} & y_2 \\ 1 & x_3 & x_3^{\,2} & \cdots & x_3^{\,n-1} & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} & \cdots & x_n^{\,n-1} & y_n \end{pmatrix}$$

2.13 Matriks Augmented

Dengan menerapkan metode penyelesaian yang dipilih pada data titik inputan, kita akan menemukan nilai variabel yang tepat untuk masing-masing variabel $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.



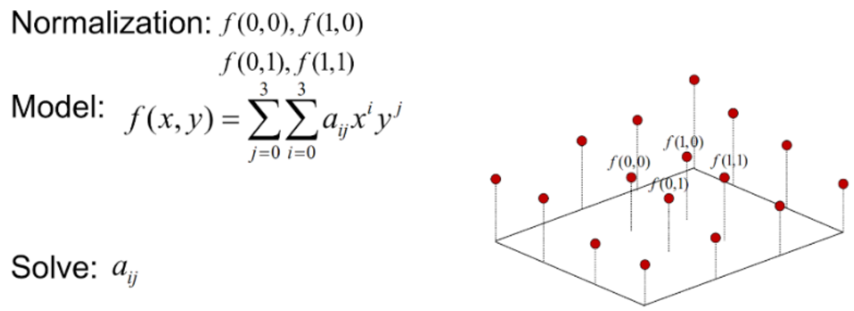
2.13 Grafik Polinomial

Lewat persamaan polinom $p_n(x)$ yang terbentuk, kita bisa menentukan nilai polinomial yang dilalui oleh garis tersebut dengan substitusi nilai sembarang tersebut sebagai x dalam *p(x)*. Interpolasi polinomial ini berguna untuk analisis numerik, memperkirakan nilai sembarang hanya dengan data titik yang tersedia.

2.7 Interpolasi Bicubic Spline

Bicubic spline interpolation adalah metode interpolasi yang digunakan untuk mengaproksimasi fungsi diantara titik-titik data yang diketahui. Melibatkan konsep *spline* dan konstruksi serangkaian polinomial kubik di dalam setiap sel segi empat data yang diberikan. Metode ini dapat digunakan untuk perluasan data secara visual yang menghasilkan permukaan yang lebih halus daripada dengan menggunakan interpolasi linear. Penerapan dari pendekatan ini sendiri biasanya digunakan untuk pemrosesan data digital agar gambar yang dihasilkan lebih tajam gambar yang diperbesar.

Interpolasi Linear menggunakan 16 buah titik, 4 titik sebagai referensi utama di bagian pusat,a dan 12 titik di sekitarnya sebagai aproksimasi turunan dari keempat titik referensi untuk membangun permukaan bikubik. Bentuk pemodelannya sebagai berikut :



2.13 Bicubic Spline

Model kedua yang bisa dipakai adalah model turunan berarah dari kedua sumbu, baik terhadap sumbu x, sumbu y, maupun keduanya. Persamaan polinomial yang digunakan adalah sebagai berikut :

$$f(x,y)=\sum_{j=0}^{3}\sum_{i=0}^{3}a_{ij}x^iy^j$$

Dari 16 titik yang diberikan akan dicari nilai a_{ij} dengan persamaan

$$y = Xa$$

$$a = X^{-1}y$$

2.8 Regresi Linear Berganda

Regresi linear adalah model regresi linear dengan melibatkan lebih dari satu variabel bebas (*multiple linear regression*). Metode ini digunakan untuk memprediksi nilai seperti pada interpolasi polinomial. Persamaan umum untuk menghitung regresi linear berganda adalah sebagai berikut :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \epsilon_i$$

Untuk mencari persamaan y_i, kita perlu mencari setiap nilai β_i. Langkah pertama adalah dengan menginput jumlah sampel dan jumlah variabel peubah yang digunakan. Akan dibuat matriks *augmented* (sebut A) dengan banyak sampel sebagai baris matriks dan jumlah variabel peubah (termasuk y) sebagai kolomnya. Dengan menggunakan metode Persamaan Normal (*Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*) kita akan memperoleh beberapa persamaan linear sebagai berikut:

$$\begin{array}{lllll}
nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{ki} & = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} y_i \\
\vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{1i} & + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} x_{2i} & + \cdots & + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 & = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} y_i
\end{array}$$

Kemudian, sistem persamaan yang didapat dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Gauss ataupun metode penyelesaian SPL lainnya. Setelah mendapatkan persamaan regresi linear berganda, kita bisa mengaproksimasi nilai suatu variabel bebas pada persamaan yang sudah kita dapatkan.

BAB III

IMPLEMENTASI PUSTAKA DAN PROGRAM DALAM BAHASA JAVA

3.1 Class Matriks

3.1.1 Atribut

`mat`	Array 2D bertipe double untuk menyimpan elemen matriks
`nRows`	Integer yang menyimpan jumlah baris matriks
`nCols`	Integer yang menyimpan jumlah kolom matriks

3.1.2 Metode

`void Matriks(int nRows, int nCols)`
`{I.S. Matriks kosong}`
`{F.s. Matriks dengan baris nRows dan kolom nCols}`
	Metode untuk konstruktor matriks dengan nRows baris dan nCols kolom.

`void readMatriks()`
`{I.S. Matriks sembarang tidak terisi, m dan n >0}`
`{F.S. Matriks terisi}`
	Metode untuk membaca matriks dari terminal.

`void copyMatrix(Matriks mat)`
`{I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong}`
`{F.S. Elemen matriks lama disalin ke matriks mat}`
	Metode untuk menyalin elemen pada matriks dan menyimpan hasil salinan ke matriks mat.

