# 第6章 上下文无关语言

6.1 上下文无关文法

6.2 语法分析树

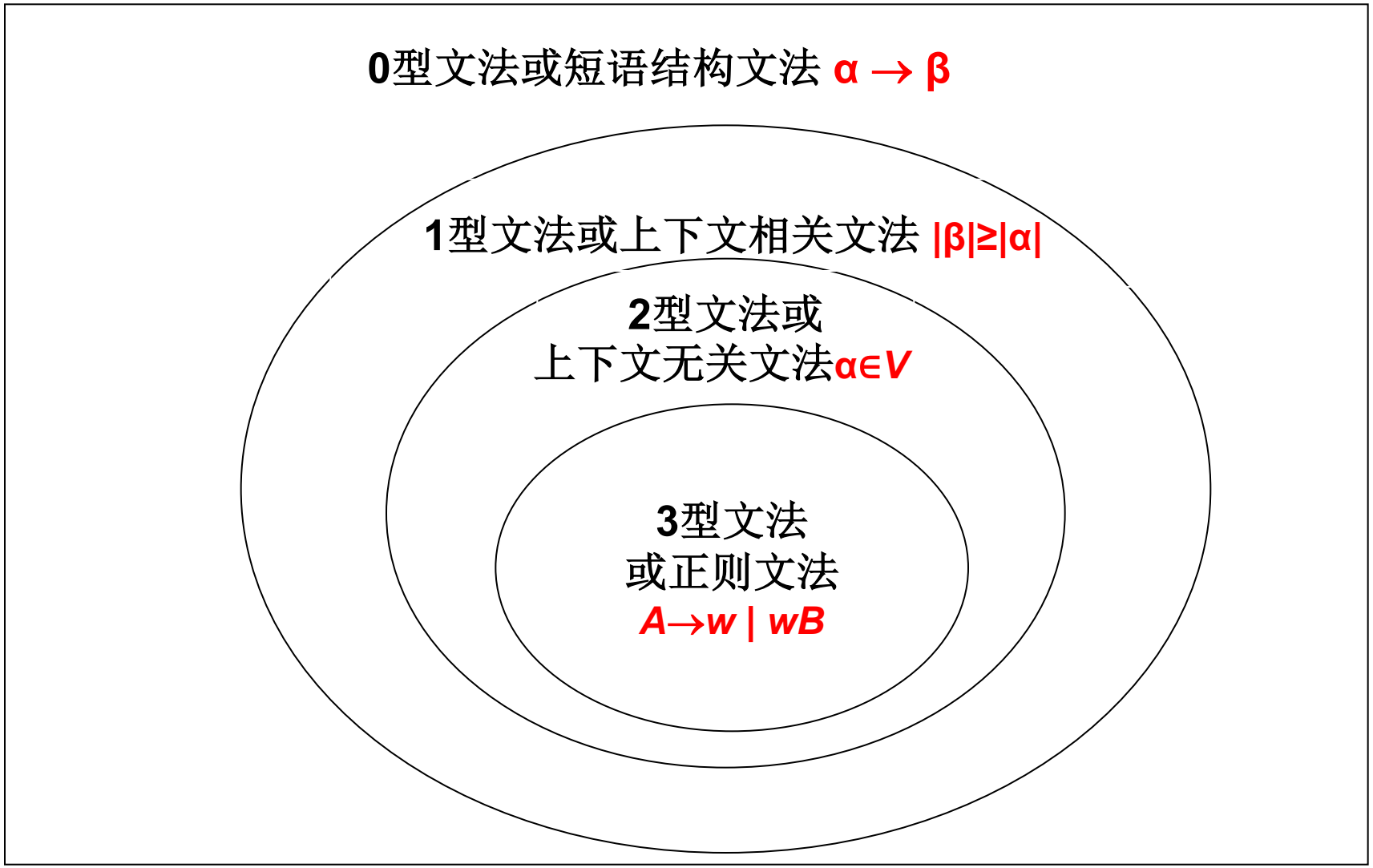
6.3 文法和语言的歧义性

6.4 下推自动机

6.5 PDA与CFG的等价性

6.6 上下文无关文法的应用

# 乔姆斯基文法体系（4型文法）



# 引言

- 上下文无关文法和它所描述的上下文无关语言，在定义程序设计语言、语法分析、简化程序设计语言的翻译等方面有重要意义。
- 高级程序设计语言的绝大多数语法结构都可以用上下文无关文法 (CFG) 描述，RL只适用于词法。
- 近年来，上下文无关文法也被用来描述文档格式：XML 中使用的 DTD(文档类型定义)就是用来描述 Web 上的信息交换格式的。

# 6.1 上下文无关文法

**定义 6.1** CFG(Context Free Grammar)上下文无关文法：G = (V, T, P, S)。其中：V 是变元集，变元也称为非终结符或**语法范畴**， T 是终结符集，P 是产生式规则，S 是开始字符。

■ **特别注意**：CFG 的 P 中的规则都是如下形式：
$V \to (V \cup T)^*$（产生式规则与上下文无 关）。

■ 上下文无关语言定义为：$L(G) = \{\omega \in T^* \mid S \Rightarrow^* \omega\}$

例1 $L=\{0^n 1^n \mid n \in N\}$

$G = (\{S\},\{0,1\},P,S)$

P： $S \to \varepsilon, S \to 0S1$

**例2** $L = \{0^n 1^{2n+1} \mid n \in N\}$

$G = (\{S\},\{0,1\},P,S)$

P: $S \to 1$ ， $S \to 0S11$

# 6.1 上下文无关文法

例3. L={w ∈ (0, 1)* | w至少包括三个1}

例4. L={w ∈ (0, 1)* | w中0和1 的个数相等}

# 6.1 上下文无关文法

例5. $L=\{0^n1^m \mid n,m \in N\}$

# 6.1 上下文无关文法

**定义 6.2** CSG(Context Sensitive Grammar)上下文有关文法：G = (V, T, P, S)。其中：V 是变元集，T 是终结符集，P 是产生式规则，S 是开始字符。

**特别注意：** CSG 的 P 的规则都是如下形式：

$\omega_1 V \omega_2 \rightarrow \omega_1 (V \cup T)^* \omega_2$ ， $(\omega_1, \omega_2 \in T^*)$ (产生式规 则和上下文有关，并且规定了在什么情况下变量能够推导)。

**定义 6.3** CFL(Context Free Language) 上下文无关语言L: 存在一个 CFG G，使得 L(G) = L，其中，

$L(G) = \{\omega \in T^* \mid S \Rightarrow^* \omega\}$ 。

# 6.1 上下文无关文法

**定理 6.1** RL ⊂ CFL。

思路: 令∀ L ⊆ RL，考虑 L 的正则表达式 E，都可以找到一个 CFG G，使得 L= L(E) =L (G) 。

**证明**

1. 当 |E| ≤ 1 时是容易的。
2. 假设对任意长度比 |E| 小的正则表达式定理都成立。
3. 那么考虑由正则表达式的定义推导出 E 的最后一步运算。由归纳假设，$|E_1|, |E_2| < |E|$，设 $L(S_1) = L(E_1), L(S_2) = L(E_2)$。

分情况讨论:

