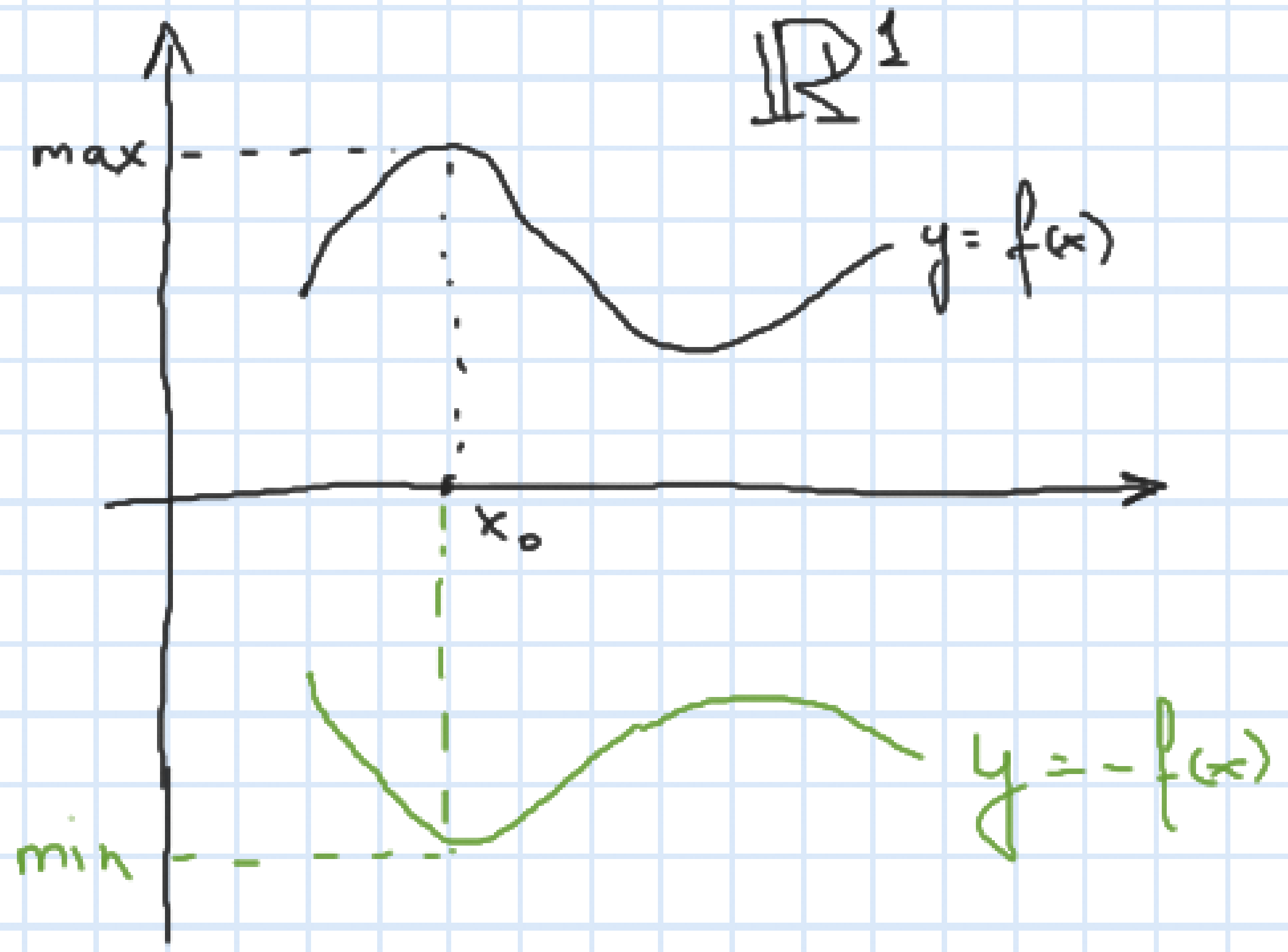
Metody optymalizacji funkcji wielu zmiennych

Def Mówimy, że $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ - to minimum lokalne funkcji $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funkcja ta ma nazwę funkcji celu), jeśli istnieje otoczenie U punktu x_0 takie, że

