

# Введение в искусственный интеллект. Машинное обучение

Тема семинара: метрики качества классификаторов

Бабин Д.Н., Иванов И.Е.

кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем



## 1 Матрица ошибок

- 1 Матрица ошибок
- 2 Ошибки на основе положительного отклика (TPR, FPR) и площадь под кривой ROC

- 1 Матрица ошибок
- 2 Ошибки на основе положительного отклика (TPR, FPR) и площадь под кривой ROC
- 3 Точность, полнота (Precision, Recall) и площадь под кривой PR

- 1 Матрица ошибок
- 2 Ошибки на основе положительного отклика (TPR, FPR) и площадь под кривой ROC
- 3 Точность, полнота (Precision, Recall) и площадь под кривой PR
- 4 Микро- и макроусреднение

# Классификация ответов бинарного классификатора

- Обучающая выборка  $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$
- Задача классификации на 2 класса:  $X \rightarrow Y, Y = \{+1, -1\}$
- Алгоритм классификации  $a(x) : X \rightarrow Y$
- Класс с меткой “+1” называется “**positive**”
- Класс с меткой “-1” называется “**negative**”



# Классификация ответов бинарного классификатора

- Обучающая выборка  $X^m = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$
- Задача классификации на 2 класса:  $X \rightarrow Y, Y = \{+1, -1\}$
- Алгоритм классификации  $a(x) : X \rightarrow Y$
- Класс с меткой “+1” называется “**positive**”
- Класс с меткой “-1” называется “**negative**”

Таблица: Классификация ответов

	Выход алгоритма	Правильный ответ
TP (True Positive)	$a(x_i) = +1$	$y_i = +1$
TN (True Negative)	$a(x_i) = -1$	$y_i = -1$
FP (False Positive)	$a(x_i) = +1$	$y_i = -1$
FN (False Negative)	$a(x_i) = -1$	$y_i = +1$




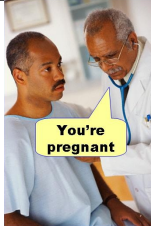


# Матрица ошибок

Более наглядно эти соотношения можно изобразить с помощью **матрицы ошибок** (confusion matrix)

		Правильный ответ	
		$y = +1$	$y = -1$
Выход алгоритма	$a(x) = +1$	True Positive	False Positive (Ошибка 1 рода)
	$a(x) = -1$	False Negative (Ошибка 2 рода)	True Negative



# Матрица ошибок

	$y = +1$	$y = -1$
$a(x) = +1$		
$a(x) = -1$		

# Простейшая метрика качества

- Простейшая метрика качества - это доля правильных ответов на тесте (контрольной выборке)
- По-английски - **Accuracy**

## Формула Accuracy

$$Accuracy = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [a(x_i) = y_i] = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$$



# Простейшая метрика качества

- Простейшая метрика качества - это доля правильных ответов на тесте (контрольной выборке)
- По-английски - **Accuracy**

## Формула Accuracy

$$Accuracy = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [a(x_i) = y_i] = \frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$$

## Недостаток

- Не учитывается дисбаланс классов
- Не учитывается цена ошибки на объектах разных классов



# Метрики по положительному отклику алгоритма

Рассмотрим метрики, которые основаны на подсчёте доли положительных ответов алгоритма.

## Доля ложных положительных классификаций

Также известно как False Positive Rate, или **FPR**.

$$FPR(a, X^m) = \frac{\sum_{i=1}^m [y_i = -1][a(x_i) = +1]}{\sum_{i=1}^m [y_i = -1]}$$

# Метрики по положительному отклику алгоритма

Рассмотрим метрики, которые основаны на подсчёте доли положительных ответов алгоритма.

## Доля ложных положительных классификаций

Также известно как False Positive Rate, или **FPR**.

$$FPR(a, X^m) = \frac{\sum_{i=1}^m [y_i = -1][a(x_i) = +1]}{\sum_{i=1}^m [y_i = -1]}$$

## Доля верных положительных классификаций

Также известно как True Positive Rate, или **TPR**.