① $E = E_1 + E_2$ : $S \rightarrow S_1 \mid S_2$

② $E = E_1E_2$ : $S \rightarrow S_1S_2$

③ $E = E_1^*$ : $S \rightarrow S\ S_1 \mid \varepsilon$

所以，有 L(S) = L(E)。

# 6.2 语法分析树

**定义 6.4** 一个 CFG G = (V, T, P, S) 的语法分析树（Parse Tree）定义如下:

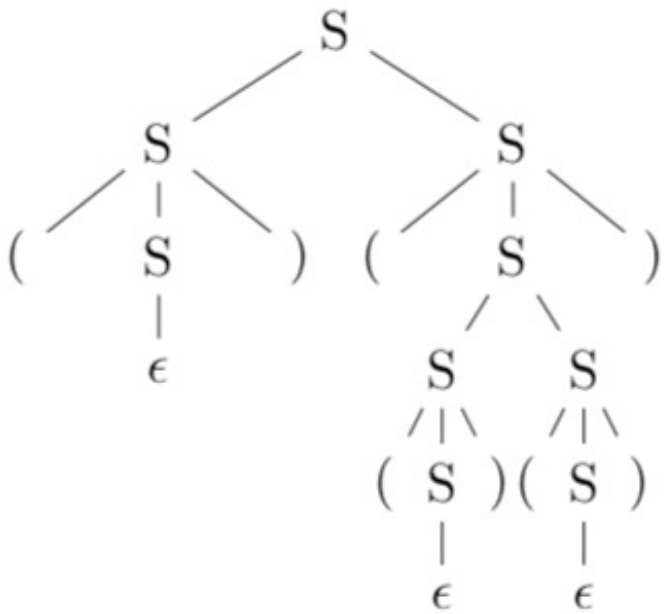
1. 根节点被标记为 S。
2. 每一个内部节点被标记为一个变量。
3. 每一个叶子节点被标记为一个终结符，特别的，假如一个节点被标记为 ε，它必须是父节点唯一 的子节点。
4. 一个标记为 A 的内部节点的子节点从左到右被标记为 $X_1 \ldots X_k$，当且仅当存在产生式规则 $A \rightarrow X_1 \ldots X_k$。

- 语法分析树(parse tree)又称派生树(derivation tree)、语法树(syntax tree)。

# 6.2 语法分析树

例5.　S → ε | (S) | SS　　推出 ()(()())

$$S \underset{lm}{\Rightarrow} SS \underset{lm}{\Rightarrow} (S)S \underset{lm}{\Rightarrow} ()S \underset{lm}{\Rightarrow} ()(S) \underset{lm}{\Rightarrow} ()(SS) \underset{lm}{\Rightarrow} ()((S)S) \underset{lm}{\Rightarrow} ()(()S) \underset{lm}{\Rightarrow} ()(()(S)) \underset{lm}{\Rightarrow} ()(()())$$



# 6.2 语法分析树

例6.

- 算术表达式的文法

$G_1$：　E→E+T | E-T | T
　　T→T*F | T/F | F
　　F→F ↑ P | P
　　P→(E) | N(L) | id
　　N→sin | cos | exp | abs | log | int
　　L→L, E | E

- 语法变量的含义

E—表达式(expression)

T—项(term)

F—因子(factor)

P—初等量(primary)

N—函数名(name of function)

L—列表(list)

id—标识符(identifier)

↑—幂运算

# 6.2 语法分析树

算术表达式 $x+x/y\uparrow 2$ 的三种不同派生

E⇒ E+T
⇒ T+T
⇒ F+T
⇒ P+T
⇒ *x*+T
⇒ *x*+T/F
⇒ *x*+F/F
⇒ *x*+P/F
⇒ *x*+*x*/F
⇒ *x*+*x*/F ↑ P
⇒ *x*+*x*/P ↑ P
⇒ *x*+*x*/*y* ↑ P
⇒ *x*+*x*/*y* ↑ 2

最左派生

E⇒ E+T
⇒ E+T/F
⇒ E+T/F↑P
⇒ E+T/F↑2
⇒ E+T/P↑2
⇒ E+T/*y*↑2
⇒ E+F/*y*↑2
⇒ E+P/*y*↑2
⇒ E+*x*/*y*↑2
⇒ T+*x*/*y*↑2
⇒ F+*x*/*y*↑2
⇒ P+*x*/*y*↑2
⇒ *x*+*x*/*y* ↑ 2

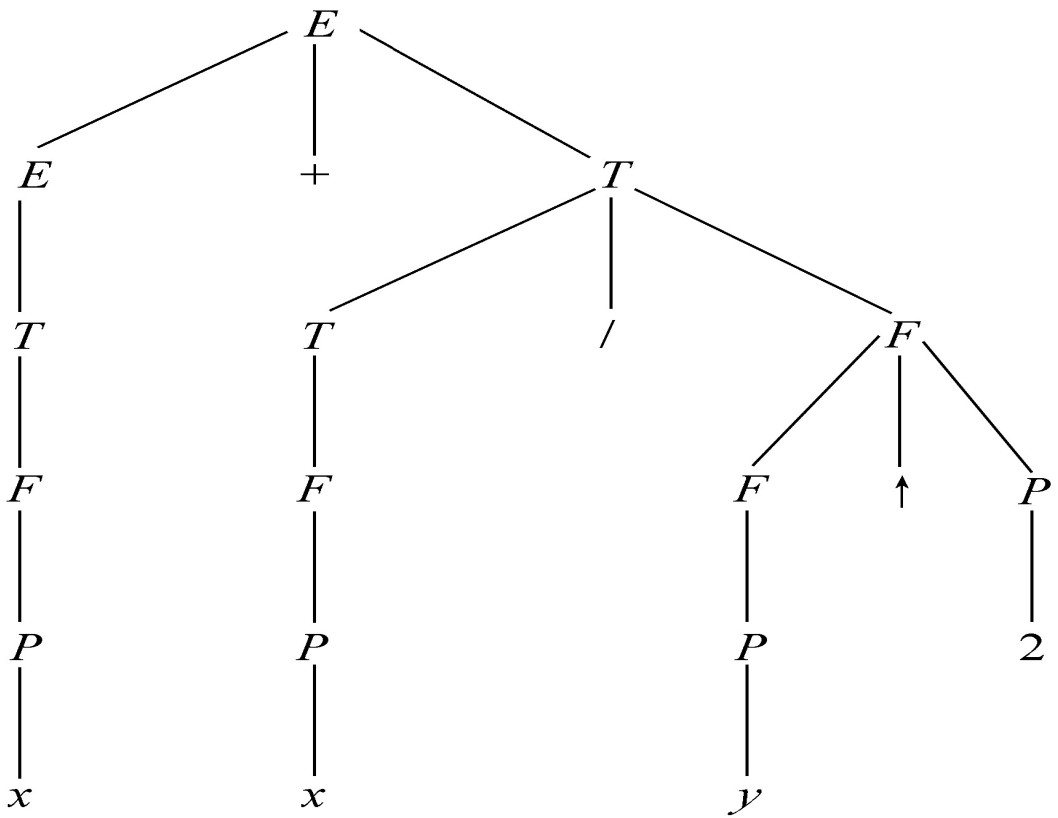
最右派生

E⇒ E+T
⇒ T+T
⇒ T+T/F
⇒ F+T/F
⇒ F+T/F↑P
⇒ P+T/F↑P
⇒ *x*+T/F↑P
⇒ *x*+F/F↑P
⇒ *x*+F/F↑2
⇒ *x*+F/P↑2
⇒ *x*+P/P↑2
⇒ x+P/*y*↑2
⇒ *x*+*x*/*y* ↑ 2