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U.$$

Zadanie: znaleźć $\min f(x)$



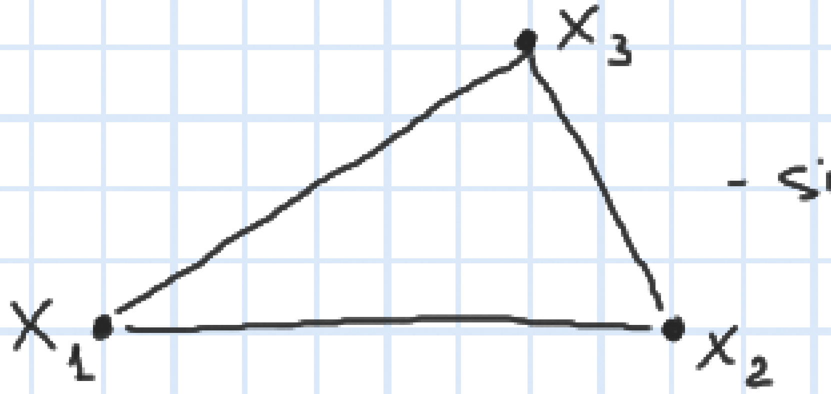
Zauwaga $\max f(x) = -\min(-f(x))$

Metoda Neldera-Meada

Def Simpleks w $\mathbb{R}^n$ to takie punkty $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, że oni nie leżą w jednej $(n-1)$-wymiarowej hiperpłaszczyźnie.