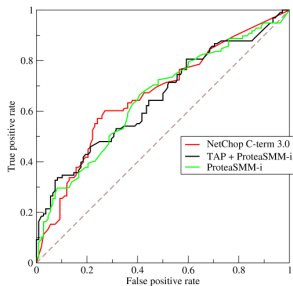
$$TPR(a, X^m) = \frac{\sum_{i=1}^m [y_i = +1][a(x_i) = +1]}{\sum_{i=1}^m [y_i = +1]}$$

**Замечание.** Обратите внимание на разные знаменатели!



# Кривая ошибок

Наиболее известна как рабочая характеристика приёмника, или Receiver Operating Characteristic (**ROC-кривая**), в который мы смотрим на компромисс между уровнем ложной тревоги и долей верного отклика.



По оси X откладывается FPR, по оси Y - TPR<sup>1</sup>.

**Замечание.** На данной кривой никак не учитываются пропуски.

<sup>1</sup><https://wikipedia.org>

## AUROC

Чем больше для каждого значения ошибки FPR значение правильного предсказания TPR, тем лучше работает классификатор.

Т.о., площадь под кривой (Area Under Curve, AUC / AUROC) необходимо максимизировать.

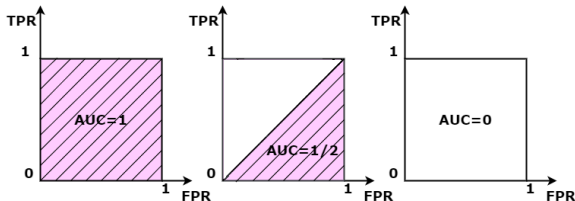
# Площадь под ROC-кривой и виды ROC-кривых

## AUROC

Чем больше для каждого значения ошибки FPR значение правильного предсказания TPR, тем лучше работает классификатор.

Т.о., площадь под кривой (Area Under Curve, AUC / AUROC) необходимо максимизировать.

Наглядны ROC-кривые для наилучшего ( $AUC=1$ ), случайного ( $AUC=0.5$ ) и наихудшего ( $AUC=0$ ) алгоритма.





# Задача

Предположим, что алгоритм бинарной классификации  $a(x_i)$  на выборке  $X^m$  принимает решение о присвоении класса на основе некоторого скалярного значения  $g_\theta(x_i) \in \mathbb{R}$ , где  $\theta$  - набор параметров модели, а  $g_\theta(x_i)$  - дискриминантная функция:

- Положительный отклик по порогу  $t$ :  $g_\theta(x_i) \geq t$

## Задача

- Хотим построить ROC-кривую, т.е. найти точки  $\{(FPR_i, TPR_i)\}_{i=1}^m$
- Подсчитать площадь под кривой - AUROC

# Задача

Предположим, что алгоритм бинарной классификации  $a(x_i)$  на выборке  $X^m$  принимает решение о присвоении класса на основе некоторого скалярного значения  $g_\theta(x_i) \in \mathbb{R}$ , где  $\theta$  - набор параметров модели, а  $g_\theta(x_i)$  - дискриминантная функция:

- Положительный отклик по порогу  $t$ :  $g_\theta(x_i) \geq t$

## Задача

- Хотим построить ROC-кривую, т.е. найти точки  $\{(FPR_i, TPR_i)\}_{i=1}^m$
- Подсчитать площадь под кривой - AUROC

Подсчитаем количество правильных ответов разного типа:

- $m_+ = \sum_{i=1}^m [y(x_i) = +1]$  (знаменатель в TPR)
- $m_- = \sum_{i=1}^m [y(x_i) = -1]$  (знаменатель в FPR:  $m = m_+ + m_-$ )

Упорядочим обучающую выборку  $X^m$  по убыванию значений  $g_\theta(x_i)$ .