混合派生

# 6.2 语法分析树

句子 $x+x/y\uparrow 2$ 的一棵派生树---对应三种派生



# 6.2 语法分析树

**定义6.5　边缘（或结果）**

派生树 T 的所有叶子顶点从左到右依次标记为 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，则称符号串 $X_1X_2\ldots X_n$ 是 T 的**边缘**或**结果**。

**定义6.6**　最左派生(leftmost derivation)：派生过程中，每一步都是对当前句型的最左变量进行替换。最右派生(rightmost derivation)：派生过程中，每一步都是对当前句型的最右变量进行替换。

- 最右归约(rightmost reduction) 与最左派生对应，最左归约(leftmost reduction) 与最右派生对应；
- 派生也称为推导；

# 6.2 语法分析树

语法分析树（Parse Tree）和推导/派生（Derivation）的关系:

1. 任意一个 Parse Tree，将它的叶子从左到右写下来，称作为 Parse Tree 生成的串，或边缘。
2. Parse Tree 反映了推导这个串应用的语法规则,它的层次结构反映了语法信息(比如运算顺序)。
3. 一个 Parse Tree 对应的串的最左(最右)推导是唯一的。

# 6.2 语法分析树

定理6-1 设 CFG G=(V, T, P, S)，$S \Rightarrow^* \alpha$ 的充分必要条件为 G 有一棵结果为 α 的派生树。

定理6-2 如果 α 是 CFG G 的一个句型，则 G 中存在 α 的最左派生和最右派生。

定理6-3 如果α是 CFG G 的一个句型，α的派生树与最左派生和最右派生是一一对应的，但是，这棵派生树可以对应多个不同的派生。

# 6.3 文法和语言的歧义性

算术表达式的二义性文法

$G_2$：　E→E+E | E-E | E/E | E*E

E→ E↑E | (E) | N(L) | id

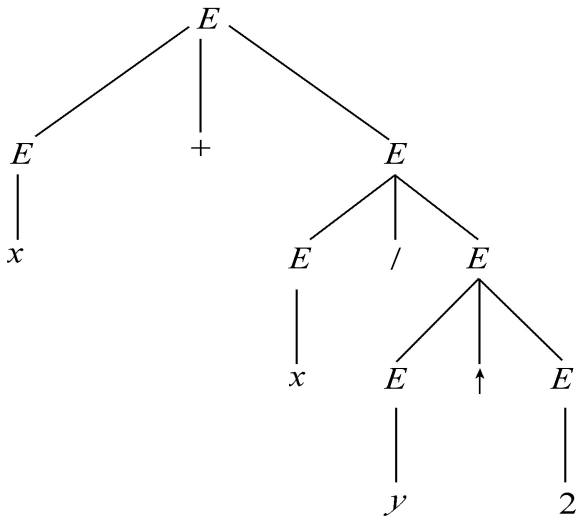
N→sin | cos | exp | abs | log |int

L→L,E | E

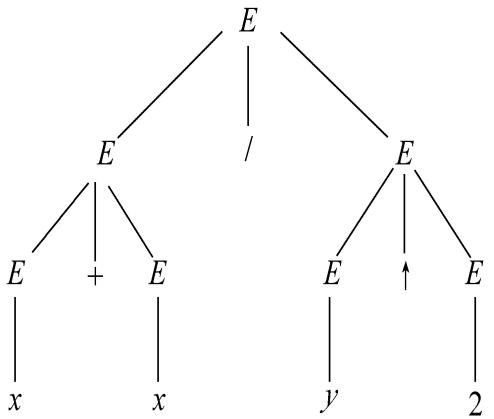
# 6.3 文法和语言的歧义性

句子 ***x+x/y↑2*** 在文法中的三个不同的最左派生:

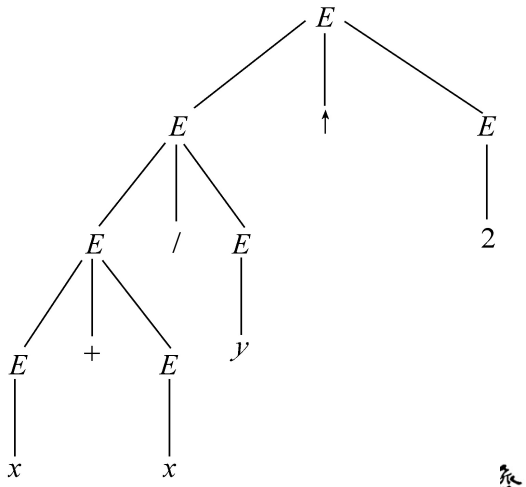
$E \Rightarrow E+E$
$\Rightarrow x+E$
$\Rightarrow x+E/E$
$\Rightarrow x+x/E$
$\Rightarrow x+x/E \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow 2$




$E \Rightarrow E/E$
$\Rightarrow E+E/E$
$\Rightarrow x+E/E$
$\Rightarrow x+x/E$
$\Rightarrow x+x/E \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow 2$




$E \Rightarrow E \uparrow E$
$\Rightarrow E/E \uparrow E$
$\Rightarrow E+E/E \uparrow E$
$\Rightarrow x+E/E \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/E \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow E$
$\Rightarrow x+x/y \uparrow 2$



# 6.3 文法和语言的歧义性

**定义6.7** 二义性/歧义性(ambiguity)

CFG G = (V, T, P, S)，如果存在 w ∈ L(G)，w 至少有两棵不同的语法分析树，则称 G 是二义性的或歧义的。否则 G 为非二义性的。

- $G_2$ 是二义性的，例1中的$G_1$ 是非二义性的，但二者是等价的，即$L(G_1)=L(G_2)$
- 判定任给 CFG G 是否为二义性的问题是一个不可解的(unsolvable)问题。

