

# Введение в искусственный интеллект. Современное компьютерное зрение

## Тема семинара: Обучение нейронных сетей

Бабин Д.Н., Иванов И.Е.

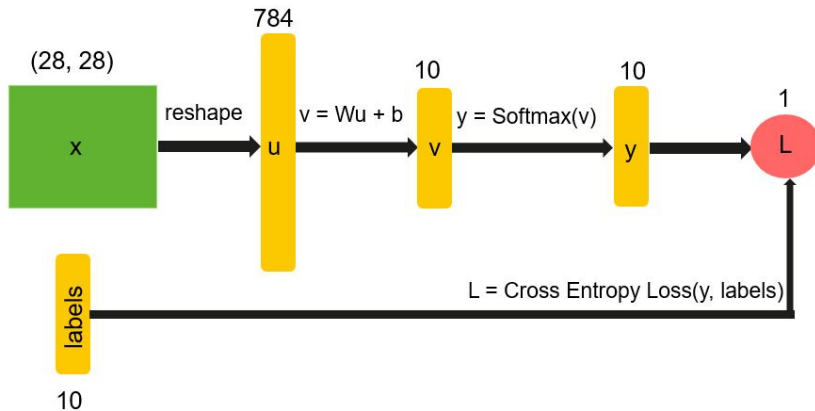
кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем

11 марта 2025 г.

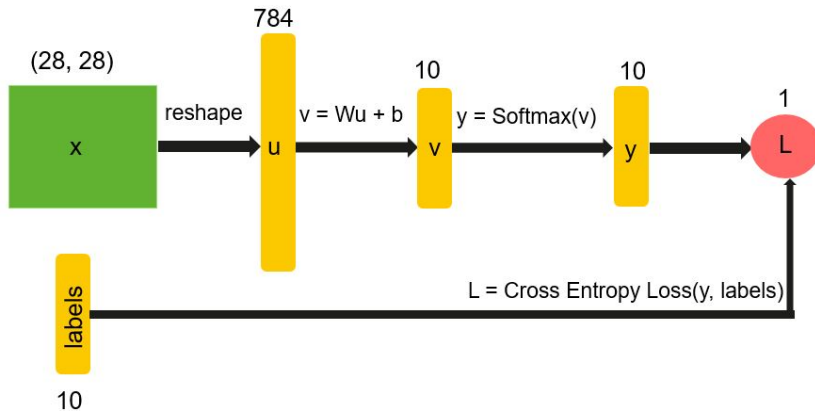


- 1 Вывод формул обратного прохода для основных слоёв

# Постановка задачи

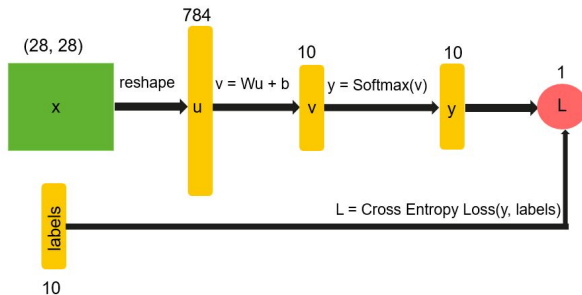


# Постановка задачи

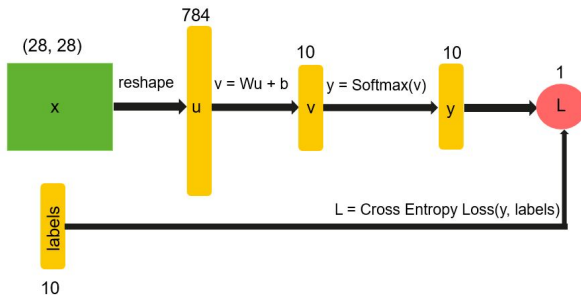


Задача: необходимо вычислить  $\frac{\partial L}{\partial W}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x}$

# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$



# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$



- 1 Прямой проход: вычисление  $L$  и всех промежуточных значений
- 2 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial y}$

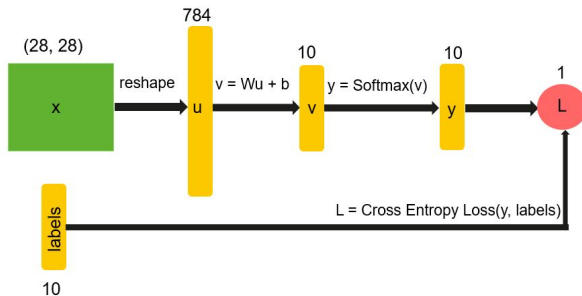
$$L = \sum_{i=1}^{10} labels_i \log y_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{labels_i}{y_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial y_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$