Тогда формула для  $AUROC = \frac{1}{m_-} \sum_{i=1}^m [y_i = -1] TPR_i$  (см. далее).



## Алгоритм

Первую точку ставим в начало координат:  $(FPR_0, TPR_0) = (0, 0)$ ,  $AUROC = 0$ .

## Алгоритм

Первую точку ставим в начало координат:  $(FPR_0, TPR_0) = (0, 0)$ ,  $AUROC = 0$ .

Цикл по упорядоченной выборке  $i = 1 \dots m$

Порог — очередное значение дискриминантной функции  $t = g_\theta(x_i)$

Если  $y_i = -1$ :

- $(FPR_i, TPR_i) = (FPR_{i-1} + \frac{1}{m_-}, TPR_{i-1})$  (двигаемся по оси X)
- $AUROC = AUROC + \frac{1}{m_-} TPR_i$

# Решение задачи

## Алгоритм

Первую точку ставим в начало координат:  $(FPR_0, TPR_0) = (0, 0)$ ,  $AUROC = 0$ .

Цикл по упорядоченной выборке  $i = 1 \dots m$

Порог — очередное значение дискриминантной функции  $t = g_\theta(x_i)$

Если  $y_i = -1$ :

- $(FPR_i, TPR_i) = (FPR_{i-1} + \frac{1}{m_-}, TPR_{i-1})$  (двигаемся по оси X)
- $AUROC = AUROC + \frac{1}{m_-} TPR_i$

Если  $y_i = +1$ :

- $(FPR_i, TPR_i) = (FPR_{i-1}, TPR_{i-1} + \frac{1}{m_+})$  (двигаемся по оси Y)

## В задачах информационного поиска

- Точность, или  $Precision = \frac{TP}{TP+FP}$  (доля релевантных объектов среди найденных)
- Полнота, или  $Recall = \frac{TP}{TP+FN}$  (доля найденных объектов среди релевантных)



# Другие важные метрики 1

## В задачах информационного поиска

- Точность, или  $Precision = \frac{TP}{TP+FP}$  (доля релевантных объектов среди найденных)
- Полнота, или  $Recall = \frac{TP}{TP+FN}$  (доля найденных объектов среди релевантных)

## Как применяются

- **Точность:** позволяет следить, чтобы было мало ложных тревог; но при этом ничего не говорит о пропусках (высока цена ложной тревоги, а цена пропуска - низкая).
- **Полнота:** позволяет следить, чтобы было мало пропусков; но при этом ничего не говорит о ложных тревогах (высока цена пропуска, а цена ложной тревоги - низкая).

**Замечание.** Зачастую задача состоит в оптимизации одной метрики при фиксации другой.



### В задачах медицинской диагностики

- Чувствительность, или  $Sensitivity = \frac{TP}{TP+FN}$  (доля верных положительных диагнозов)
- Специфичность, или  $Specificity = \frac{TN}{TN+FP}$  (доля верных отрицательных диагнозов)



### В задачах медицинской диагностики

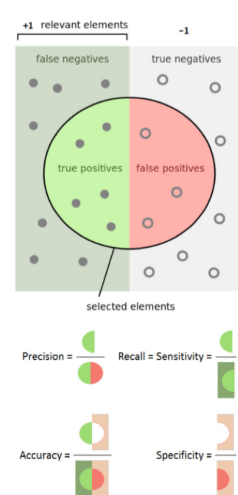
- Чувствительность, или  $Sensitivity = \frac{TP}{TP+FN}$  (доля верных положительных диагнозов)
- Специфичность, или  $Specificity = \frac{TN}{TN+FP}$  (доля верных отрицательных диагнозов)

### Как применяются

- **Чувствительность:** максимизируем количество верных положительных диагнозов, но не учитываем ложные диагнозы (стоимость лечения низкая, а цена пропуска - высокая).
- **Специфичность:** максимизируем количество верных отрицательных диагнозов, но не учитываем пропуски диагноза (стоимость лечения высокая, а цена пропуска - низкая).