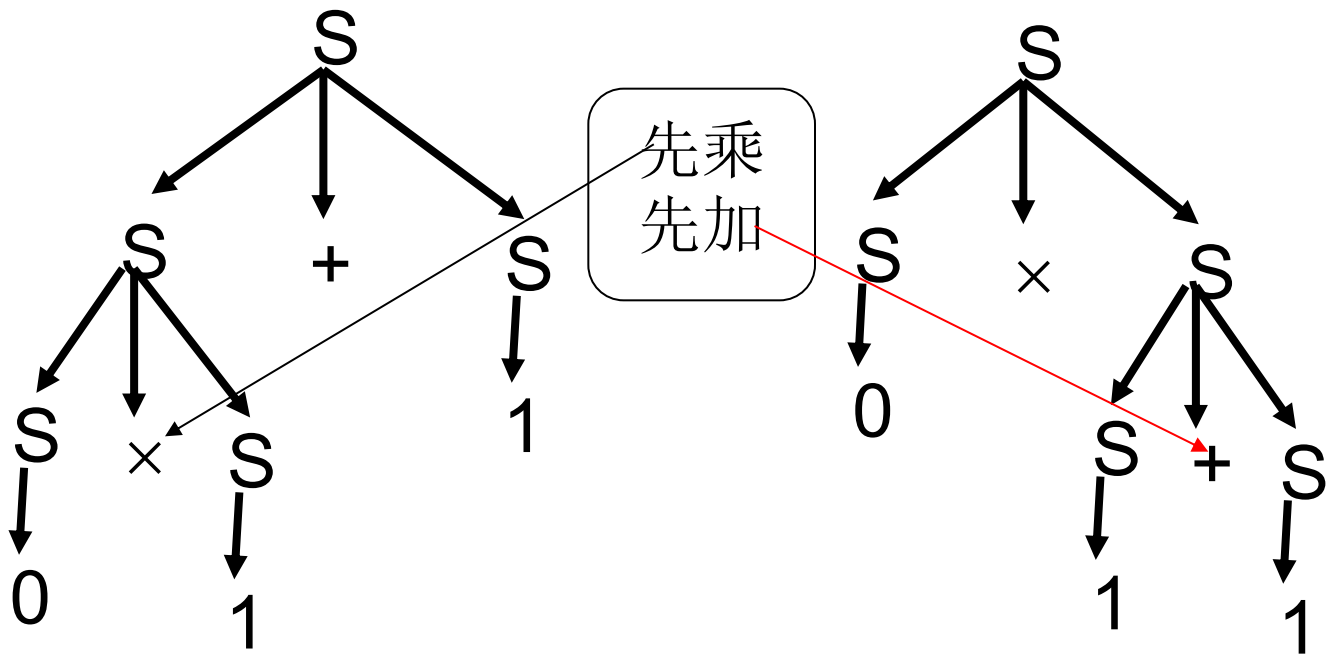
# 6.3 文法和语言的歧义性

例7. 二义性

G: S → 0 | 1 | S+S | S×S

①S ⇒ S+S ⇒ S×S+S ⇒ 0×S+S ⇒ 0×1+S ⇒ 0×1+1

②S ⇒ S×S ⇒ 0×S ⇒ 0×S+S ⇒ 0×1+S ⇒ 0×1+1



# 6.3 文法和语言的歧义性

## Chomsky Normal Form(乔姆斯基范式)

1. CFG = (V,Σ,R,S) is in CNF if every rule is of the form
   - $A \rightarrow BC$ 一分为二
   - $A \rightarrow x$ 或终极化
   - $S \rightarrow \varepsilon$

其中，变元$A \in V$ and $B,C \in V \setminus \{S\}$, and $x \in \Sigma$

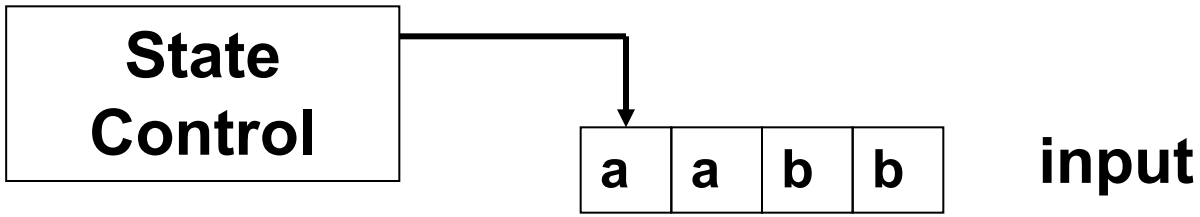
2. Every context-free language can be described by a grammar in Chomsky normal form。
3. 符合乔姆斯基范式的CFG不存在二义性。

# 6.4 下推自动机

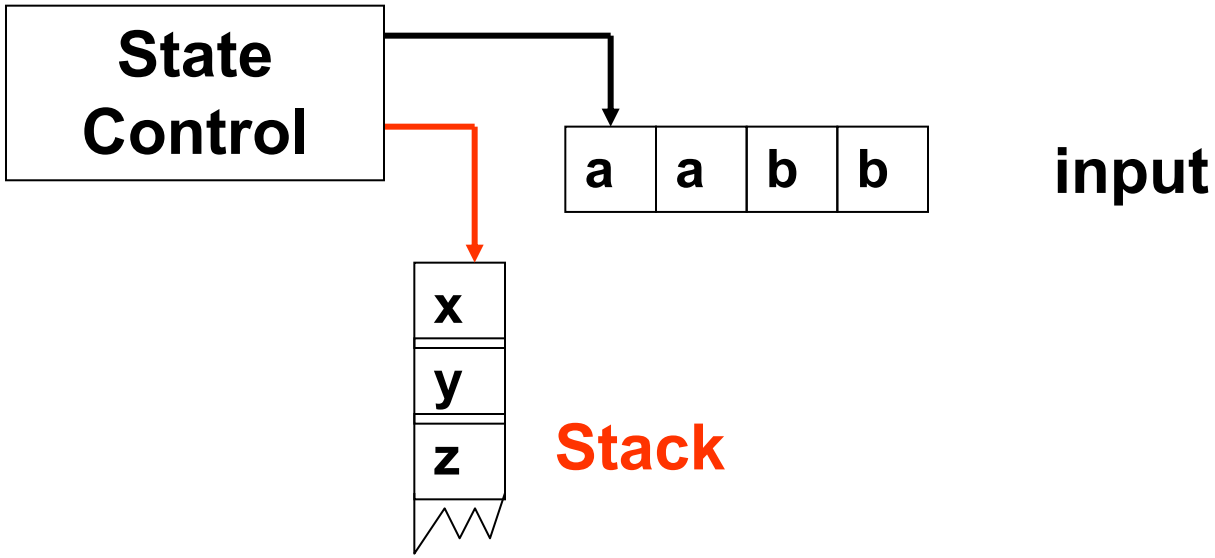
关于PDA (Pushdown Automata)

1. NFA+Stack can recognizes some nonregular languages（CFL）
2. PDA ⇔ CFG 有两钟方式可以证明一个语言是CFL
3. Stack Last in first Out
4. PDA is a nondeterministic Automata

# 6.4 下推自动机




Schematic of a Finite Automaton




Schematic of a PDA

# 6.4 下推自动机

## Formal Definition of PDA

A Pushdown Automata M is defined by a six tuple $(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,F)$, with

- Q finite set of states 有限个状态（寄存器）
- $\Sigma$ finite input alphabet 字母表
- $\Gamma$ finite stack alphabet 可压栈字符表
- $q_0$ start state $\in$ Q
- F set of accepting states $\subseteq$Q 接受态集合
- $\delta$ transition function 状态转移函数 ~ 相当于3种语句goto, push ,pop