`void displayMatrix()`
`{I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong}`
`{F.S. Menampilkan matriks ke layar}`
	Metode untuk menampilkan matriks pada terminal.

`int getLastIdxRow()`
`{I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong}`
`{F.S. Mengembalikan nilai indeks terakhir baris}`
	Metode untuk mengembalikan nilai indeks terakhir baris pada matriks.

`int getLastIdxCol()`
`{I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong}`
`{F.S. Mengembalikan nilai indeks terakhir kolom}`
	Metode untuk mengembalikan nilai indeks terakhir kolom pada matriks.

void openMatrix(String name) {I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan matriks hasil baca txt}	Metode untuk membaca matriks dari sebuah file yang berada di folder test, parameter name berisi nama file.
void openMatrix2(String name) {I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan matriks hasil baca txt}	Metode untuk membaca masukan bicubic dan regresi dari sebuah file yang berada di folder test, parameter name berisi nama file.
void openMatrix3(String name,int var) {I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan matriks hasil baca txt}	Metode untuk membaca masukan interpolasi polinom dari sebuah file yang berada di folder test, parameter name berisi nama file.
void simpanMatrix(String name, Matriks m) {I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan matriks m hasil ke file name}	Metode untuk menuliskan matriks di sebuah file yang berada di folder test, nama file bergantung dengan input pengguna.
void simpanDeter(String name, int var) {I.S. nilai variabel terdefinisi} {F.S. Menyimpan determinan var ke file name}	Metode untuk menuliskan nilai determinan di sebuah file yang berada di folder test, nama file bergantung dengan input pengguna.
void simpanSPL(String name, Matriks m) {I.S. Matriks terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan hasil SPL ke file name}	Metode untuk menuliskan variabel hasil SPL di sebuah file yang berada di folder test, nama file bergantung dengan input pengguna.
void simpanSPL2(String name, double[] ans) {I.S. array terdefinisi dan tidak kosong} {F.S. Menyimpan hasil SPL ke file name}	Metode untuk menuliskan variabel hasil SPL dengan metode cramer di sebuah file yang berada di folder test, nama file bergantung dengan input pengguna.

3.2 Class testCramer

3.2.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.2.2 Metode

public float[] testcramer(Matriks mainmatrix) {I.S. mainmatrix terdefinisi dan berukuran N x N+1, mainmatrix } {F.S. Hasil array ans yang berisi variabel-variabel}	Metode Cramer mencari hasil variabel dari beberapa SPL yang diketahui. Berikut langkah-langkahnya: ● Inisialisasi variabel tambahan yang digunakan dan membuat matriks baru bernama **hasil** untuk menampung semua value hasil dari matriks **mainmatrix.** ● Dilanjutkan dengan pembuatan matriks kosong bernama **mainmatrixnoresult,** seperti namanya, berisi copy mainmatrix tanpa value hasil. Hal ini dilakukan supaya ukuran matriks NxN dan bisa diproses oleh metode determinan cramer. ● Mencari nilai determinan dari mainmatrixnoresult dan memasukkannya sebagai variabel det. ● Lalu akan dibuat list **ans** yang berisi determinan setiap matriks yang sudah diganti tertentu kolom dengan value matriks hasil. ● Print hasil variabel yang didapatkan setelah menerapkan metode Cramer. Hasil dituliskan dalam format 4 digit di belakang koma. Program akan mereturn jawaban berupa list ans untuk memudahkan jika ingin digunakan di dalam class yang lain.

	*Matriks mainmatrix diisi pada file mainprogram.java

3.3 Class gauss

3.3.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.3.2 Metode

`void splgaus(Matriks mainmatrix0)`
`{I.S. matriks mainmatrix0 terdefinisi}`
`{F.S. Mengembalikan kumpulan nilai hasil variabel dalam` $x_1..x_n$ `operasi Gauss}`
	Metode yang digunakan untuk mencari solusi dari SPL, dengan langkah-langkah :
	● Membuat matrix baru berukuran baris × (baris+1) serta melakukan `copymatrix` dari matrix `mainmatrix0` ke `mainmatrix`.
	● Memeriksa apakah terdapat baris yang merupakan duplikasi baris lain, kecuali baris yang kolomnya berisi 0 semua.
	● Mencari hasil bagi dengan baris utama
	● Membuat kolom dibawah elemen pertama baris utama menjadi nol
	● Melakukan loop untuk membuat nol di diagonal
	● Membagi setiap baris dengan index yang ditemukan pertama kali agar menjadi 1 utama, dengan mencari index tidak 0 pertama setiap baris) kemudian melakukan pembagian sesuai pembagi dan mengubah -0 menjadi 0 di baris tersebut
	● Menghitung banyak baris yang mengandung 0(`counBar0`) dan banyak kolom yang dibawah 1 utama mengandung 0 (`countCol0`).

