# Нейронные сети

## Лекция 3. Линейная регрессия

Бабин Д.Н., **Иванов И.Е.**, Петюшко А.А.

кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем

27 сентября 2021г.

# План лекции

1. Оптимальный байесовский регрессор
2. Линейная регрессии с точки зрения ML и MAP оценивания
3. Регуляризация: гребневая регрессия, LASSO, ElasticNet

# Напоминание: вероятностная постановка задач машинного обучения

## Предположения

Пусть известно совместное распределение $p(x, y)$ на $X \times Y$

Пусть задана функция потерь $L(a(x), y)$

## Определение

Средняя величина потерь для алгоритма $a(x)$

$$R(a) = \iint L(a(x), y)dP(x, y) = \iint L(a(x), y)p(x, y)dxdy$$

## Задача

Найти такой $a^*(x)$, что $a^*(x) = \arg\min_a R(a)$.

Будем называть модель $a^*$ оптимальной и $R^*$ — значение оптимального среднего риска.

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Лемма

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right)$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Лемма

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right)$$

## Доказательство

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x) + E(y|x) - a(x))^2|x\right) =$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Лемма

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right)$$

## Доказательство

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x) + E(y|x) - a(x))^2|x\right) =$$
$$= E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right) - 2E\left(y - E(y|x)|x\right) E\left(a(x) - E(y|x)|x\right)$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Лемма

$$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right)$$

## Доказательство

$E\left((y - a(x))^2|x\right) = E\left((y - E(y|x) + E(y|x) - a(x))^2|x\right) =$
$= E\left((y - E(y|x))^2|x\right) + E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right) - 2E\left(y - E(y|x)|x\right) E\left(a(x) - E(y|x)|x\right)$
Последнее слагаемое равно нулю, так как
$E\left(y - E(y|x)|x\right) = E(y|x) - E(E(y|x)|x) = E(y|x) - E(y|x) = 0.$

# Квадратичная функция потерь

**Теорема**

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Доказательство

$R(a) = \int\int L(a(x), y)p(x, y)dydx = \int\int (a(x) - y)^2 p(x, y)dydx =$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Доказательство

$$R(a) = \iint L(a(x), y)p(x, y)dydx = \iint (a(x) - y)^2 p(x, y)dydx =$$
$$= \iint (a(x) - y)^2 p(y|x)dyp(x)dx = \int E((y - a(x))^2|x)p(x)dx$$

# Квадратичная функция потерь

## Теорема

Если $L(a(x), y) = (a(x) - y)^2$, то величина средних потерь минимальна при

$$a^* = E(y|x)$$

## Доказательство

$R(a) = \iint L(a(x), y)p(x, y)dydx = \iint (a(x) - y)^2 p(x, y)dydx =$
$= \iint (a(x) - y)^2 p(y|x)dyp(x)dx = \int E((y - a(x))^2|x)p(x)dx$ Применяя лемму, получаем:
$R(a) = \int E((y - a(x))^2|x)p(x)dx = \int E\left((y - E(y|x))^2|x\right) p(x)dx +$
$\int E\left((a(x) - E(y|x))^2|x\right) p(x)dx \geq \int E\left((y - E(y|x))^2|x\right) p(x)dx$, что и требовалось доказать.

# Время для вопросов

# Постановка задачи: линейная регрессия

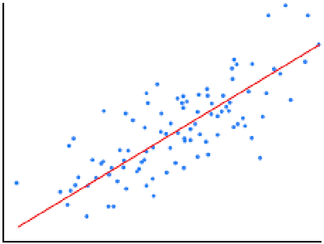
## Дано

$$p(y_i|x_i) \sim w^T x_i + \varepsilon_i \sim N(w^T x_i, \sigma^2),$$

для $i = 1.., \ell$, где $w \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

## Задача

Найти $w$



# Напоминание: два вида оценивания параметров

## Принцип максимального правдоподобия

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; p(y|w, x)$$

# Напоминание: два вида оценивания параметров

## Принцип максимального правдоподобия

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; p(y|w, x)$$

## Принцип максимума апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; p(w|x, y)$$

# Оценка максимального правдободобия

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; p(y|w, x)$$

# Оценка максимального правдободобия

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; p(y|w, x)$$

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; \prod_{i} p(y_i|w, x_i)$$

# Оценка максимального правдободобия

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; p(y|w, x)$$

$$w_{ML} = \arg\max_{w} \; \prod_i p(y_i|w, x_i)$$

$$p(y_i|w, x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

# Оценка максимального правдободобия

$$w_{ML} = \arg\max_w \; p(y|w,x)$$

$$w_{ML} = \arg\max_w \prod_i p(y_i|w,x_i)$$

$$p(y_i|w,x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$w_{ML} = \arg\max_w \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}\right) = \arg\max_w \sum_i -\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}$$

