

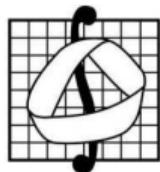
Нейронные сети

Тема семинара: Свертки

Иванов И.Е.

кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем

10 октября 2025 г.



План семинара

- ① Скользящее окно VS перемножение матриц
- ② Транспонированная свертка

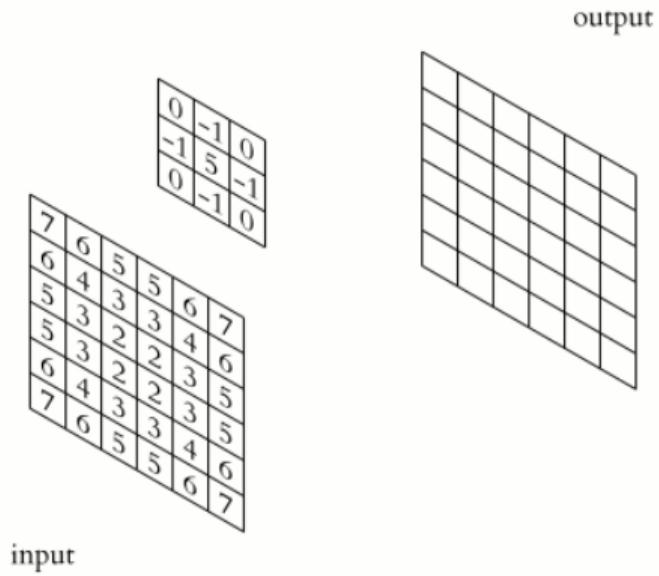


Скользящее окно

- Вообще, операция применения свертки — это последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна

Скользящее окно

- Вообще, операция применения свертки — это последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна



Скользящее окно

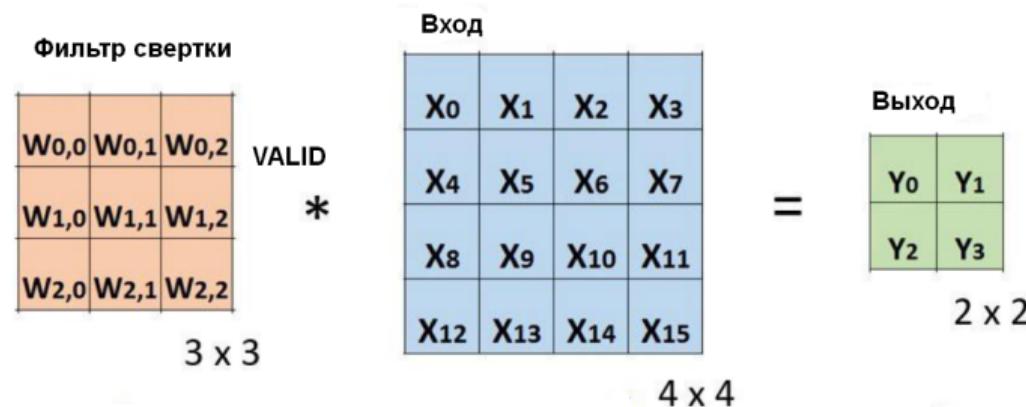
- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?

Скользящее окно

- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?
- Для этого рассмотрим простой случай:
 - Вход 4×4 , фильтр свертки 3×3 , тип свертки “VALID” (без добивки) \Rightarrow выход 2×2

Скользящее окно

- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?
- Для этого рассмотрим простой случай:
 - Вход 4×4 , фильтр свертки 3×3 , тип свертки “VALID” (без добавки) \Rightarrow выход 2×2



Перемножение матриц

- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!



Перемножение матриц

- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1



Перемножение матриц

- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1
 - Выход представим как столбец Y размера 4×1



- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1
 - Выход представим как столбец Y размера 4×1
 - А фильтр хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложим в разреженную матрицу C размера 4×16



Перемножение матриц

- Тогда $Y = C \cdot X$:



Перемножение матриц

- Тогда $Y = C \cdot X$:

Преобразование свертки в операцию
перемножения матриц

W _{0,0}	W _{0,1}	W _{0,2}	0	W _{1,0}	W _{1,1}	W _{1,2}	0	W _{2,0}	W _{2,1}	W _{2,2}	0	0	0	0	0
0	W _{0,0}	W _{0,1}	W _{0,2}	0	W _{1,0}	W _{1,1}	W _{1,2}	0	W _{2,0}	W _{2,1}	W _{2,2}	0	0	0	0
0	0	0	0	W _{0,0}	W _{0,1}	W _{0,2}	0	W _{1,0}	W _{1,1}	W _{1,2}	0	W _{2,0}	W _{2,1}	W _{2,2}	0
0	0	0	0	0	W _{0,0}	W _{0,1}	W _{0,2}	0	W _{1,0}	W _{1,1}	W _{1,2}	0	W _{2,0}	W _{2,1}	W _{2,2}

Разреженная
матрица

4 x 16

X

X ₀	=	Y ₀
X ₁		Y ₁
X ₂		Y ₂
X ₃		Y ₃
X ₄		
X ₅		
X ₆		
X ₇		
X ₈		
X ₉		
X ₁₀		
X ₁₁		
X ₁₂		
X ₁₃		
X ₁₄		
X ₁₅		

4 x 1

16 x 1



Замечание: im2col

- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$

- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода

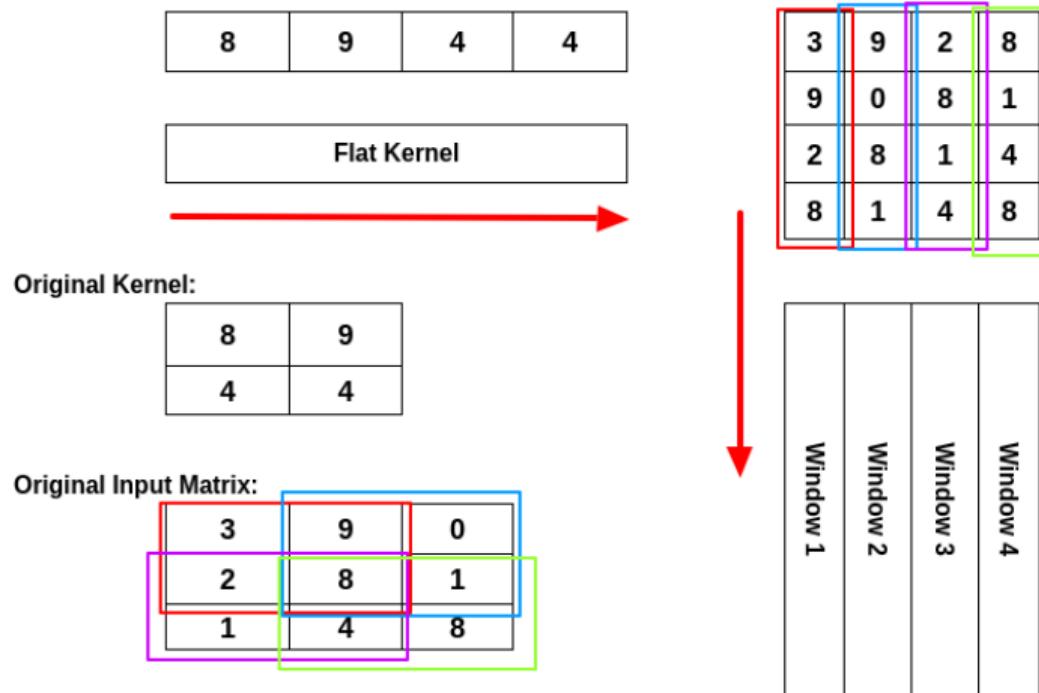
- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$

- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$
- Подобная операция называется “im2col”, и применяется в низкоуровневых реализациях



- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$
- Подобная операция называется “im2col”, и применяется в низкоуровневых реализациях
- Правда, в этом случае не удастся продемонстрировать, почему “транспонированную” свертку так называют