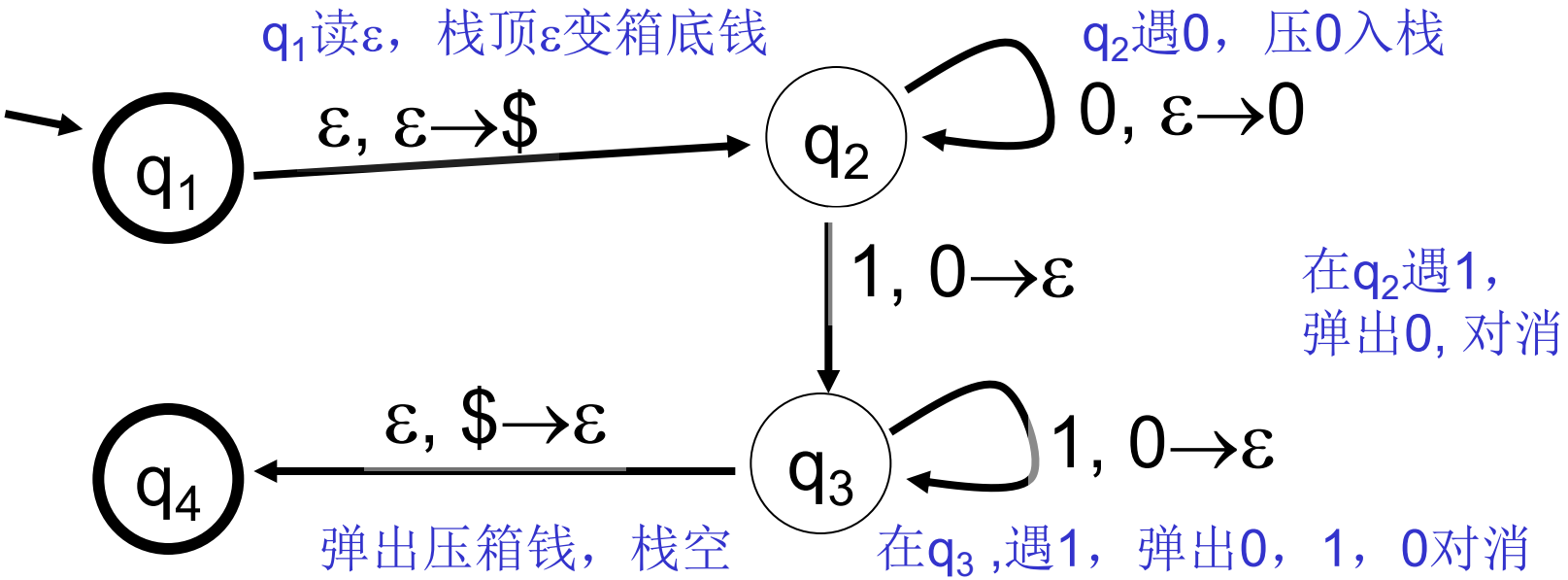
$$\delta: Q \times \Sigma\varepsilon \times \Gamma\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma\varepsilon)$$ 是一个超集

# 6.4 下推自动机

## Exp8: A PDA recognizes language $\{0^n1^n|n>=0\}$。

思路： 先将$0^n$ 压栈；读$1^n$，$0^n$出栈；比较0与1的个数。

问题：PDA 无法判断何时为空，解决办法：先将$压栈。




**a, b→c 的含义： read ‘a’, pop ‘b’, push ‘c’**

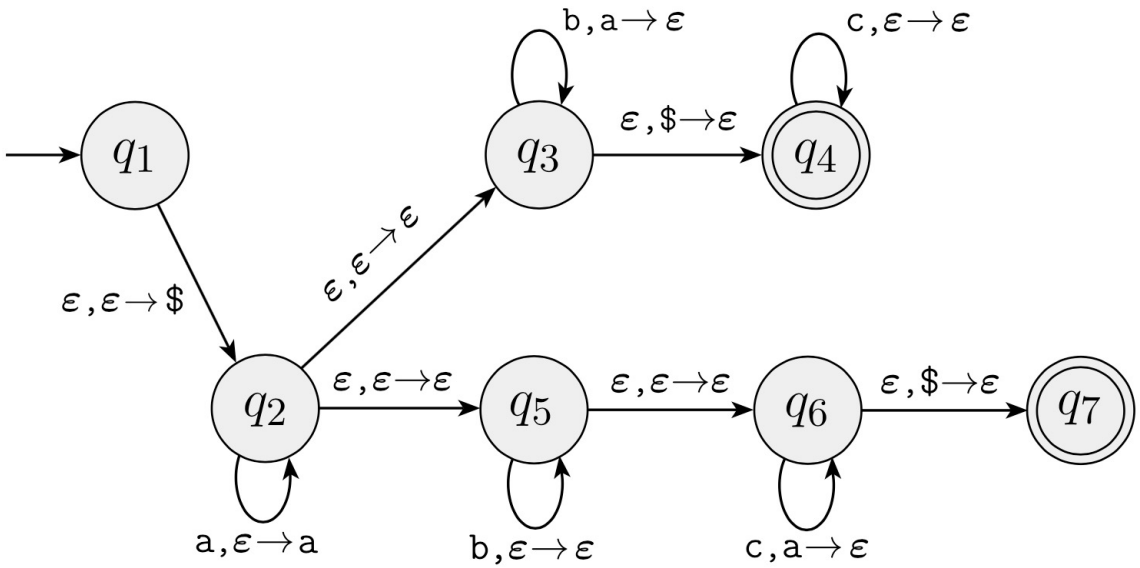
a=ε means read nothing; b= ε means no pop ; c= ε means push nothing

# 6.4 下推自动机

例9. 识别语言 $\{a^i b^j c^k \mid i, j, k>=0 \text{ and } i=j \text{ or } i=k\}$ 的PDA

问题是：究竟是a与b匹配呢，还是a与c匹配呢？

不知道→都有可能→不确定→采用不确定的PDA



# 6.4 下推自动机

**定义 6.8 Pushdown automaton(PDA)** 下推自动机: $P = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F, \Gamma, Z_0)$。其中 Q 是状态集， Σ 是输入字符集，Γ 是栈字符集，$q_0 \in Q$ 是初始状态，$F \subset Q$ 是接受状态集，$Z_0$ 是初始栈底符号， $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ 是转移函数。

- 转移函数的一般形式如下：

$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \ldots, (p_m, \gamma_m)\}$ ， 表示当自动机处于状态 q， 读到输入字符 a，发现栈顶的符号为 Z时，可以转移到状态 $p_i$，同时弹出栈顶的 Z，压入 $\gamma_i$。

- 压入 γ 时，从右向左压入。即压入完成后 γ 左侧的元素对应栈顶。
- 符号约定：用字母表靠后的大写字母表示栈中的字符，如 X, Y ;用希腊字母表示栈中的字符串， 如 α,γ。

# 6.4 下推自动机

例10. 构造一个PDA按终结状态方式接受语言$\{0^n1^n \mid n\geq 1\}$。

- 形式化定义：

$M=(\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_3\})$，　其中，

$\delta(q_0, 0, Z)=\{(q_1, AZ)\}$　在栈中加入A

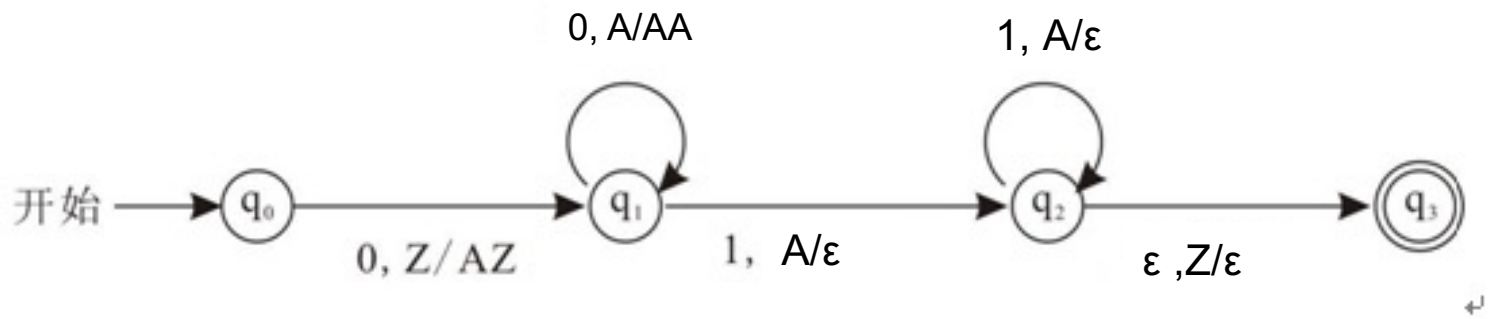
$\delta(q_1, 0, A)=\{(q_1, AA)\}$　在栈中加入A