# Оценка максимального правдободобия

$$w_{ML} = \arg\max_w \; p(y|w,x)$$

$$w_{ML} = \arg\max_w \; \prod_i p(y_i|w,x_i)$$

$$p(y_i|w,x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$w_{ML} = \arg\max_w \; \prod_i \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}\right) = \arg\max_w \sum_i -\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$w_{ML} = \arg\min_w \; \sum_i (y_i - w^T x_i)^2$$

# Метод наименьших квадратов

## Постановка задачи и допущения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$

## Постановка задачи и допущения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$
- $a(x) = f_w(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$, где $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — параметры модели.

## Постановка задачи и допущения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$
- $a(x) = f_w(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$, где $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — параметры модели.
- Удобно писать в векторном виде

$$a(x) = w^T \cdot x,$$

где $x = (1, x^1, \ldots, x^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

# Метод наименьших квадратов

## Постановка задачи и допущения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$
- $a(x) = f_w(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n$, где $w = (w_0, w_1, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — параметры модели.
- Удобно писать в векторном виде

$$a(x) = w^T \cdot x,$$

где $x = (1, x^1, \ldots, x^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

## Метод наименьших квадратов

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) = \frac{1}{\ell} \sum\limits_i (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2$ — функция потерь

# Метод наименьших квадратов

## Постановка задачи и допущения

- $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$
- $a(x) = f_w(x) = w_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$, где $w = (w_0, w_1, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ — параметры модели.
- Удобно писать в векторном виде

$$a(x) = w^T \cdot x,$$

где $x = (1, x^1, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$.

## Метод наименьших квадратов

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) = \frac{1}{\ell} \sum_i (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min_w (L(w, X_{train}))$

# Аналитическое решение

## Теорема

Решением задачи $\arg\min\limits_{w}(\sum\limits_{i=1}^{\ell}(w^T \cdot x_i - y_i)^2)$ является $\hat{w} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$, где $X_{i,j} = x_i^j$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$.

# Аналитическое решение

## Теорема

Решением задачи $\arg\min\limits_{w}(\sum\limits_{i=1}^{\ell}(w^T \cdot x_i - y_i)^2)$ является $\hat{w} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$, где $X_{i,j} = x_i^j$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$.

## Доказательство

Запишем задачу в векторном виде $||Xw - y||^2 \to \min\limits_{w}$. Необходимое условие минимума в матричном виде имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial w}||Xw-y||^2 = \frac{\partial}{\partial w}\Big((Xw - y)^T \cdot (Xw - y)\Big) = \frac{\partial}{\partial w}\Big((Xw)^T Xw - (Xw)^T y - y^T Xw + y^T y\Big) =$$

$$\frac{\partial}{\partial w}\Big(w^T X^T Xw - w^T X^T y - y^T Xw + y^T y\Big) = \frac{\partial}{\partial w} w^T(X^T X)w - 2\frac{\partial}{\partial w}(X^T y)^T w = 0$$

# Леммы

## Определение

Пусть $w = (w_1, ..., w_n)$ — вектор столбец, а $z = z(w_1, ..., w_n)$. Тогда определим

$$\frac{\partial z}{\partial w} := (\frac{\partial z}{\partial w_1}, ..., \frac{\partial z}{\partial w_n})^T$$

## Лемма 1

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T a = a$$

## Лемма 2

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = (A + A^T)x$$

# Аналитическое решение

## Теорема

Решением задачи $\arg\min_w(\sum_{i=1}^{\ell}(w^T \cdot x_i - y_i)^2)$ является $\hat{w} = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$, где $X_{i,j} = x_i^j$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$.

## Продолжение доказательства

Необходимое условие минимума в матричном виде имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial w}||Xw - y||^2 = \frac{\partial}{\partial w} w^T(X^T X)w - 2\frac{\partial}{\partial w}(X^T y)^T w =$$

Далее применяем леммы и приравниваем к нулю:

$$= 2X^T Xw - 2X^T y = 0,$$

откуда получаем $w = (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$, что и требовалось доказать.