	• Mencari solusi SPL dengan membagi kasus berdasarkan `countCol` • Jika `countCol0<=1` maka akan ada 2 kemungkinan yaitu ketika determinanya 0, akan ada kasus SPL tidak memiliki solusi atau SPL Parametrik, hal ini dilakukan dengan meninjau baris terakhir apakah indeks kol<jumlah kolom nol semua dan apakah nilai dari indeks matriks terujung adalah nol. Jika nol berarti parametrik, jika tidak artinya tidak memiliki solusi. Ketika determinanya tidak sama dengan 0 maka SPL memiliki solusi unik • Jika `counCol0<1` maka SPL akan memiliki solusi parametrik • Solusi unik : membuat `array` yang menyimpan solusi setiap variabel. Melakukan looping secara decrement untuk mencari solusi. • Solusi Parametrik : membuat 2 array yaitu `arrayNum` untuk menyimpang konstanta untuk masing-masing variabel dan `arrayString` untuk menyimpan variabel-variabel yang dimisalkan misal dalam t_i.
`h`	

3.4 Class GaussJordan

void GaussJordan(Matriks mainmatrix0) {I.S. matriks mainmatrix0 terdefinisi} {F.S. Mengembalikan kumpulan nilai hasil variabel dalam $x_1..x_n$ operasi Gauss}	• Setelah mendapatkan matriks eselon baris, kita akan melakukan operasi sehingga didapatkan matriks eselon reduksi. • Mencari satu utama dan mengenolkan kolom di bawahnya yang dilakukan dengan melakukan `looping decreement` • Menghasilkan output berupa solusi SPL baik parametrik maupun yang caranya didapat seperti di gauss.
Matriks replacingDuplicateRows(Matriks mainmatrix) {I.S. matriks mainmatrix terdefinisi} {F.S. Mengganti baris-baris yang merupakan duplikasi dari baris sebelumnya dengan baris yang kolomnya berisi nol semua}	Metode penggantian baris-baris yang merupakan duplikat dari baris-baris sebelumnya dengan baris elemen kolomnya berisi nol semua.
boolean nolsemua(Matriks m, int bar, int kol) {I.S. matriks m terdefinisi, bar,kol juga terdefinisi} {F.S. Mengembalikan true jika baris dibawah bar kolomnya berisi nol semua}	Metode pengecekan apakah nilai satu kolom (kol) pada matriks m bernilai 0. Output adalah false jika ada elemen matriks yang tidak bernilai 0 dan true jika semuanya bernilai 0.
void tukerbarisnol(Matriks m, int bar, int kol) {I.S. matriks m terdefinisi dan berukuran NxN, bar dan kol terdefinisi} {F.S. Matriks m yang sudah ditukar barisnya menurut metode Gauss}	Prosedur looping menukar baris hingga posisi nol sesuai dengan aturan Gauss.

3.4 Class determinan

3.4.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.4.2 Metode

public float detgaus(Matriks m)
`{I.S. matriks m terdefinisi dan berukuran NxN}`
`{F.S. Mengembalikan nilai determinan dari matriks m}`
	Metode pencari determinan untuk gauss. Dengan langkah-langkah:
	● Membuat diagonal bawah nol
	● Memeriksa apakah elemen di bawah elemen pertama baris utama sudah bernilai nol
	● Mencari hasil bagi dengan baris utama
	● Membuat kolom dibawah elemen pertama baris utama menjadi nol
	● Melakukan loop untuk membuat nol di diagonal bawah di kolom selanjutnya
	● Mengalikan elemen diagonal

void tukerbarisnol(Matriks m, int bar, int kol)
`{I.S. matriks m terdefinisi dan berukuran NxN, bar dan kol terdefinisi}`
`{F.S. Matriks m yang sudah ditukar barisnya menurut metode Gauss}`
	Prosedur looping menukar baris hingga posisi nol sesuai dengan aturan Gauss.

boolean nolsemua(Matriks m, int bar, int kol)
`{I.S. matriks m terdefinisi dan berukuran NxN, bar dan kol terdefinisi}`
`{F.S. Mengembalikan boolean true/false}`
	Metode pengecekan apakah nilai satu kolom (kol) pada matriks m bernilai 0. Output adalah false jika ada elemen matriks yang tidak bernilai 0 dan true jika semuanya bernilai 0.

3.5 Class invers

3.5.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.5.2 Metode

`public void kofaktor(Matriks m1)`
`{I.S. matriks m1 terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan matriks m1 yang sudah diubah menjadi matriks kofaktor}`
	Metode ini digunakan untuk mencari kofaktor dari matriks m1 yang nantinya digunakan untuk mencari matriks adjoint.

`void multiplyByConst(Matriks m, float x)`
`{I.S. matriks m terdefinisi dan berukuran NxN, x terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan matriks yang tiap elemennya dikali dengan float x }`
	Metode ini digunakan untuk mengali elemen pada matriks m dengan suatu konstanta .

`void tukerbarisnol(Matriks m, int bar, int kol)`
`{I.S. matriks m terdefinisi, bar dan kol terdefinisi}`
`{F.S. menukar baris yang tidak memiliki satu utama dengan baris yang ada dibawahnya yang tidak nol}`
	Metode ini digunakan untuk menukar baris pada matriks yang tidak memiliki satu utama dengan baris dibawahnya yang tidak nol.

`void inversadj(Matriks m)`
`{I.S. matriks m terdefinisi, bar dan kol terdefinisi}`
`{F.S. mencari invers dari matriks}`
	Metode ini mengembalikan invers matriks dengan metode adjoint dan menerima masukan matriks.

3.6 Class InterpolasiPolinomial

3.6.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.6.2 Metode

`public void interpolasipolinomial(Matriks mainmatrix, double x, boolean print)`
`{I.S. matriks mainmatrix terdefinisi dan berukuran NxN, x terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan nilai hasil aproksimasi interpolasi}`
	Fungsi interpolasipolinomial menghitung aproksimasi nilai bebas dengan membuat persamaan interpolasi dari data titik-titik yang diketahui.

