

Домашнее задание № 2

1. Рассмотрим задачу бинарной классификации ($Y = \{+1, -1\}$). Вектор правильных ответов:

$$(y_1, \dots, y_{10}) = (-1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, +1).$$

Вектор решений некого классификатора:

$$(a_1, \dots, a_{10}) = (+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, +1, +1).$$

Не используя пакет scikit-learn, **подсчитайте**: true positive rate, false positive rate, true negative rate, false negative rate, accuracy, precision, recall, F_1 -score.

2. Пусть дана обучающая выборка $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, где пара (x_i, y_i) — объект и правильный ответ, причем $x_i \in \mathbb{R}^2$, а $y_i \in \{0, 1\}$. Известно, что распределение для обоих классов — гауссовское с параметрами: $\mu_0 = (a, b)^T$, $\mu_1 = (-a, -b)^T$, $\Sigma_0 = \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$. Выпишите байесовский алгоритм классификации и уравнение разделяющей поверхности.

3. Доказать, что наивный байесовский классификатор в случае бинарных признаков $f_i \in \{0, 1\}$ является линейным разделителем:

$$a(x) = a(f_1, \dots, f_n) = [a_0 + a_1 f_1 + \dots + f_n x_n > 0].$$

Выведите формулы для коэффициентов a_i .

4. **Опишите** процедуру **наискорейшего** градиентного спуска. **Зачем** она применяется?
5. **Продифференцировать** формулу вероятности для логистической регрессии по w : $p(w) = \frac{1}{1+e^{-wx}}$. Указание: получить ответ в виде $p'(w) = F(p(w))G(x)$.

6. Предположим, что выборка для решения задачи бинарной классификации ($X^m = (x_i, y_i)_{i=1}^m$, $Y = \{+1, -1\}$) линейно разделима: $\exists w, w_0$ т.ч. $(\langle w, x_i \rangle - w_0)y_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, m$. **Доказать**, что существует вектор параметров w и свободный член w_0 т.ч.: а) $(\langle w, x_i \rangle - w_0)y_i \geq 1$; б) существует по крайней мере одна точка на каждой из границ: $\exists x_{\pm} \in X^m : \langle w, x_{\pm} \rangle - w_0 = \pm 1$

7. **Доказать**, что любые $m + 1$ векторов размерности n могут быть разделены на любые два класса с помощью мономиального отображения $\varphi : X \rightarrow \{x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}\}_{i_1+i_2+\dots+i_n \leq m}$ степени не больше m .

8. Методом опорных векторов **найти аналитическое решение** для разделения классов $A = \{x_1, x_2\}$ и $B = \{x_3\}$, если $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (1, 5)$, $x_3 = (1, 3)$. Указание: можно использовать полиномиальное ядро.
9. Предположим, что в задаче бинарной классификации точек на плоскости все точки одного класса лежат внутри эллипса $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $a, b > 0$, а все точки другого класса – снаружи этого эллипса. **Постройте** ядро, которое позволит линейному классификатору в новом пространстве разделить эти два класса без ошибки. **Какая** будет **размерность** спрямляющего пространства H ?
10. **Найти** размерность спрямляющего пространства H для ядра $K(x_1, x_2) = (\langle x_1, x_2 \rangle + 1)^2$, если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.
11. По объектам $x_1 = (-4, 1)$, $x_2 = (-2, 0)$, $x_3 = (2, 2)$, $x_4 = (1, 4)$, $x_5 = (3, 0)$ найти главные направления выборки.
12. Найти ближайшую матрицу ранга 2 по ℓ_2 -норме к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -20 \\ 6 & 3 & 20 \\ 0 & -6 & 10 \end{pmatrix}.$$