# Полиномиальная регрессия

## Идея

Можно генерировать новые признаки на основе уже имеющихся, применяя нелинейные функции

# Полиномиальная регрессия

## Идея

Можно генерировать новые признаки на основе уже имеющихся, применяя нелинейные функции

## Примеры преобразований

- Возведение в степень
- Попарные произведения
- Квадратный корень
- Логарифм
- Экспонента

# Преимущества и недостатки линейной регрессии

# Преимущества и недостатки линейной регрессии

## Преимущества

- Простой алгоритм, вычислительно не сложный
- Линейная регрессия хорошо интерпретируемая модель
- Несмотря на свою простоту может описывать довольно сложные зависимости (например, полиномиальные)

# Преимущества и недостатки линейной регрессии

## Преимущества

- Простой алгоритм, вычислительно не сложный
- Линейная регрессия хорошо интерпретируемая модель
- Несмотря на свою простоту может описывать довольно сложные зависимости (например, полиномиальные)

## Недостатки

- Алгоритм предполагает, что все признаки числовые
- Алгоритм предполагает, что данные распределены нормально, что не всегда так
- Алгоритм сильно чувствителен к выбросам

# Время для вопросов

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; p(w | x_1, ...x_\ell, y_1, ..., y_\ell)$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_{w}\ p(w|x_1, \ldots x_\ell, y_1, \ldots, y_\ell)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w}\ \prod_i p(y_i|x_i, w)p(w)$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; p(w|x_1, \ldots x_\ell, y_1, \ldots, y_\ell)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; \prod_{i} p(y_i|x_i, w) p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; \sum_{i} \ln p(y_i|x_i, w) + \ln p(w)$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \; p(w|x_1, ...x_\ell, y_1, ..., y_\ell)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \prod_i p(y_i|x_i, w)p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \sum_i \ln p(y_i|x_i, w) + \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_{w} \sum_i -\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} + \ell \ln p(w)$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_w \; p(w|x_1, ...x_\ell, y_1, ..., y_\ell)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \prod_i p(y_i|x_i, w)p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \sum_i \ln p(y_i|x_i, w) + \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \sum_i -\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} + \ell \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\min_w \sum_i \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\max_w \; p(w|x_1, ...x_\ell, y_1, ..., y_\ell)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \prod_i p(y_i|x_i, w)p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \sum_i \ln p(y_i|x_i, w) + \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\max_w \sum_i -\frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} + \ell \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\min_w \sum_i \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

В задаче минимизации появилось дополнительное слагаемое, которое зависит только от априорного распределения на веса $w$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\min_{w} \sum_{i} \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

$$w_{MAP} = \arg\min_{w} \sum_{i} \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

Предположим, что $p(w) \sim N(0, \tau^2)$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\min_{w} \sum_{i} \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

Предположим, что $p(w) \sim N(0, \tau^2)$

$$w_{MAP} = \arg\min_{w} \sum_{i} \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \frac{\ell w^T w}{2\tau^2}$$

# Метод максимизации апостериорной вероятности

$$w_{MAP} = \arg\min_w \sum_i \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \ell \ln p(w)$$

Предположим, что $p(w) \sim N(0, \tau^2)$

$$w_{MAP} = \arg\min_w \sum_i \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \frac{\ell w^T w}{2\tau^2}$$

$$w_{MAP} = \arg\min_w \frac{1}{\ell} \sum_i \frac{(y_i - w^T x_i)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\tau^2} ||w||^2$$

# Гребневая регрессия

### L2-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \frac{\alpha}{2}\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2 = \frac{1}{\ell}\sum\limits_{i}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \frac{\alpha}{2}\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2$ — функция потерь

# Гребневая регрессия

## L2-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \frac{\alpha}{2}\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2 = \frac{1}{\ell}\sum\limits_{i}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \frac{\alpha}{2}\sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min\limits_{w}(L(w, X_{train}))$

# Гребневая регрессия

## L2-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i^2 = \frac{1}{\ell}\sum_{i}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=0}^{n} w_i^2$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min_{w}(L(w, X_{train}))$

## Теорема

Решением задачи $\arg\min_{w}(\sum_{i=1}^{\ell}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \alpha\sum_{i=0}^{n} w_i^2)$ является $\hat{w} = (X^T X + \alpha I_{n+1})^{-1} \cdot X^T \cdot y$, где $X_{i,j} = x_i^j$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$, $I_{n+1}$ — единичная матрица.