3.7 Class bicubic

3.7.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.7.2 Metode

public double hasilbicubic(Matriks m, double x, double y, boolean print)
 	
`{I.S. matriks m terdefinisi, x dan y terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan hasil nilai aproksimasi interpolasi}`
	Metode ini digunakan untuk mencari hasil dari perhitungan menggunakan bicubic spline polinomial.

3.8 Class Regresi

3.8.1 Atribut

Class ini tidak memiliki atribut.

3.8.2 Metode

public static double tempvalue(Matriks mainmatriks, int column1, int column2)
`{I.S. matriks mainmatriks terdefinisi, x dan y terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan hasil penjumlahan Σ(Xcolumn1*Xcolumn2}`
	Fungsi tempvalue looping menghitung Σ (Xcolumn1 * Xcolumn2}

public void regresi(Matriks datamain, int sampel, int var, double X, boolean print)
`{I.S. matriks datamain terdefinisi, sampel, var, dan X terdefinisi}`
`{F.S. mengembalikan hasil aproksimasi nilai X pada persamaan regresi}`
	Fungsi regresi membuat matriks augmented dari data-data yang dimiliki dan menghitung nilai aproksimasi X pada persamaan regresi yang dibentuk.
	Berikut adalah langkah-langkah yang dilakukan:
	● Masukkan data jumlah sampel dan variabel peubah x dan hasil y.
	● Looping memasukkan data yang dimiliki ke matriks **datamain**
	● Mengambil inputan nilai X yang akan di-*insert*
	● Matriks pengolahan data **dataproc** kolom pertamanya akan diisi

	dengan angka 1 semua ● Membuat persamaan linear dan memasukkannya ke matriks **hasil.** ● *Insertion* nilai X ke persamaan regresi

BAB IV

EKSPERIMEN

4.1 Solusi Persamaan Linear Ax = b

Soal		Metode	Output
1.	$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$	Gauss	2 5 -7 -5 -2 2 -1 1 3 4 5 2 -4 2 6 MATRIKS ESELON BARIS : 1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0 0.0 1.0 -1.6666666666666667 -1.0 -1.3333333333333333 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 SPL tidak memiliki solusi.
		Gauss-Jordan	1 1 -1 -1 1 2 5 -7 -5 -2 2 -1 1 3 4 5 2 -4 2 6 MATRIKS ESELON REDUKSI : 1.0 0.0 0.0 0.6666666666666667 0.0 0.0 1.0 0.0 -2.6666666666666667 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 SPL tidak memiliki solusi.
		Matriks Balikan	1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0 2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0 2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0 5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Invers
		Cramer	1.0 1.0 -1.0 -1.0 1.0 2.0 5.0 -7.0 -5.0 -2.0 2.0 -1.0 1.0 3.0 4.0 5.0 2.0 -4.0 2.0 6.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Cramer
2.	$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$	Gauss	1 -1 0 0 1 3 1 1 0 -3 0 6 2 -1 0 1 -1 5 -1 2 0 -2 -1 -1 MATRIKS ESELON BARIS : 1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0 0.0 1.0 0.0 -1.5 -0.5 1.5 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Solusi dari SPL Parametrik : x[1] = 3.0+t2 x[2] = 2.0t2 x[3] = t1 x[4] = -1.0+t2 x[5] = t2

		Gauss-Jordan	1 -1 0 0 1 3 1 1 0 -3 0 6 2 -1 0 1 -1 5 -1 2 0 -2 -1 -1 MATRIKS ESELON REDUKSI : 1.0 0.0 0.0 0.0 -1.0 3.0 0.0 1.0 0.0 0.0 -2.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Solusi dari SPL Parametrik : x[1] = 3.0+t2 x[2] = 2.0t2 x[3] = t1 x[4] = -1.0+t2 x[5] = t2
		Matriks Balikan	1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0 1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0 2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0 -1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Invers
		Cramer	1.0 -1.0 0.0 0.0 1.0 3.0 1.0 1.0 0.0 -3.0 0.0 6.0 2.0 -1.0 0.0 1.0 -1.0 5.0 -1.0 2.0 0.0 -2.0 -1.0 -1.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Invers
3.	$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	Gauss	0 1 0 0 1 0 2 0 0 0 1 1 0 -1 0 1 0 0 0 1 1 ESELON BARIS: 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Solusi dari SPL Parametrik : x[1] = t1 x[2] = 1.0-t3 x[3] = t2 x[4] = -2.0-t3 x[5] = 1.0+t3 x[6] = t3

