Нейронные сети

Тема семинара: Обучение нейронных сетей

Иванов И.Е.

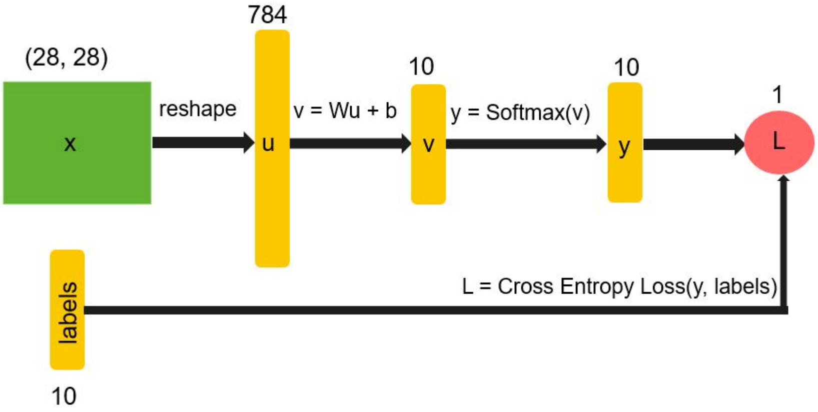
кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем

17 ноября 2023 г.

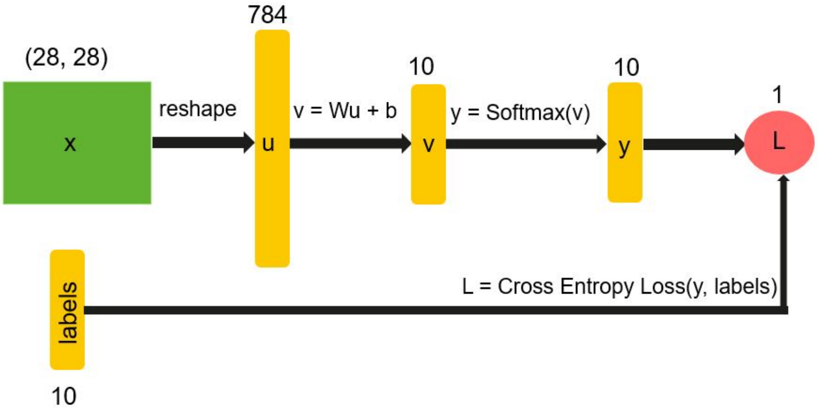
План семинара

1. Вывод формул обратного прохода для основных слоёв

Постановка задачи

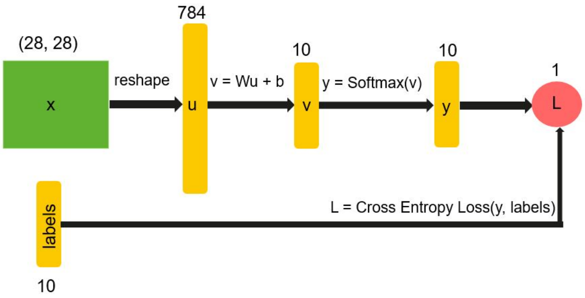


Постановка задачи

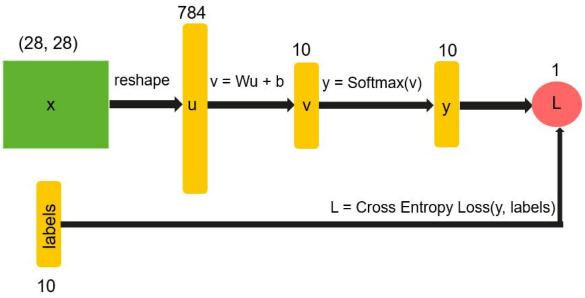


Задача: необходимо вычислить $\frac{\partial L}{\partial W}, \frac{\partial L}{\partial b}, \frac{\partial L}{\partial x}$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$



Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$



1. Прямой проход: вычисление L и всех промежуточных значений
2. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$

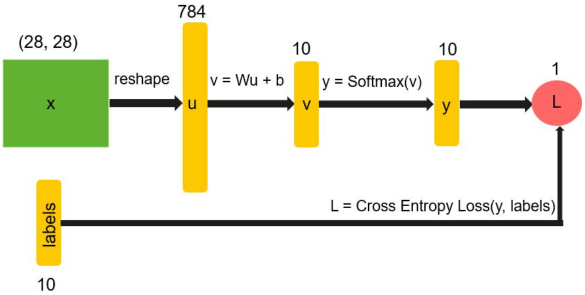
Перекрёстная энтропия

$$L = \sum_{i=1}^{10} labels_i \log y_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{labels_i}{y_i}$$

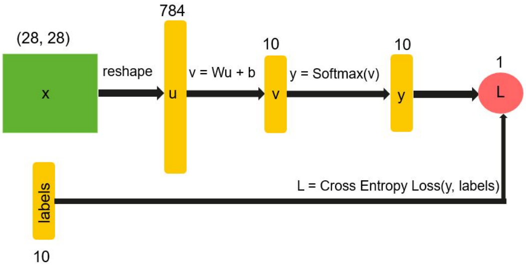
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial y_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$



1. Прямой проход: вычисление L и всех промежуточных значений
2. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$
3. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$

Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$



$$\frac{\partial L}{\partial v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial v_1} \\ \frac{\partial L}{\partial v_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial v_{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_1} \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_2} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial v_1 0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial v_1} & \frac{\partial y_2}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_1} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_2} & \frac{\partial y_2}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_2} \\ \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_{10}} & \frac{\partial y_2}{\partial v_{10}} & \dots & \frac{\partial y_{10}}{\partial v_{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial y_1} \\ \frac{\partial L}{\partial y_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L}{\partial y_{10}} \end{pmatrix} = \frac{\partial y}{\partial v}^T \frac{\partial L}{\partial y}$$

Вычисление матрицы Якоби для Softmax

$$y = Softmax(v)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_{10} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{10} e^{u_i}} \begin{pmatrix} e^{u_1} \\ e^{u_2} \\ \dots \\ e^{u_{10}} \end{pmatrix}$$

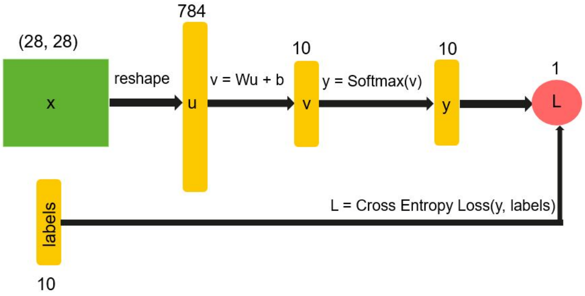
$$\frac{\partial y_i}{\partial u_j} = y_i(1[i = j] - y_j)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \begin{pmatrix} y_1(1 - y_1) & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_{10} \\ -y_2 y_1 & y_2(1 - y_2) & \dots & -y_2 y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10} y_1 & -y_{10} y_2 & \dots & y_{10}(1 - y_{10}) \end{pmatrix}$$

Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial v}^T \frac{\partial L}{\partial y} = \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1 y_2 & \dots & -y_1 y_{10} \\ -y_2 y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2 y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10} y_1 & -y_{10} y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$



1. Прямой проход: вычисление L и всех промежуточных значений
2. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$
3. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$
4. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial u}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

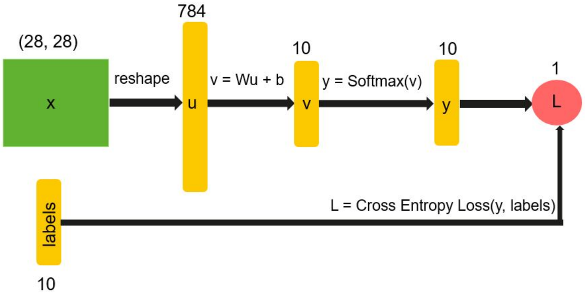
$$v = Wu + b$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,784} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,784} \\ \dots & & & \\ w_{10,1} & w_{10,2} & \dots & w_{10,784} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{784} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_i}{u_j} = w_{i,j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = W^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial b}$



1. Прямой проход: вычисление L и всех промежуточных значений
2. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$
3. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$
4. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial b}$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial b}$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial v}{\partial b}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

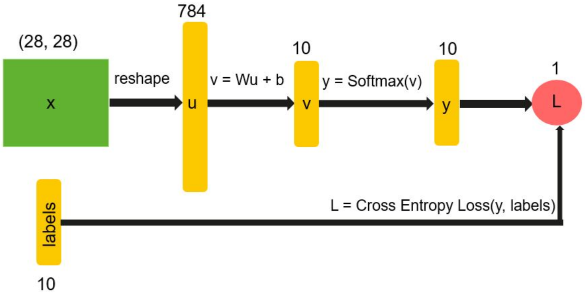
$$v = Wu + b$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} & \dots & w_{1,784} \\ w_{2,1} & w_{2,2} & \dots & w_{2,784} \\ \dots & & & \\ w_{10,1} & w_{10,2} & \dots & w_{10,784} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{784} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{10} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_i}{b_j} = \delta_{i,j}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = E^T \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial v}$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$



1. Прямой проход: вычисление L и всех промежуточных значений
2. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial y}$
3. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial v}$
4. Вычисление $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial b}$, $\frac{\partial L}{\partial W}$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как W — матрица.

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как W — матрица.
По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \cdots & & & \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

Впрямую воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial v}{\partial W}^T \frac{\partial L}{\partial v}$$

не получится, так как W — матрица.
По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \cdots \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \cdots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,j}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} u_j$$

Решение задачи: вычисление $\frac{\partial L}{\partial W}$

По определению

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial w_{1,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{1,2}} & \dots & \frac{\partial L}{\partial w_{1,784}} \\ \frac{\partial L}{\partial w_{2,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{2,2}} & \dots & \frac{\partial L}{\partial w_{2,784}} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial L}{\partial w_{10,1}} & \frac{\partial L}{\partial w_{10,2}} & \dots & \frac{\partial L}{\partial w_{10,784}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{i,j}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial L}{\partial v_i} u_j$$

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \frac{\partial L}{\partial v} u^T$$

Ответ

$$\frac{\partial L}{\partial W} = \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix} u^T$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = reshape^{-1}(W^T \begin{pmatrix} y_1(1-y_1) & -y_1y_2 & \dots & -y_1y_{10} \\ -y_2y_1 & y_2(1-y_2) & \dots & -y_2y_{10} \\ \dots & & & \\ -y_{10}y_1 & -y_{10}y_2 & \dots & y_{10}(1-y_{10}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{labels_1}{y_1} \\ \frac{labels_2}{y_2} \\ \dots \\ \frac{labels_{10}}{y_{10}} \end{pmatrix})$$

Время для вопросов

Спасибо за внимание!