

Нейронные сети

Тема семинара: Свертки

Иванов И.Е.

кафедра Математической Теории Интеллектуальных Систем

10 октября 2025 г.



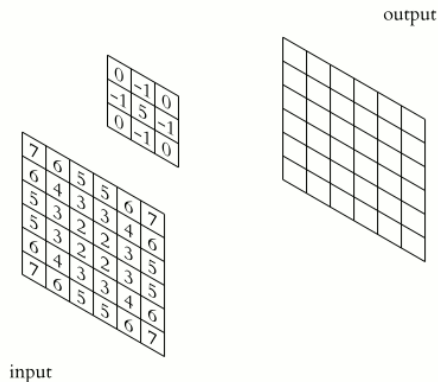
- 1 Скользящее окно VS перемножение матриц
- 2 Транспонированная свертка

- Вообще, операция применения свертки — это последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна



Скользящее окно

- Вообще, операция применения свертки — это последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна

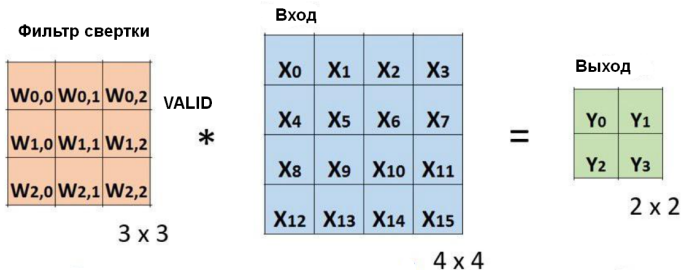


- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?

- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?
- Для этого рассмотрим простой случай:
 - Вход 4×4 , фильтр свертки 3×3 , тип свертки “VALID” (без добивки) \Rightarrow выход 2×2



- А можно ли данную операцию делать более единообразно (например, с помощью обычных матричных операций навроде умножения матриц)?
- Для этого рассмотрим простой случай:
 - Вход 4×4 , фильтр свертки 3×3 , тип свертки “VALID” (без добивки) \Rightarrow выход 2×2



- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!



- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1



- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1
 - Выход представим как столбец Y размера 4×1



- Оказывается, последовательное вычисление скалярного произведения с помощью скользящего окна можно реализовать с помощью обычного матричного умножения!
- Для этого:
 - Вход представим как столбец X размера 16×1
 - Выход представим как столбец Y размера 4×1
 - А фильтр хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложим в разреженную матрицу C размера 4×16



Перемножение матриц

- Тогда $Y = C \cdot X$:



Перемножение матриц

- Тогда $Y = C \cdot X$:

Преобразование свертки в операцию
перемножения матриц

W0,0	W0,1	W0,2	0	W1,0	W1,1	W1,2	0	W2,0	W2,1	W2,2	0	0	0	0	0
0	W0,0	W0,1	W0,2	0	W1,0	W1,1	W1,2	0	W2,0	W2,1	W2,2	0	0	0	0
0	0	0	0	W0,0	W0,1	W0,2	0	W1,0	W1,1	W1,2	0	W2,0	W2,1	W2,2	0
0	0	0	0	0	W0,0	W0,1	W0,2	0	W1,0	W1,1	W1,2	0	W2,0	W2,1	W2,2

Разреженная матрица C 4 x 16

X

X0
X1
X2
X3
X4
X5
X6
X7
X8
X9
X10
X11
X12
X13
X14
X15

16 x 1

=

Y0
Y1
Y2
Y3

4 x 1

- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$

- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода



- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$

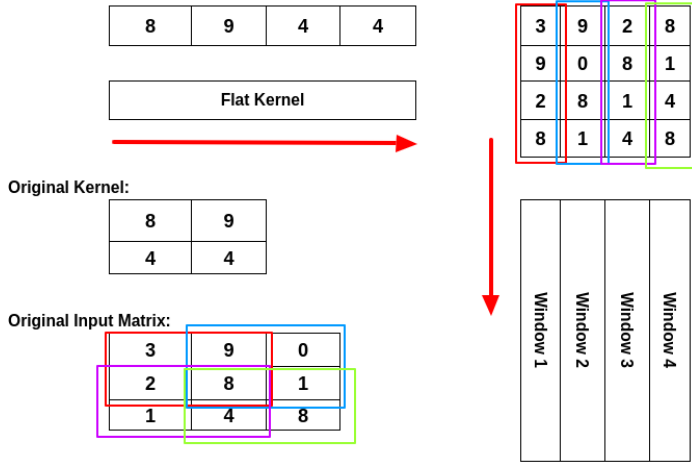
- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$
- Подобная операция называется “im2col”, и применяется в низкоуровневых реализациях