$\delta(q_1, 1, A)=\{(q_2, \varepsilon)\}$　遇1消去栈顶符号

$\delta(q_2, 1, A)=\{(q_2, \varepsilon)\}$　遇1消去栈顶符号

$\delta(q_2, \varepsilon, Z)=\{(q_3, Z)\}$　接受

- 状态转移图



# 6.4 下推自动机

**定义 6.9 (终态接受).** 考虑 PDA $P = (Q,\Sigma,q_0,\delta,F,\Gamma,Z_0)$。定义语言 $L(P)$ 如下:$w \in L(P)$ 当且仅当存在接受态 $q \in F$ 和栈字符串 $\alpha \in \Gamma^*$，满足 $(q_0,w,Z_0)\vdash^*(q,\varepsilon,\alpha)$。

**定义 6.10 (空栈接受).** 考虑 PDA $P = (Q,\Sigma,q_0,\delta,F,\Gamma,Z_0)$。定义语言 $N(P)$ 如下:$w \in N(P)$ 当且仅当存在状态 $q \in Q$，满足 $(q_0, w, Z_0) \vdash^*(q, \varepsilon, \varepsilon)$。

定理6.4 如果对于某个按终结状态方式接受语言的PDA $M_1$，有$L(M_1)=L$，则存在一个按空栈方式接受语言的PDA $M_2$，使得$N(M_2)=L$。

定理6.5 如果对于某个按空栈方式接受语言的PDA $M_1$，有$N(M_1)=L$，则存在一个按终结状态方式接受语言的PDA $M_2$,使得$L(M_2)=L$。

# 6.5 PDA与CFG的等价性

Theorem 6.6 一个语言是上下文无关的，当且仅当存在一台下推自动机识别它。
CFL⇔PDA

Lemma 6.7 如果一个语言是上下文无关的，则存在一台下推自动机识别它。
CFL→PDA

Lemma 6.8 如果一个语言被一台下推自动机识别，则它是上下文无关的。
PDA→ CFL

# 6.5 PDA与CFG的等价性

**Lemma 6.7** 如果一个语言是上下文无关的，则存在一台下推自动机识别它。CFL L → CFG G → PDA P

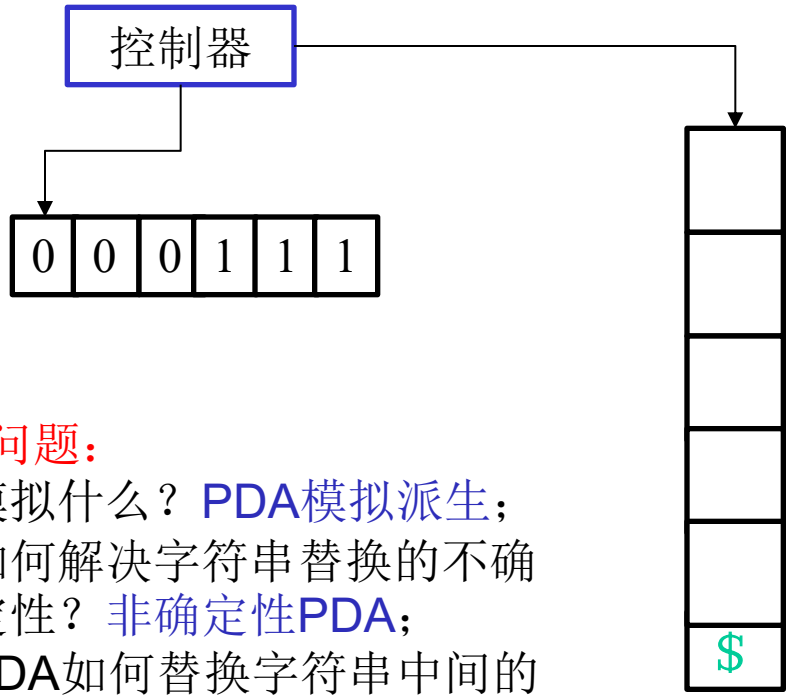
Proof Idea：如何用PDA P模拟CFG G？

$L = \{ 0^n 1^n \mid n>=0 \}$

**G：S →0S1 | ε**

文法G产生w=000111的过程如下：

S → 0S1 ①
→ 00S11 ②
→ 000S111 ③
→ 000111 ④




关键问题：

1. 模拟什么？PDA模拟派生；
2. 如何解决字符串替换的不确定性？非确定性PDA；
3. PDA如何替换字符串中间的变元？终结符提前匹配；

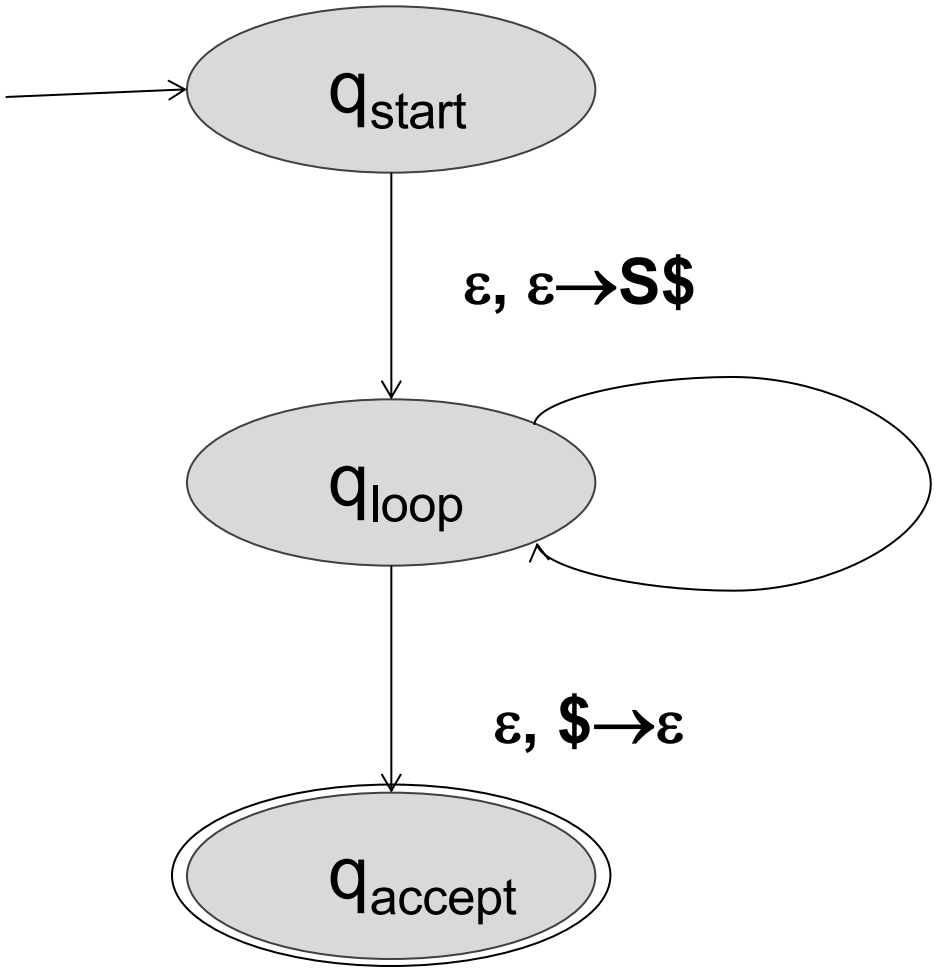
# 6.5 PDA与CFG的等价性

给定CFL A, 如何构造一个等价的PDA P

1. Place the marker symbol $ and the start variable on the stack;
2. Repeat the following steps forever.
   ① If the top of stack is a variable symbol A, nondeterministically select one of the rules for A and substitute A by the string on the right-hand side of the rule.
   ② If the top of stack is a terminal symbol a, read the next symbol from the input and compare it to a. if they match, repeat. If they do not match, reject on this branch of the nondeterminism.
   ③ If the top of stack is the symbol $, enter the accept state. Doing so accepts the input if it has all been read.