Przykłady

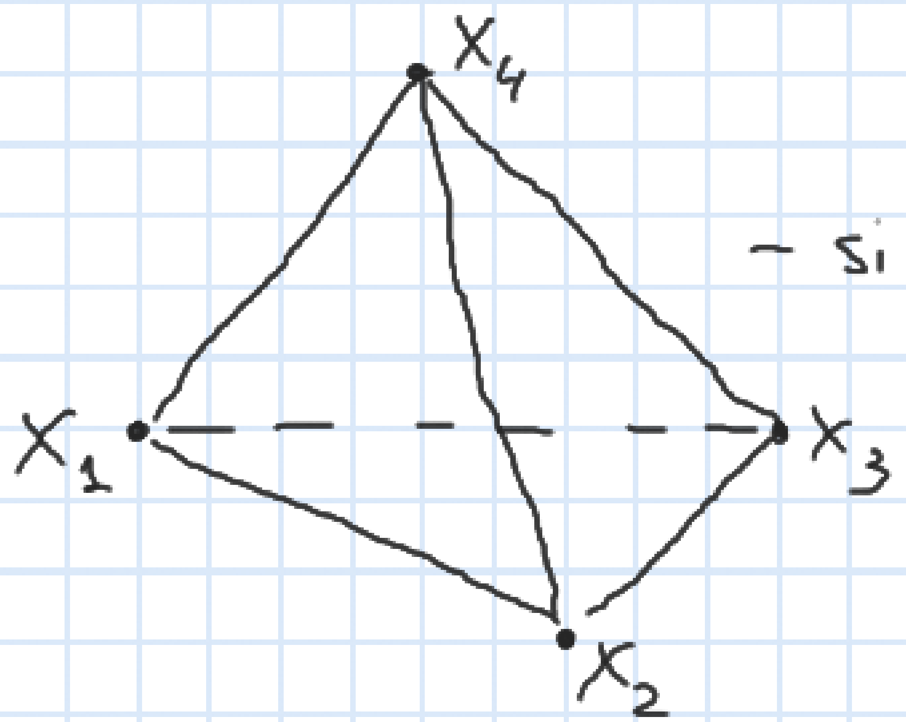
$\mathbb{R}^2$



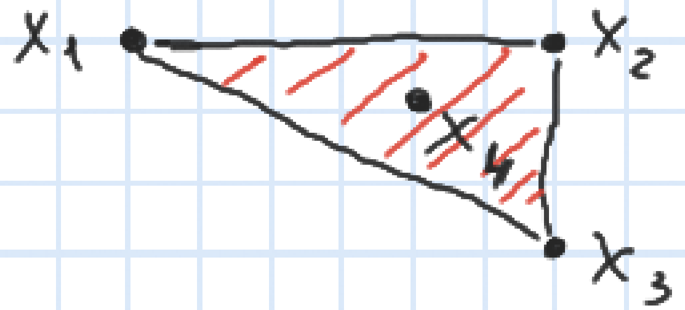
- simpleks

- nie jest simpleksem

$\mathbb{R}^3$



- simpleks



- nie jest simpleksem

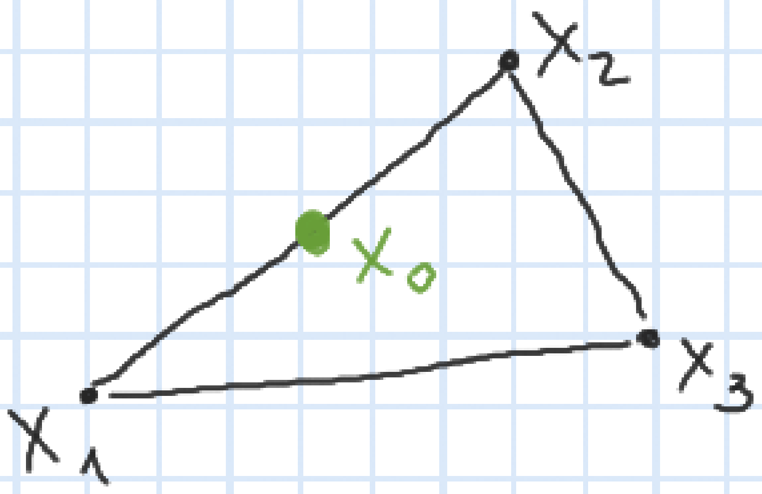
Założenie Punkty w simpleksie są ponumerowane w taki sposób, żeby sprawdzała się umowa