- Можно поступать и наоборот:
 - Фильтр представить как строку F размера $1 \times N$
 - Вход хитрым образом (см. картинку на следующем слайде) разложить в матрицу X размера $N \times K$, где $K = H \cdot W$ — размерность выхода
 - Выход — строка $Y = F \cdot X$
- Подобная операция называется “im2col”, и применяется в низкоуровневых реализациях
- Правда, в этом случае не удастся продемонстрировать, почему “транспонированную” свертку так называют



Иллюстрация im2col¹



¹<https://towardsdatascience.com/how-are-convolutions-actually-performed-under-the-hood-226523ce7fbf>

Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход



Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4



Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4
- Получается, что размер фильтра равен размеру транспонированной матрице фильтра C , которая была нужна, чтобы из 16×1 получить 4×1 (вход меняем с выходом)

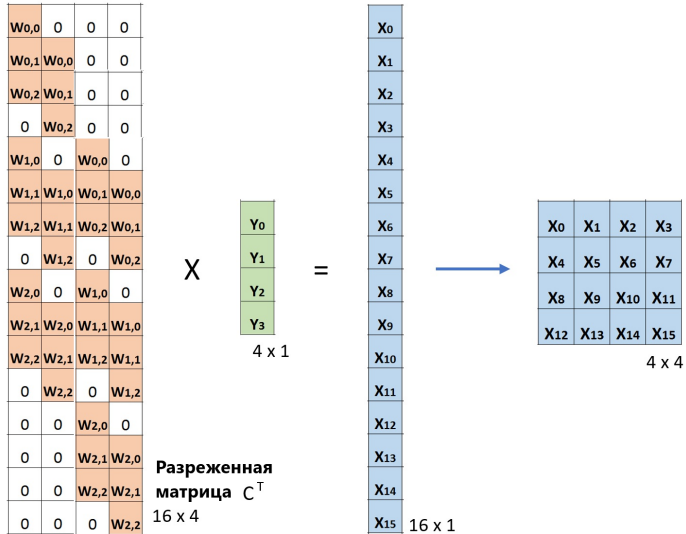


Транспонированная свертка как перемножение матриц

- Предположим, что мы хотим из входа X размера 4×1 получить выход Y большего размера 16×1
- Применение фильтра F — умножение слева на вход
- Таким образом, фильтр должен быть матрицей 16×4
- Получается, что размер фильтра равен размеру транспонированной матрице фильтра C , которая была нужна, чтобы из 16×1 получить 4×1 (вход меняем с выходом)
- Вот и источник названия — “траспонируванная” свертка!



Иллюстрация транспонированной свертки как перемножения матриц



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1
- Далее выполняется добивка нулями ширины $(q - 1 - p)$



Параметры транспонированной свертки

Параметры транспонированной свёртки

Параметры следует рассматривать как параметры обычной свёртки для построения матрицы с той лишь разницей, что после построения матрица транспонируется

- Как и для обычной свертки, для транспонированной используются два главных параметра:
 - Шаг s (stride)
 - Добивка p (паддинг / padding)
- Однако в данном случае (как и в случае с перемножением матриц), здесь все наоборот
- При шаге $s > 1$ для входной матрицы между каждыми элементами вставляется ровно $(s - 1)$ нулей
 - При этом фильтр $q \times q$ скользящим окном по преобразованному входу идет всегда с шагом 1
- Далее выполняется добивка нулями ширины $(q - 1 - p)$
 - Заметим: p не прибавляется, а отнимается!



Параметры транспонированной свертки: Stride

$s=1$

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Параметры транспонированной свертки: Stride

$s=1$

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решетке.



Параметры транспонированной свертки: Stride

$s=1$

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решетке.

Переход от $s = 1$ к $s > 1$ для транспонированной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления столбцов по некоторой регулярной решетке.



Параметры транспонированной свертки: Stride

$s=1$

При $s = 1$ транспонированная свёртка является свёрткой

Переход от $s=1$ к $s > 1$ для обыкновенной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления строк по некоторой регулярной решетке.