Иллюстрация im2col¹



¹<https://towardsdatascience.com/>

how-are-convolutions-actually-performed-under-the-hood-226523ce7fbf



Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход

Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4

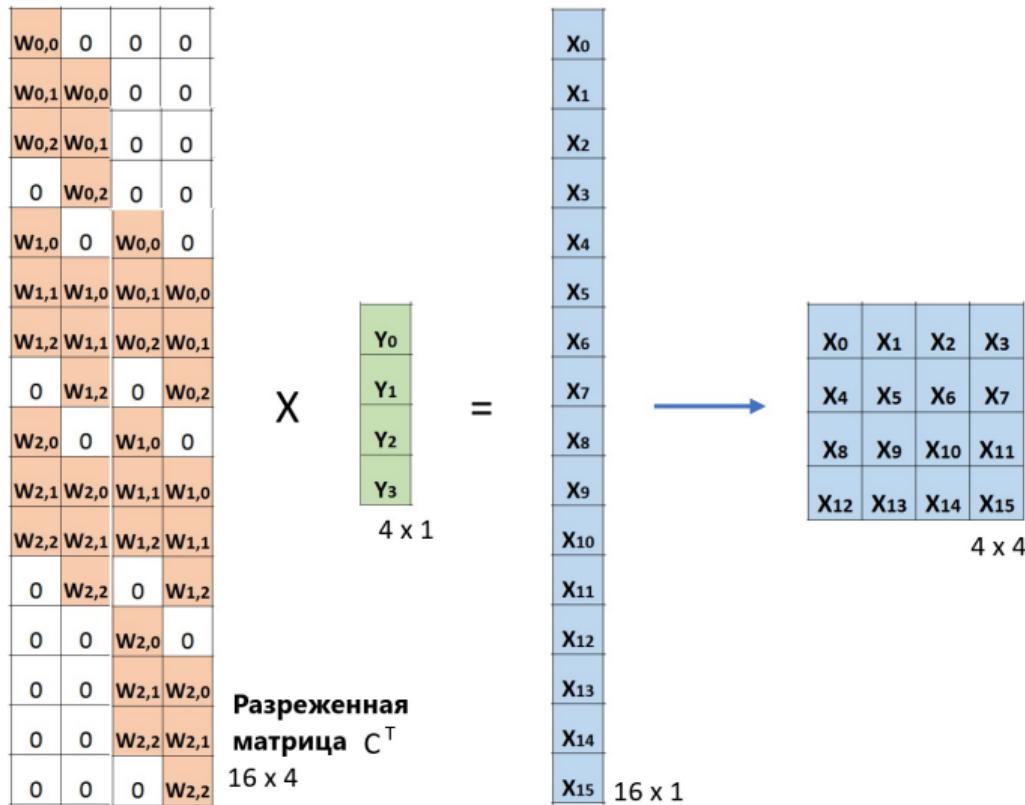
Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4
- Получается, что размер фильтра равен размеру транспонированной матрице фильтра C , которая была нужна, чтобы из 16×1 получить 4×1 (вход меняем с выходом)

Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4
- Получается, что размер фильтра равен размеру транспонированной матрице фильтра C , которая была нужна, чтобы из 16×1 получить 4×1 (вход меняем с выходом)
- Вот и источник названия — “траспонированная” свертка!

Иллюстрация транспонированной свертки как перемножения матриц



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:

Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)

Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добавка p (паддинг / padding)



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добавка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добавка p (пэддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добавка p (пэддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (пэддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1
- Далее выполняется добивка нулями ширины $(q - 1 - p)$



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (пэддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1
- Далее выполняется добивка нулями ширины $(q - 1 - p)$
 - Заметим: p не прибавляется, а отнимается!



Параметры транспонированной свертки: Stride

s=1

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Параметры транспонированной свертки: Stride

s=1

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решётке.

Параметры транспонированной свертки: Stride

s=1

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решетке.

Переход от $s = 1$ к $s > 1$ для транспонированной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления столбцов по некоторой регулярной решетке.

Параметры транспонированной свертки: Stride

s=1

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

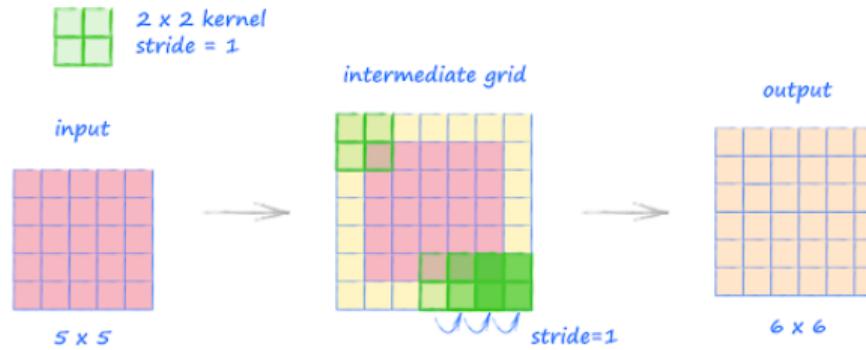
Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решетке.