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_n) \leq f(x_{n+1})$$

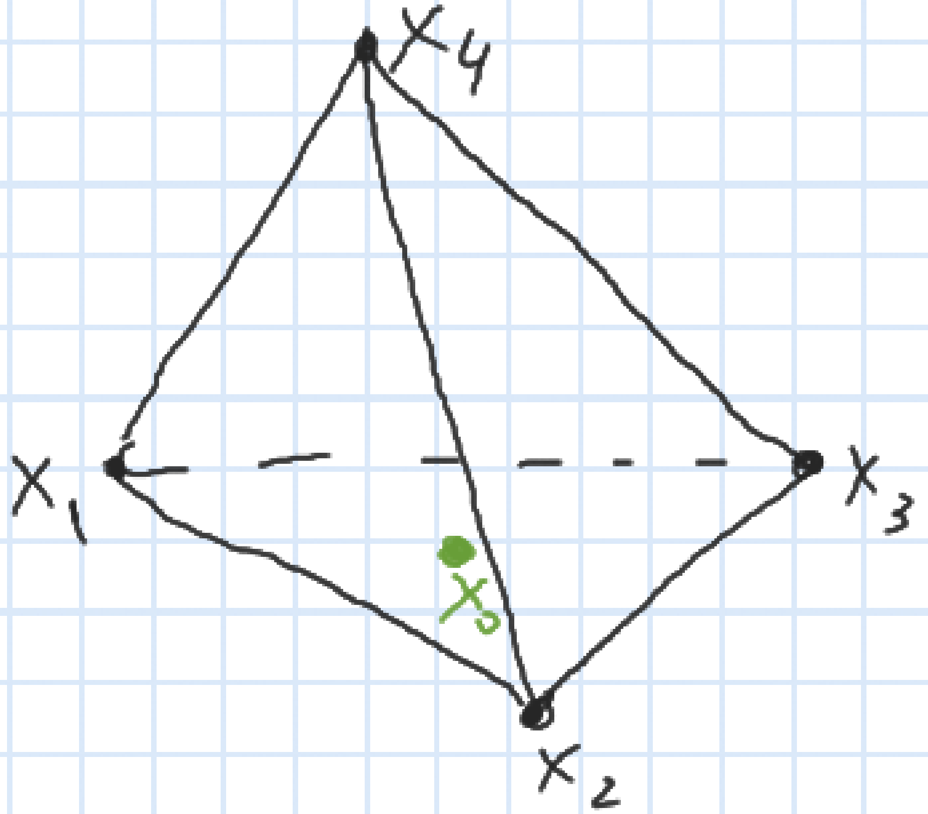
Def Centroid

$$X_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad (0)$$

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



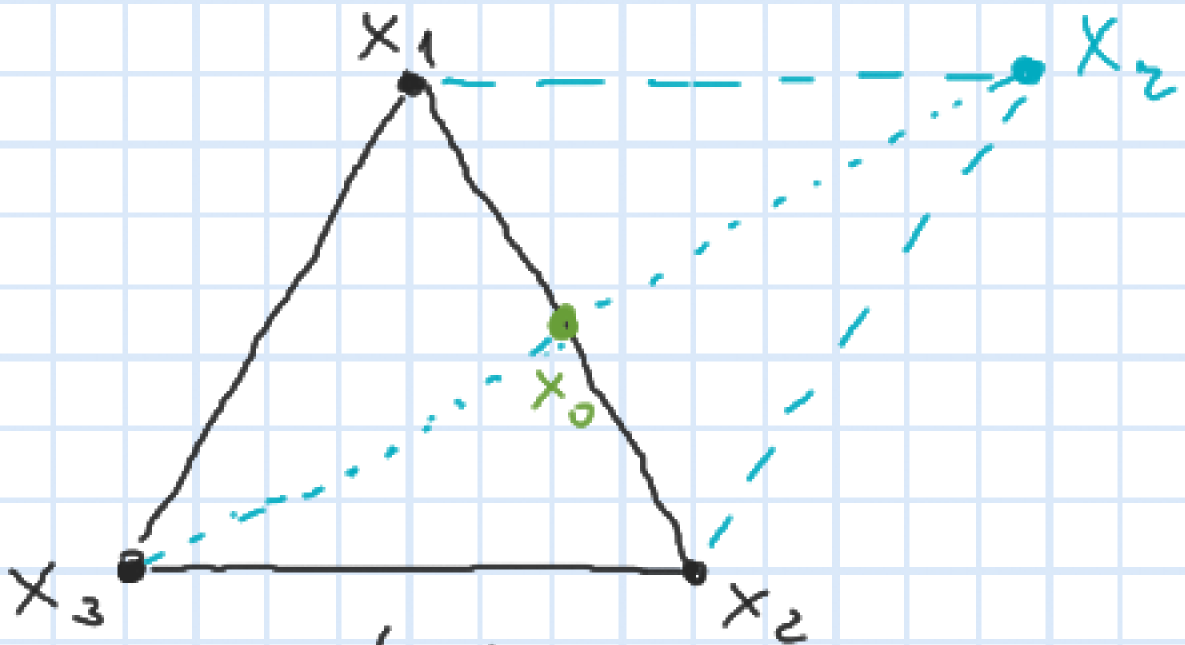
Operacja 1 Odbicie (reflection)

$$X_r = (1+\alpha)X_0 - \alpha X_{n+1} \qquad (1)$$

$\alpha > 0$ - parametr

domyślna wartość $\underline{\underline{\alpha = 1}}$ $\qquad X_r = 2X_0 - X_{n+1}$