		Gauss-Jordan	0 1 0 0 1 0 2 0 0 0 1 1 0 -1 0 1 0 0 0 1 1 ESELON REDUKSI : 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 Solusi dari SPL Parametrik : x[1] = t1 x[2] = 1.0-t3 x[3] = t2 x[4] = -2.0-t3 x[5] = 1.0+t3 x[6] = t3
		Matriks Balikan	0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Invers
		Cramer	0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 2.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 0.0 -1.0 0.0 1.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Cramer
4.	$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$	Gauss	• N =6 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.0 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.0 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.0 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.0 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.0 MATRIKS ESELON BARIS 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 1.0 0.0 1.0 1.006024096 0.903614458 0.807228916 0.71686747 -6.024096386 0.0 0.0 1.0 1.624552142 1.761238599 1.865816121 33.283564838 0.0 0.0 0.0 1.0 875.541532175 1312.666464826 -61718.740479726 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.616139913 -72.713734679 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -17.95285445 5 Solusi dari SPL : x[1] = 8.080836034800749 x[2] = -23.55885247380505 x[3] = -31.73538998250867 x[4] = 108.01793507776893 x[5] = -43.69941005007533 x[6] = -17.95285445 • **N =10** 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.0 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.0 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.0 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.0 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.067 0.0 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.067 0.062 0.0 0.125 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.067 0.062 0.059 0.0 0.111 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.067 0.062 0.059 0.056 0.0 0.1 0.091 0.083 0.077 0.071 0.067 0.062 0.059 0.056 0.053 0.0 MATRIKS ESELON BARIS 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 1.0 0.0 1.0 1.006024096 0.903614458 0.807228916 0.71686747 0.644578313 0.584337349 0.536144578 0.493975904 -6.024096386 0.0 0.0 1.0 1.624552142 1.761238599 1.865816121 1.871326035 1.876048146 1.81459467 1.654861391 33.283564838 0.0 0.0 0.0 1.0 2.473120941 4.212287789 4.472471038 5.481093845 6.215336137 7.182283977 -110.179670752 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.616139913 2.082876491 1.718742272 2.316989365 2.501234818 -72.713734679 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 3.765860892 -1.982758181 4.161384294 -3.262675067 -17.95285445 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 -1.084211987 1.120817842 -1.580488912 5.264738149 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.153983834 1.632274134 1.614480271 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 2.311383142 134.165856911 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 91.345645134 9 Solusi dari SPL : x[1] = 6.2392854262880935 x[2] = 8.751240010472369 x[3] = -157.50605223684926 x[4] = 243.84130917504956 x[5] = -69.71536213451053 x[6] = -3.1403113647977925 x[7] = 88.84691532787802
		Gauss-Jordan	

		Matriks Balikan	• N =6 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.0 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.0 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.0 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.0 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.0 The result of the variables: Variable 1: 8.08 Variable 2: -23.56 Variable 3: -31.74 Variable 4: 108.02 Variable 5: -43.7 Variable 6: -17.95 • N=10 The result of the variables: Variable 1: 6.24 Variable 2: 8.75 Variable 3: -157.51 Variable 4: 243.84 Variable 5: -69.72 Variable 6: -3.14 Variable 7: 88.85 Variable 8: -135.63 Variable 9: -76.97 Variable 10: 91.35
		Cramer	• N = 6 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 1.0 0.5 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.0 0.333 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.0 0.25 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.0 0.2 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.0 0.167 0.143 0.125 0.111 0.1 0.091 0.0 The result of the variables: Variable 1: 8.0808 Variable 2: -23.5588 Variable 3: -31.7354 Variable 4: 108.0179 Variable 5: -43.6994 Variable 6: -17.9529 • N = 10 The result of the variables: Variable 1: 6.2393 Variable 2: 8.7515 Variable 3: -157.5068 Variable 4: 243.8418 Variable 5: -69.7154 Variable 6: -3.1403 Variable 7: 88.8473 Variable 8: -135.6349 Variable 9: -76.9693 Variable 10: 91.3458

4.2 Matriks Augmented

<table>
<tr><th colspan="2">Soal</th><th>Metode</th><th>Output</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1.</td><td rowspan="4">$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$</td><td>Gauss</td><td>1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
MATRIKS ESELON BARIS :
1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
Solusi dari SPL Parametrik :
x[1] = -1.0+t2
x[2] = 2.0t1
x[3] = t1
x[4] = t2</td></tr>
<tr><td>Gauss-Jordan</td><td>1 -1 2 -1 -1
2 1 -2 -2 -2
-1 2 -4 1 1
3 0 0 -3 -3
MATRIKS ESELON REDUKSI :
1.0 0.0 0.0 -1.0 -1.0
0.0 1.0 -2.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0
Solusi dari SPL Parametrik :
x[1] = -1.0+t2
x[2] = 2.0t1
x[3] = t1
x[4] = t2</td></tr>
<tr><td>Matriks Balikan</td><td>1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0
Tidak bisa diselesaikan dengan Invers</td></tr>
<tr><td>Cramer</td><td>1.0 -1.0 2.0 -1.0 -1.0
2.0 1.0 -2.0 -2.0 -2.0
-1.0 2.0 -4.0 1.0 1.0
3.0 0.0 0.0 -3.0 -3.0
Tidak bisa diselesaikan dengan Invers</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="3">2.</td><td rowspan="3">$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$</td><td>Gauss</td><td>2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
MATRIKS ESELON BARIS :
1.0 0.0 4.0 0.0 4.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
Solusi dari SPL :
x[1] = 0.0
x[2] = 2.0
x[3] = 1.0
x[4] = 1.0</td></tr>
<tr><td>Gauss-Jordan</td><td>2 0 8 0 8
0 1 0 4 6
-4 0 6 0 6
0 -2 0 3 -1
2 0 -4 0 -4
0 1 0 -2 0
MATRIKS ESELON REDUKSI :
1.0 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 1.0 0.0 0.0 2.0
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0
Solusi dari SPL :
x[1] = 0.0
x[2] = 2.0
x[3] = 1.0
x[4] = 1.0</td></tr>
<tr><td>Matriks Balikan</td><td>2.0 0.0 8.0 0.0 8.0
0.0 1.0 0.0 4.0 6.0
-4.0 9.0 6.0 0.0 6.0
0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0
2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0
0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0
Tidak bisa diselesaikan dengan Invers</td></tr>
</table>