# 6.5 PDA与CFG的等价性

## 如何把文法G转换成PDA




ε, A→ω　for rule A → ω

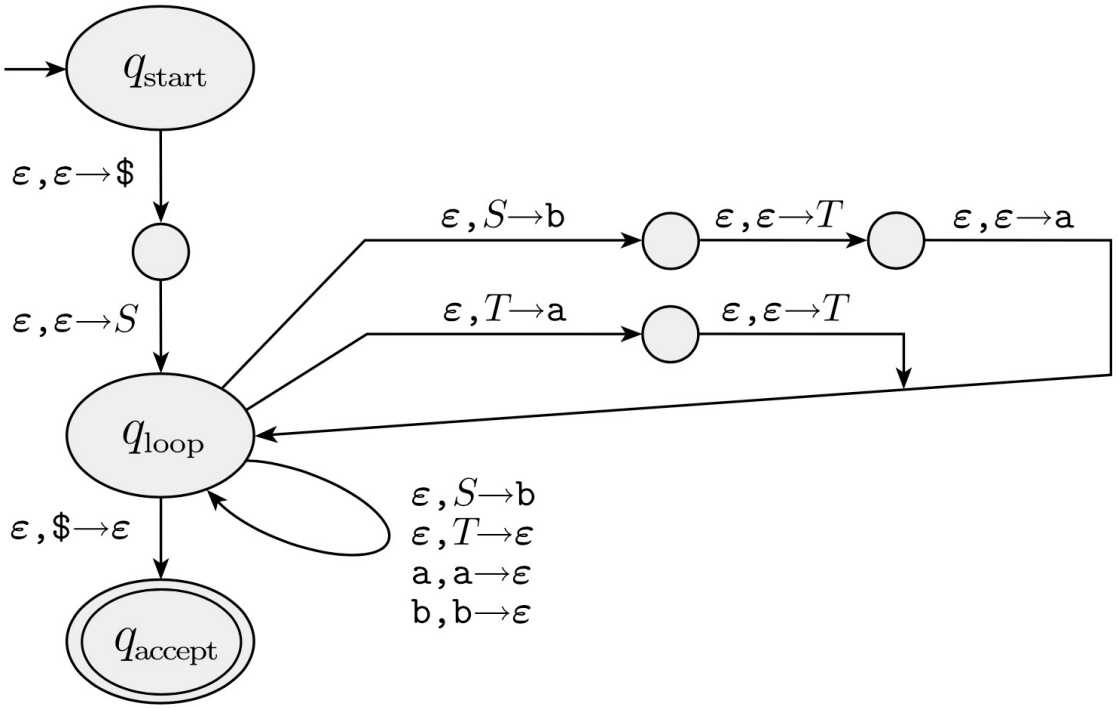
a, a→ε　for terminal a

# 6.5 PDA与CFG的等价性

EXP：把CFG G转换成PDA P，其中G：

$S \rightarrow aTb \mid b$

$T \rightarrow Ta \mid \varepsilon$

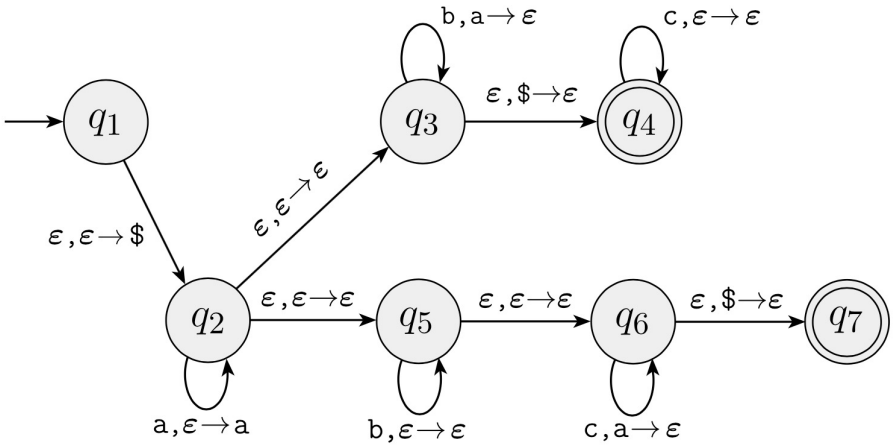


# 6.5 PDA与CFG的等价性

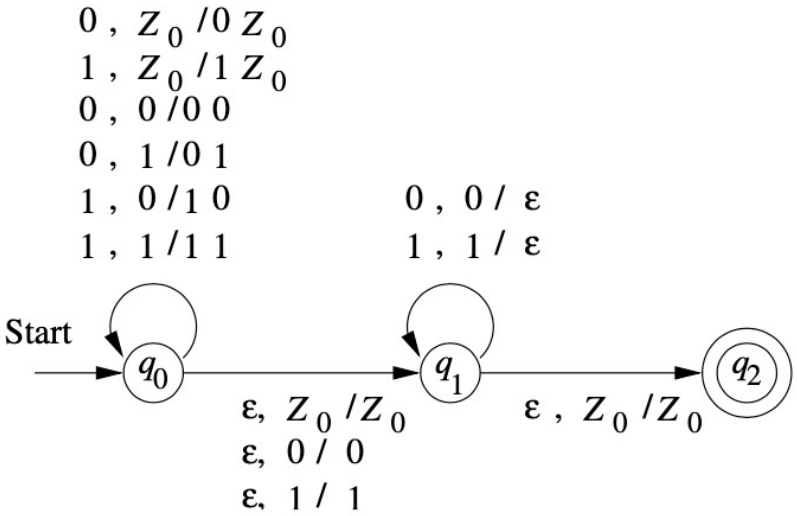
例11. 设计一个PDA P，识别语言$L=\{0^i1^j \mid i \geq j \geq 1\}$。

# 6.6 确定型下推自动机

例9. 识别语言{$a^i b^j c^k$| i, j, k>=0 and i=j or i=k}的PDA。




例12. 设计一个PDA，接受语言$L_{wwr}$ = {$ww^R$ | w∈ {0,1}* }。




- PDA的主要特点：非确定性

① 对于同一个δ(q, a, A)（q∈Q，a∈∑∪{ε}，A∈Γ），可以有多个或零个转移；

② 对于同样的q和A，δ(q,a,A)（a∈∑）和δ(q,ε,A)可以都有定义。

δ: Q × Σε × Γε → $\mathcal{P}$(Q × Γε) 是一个超集，δ(q, a, X) = {($p_1$, γ 1),…,($p_m$, γ m)}