$\mathbb{R}^2$



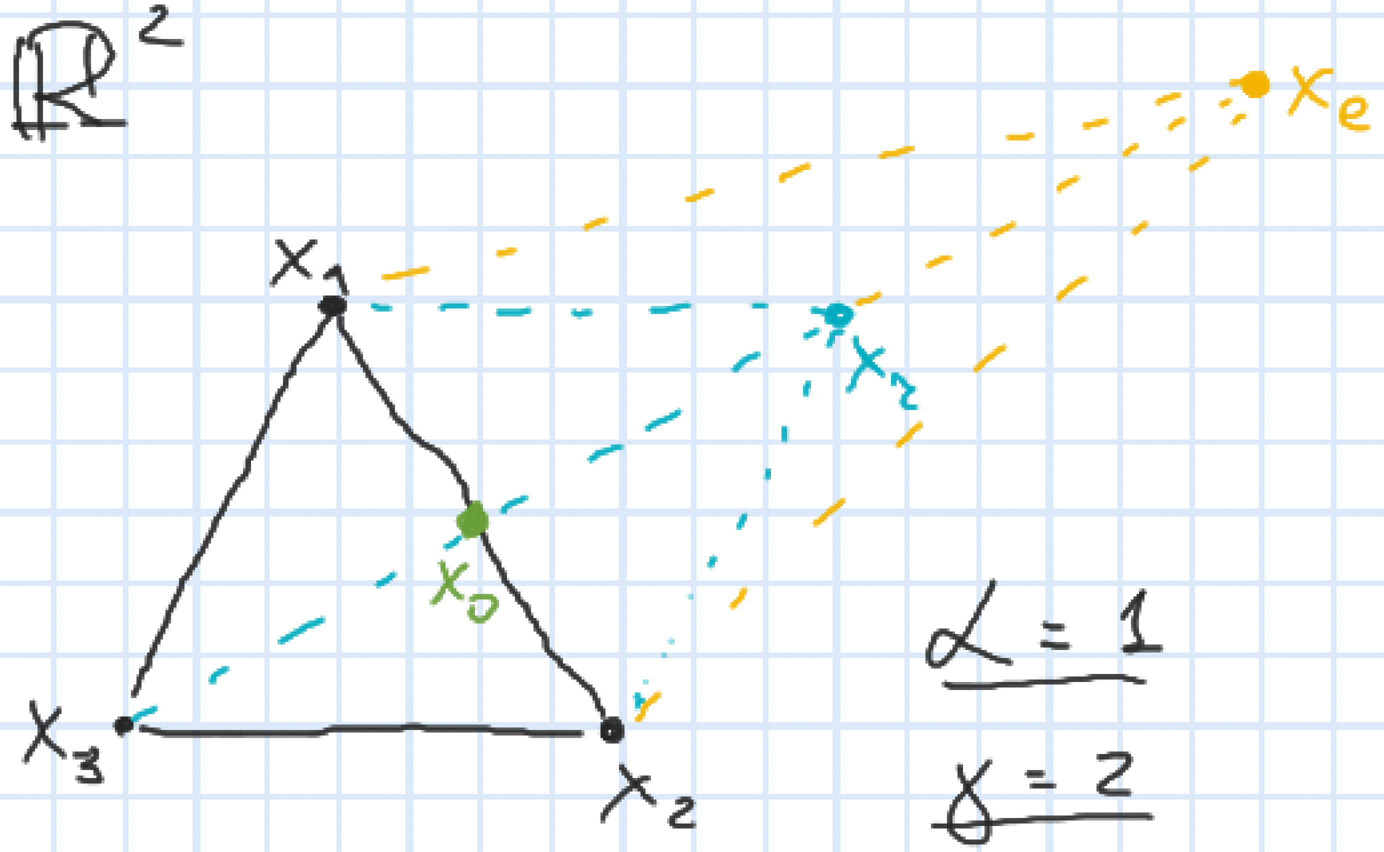
$\underline{\underline{\alpha = 1}}$

Operacja 2 Ekspansja (expansion)

$$X_e = \gamma X_2 + (1-\gamma) X_0 \qquad (2)$$

$\gamma > 1$ - parametr

domyślna wartość $\underline{\gamma = 2}$ $\qquad X_e = 2X_2 - X_0$



$\underline{\alpha = 1}$

$\underline{\gamma = 2}$

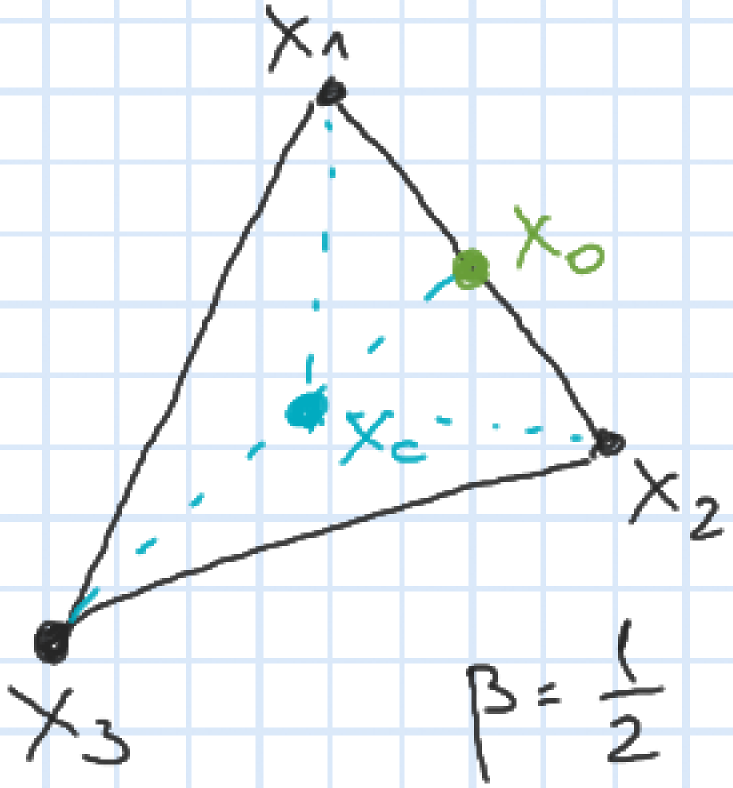
Operacja 3 Kontrakcja (contraction)