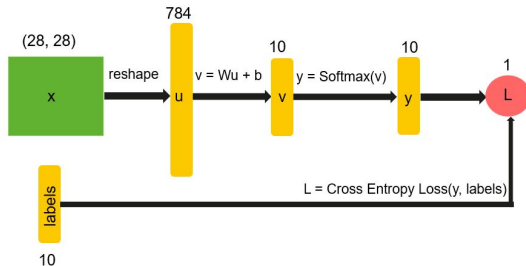
# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$



- 1 Прямой проход: вычисление  $L$  и всех промежуточных значений
- 2 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial y}$
- 3 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial v}$



# Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$



$$\frac{\partial L}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v_1} \\ \frac{\partial L}{\partial v_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial v_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_1} \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_2} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_2} & \frac{\partial y_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_{10}} & \frac{\partial y_2}{\partial v_{10}} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial y_{10}} \end{pmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v}^T \frac{\partial L}{\partial y}$$

# Вычисление матрицы Якоби для Softmax

$$y = \text{Softmax}(v)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{10} e^{u_i}} \begin{pmatrix} e^{u_1} \\ e^{u_2} \\ \dots \\ e^{u_{10}} \end{pmatrix}$$

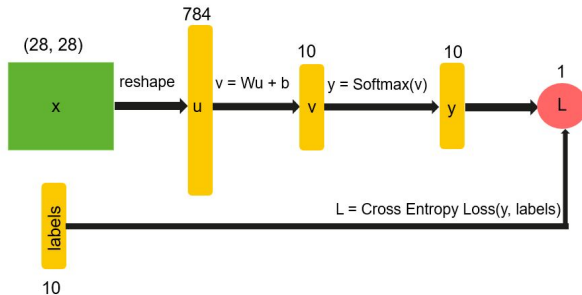
$$\frac{\partial y_i}{\partial u_j} = y_i(1[i = j] - y_j)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{pmatrix} y_1(1 - y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1 - y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1 - y_{10}) \end{pmatrix}$$



$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v}^T \frac{\partial L}{\partial y} = \begin{pmatrix} y_1(1 - y_1) & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_{10} \\ -y_2 y_1 & y_2(1 - y_2) & \dots & -y_2 y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10} y_1 & -y_{10} y_2 & \dots & y_{10}(1 - y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$

# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$



- 1 Прямой проход: вычисление  $L$  и всех промежуточных значений
- 2 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial y}$
- 3 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial v}$
- 4 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial u}$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

$$v = Wu + b$$

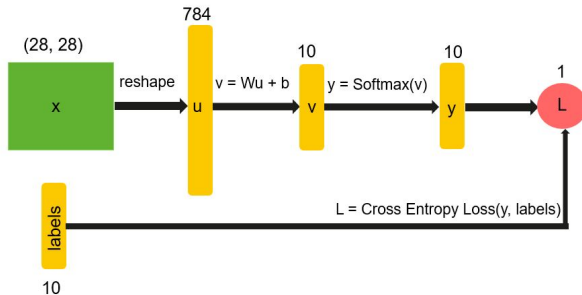
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,784} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,784} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{10,1} & w_{10,2} & \dots & w_{10,784} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{784} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial u_j} = w_{i,j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = W^T \frac{\partial L}{\partial v}$$



# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial b}$



- 1 Прямой проход: вычисление  $L$  и всех промежуточных значений
- 2 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial y}$
- 3 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial v}$
- 4 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial b}$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial b}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

$$v = Wu + b$$

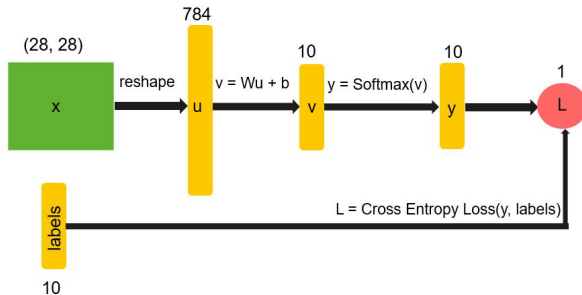
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,784} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,784} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_{10,1} & w_{10,2} & \dots & w_{10,784} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{784} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_j} = \delta_{i,j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = E^T \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v}$$



# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$



- 1 Прямой проход: вычисление  $L$  и всех промежуточных значений
- 2 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial y}$
- 3 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial v}$
- 4 Вычисление  $\frac{\partial L}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial W}$



## Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как  $W$  — матрица.

# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как  $W$  — матрица.

По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$



# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как  $W$  — матрица.

По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,j}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} u_j$$



# Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,j}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} u_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial L}{\partial v} u^T$$



$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix} u^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = reshape^{-1}(W^T \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix})$$



Спасибо за внимание!