		Cramer	2.0 0.0 8.0 0.0 8.0 0.0 1.0 0.0 4.0 6.0 -4.0 0.0 6.0 0.0 6.0 0.0 -2.0 0.0 3.0 -1.0 2.0 0.0 -4.0 0.0 -4.0 0.0 1.0 0.0 -2.0 0.0 Tidak bisa diselesaikan dengan Cramer

4.3 SPL Berbentuk

Soal		Metode	Output
1.	$8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0$ $2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 = 1$ $x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2$ $x_1 + 6x_3 + 4x_4 = 3$	Gauss	8 1 3 2 0 2 9 -1 -2 1 1 3 2 -1 2 1 0 6 4 3 MATRIKS ESELON BARIS : 1.0 0.125 0.375 0.25 0.0 0.0 1.0 -0.2 -0.2857142857142857 0.11428571428571428 0.0 0.0 1.0 -0.19480519480519481 0.7597402597402597 0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797 Solusi dari SPL : x[1] = -0.2243243243243243 x[2] = 0.18243243243243246 x[3] = 0.7094594594594594 x[4] = -0.25810810810810797
		Gauss-Jordan	8 1 3 2 0 2 9 -1 -2 1 1 3 2 -1 2 1 0 6 4 3 MATRIKS ESELON REDUKSI : 1.0 0.0 0.0 0.0 -0.2243243243243243 0.0 1.0 0.0 0.0 0.18243243243243246 0.0 0.0 1.0 0.0 0.7094594594594594 0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797 Solusi dari SPL : x[1] = -0.2243243243243243 x[2] = 0.18243243243243246 x[3] = 0.7094594594594594 x[4] = -0.25810810810810797
		Matriks Balikan	The result of the variables: Variable 1: -0.24 Variable 2: 0.19 Variable 3: 0.71 Variable 4: -0.25
		Cramer	The result of the variables: Variable 1: -0.2243 Variable 2: 0.1824 Variable 3: 0.7095 Variable 4: -0.2581

<table>
<tr>
<td rowspan="4">2.</td>
<td rowspan="4">$$\begin{aligned} x_7 + x_8 + x_9 &= 13.00 \\ x_4 + x_5 + x_6 &= 15.00 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 8.00 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_6 + x_8) + 0.61396x_9 &= 14.79 \\ 0.91421(x_3 + x_5 + x_7) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 14.31 \\ 0.04289(x_3 + x_5 + x_7) + 0.75(x_2 + x_4) + 0.61396x_1 &= 3.81 \\ x_3 + x_6 + x_9 &= 18.00 \\ x_2 + x_5 + x_8 &= 12.00 \\ x_1 + x_4 + x_7 &= 6.00 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_2 + x_6) + 0.61396x_3 &= 10.51 \\ 0.91421(x_1 + x_5 + x_9) + 0.25(x_2 + x_4 + x_6 + x_8) &= 16.13 \\ 0.04289(x_1 + x_5 + x_9) + 0.75(x_4 + x_8) + 0.61396x_7 &= 7.04 \end{aligned}$$</td>
<td>Gauss</td>
<td>0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 0.0 0.04289 0.0 0.04289 0.75 0.04289 0.75 0.61396 14.79
0.0 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.91421 0.25 0.0 14.31
0.61396 0.75 0.04289 0.75 0.04289 0.0 0.04289 0.0 0.0 3.81
0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 18.0
0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 12.0
1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 1.0 0.0 0.0 6.0
0.04289 0.75 0.61396 0.0 0.04289 0.75 0.0 0.0 0.04289 10.51
0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 0.25 0.0 0.25 0.91421 16.13
0.04289 0.0 0.0 0.75 0.04289 0.0 0.61396 0.75 0.04289 7.04
MATRIKS ESELON BARIS
1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 8.0
0.0 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 3.65684 1.0 0.0 57.24
0.0 0.0 1.0 0.0 1.0 17.486593612 1.0 17.486593612 14.314758685 344.83562602
0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 0.0 0.0 0.0 15.0
0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 16.486593612 1.0 17.486593612 13.314758685 326.83562602
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 0.034232051 1.034232051 0.852845384 19.535558094
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 1.0 1.0 13.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 5.000859614
0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 1.0 5.000859614
8
Solusi dari SPL :
x[1] = 3.0032071679858703
x[2] = 6.994423520532443
x[3] = -1.9976306885183135
x[4] = -5.002347532765242
x[5] = 5.005576458246878
x[6] = 14.996771074518366
x[7] = 7.999140386
x[8] = 0.0
x[9] = 5.000859614</td>
</tr>
<tr>
<td>Gauss-Jordan</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Matriks Balikan</td>
<td>Tidak bisa diselesaikan dengan Invers</td>
</tr>
<tr>
<td>Cramer</td>
<td>Tidak bisa diselesaikan dengan Cramer</td>
</tr>
</table>

4.4 Studi Kasus Interpolasi

a. Mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat dalam tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Hasil pengujian sebagai berikut:

x	f(x)
0.2	f(x) = -0.022976499 + 0.2399989x + 0.19740205x^2 + -1.6365326E-5x^3 + 0.026063513x^4 + -1.42739E-5x^5 + 3.605866E-6x^6 f(0.2) = 0.0330
0.55	f(x) = -0.022976499 + 0.2399989x + 0.19740205x^2 + -1.6365326E-5x^3 + 0.026063513x^4 + -1.42739E-5x^5 + 3.605866E-6x^6 f(0.55) = 0.1711
0.85	f(x) = -0.022976499 + 0.2399989x + 0.19740205x^2 + -1.6365326E-5x^3 + 0.026063513x^4 + -1.42739E-5x^5 + 3.605866E-6x^6 f(0.85) = 0.3372