$$X_c = \beta X_{n+1} + (1-\beta) X_0 \qquad (3)$$

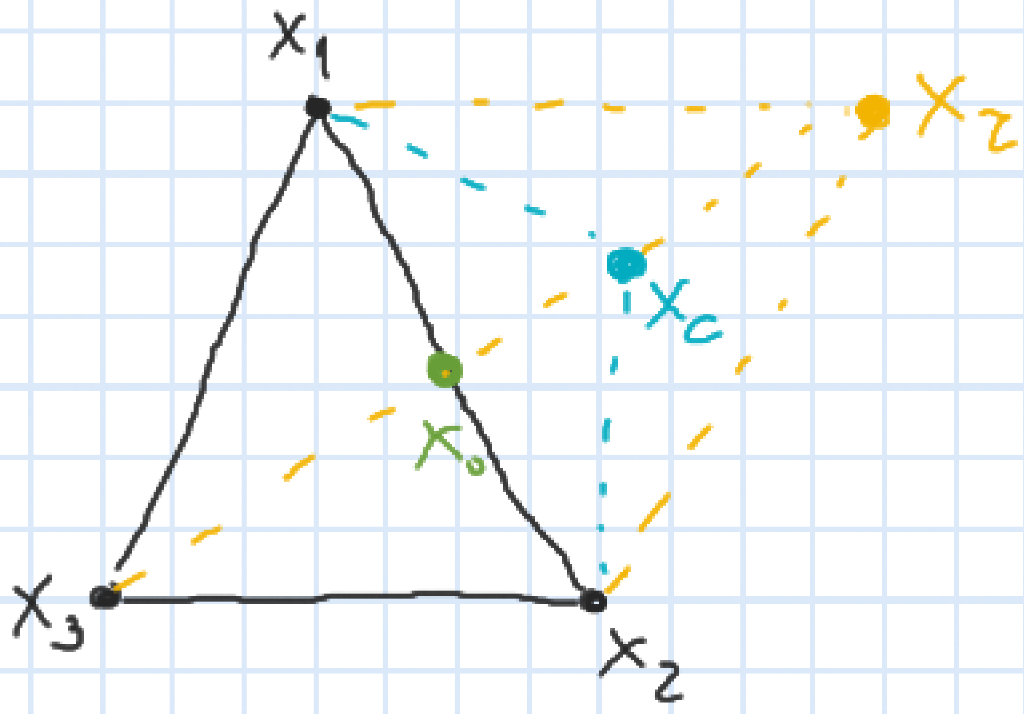
$0 < \beta < 1$ - parametr

domyślna wartość $\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$ $\qquad X_c = \frac{X_0 + X_{n+1}}{2}$