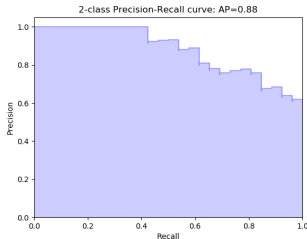


# Иллюстрация метрик



# Агрегированные метрики над Precision-Recall

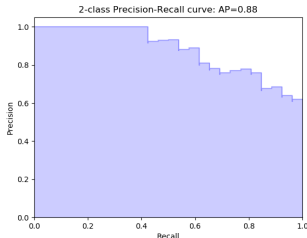
Можно построить кривую Точность-Полнота (PR-кривая) по аналогии с ROC-кривой:



**Замечание.** Обратите внимание, что в данном случае кривая не обязательно монотонна!

# Агрегированные метрики над Precision-Recall

Можно построить кривую Точность-Полнота (PR-кривая) по аналогии с ROC-кривой:



**Замечание.** Обратите внимание, что в данном случае кривая не обязательно монотонна!

## AUPRC

- Аналогично AUROC, можно вычислить площадь под PR-кривой - AUPRC
- Другое название - Average Precision (с некоторым допущениями на способ интегрирования): чем больше, тем лучше

Для каждого класса  $c \in Y$  обозначим через  $TP_c$ ,  $FP_c$  и  $FN_c$  верные положительные, ложные положительные и ложные отрицательные ответы. Тогда:

## Точность и полнота с макроусреднением

- $Precision = \frac{\sum_c TP_c}{\sum_c (TP_c + FP_c)}$
- $Recall = \frac{\sum_c TP_c}{\sum_c (TP_c + FN_c)}$
- Не чувствительно к ошибкам на маленьких классах

# Многоклассовая классификация

Для каждого класса  $c \in Y$  обозначим через  $TP_c$ ,  $FP_c$  и  $FN_c$  верные положительные, ложные положительные и ложные отрицательные ответы. Тогда:

## Точность и полнота с макроусреднением

- $Precision = \frac{\sum_c TP_c}{\sum_c (TP_c + FP_c)}$
- $Recall = \frac{\sum_c TP_c}{\sum_c (TP_c + FN_c)}$
- Не чувствительно к ошибкам на маленьких классах

## Точность и полнота с микроусреднением

- $Precision = \frac{1}{|Y|} \sum_c \frac{TP_c}{TP_c + FP_c}$
- $Recall = \frac{1}{|Y|} \sum_c \frac{TP_c}{TP_c + FN_c}$
- Чувствительно к ошибкам на маленьких классах

- Точность и полнота подходят для задач информационного поиска, когда доля объектов релевантного класса мала

# Резюме по оценкам качества классификации

- Точность и полнота подходят для задач информационного поиска, когда доля объектов релевантного класса мала
- Чувствительность и специфичность подходят для задач с несбалансированными классами (как, например, в медицине)





# Резюме по оценкам качества классификации

- Точность и полнота подходят для задач информационного поиска, когда доля объектов релевантного класса мала
- Чувствительность и специфичность подходят для задач с несбалансированными классами (как, например, в медицине)
- AUROC подходит для оценки качества при нефиксированном соотношении цены ошибок



# Резюме по оценкам качества классификации

- Точность и полнота подходят для задач информационного поиска, когда доля объектов релевантного класса мала
- Чувствительность и специфичность подходят для задач с несбалансированными классами (как, например, в медицине)
- AUROC подходит для оценки качества при нефиксированном соотношении цены ошибок
- Ещё одна агрегированная оценка качества - F-мера:
$$F_1 = \frac{2 \cdot \text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}$$
  - Это *гармоническое среднее*, которое стремится к нулю когда хотя бы одно из значений стремится к нулю





На основе материалов сайта <http://www.machinelearning.ru>.