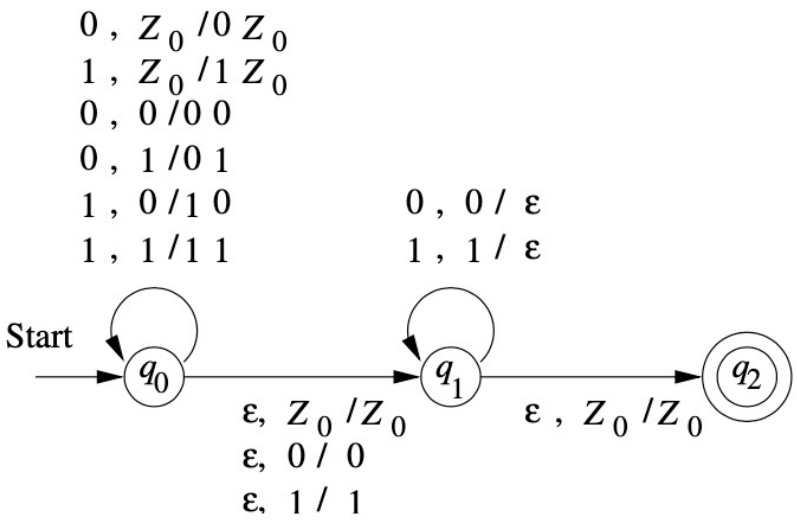
# 6.6 确定型下推自动机

**定义6.11** 一个下推自动机$M=(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$，如果满足下列条件：

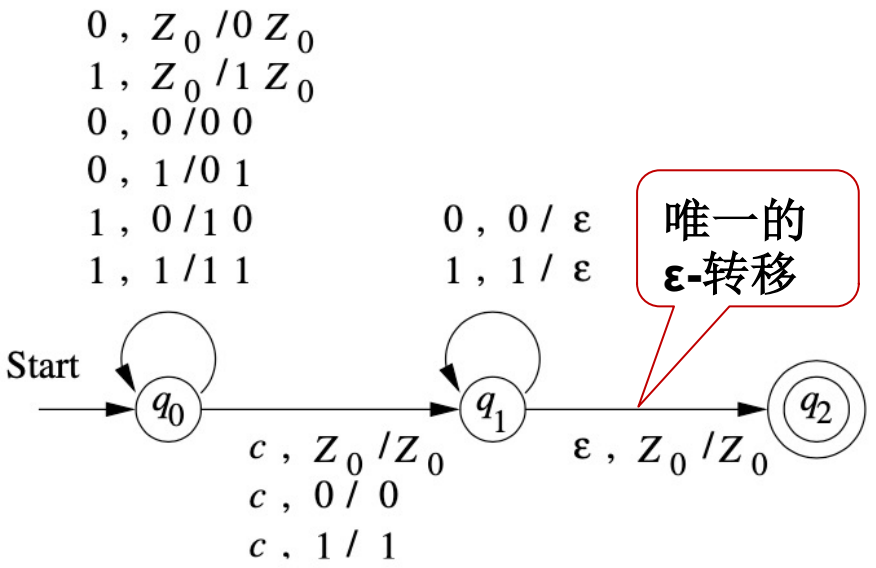
1. 对于每个$q \in Q$，每个$a \in \sum_{\varepsilon}$，每个$A \in \Gamma$，$\delta(q,a,A)$至多有一个转移。
2. 对于每个$a \in \sum$，若$\delta(q,a,A)$非空，则$\delta(q,\varepsilon,A)$为空。

则称M为**确定的下推自动机**（Deterministic PushDown Automaton），简记为DPDA。确定的下推自动机接受的语言称为**确定的上下文无关语言**，简记为DCFL。

# 6.6 确定型下推自动机




接受$L_{wwr}$ = $\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$的PDA




接受$L_{wcwr}$ = $\{wcw^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$的DPDA

**问题：**

在$q_0$状态时，把下一字符压栈，还是ε-转移到$q_1$？

GUESS

# 6.6 确定型下推自动机

## DCFL的重要应用

- 非固有歧义语言的真子集
- 程序设计语言的语法分析器
- LR(k)文法，Yacc的基础

# 6.6 确定型下推自动机

**定理6.7 如果L是正则语言，则对于某个DPDA P 有 L=L(P)。**

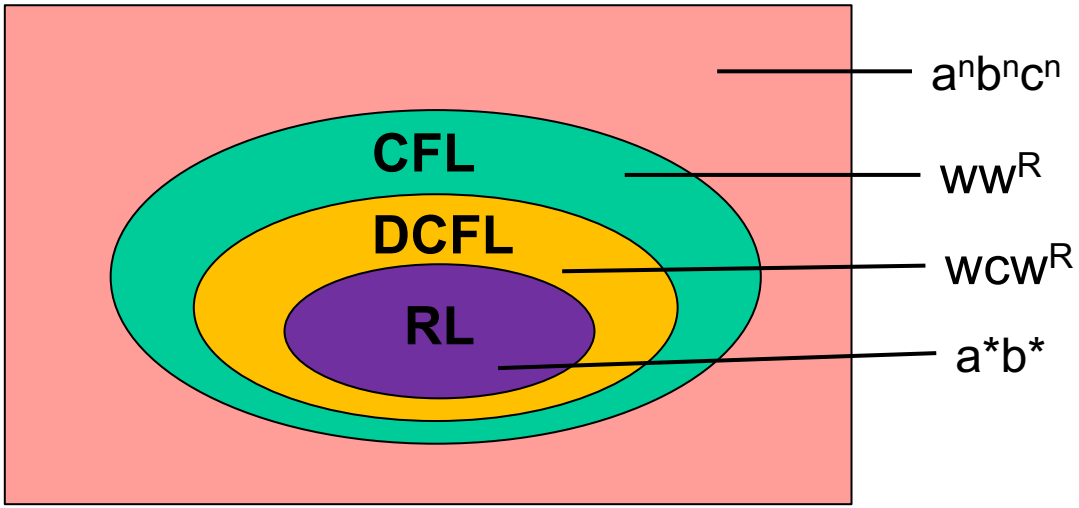
证明思路：用DPDA P可以模拟任一DFA A，也就是，已知DFA A，如何构造一个DPDA P的问题。

1. 设$A=(Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$是一个DFA，构造DPDA P
   $P=(Q, \Sigma, \{Z_0\}, \delta_P, q_0, Z_0, F)$
2. 对于所有的Q中满足$\delta_A(q,a)=p$的状态对p和q，定义
   $\delta_P(q,a, Z_0)=\{(p, Z_0)\}$。 //栈顶恒等于$Z_0$

3. 通过对|w|进行归纳来证明：
$(q_0, w, Z_0) \vdash_P^* (p, \varepsilon, Z_0)$当且仅当 $\delta_A(q,a)=p$ 。

# 6.6 确定型下推自动机

- DPDA识别正则语言；
- DPDA识别上下文无关语言$L_{wcwr}$，所以DCFL语言类真包含正则语言；
- DPDA无法识别上下文无关语言$L_{wwr}$，所以DCFL真包含于CFL；



# 6.6 确定型下推自动机

定理6.8 DPDA P，语言L=L(P)，那么L有无歧义的CFG。

定理6.9 DPDA P，语言L=N(P)，那么L有无歧义的CFG。

- DPDA P接受的语言都是无歧义的，因此DPDA在语法分析中占重要地位；
- 但是，并非所有的非固有歧义的CFL都能被DPDA识别，如$L_{wwr}$有无歧义文法S→0S0|1S1|ε，但是，它不是DPDA能识别的。