$\mathbb{R}^2$



$\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$



$\underline{\underline{\beta = \frac{1}{2}}}$

Operacja 4 Redukcja (shrinking)

$$X_i = \delta(x_i + x_1), \quad i = 1, 2, \dots, n, n+1 \qquad (4)$$

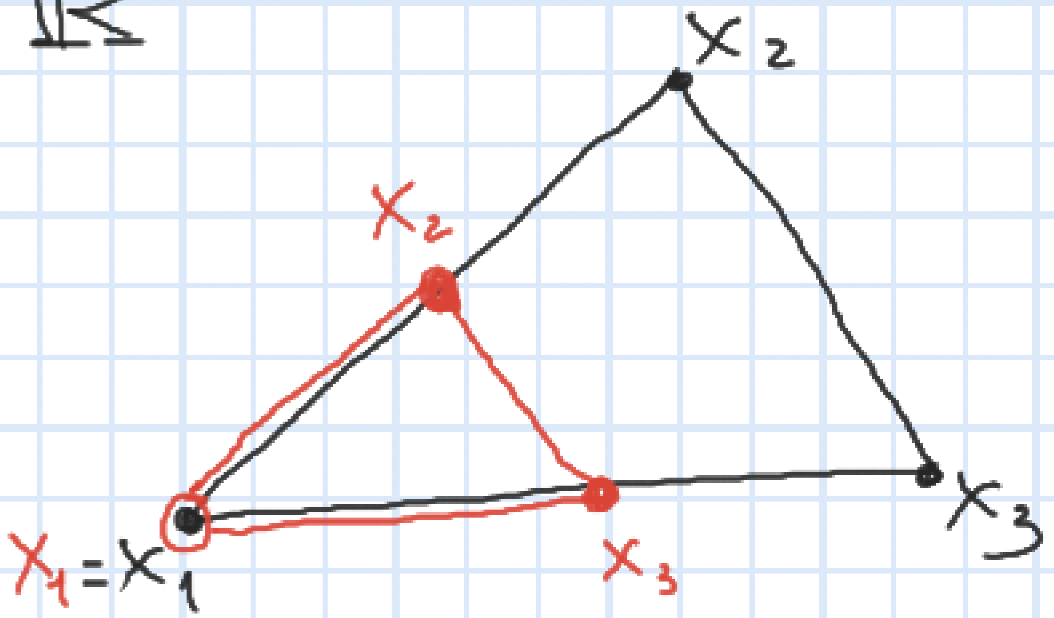
$0 < \delta < 1$ - parametr

domyślna wartość $\delta = \frac{1}{2}$

$$X_i = \frac{x_i + x_1}{2}$$

$i = 1, 2, \dots, n, n+1$

$\mathbb{R}^2$



Algorytm (N-M)

0) Sformować początkowy simpleks
Wybrać $\varepsilon > 0$ - dokładność

1) Ponumerować punkty simpleksu tak, żeby
$$f(x_1) \le f(x_2) \le \ldots \le f(x_n) \le f(x_{n+1})$$
Obliczyć centroid x_0 (wzór (0))

2) Znaleźć punkt odbity x_r (wzór (1))

3) Jeśli $f(x_r) < f(x_1)$, to znaleźć punkt x_e (wzór (2))

  3a) Jeśli $f(x_e) < f(x_1)$, to x_{n+1} wymienić na x_e. Przejść do kroku 7)

  3b) Jeśli $f(x_e) \geq f(x_1)$, to x_{n+1} wymienić na x_r. Przejść do kroku 7)

4) Jeśli $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_n)$, to x_{n+1} wymienić na x_2. Przejść do kroku 7)

5) Jeśli $f(x_n) < f(x_2) < f(x_{n+1})$, to x_{n+1} wymienić na x_2 i znaleźć punkt x_c (wzór (3)).

5a) Jeśli $f(x_c) < f(x_{n+1})$, to x_{n+1} wymienić na x_c. Przejść do kroku 7)

5b) Jeśli $f(x_c) \geq f(x_{n+1})$, to zastosować redukcję (wzór (4)). Przejść do kroku 7)

6) Jeśli $f(x_2) \geq f(x_{n+1})$, to znaleźć punkt x_c (wzór (3))

6a) Jeśli $f(x_c) < f(x_{n+1})$, to x_{n+1} wymienić na x_c. Przejść do kroku 7)

6b) Jeśli $f(x_c) \geq f(x_{n+1})$, to zastosować redukcję (wzór (4)) Przejść do kroku 7)

7) Kryterium stopu

$$\sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\left(f(x_i)-f(x_0)\right)^2} < \varepsilon$$

Jeśli kryterium stopu spawdza się, to dokładność jest wystarczająca. KONIEC

Jeśli nie, to przejść do kroku 1)