Переход от $s = 1$ к $s > 1$ для транспонированной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления столбцов по некоторой регулярной решетке.

То есть для перехода от $s > 1$ к $s = 1$ необходимо разбить вход нулями по той же регулярной решетке, а потом применить обычную свёртку.

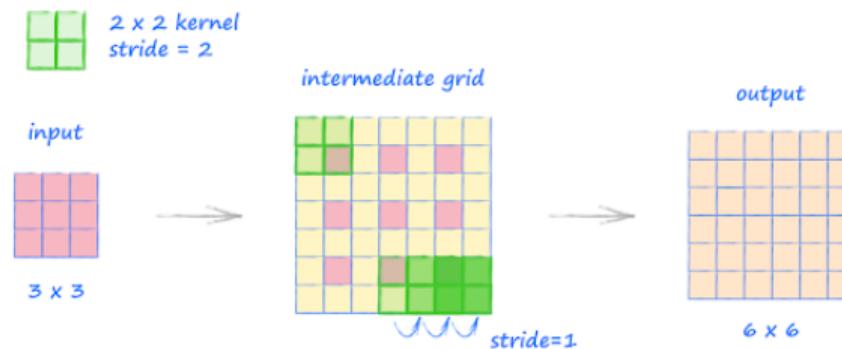
Транспонированная свертка: $s = 1, p = 0^2$



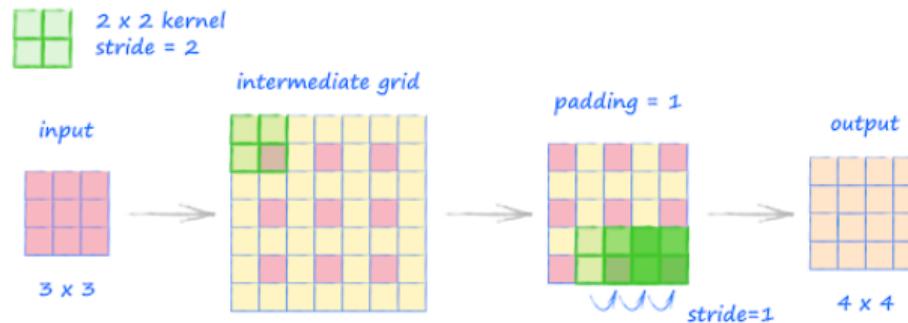
²<https://makeyourownneuralnetwork.blogspot.com/2020/02/calculating-output-size-of-convolutions.html>



Транспонированная свертка: $s = 2, p = 0$



Транспонированная свертка: $s = 2, p = 1$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p

Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добивка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добивки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Размер выхода $w \times w$ для обычной свертки размера $q \times q$ с шагом 1 и входа размера $w' \times w'$ равен: $w = w' - (q - 1)$

Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Размер выхода $w \times w$ для обычной свертки размера $q \times q$ с шагом 1 и входа размера $w' \times w'$ равен: $w = w' - (q - 1)$
 - Объединяя, получим:

$$w = (h - 1) \cdot s - 2 \cdot p + q$$



- Если с помощью транспонированной свертки мы можем увеличивать размер выхода, то можно ли реализовать классический алгоритм билинейной интерполяции³?

³https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation



- Если с помощью транспонированной свертки мы можем увеличивать размер выхода, то можно ли реализовать классический алгоритм билинейной интерполяции³?
- Формула линейной интерполяции для единичного квадрата (считаем, что нам известны значения функции в углах этого квадрата с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$):

$$f(x, y) \approx [1 - x \quad x] \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix}$$

³https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation



Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции

Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
⇒ шаг $s = 2$

Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
⇒ шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами
 $(0.5, 0), (0, 0.5), (0.5, 0.5), (1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$

Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
⇒ шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами
 $(0.5, 0), (0, 0.5), (0.5, 0.5), (1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$
- Значит, при вычислении центральной точки $(0.5, 0.5)$ по формуле выше нам нужно использовать все четыре узла вокруг $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ и $(1, 1)$)

Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
⇒ шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$
- Значит, при вычислении центральной точки $(0.5, 0.5)$ по формуле выше нам нужно использовать все четыре узла вокруг $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$)
- Это можно сделать с помощью фильтра размера 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Задание. Доказать (и обратить внимание на добавку!).



Время для вопросов



Спасибо за внимание!