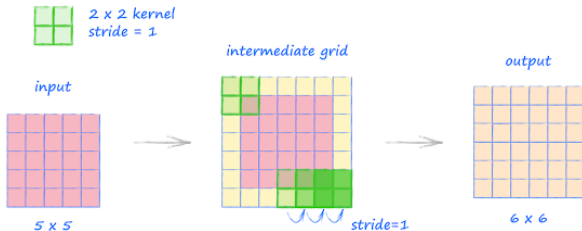
Переход от $s = 1$ к $s > 1$ для транспонированной свёртки

Если мы построили матрицу для обыкновенной свёртки при $s = 1$, то матрица для $s > 1$ получается из исходной путём удаления столбцов по некоторой регулярной решетке.

То есть для перехода от $s > 1$ к $s = 1$ необходимо разбавить вход нулями по той же регулярной решетке, а потом применить обычную свёртку.

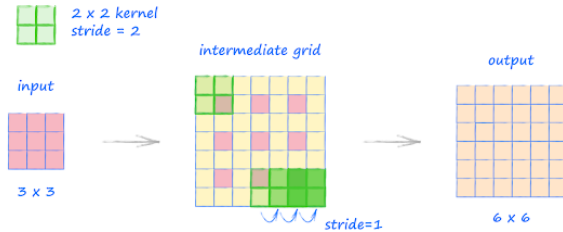


Транспонированная свертка: $s = 1, p = 0^2$

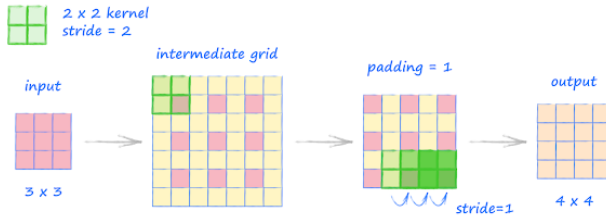


²<https://makeyourownneuralnetwork.blogspot.com/2020/02/calculating-output-size-of-convolutions.html>

Транспонированная свертка: $s = 2, p = 0$



Транспонированная свертка: $s = 2, p = 1$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p

Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:

Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Размер выхода $w \times w$ для обычной свертки размера $q \times q$ с шагом 1 и входа размера $w' \times w'$ равен: $w = w' - (q - 1)$



Транспонированная свертка: расчет выходного размера

- Пусть вход размера $h \times h$, фильтр размера $q \times q$, шаг s и добавка p
- Тогда можно легко посчитать размер выхода $w \times w$:
 - Размер входа со вставленными нулями: $(h - 1) \cdot s + 1$
 - Размер суммарной добавки: $2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Итого преобразованный вход размерности $w' \times w'$, $w' = (h - 1) \cdot s + 1 + 2 \cdot (q - 1 - p)$
 - Размер выхода $w \times w$ для обычной свертки размера $q \times q$ с шагом 1 и входа размера $w' \times w'$ равен: $w = w' - (q - 1)$
 - Объединяя, получим:

$$w = (h - 1) \cdot s - 2 \cdot p + q$$



- Если с помощью транспонированной свертки мы можем увеличивать размер выхода, то можно ли реализовать классический алгоритм билинейной интерполяции³?

³https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation

- Если с помощью транспонированной свертки мы можем увеличивать размер выхода, то можно ли реализовать классический алгоритм билинейной интерполяции³?
- Формула линейной интерполяции для единичного квадрата (считаем, что нам известны значения функции в углах этого квадрата с координатами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$):

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1-x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix}$$

³https://en.wikipedia.org/wiki/Bilinear_interpolation

Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции



Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
 \Rightarrow шаг $s = 2$



Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
 \Rightarrow шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$



Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
 \Rightarrow шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$
- Значит, при вычислении центральной точки $(0.5, 0.5)$ по формуле выше нам нужно использовать все четыре узла вокруг (в $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$)



Транспонированная свертка как билинейная интерполяция

- Рассмотрим простейший случай: увеличение размерности ровно в два раза с помощью билинейной интерполяции
- Тогда нужно вставлять ровно одно значение между изначальными узлами решетки
 \Rightarrow шаг $s = 2$
- В этом случае нам нужно вставить точки с координатами $(0.5, 0)$, $(0, 0.5)$, $(0.5, 0.5)$, $(1, 0.5)$ и $(0.5, 1)$
- Значит, при вычислении центральной точки $(0.5, 0.5)$ по формуле выше нам нужно использовать все четыре узла вокруг (в $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$)
- Это можно сделать с помощью фильтра размера 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Задание. Доказать (и обратить внимание на добавку!).





Спасибо за внимание!