1.28	`f(x) = -0.022976499 + 0.2399989x + 0.19740205x^2 + -1.6365326E-5x^3 +`
	` 0.026063513x^4 + -1.42739E-5x^5 + 3.605866E-6x^6`
	`f(1.28) = 0.6775`

b. Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2022 hingga 31 Agustus 2022:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

Gunakanlah data di atas dengan memanfaatkan **interpolasi polinomial** untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

Tanggal	Jumlah Kasus

16/07/2022
7.516
	`f(x) = 7.187454110871664E12 + -9.347464060211508E12x + 5.334456393756727E12x^2 +`
	` -1.756889456648583 3E12x^3 + 3.685667097211174E11x^4 + -5.113399804189399E10x^5`
	`+ 4.695994479440204E9x^6 + -2.7548524266082245E8x^7 + 9373203.532299858x^8 + -14`
	`0998.912258193x^9`
	`f(7.516) = 53574.89`

10/08/2022
8.32
	`f(x) = 7.187454110871664E12 + -9.347464060211508E12x + 5.334456393756727E12x^2 +`
	` -1.7568894566485833E12x^3 + 3.685667097211174E11x^4 + -5.113399804189399E10x^5`
	`+ 4.695994479440204E9x^6 + -2.7548524266082245E8x^7 + 9373203.532299858x^8 + -14`
	`0998.912258193x^9`
	`f(8.32) = 36462.88`

05/09/2022
9.167
	`---------------------------`
	`f(x) = 7.187454110871664E12 + -9.347464060211508E12x + 5.334456393756727E12x^2 +`
	` -1.7568894566485833E12x^3 + 3.685667097211174E11x^4 + -5.113399804189399E10x^5`
	`+ 4.695994479440204E9x^6 + -2.7548524266082245E8x^7 + 9373203.532299858x^8 + -14`
	`0998.912258193x^9`
	`f(9.167) = -667810.12`

17/06/2022 6.567	`f(x) = 7.187454110871664E12 + -9.347464060211508E12x + 5.334456393756727E12x^2 + -1.7568894566485833E12x^3 + 3.685667097211174E11x^4 + -5.113399804189399E10x^5 + 4.695994479440204E9x^6 + -2.7548524266082245E8x^7 + 9373203.532299858x^8 + -140998.912258193x^9` `f(6.567) = 12667.02`

c. Sederhanakan fungsi $f(x)$ yang memenuhi kondisi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang [0, 2]. Sebagai contoh, jika n = 5, maka titik-titik x yang diambil di dalam selang [0, 2] berjarak $h = (2 – 0)/5 = 0.4$.

Masukan	f(x)

`0.000 0.000`
`0.500 0.445`
`1.000 0.538`
`1.500 0.581`
`2.000 0.577`
`1.00`
	`f(x) = 0.0 + 1.59283333325x + -1.8561666662499998x^2 + 1.0006666659999999x^3 + -0.199333333x^4`
	`f(1.0) = 0.54`

`0.000 0.000`
`0.400 0.419`
`0.800 0.507`
`1.200 0.561`
`1.600 0.584`
`2.000 0.577`
`1.00`
	`f(x) = 0.0 + 2.0384999997952002x + -3.5651041656x^2 + 3.2526041648x^3 + -1.429036457x^4 + 0.237630208x^5`
	`f(1.0) = 0.53`

`0.000 0.000`
`0.333 0.398`
`0.667 0.482`
`1.000 0.538`
`1.333 0.572`
`1.667 0.584`
`2.000 0.577`
`1.000`
	`f(x) = 0.0 + 2.0384999997952002x + -3.5651041656x^2 + 3.2526041648x^3 + -1.429036457x^4 + 0.237630208x^5`
	`f(1.0) = 0.53`

4.5 Studi Kasus Interpolasi *Bicubic Spline*

Diberikan matriks input dengan bentuk sebagai berikut.

$$\begin{pmatrix} 21 & 98 & 125 & 153 \\ 51 & 101 & 161 & 59 \\ 0 & 42 & 72 & 210 \\ 16 & 12 & 81 & 96 \end{pmatrix}$$

x, y	**f(x,y)**

(0,0)	`21.0 98.0 125.0 153.0`
	`51.0 101.0 161.0 59.0`
	`0.0 42.0 72.0 210.0`
	`16.0 12.0 81.0 96.0`
	`f(0.0,0.0) = 21.0`

(0.5,0.5)	`21.0 98.0 125.0 153.0`
	`51.0 101.0 161.0 59.0`
	`0.0 42.0 72.0 210.0`
	`16.0 12.0 81.0 96.0`
	`f(0.5,0.5) = 80.296875`

(0.25,0.75)	`21.0 98.0 125.0 153.0`
	`51.0 101.0 161.0 59.0`
	`0.0 42.0 72.0 210.0`
	`16.0 12.0 81.0 96.0`
	`f(0.25,0.75) = 110.173583984375`

(0.1,0.9)	`21.0 98.0 125.0 153.0`
	`51.0 101.0 161.0 59.0`
	`0.0 42.0 72.0 210.0`
	`16.0 12.0 81.0 96.0`
	`f(0.1,0.9) = 123.83614700000001`

4.6 Studi Kasus Regresi Linear Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

Hasil pengujian sebagai berikut:

Persamaan yang terbentuk

f(x)

```
20.0 863.1999999999999 1530.4000000000003 587.8399999999999 19.42
863.1999999999999 54881.54 67007.77 25286.333 779.5839999999998
1530.4000000000003 67007.77 117912.32000000002 44976.866999999984 1483.4369999999997
587.8399999999999 25286.333 44976.866999999984 17278.508600000005 571.1219000000001
The result of the variables:
Variable 1: -3.5073
Variable 2: -0.0026
Variable 3: 0.0008
Variable 4: 0.1541
```

x	f(x)
(1,2,3)	(lihat keluaran di bawah)

```
The result of the variables:
Variable 1: -3.5073
Variable 2: -0.0026
Variable 3: 0.0008
Variable 4: 0.1541
---------------------------
f(x) = -3.507 + -0.003x + 0.001x2 + 0.154x3
f(1.0,2.0,3.0,) = -3.0459
```

(1,0,4)

```
f(x) = -3.507 + -0.003x + 0.001x2 + 0.154x3
f(1.0,0.0,4.0,) = -2.8934
```

(50,76,29.3)	`f(x) = -3.508 + -0.003x + 0.001x2 + 0.154x3` `f(50.0,76.0,29.3) = 0.9384`

BAB V
KESIMPULAN, SARAN, DAN REFLEKSI

5.1 Kesimpulan

Tugas besar 1 IF2123 Aljabar Linier dan Geometri mengungkit masalah berbagai metode penyelesaian SPL, meliputi Gauss, Gauss-Jordan, Invers, dan Cramer. Disertakan juga beberapa fungsi penerapan metode-metode tersebut, seperti interpolasi polinomial, *bicubic spline interpolation*, dan regresi linear berganda. Dengan metode penyelesaian Sistem Persamaan Linier (SPL), kita bisa membuat sebuah matriks augmented dari data-data yang tersedia dan mengolahnya sesuai kebutuhan. Dalam penyelesaian SPL akan terdapat 3 kasus: solusi unik, solusi banyak (parametrik), dan tidak ada solusi. Untuk matriks dengan solusi parametrik hanya dapat diselesaikan dengan metode Gauss atau Gauss-Jordan. Begitu pula untuk matriks MxN yang hanya dapat diselesaikan oleh Gauss atau Gauss-Jordan. Untuk penggunaan metode Cramer dan invers matriks ukuran matriks wajib NxN sebab dibutuhkan nilai determinan dalam prosesnya.

Secara keseluruhan, program kami memuat hal-hal berikut:

a. Metode-metode sistem persamaan linier (Gauss, Gauss-Jordan, invers matriks ($x = A^{-1}b$), dan Cramer.
b. Determinan (eliminasi Gauss dan kofaktor)
c. Interpolasi polinom *(polinom interpolation)*
d. Bicubic spline interpolation
e. Regresi linier berganda
f. Baca dan tulis file

5.2 Saran

Sebagai tugas besar pertama di semester 3 ini, kami belajar banyak hal. Kami belajar bahwa metode SPL dapat diterapkan dalam berbagai hal dan bisa dibuat algoritmanya. Berikut adalah saran-saran kami untuk tugas besar selanjutnya:

a. Pemberian tugas besar jauh mendekati masa-masa UTS untuk memungkinkan mahasiswa untuk mempersiapkan UTS dengan lebih baik lagi atau pemberian tenggat hingga masa UTS selesai.
b. Pemberian *guide* contoh pemanggilan fungsi yang telah dibuat di kelas lain secara lebih detail (tetapi sudah diberikan contoh *installation* dan struktur sekilas)

5.3 Refleksi

Selama mengerjakan tugas besar ini tentu kami mengalami banyak masalah. Akan tetapi dengan adanya tugas besar ini juga kami belajar banyak hal. Kami belajar berbagai penerapan metode penyelesaian SPL dalam bentuk matriks augmented di hal-hal lain, seperti regresi linear berganda dan interpolasi. Penggunaan metode penyelesaian SPL juga bisa digunakan dalam pengolahan citra. Akan tetapi, untuk sekarang kami belum bisa mengaplikasikannya. Dan bukan cuma sekadar memperdalam pengetahuan kami mengenai matriks dan coding, kami juga belajar untuk mengatur waktu lebih baik lagi dan kerja sama. Kami belajar untuk saling melengkapi satu sama lain dan saling berdiskusi ketika ada masalah yang dihadapi. Terutama karena kami harus menyelesaikan tugas ini dalam kurun waktu 3 minggu dengan bahasa pemrograman yang belum pernah kami gunakan sebelumnya. Kami belajar untuk bekerja secara efisien dan eksplor hal-hal di luar kuliah.

DAFTAR PUSTAKA

Howard Anton, Chris Rorres. (2013) Elementary Linear Algebra: Applications Version. 11th Edition, John Wiley & Sons Incorporated.

Munir, R. (2023). Algeo #2 Matriks Eselon. Diakses dari Homepage Rinaldi Munir: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir

Munir, R. (2023). Algeo #3 Sistem Persamaan Linier. Diakses dari Homepage Rinaldi Munir: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir

Munir, R. (2023). Algeo #8 Determinan (bagian 1). Diakses dari Homepage Rinaldi Munir: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir

Munir, R. (2023). Algeo #9 Determinan (bagian 2). Diakses dari Homepage Rinaldi Munir: https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir

LearnChemE. (2022, February 22). *Youtube*. Retrieved from LearnChemE: https://youtu.be/NzuK4iAfxhU