# Доказательство теоремы

# Доказательство теоремы

## Лемма 3

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T x = 2x$$

# Доказательство теоремы

## Лемма 3

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T x = 2x$$

## Теорема

Решением задачи $\arg\min\limits_{w}(\sum\limits_{i=1}^{\ell}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \alpha \sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2)$ является $\hat{w} = (X^T X + \alpha I_{n+1})^{-1} \cdot X^T \cdot y$, где $X_{i,j} = x_i^j$, $y = (y_1, ..., y_\ell)$, $I_{n+1}$ — единичная матрица.

## Доказательство

Запишем задачу в векторном виде $||Xw - y||^2 + \alpha||w||^2 \to \min\limits_{w}$. Необходимое условие минимума в матричном виде имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left((Xw - y)^T \cdot (Xw - y) + \alpha w^T w\right) == 2X^T Xw - 2X^T y + 2\alpha w = 0$$

# Свойства гребневой регрессии

- Регуляризация не даёт параметрам модели быть слишком большими
- Как правило регуляризация обеспечивает большую обобщающую способность
- Более устойчива к выбросам
- Появился параметр, который можно настравить при помощи кросс-валидации

# Свойства гребневой регрессии

- Регуляризация не даёт параметрам модели быть слишком большими
- Как правило регуляризация обеспечивает большую обобщающую способность
- Более устойчива к выбросам
- Появился параметр, который можно настравить при помощи кросс-валидации

### Вероятностный смысл параметра $\alpha$

$\alpha = \frac{1}{\tau^2}$, где $\tau$ — среднеквадратическое отклонение априорного распределения на $w$

# LASSO

## L1-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \alpha \sum\limits_{i=0}^{n} |w_i| = \sum\limits_{i} (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \alpha \sum\limits_{i=0}^{n} |w_i|$ — функция потерь

# LASSO

## L1-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i| = \sum_i (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i|$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min_w (L(w, X_{train}))$

# LASSO

## L1-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + \alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i| = \sum_i (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + \alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i|$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min_w (L(w, X_{train}))$

## Свойства

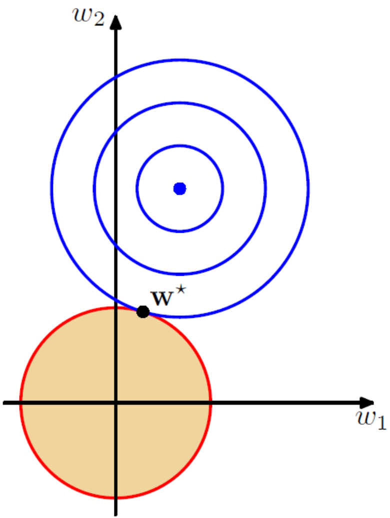
- Эта регуляризация обеспечивает отбор признаков
- Нет аналитического решения

## Вероятностный смысл параметра $\alpha$

Параметр $\alpha$ — обратно пропорционален среднеквадратичному отклонению априорного распределения на $w$. В данном случае это распределение Лапласа

$$p(w) = \frac{1}{\tau} exp\left(-\frac{||w||}{2\tau}\right)$$

# Интуиция отбора признаков при L1-регуляризации



# Elastic Net

## L1-регуляризация и L2-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + r\alpha \sum\limits_{i=0}^{n} |w_i| + (1-r)\frac{\alpha}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2 =$
  $\sum\limits_{i}(w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + r\alpha \sum\limits_{i=0}^{n} |w_i| + (1-r)\frac{\alpha}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} w_i^2$ — функция потерь

# Elastic Net

## L1-регуляризация и L2-регуляризация

- $L(w, X_{train}) = MSE(w, X_{train}) + r\alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i| + (1-r)\frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{n} w_i^2 = \sum_i (w^T \cdot x^{(i)} - y_i)^2 + r\alpha \sum_{i=0}^{n} |w_i| + (1-r)\frac{\alpha}{2} \sum_{i=0}^{n} w_i^2$ — функция потерь
- Задача найти $\hat{w} = \arg\min_w (L(w, X_{train}))$

## Свойства

- Нет аналитического решения
- Совместает положительные свойства гребневой регрессии и LASSO.

# Заключение

- Линейная регрессия — простая, хорошо интерпретируемая модель, не устойчивая к выбросам
- Имеет наглядную вероятностную интерпретацию
- Регуляризация — отличный способ борьбы с переобучением и шумом в данных

# Время для вопросов